Направление подготовки/специальность:

Прикладная математика и информатика

Дисциплина: Численные методы

Вид контроля, текущий контроль: Лабораторная работа

Фамилия, имя, отчество студента: Мазуров Валентин Константинович

Курс 3 группа 5

Отчет по лабораторной работе №2

на тему:

«Численное исследование сходимости интерполяционного процесса с использованием многочленов Ньютона»

Преподаватель Гудович Н.Н.

Оглавление

Теоретические сведения.

Алгебраический многочлен степени не выше n — функция вида
$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ (1), где $n\geq 0, n\in Z, a_0, a_1, ..., a_n\in R-const, x\in R-variable$.

Если $a_n\neq 0$, то $p(x)$ - многочлен n-й степени.

Пусть функция f задана на (2) — фиксированные, попарно различные точки вещественной оси R.

Интерполяционный многочлен степени не выше n для функции f — многочлен (1), значение которого в точках (2) совпадают со значениями функции f в этих точках.

$p_n(x_i:\{x_j\}_{j=0}^{n};f)=f(x_i), i=0,...,n$ (3)

При этом точки (2) — узлы интерполяции, а функция f — интерполируемая функция.

Существует несколько способов построения интерполяционного многочлена. В этой работе рассматривается метод Ньютона. Общая формула для вычисления интерполяционного многочлена степени не выше n, построенного по узлам интерполяции (2), имеет вид:

$$p_n(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+...+f(x_0,...,x_n)(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})$$

где $f(x_0,x_1,...,x_n)$ - разделенная разность порядка n.

Обобщенная формула интерполяционного многочлена степени не выше n:

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\{f(x_0,...,x_i)*\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j)\}$$.

Существует два способа вычисления разделенных разностей:

1. по формуле вычисления разделенных разностей порядка n в узлах интерполяции (2) через значения функции в этих узлах:

   $$f(x_0,x_1,...,x_n)=\sum_{i=o}^{n}\frac{f(x_i)}{\prod_{j=o,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)} \quad (4)$$

2. индуктивный способ: вычисление разделенных разностей более высокого порядка через предыдущие, используя рекуррентную связь

   $$f(x_i,...,x_j)=\frac{f(x_{i+1},...,x_j)-f(x_i,...,x_{j-1})}{x_j-x_i} \quad (5)$$.

   В этом случае удобно составлять следующую таблицу (6):

Узлы (2)\ Порядок	0	1	2	n
x_0	$f(x_0)$	$f(x_0,x_1)$	$f(x_0,x_1,x_2)$	$f(x_0,x_1,...,x_n)$

x_1	$f(x_1)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	-
x_2	$f(x_2)$	$f(x_2, x_3)$	$f(x_2, x_3, x_4)$	-
...	...	...	...	...
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f(x_{n-1}, x_n)$	-	-
x_n	$f(x_n)$	-	-	-

Пример нахождения интерполяционного многочлена методом Ньютона.

Пусть дана функция $f(x)=x^2$. Составим таблицу значений:

x_i	-1	0	1
$f(x_i)$	1	0	1

Построим для этой функции многочлен Ньютона. Он будет иметь вторую степень, так как число узлов интерполяции равно трем. Составим таблицу вида (5) для разделенных разностей:

Узлы \ Порядок	0	1	2
-1	1	-1	1
0	0	-1	-
1	1	-	-

$p_2(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1);$

$p_x(x)=1-(x+1)+(x+1)x=x^2$.

Исследование сходимости интерполяционного многочлена к интерполируемой функции.

Рассматриваемая интерполируемая функция имеет вид: $f(x)=x^2$.

Рассмотрим поведение графика функции и интерполяционного многочлена на следующих отрезке $[-1;1]$.

На данном отрезке график интерполяционного многочлена сходится к графику функции на интервале $(-1;1)$ при $n=20..35$, n — степень многочлена Ньютона.

