Representando Relações

George Darmiton da Cunha Cavalcanti
CIn - UFPE

Representando relações através de matrizes

- Uma das maneiras de representar relações é através de matrizes.

- Essa abordagem é interessante pois matrizes são uma forma apropriada de representar relações em programas de computador.

Representando relações através de matrizes

- Seja R uma relação de A em B
  - $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$
  - $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$
- R pode ser representada pela matriz $M_R = [m_{ij}]$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{se } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Exemplo

Sejam $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{1,2\}$. R é a relação de A para B contendo os pares ordenados (a,b) se $a \in A$, $b \in B$ e $a>b$.

Assim, $R = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Analisando propriedades de relações

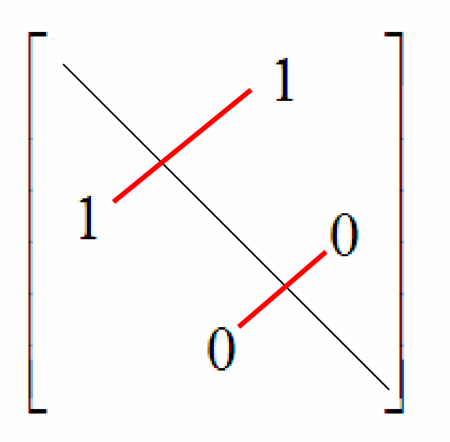
- A matriz de uma relação sobre um conjunto pode ser utilizada para determinar se a relação possui algumas propriedades.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Para que uma relação seja **reflexiva** $m_{ii} = 1$.
Ou seja, os elementos da diagonal principal devem ser iguais a 1.

Analisando propriedades de relações

Representação matricial de uma relação **simétrica**.

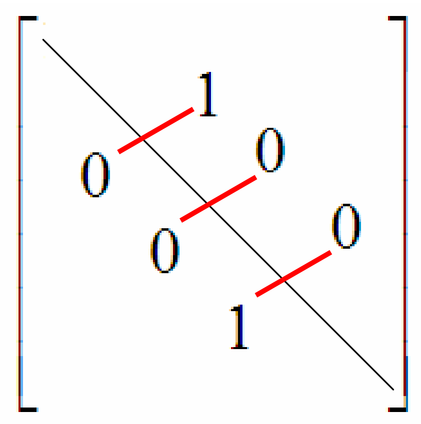


R é **simétrica** se e somente se
m_{ji} = *1* sempre que m_{ij} = *1*.
E m_{ji} = *0* sempre que m_{ij} = *0*.

Assim, R é simétrica se e somente se $M_R = (M_R)^T$.

Analisando propriedades de relações

Representação matricial de uma relação **anti-simétrica**.



R é **anti-imétrica** se e somente se
$m_{ji} = 1$ e $i \neq j$ então que $m_{ij} = 0$.
E $m_{ji} = 0$ e $i \neq j$ então$m_{ij} = 1$.

Exemplo

A relação R sobre um conjunto é representada pela matriz abaixo. R é reflexiva, simétrica e\ou transitiva?

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Todos os elementos da diagonal principal são 1. R é reflexiva.

$M_R = (M_R)^T$.
R é simétrica.

R não é anti-simétrica.

Operações booleanas

- Operadores booleanos sobre matrizes podem ser utilizados para calcular a união e a interseção entre duas relações.

- Sejam duas relações R_1 e R_2, representadas por duas matrizes M_{R1} e M_{R2}, respectivamente.

$$M_{R1 \cup R2} = \underbrace{\mathrm{M}_{\mathrm{R1}} \vee \mathrm{M}_{\mathrm{R2}}}$$

Valor 1 quando M_{R1} ou M_{R2} for igual a 1.

$$M_{R1 \cap R2} = \underbrace{\mathrm{M}_{\mathrm{R1}} \wedge \mathrm{M}_{\mathrm{R2}}}$$

Valor 1 quando M_{R1} e M_{R2} for igual a 1.

