

ÍNDICE

Agradecimentos.....	i
Resumo.....	ii
 Capítulo 1:	
Introdução ao Planeamento de Experiências e aos Planos em Bloco....	7
1.1 Breve Histórico	7
1.2 Introdução aos Conceitos e princípios gerais.....	10
 Capítulo 2:	
Planeamento de Experiências em Blocos.	12
2.1 Introdução e Historial dos Planos em Blocos	12
2.2 Planos em Blocos Incompletos	17
2.2.1 Introdução	17
2.2.2 Os IBD de Diferentes Dimensões e Diferentes Números de Réplicas	18
2.3 Planos em Blocos Incompletos Equilibrados	20
2.3.1 Introdução	20
2.3.2 Condições de Existência.....	21
2.3.3 Definições e Características dos BIBD.....	22
2.3.4 Alguns Teoremas Importantes.....	24
2.4 Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados (PBIBD)	26

Capítulo 3:

Análise Estatística dos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados (BIBD) ...	28
3.1 Introdução e Fundamentos da ANOVA nos BIBD	28
3.2 Análise Intrabloco para os Planos em Blocos Incompletos Equilibrados	30
3.2.1. Construção da tabela da ANOVA.....	30
3.2.2. Estimação dos Parâmetros – Método dos Mínimos Quadrados.	37
3.2.3. Pesquisas a efectuar após ANOVA	39
3.2.4. Análise Interbloco para os BIBD	44
3.2.5. Análise Inter-Intrabloco para os BIBD	46

Capítulo 4:

Planos em Blocos Incompletos Equilibrados com Repetições (BIBDR)	52
4.1 Introdução e Notas Bibliográficas	52
4.2 BIBD com Blocos Repetidos	53
4.2.1 Introdução e Definições	53
4.2.2 Limites das Cardinalidades e Multiplicidades dos Blocos.....	54
4.2.3 BIBDR: Classificação em Famílias e Alguns Exemplos	55
4.2.4 Breve Revisão dos Principais Métodos de Construção dos BIBDR	58
4.2.5 O Método Trade-off na Construção dos BIBDR.....	59
4.2.6 Alguns Exemplos de Construção de BIBDR.....	60

Capítulo 5:

Análise Estatística de um BIBDR: Aplicação ao BIBDR (9,24,8,3,2 b*=20)	64
5.1 Análise Estatística.....	64
5.2 Estimativa dos Mínimos Quadrados	74
5.3 Restabelecimento da Informação Interbloco	75
5.4. Combinação Linear dos Estimadores.....	76
5.5. Aplicação do Método de Comparação Múltipla de Tuckey.....	78

Capítulo 6:

Planos em Blocos Incompletos Equilibrados: “Diallel Crosses”: Aplicações no âmbito da Genética	88
6.1 Estatística e a Genética – Retrospectiva Histórica e Recentes Pesquisas.....	88
6.2 Fundamentos e Noções da Genética.....	95
6.3 Diallel Crosses e Planos em Blocos Incompletos Equilibrados	97

Capítulo 7:

Considerações e Perspectivas de Investigação Futura	101
Referências Bibliográficas	102
Anexos	111

ÍNDICE DE TABELAS E ESQUEMAS

Tabela 3.1 ANOVA Intra-Bloco para BIBD	33
Tabela 3.2 ANOVA Ajustada Intra-Bloco – caso BIBD Simétrico	35
Tabela 3.3 ANOVA – caso BIBD Completo	36
Tabela 4.1: Parâmetros possíveis de BIBDR; dimensão de bloco 3 e classificação em famílias	56
Tabela 4.2 Parâmetros possíveis de BIBDR; dimensão de bloco 4 e classificação em famílias	57
Tabela 4.3: Parâmetros possíveis de BIBDR; dimensão de bloco 5 e classificação em famílias	58
Tabela 5.1: BIBD(9,24,8,3,2 b*=20)	64
Tabela 5.2: Tabela da Estrutura do BIBD(9,24,8,3,2)	65
Tabela 5.3: Valores Simulados do BIBD(9,24,8,3,2)	67
Tabela 5.4: Tabela da ANOVA	70
Tabela 5.5: Tabela da ANOVA CASO BIBD COMPLETO.....	71
Tabela: Tabela de Intervalos de Contrastes.....	80
Tabela 5.7: Tabela de Contrastes	84
Esquema 5.1: Blocos do BIBD(9,24,8,3,2).....	66

Capítulo 1

INTRODUÇÃO AO PLANEAMENTO DE EXPERIÊNCIAS E AOS PLANOS EM BLOCOS

1.1 BREVE HISTÓRICO

O Planeamento de Experiências assume um papel basilar na fundação de vínculo entre as Matemáticas Aplicadas e as aplicações da Estatística nas mais diversas áreas, como por exemplo na Agricultura, na Indústria, na Genética, na Biologia, na Biomedicina e nas Ciências da Educação.