При $n=36..67$ график интерполяционного многочлена, разделенные разности для которого найдены по формуле (4), начинает расходиться с графиком функции, причем, чем больше степень n , тем больше он отклоняется от графика функции.

При $n>67$ график интерполяционного многочлена, разделенные разности для которого найдены при помощи рекуррентной связи (5), начинает расходиться с графиком функции, причем, чем больше степень n , тем больше он отклоняется от графика функции.

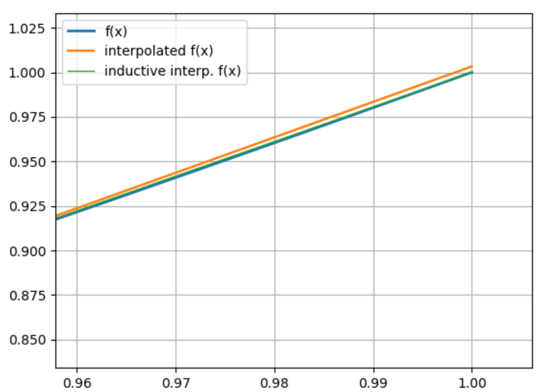

Рис 3: n = 36

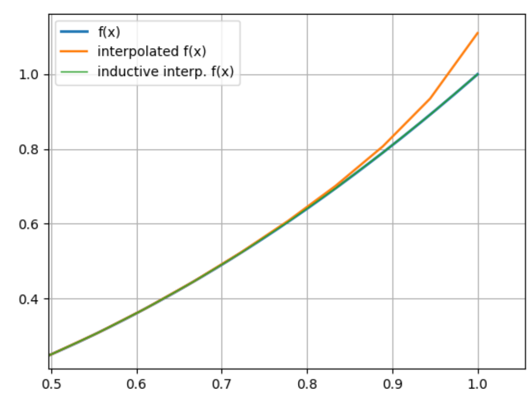

Рис 2: n = 37

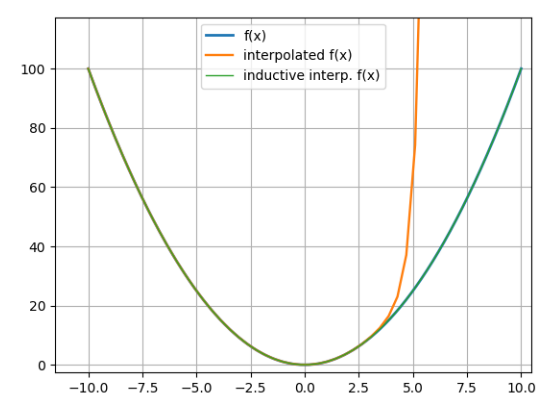

Рис 3: n = 36

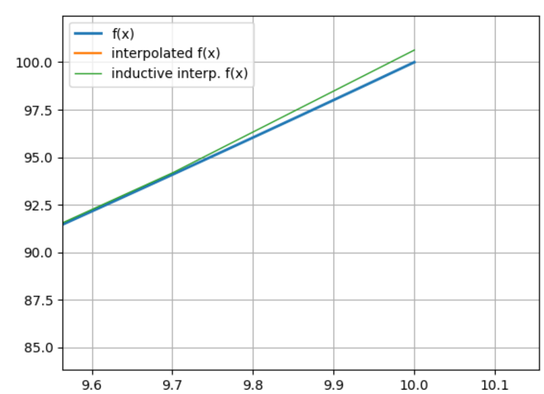

Рис 4: n = 36

Вывод.

При увеличении числа узлов интерполяции, интервал сходимости увеличивается. Но после определенного количества узлов интерполяции значения многочлена Ньютона начинают расходиться с значениями первичной интерполируемой функции при приближении к крайним точкам.

При этом значения многочлена Ньютона, разделенные разности которого вычислены через формулу (4), начинают расходиться при меньшем количестве узлов интерполяции относительно значений многочлена, разделенные разности которого вычислены индуктивно с использованием рекуррентной связи (5).