Exemplo

Sejam as relações R_1 e R_2 sobre o conjunto A representadas pelas matrizes:

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quais são as matrizes que representam $R_1 \cup R_2$ e $R_1 \cap R_2$?

$$\mathbf{M}_{R_1 \cup R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \vee \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_{R_1 \cap R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \wedge \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Composição de Relações

- Seja R uma relação de A em B e S uma relação de B em C.
- Suponha que A, B e C tenham m, n e p elementos, respectivamente.
- As matrizes de $S \circ R$, R e S são $M_{S \circ R} = [t_{ij}]$, $M_R=[r_{ij}]$ e $M_S=[s_{ij}]$
- O par ordenado $(a_i,c_j) \in S \circ R$ se e somente se existir um elemento b_k de forma que $(a_i,b_k) \in R$ e $(b_k,c_j) \in S$.
- Assim, $t_{ij} = 1$ se e somente se $r_{ik}=s_{kj}=1$ para algum k.

Exemplo

Encontre a composição das relações R e S, S∘R, a partir das representações matriciais.

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{S \circ R} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

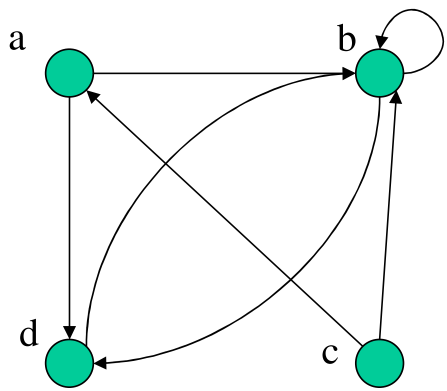
Exemplo

Encontre a representação matricial da relação R^2.

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^2} = \mathbf{M}_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Representando Relações através de Grafos Direcionados



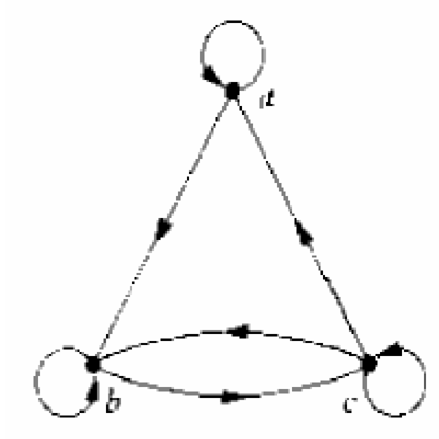
A relação representada pelo grafo possui os seguintes pares ordenados: (a,b), (a,d), (b,b), (b,d), (c,a), (c,b) e (d,b)

Representando Relações através de Grafos Direcionados

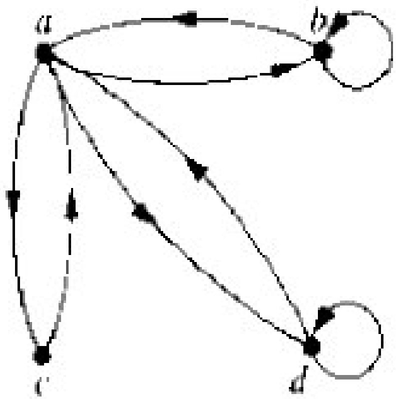
- Reflexiva
  - Existe um *loop* em cada um dos vértices
- Simétrica
  - Para cada arco entre vértices distintos existe um arco na direção oposta
- Anti-simétrica
  - Não podem existir dois arcos em direções opostas entre dois arcos distintos
- Transitiva
  - Se existe um arco entre x e y e um arco entre y e z então existe um arco entre x e z.

Exemplo

Dada as relações abaixo, quais são reflexivas, simétricas, anti-simétricas e\ou transitivas?



√ Reflexiva
× Simétrica
× Anti-simétrica
× Transitiva



× Reflexiva
√ Simétrica
× Anti-simétrica
× Transitiva

Fecho de um relação

Fecho

- Seja R uma relação sobre um conjunto.

- R pode ou não possuir algumas propriedades P, tais como:
  - Reflexividade;
  - Simetria;
  - Transitividade.

- Uma relação ***S*** é o fecho de uma relação ***R*** com propriedade ***P*** se
  - ***S*** tem a propriedade P;
  - $\boldsymbol{R \subseteq S}$;
  - ***S*** é subconjunto de qualquer outra relação que inclua ***R*** e tenha a propriedade ***P***.

Fecho Reflexivo

- A relação R={(1,1), (1,2), (2,1), (3,2)} sobre o conjunto A={1,2,3} não é reflexiva.
- É possível construir uma relação reflexiva contendo R que seja a menor possível?
- Isso pode ser feito adicionando (2,2) e (3,3) a R.
- Claramente, essa nova relação contém R e é reflexiva.
- É chamada de **fecho reflexivo** de R.

Exemplo

Qual é o **fecho reflexivo** de $R = \{(a,b) \mid a<b\}$, sobre o conjunto dos inteiros?

O **fecho reflexivo** de R é

$$R \cup \Delta = \{(a,b) \mid a<b\} \cup \{(a,a) \mid a \in \mathbf{Z}\}$$

$$= \{(a,b) \mid a \leq b\}$$

Fecho Simétrico

- A relação {(1,1), (1,2), (2,2),(2,3), (3,1), (3,2)} sobre {1,2,3} não é simétrica.

- Como é possível construir uma relação simétrica que seja a menor possível contendo R?

- É necessário inserir (2,1) e (1,3).

- Essa nova relação é o **fecho simétrico** de R.

Fecho Simétrico

- O feche simétrico de uma relação pode ser construído a partir da união da relação com sua inversa.

- Assim, $R \cup R^{-1}$ é o fecho simétrico de R.

- Sabendo que $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$

Exemplo

Qual é o fecho simétrico da relação

$$R=\{(a,b) \mid a>b\},$$

sobre o conjunto dos inteiros positivos?

O fecho simétrico da relação R é

$$R \cup R^{-1} = \{(a,b) \mid a>b\} \cup \{(b,a) \mid a>b\}$$

$$= \{(a,b) \mid a \neq b\}$$

Fecho Transitivo

- Suponha uma relação não transitiva
  - R = {(1,3), (1,4), (2,1), (3,2)} sobre {1,2,3,4}
- Ao inserir todos os pares (a,c), de forma que os (a,b) e (b,c) pertençam a R, tem-se uma relação transitiva?
- Os pares (a,c) são
  - (1,2), (2,3), (2,4) e (3,1)
- Adicionando esses pares não será produzido uma relação transitiva.
  - Pois não contém o par (3,4)

Teorema

O fecho transitivo de uma relação *R* é igual a *R**.

$$R^{*} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^{n}$$

Exemplo

Seja a relação $R=\{(a,a),(a,b),(b,c),(c,c)\}$ sobre o conjunto $A=\{a,b,c\}$. Encontre:

a) Fecho reflexivo de R;

b) Fecho simétrico de R;

c) Fecho transitivo de R.

a) $R \cup \{(b,b)\}$

b) $R \cup \{(b,a), (c,b)\}$

c) $R^2 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)\}$

$R^3 = R^2 \circ R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)\}$

$R \cup R^2 \cup R^3 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,c), (c,c)\}$

Teorema

- Seja MR a matriz zero-um da relação R sobre um conjunto com n elementos.

- Assim, a matriz do fecho transitivo de R* é

$$M_{R^*} = M_R \vee M_R^{[2]} \vee M_R^{[3]} \vee \cdots \vee M_R^{[n]}$$

Exemplo

Encontre a matriz zero-um do fecho transitivo da relação R, sabendo que

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pelo teorema anterior $\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]} \vee \mathbf{M}_R^{[3]}$

$$\mathbf{M}_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}_R^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$