Neste trabalho, após uma breve introdução ao Planeamento de Experiências, iremos debruçar-nos na investigação dos Planos em Blocos em geral e nos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados, em particular.

Os primeiros trabalhos com experiências planeadas surgem em 1917 e em 1918, investigando problemáticas na área da indústria e na agricultura, verificando-se ainda a grande maioria das aplicações nestas duas áreas.

A inserção do Planeamento de Experiências na Ciência Estatística deve-se, em primeiro lugar, aos trabalhos elaborados por Sir Ronald A. Fisher e às suas investigações. Para além de precursor da aplicação da Estatística Matemática ao Planeamento de Experiências, este famoso cientista incrementa diversas técnicas e desenvolve a metodologia de Análise de Variância (ANOVA), que é um dos processos estatísticos que produz maior eco na investigação científica. Destacamos as seguintes obras deste autor: *Statistical Methods for Research Workers* (1925) e *The Design of Experiments* (1935). A biografia deste investigador consta em <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Fisher.html>.

Muitos investigadores têm desde então vindo a desenvolver toda a História do Planeamento de Experiências e a desempenhar papéis fundamentais nesta área, como sejam os casos de Frank Yates, R.C. Bose, O. Kempthorne, cujos trabalhos evidenciamos no estudo dos Planos em Blocos e de Gertrude Mary Cox e G. W. Cochran.

Gertrude Cox foi uma dos fundadores da Sociedade Biométrica em 1947. Cox serviu como um membro do seu Conselho e como presidente em 1968-69. Em 1949 Cox tornou-se a primeira mulher eleita para o International Statistical Institute, e foi eleita para a Academia Nacional de Ciências em 1975. Em 1950 Cox e William G. Cochran escreveram o livro “Experimental Design” que se tornou um clássico, na concepção e análise experimental com réplicas. Em Kemphorne O. (1952) é apresentada uma excelente exposição de como analisar Planos Casualizados e Planos Factoriais.

Em Atkinson, A. C. e Bailey, R. A. (2001), encontramos uma vasta pesquisa do historial referente a investigações em Planeamento de Experiências no último século. Para além de uma vasta discussão de temas são apresentados resumos detalhados do historial e fundamentos dos principais ramos desenvolvidos nesta área, os Planos Factoriais, os Planos em Blocos Incompletos, os Planos Vizinhos e são discutidas aplicações dos Planos Optimais e das Metodologias de Superfície de Resposta.

Nos nossos dias vivenciam-se experiências distintas das de outrora, graças ao aparecimento das novas tecnologias, computadores, programas computacionais, fácil acesso à Internet, etc. Actualmente os investigadores têm o trabalho computacional bastante mais facilitado. De facto, devido ao nível da complexidade e à quantidade de dados, noutros tempos seria muitas vezes impossível conseguir as estatísticas e simulações que hoje em dia se conseguem em curtíssimos espaços de tempo.

Todo este progresso tecnológico permitiu que os matemáticos e cientistas avançassem muito em todas as áreas, em particular ao nível da Estatística e do Planeamento de Experiências. A teoria moderna pode agora ser acompanhada do desenvolvimento computacional, de modo a usufruir destes utensílios disponíveis. Por conseguinte, toda a investigação será mais interessante ao nível dos algoritmos que possibilitam a construção dos delineamentos mais variados. Para além das tarefas próprias da construção e análise, as necessidades emergentes dos cientistas passam também actualmente pelo comando das investigações e dos resultados dos Planeamentos.

Concebeu-se um paradigma de qual deverá ser o delineamento preferencial a seleccionar, ao sermos confrontados com o prosperar de rotinas para a construção dos mais variadíssimos

Planos. Urge portanto eleger medidas de modo a examinar a qualidade e a eficiência, e que, como resultado conduzam à Construção de Planos Optimais.

Na actualidade, no âmbito do Planeamento de Experiências e da investigação dos Planos em Blocos, destacam-se nesta área investigadores como Hedayat, S., Stufken, J., Calinski, T., Atkinson, A., Montgomery, D., Bailey, R. A., e Cameron, P..

No nosso trabalho iremo-nos debruçar sobre o estudo dos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados com Repetições, nomeadamente os métodos de construção, ilustrando com algumas aplicações. No capítulo 2 abordaremos com mais detalhe o historial deste tipo de planos.

1.2 INTRODUÇÃO AOS CONCEITOS E PRINCÍPIOS GERAIS

Quando se realiza uma experiência seja ela qual for, é muito natural que nos deparemos com certos erros, podendo estes ter as mais diversas origens: a variabilidade do material a ser aferido, as circunstâncias em que a experiência se realiza e o meio onde se realiza, bem como os erros humanos ou instrumentais. De facto, existem muitas componentes susceptíveis de contribuir para o aumento da variabilidade.

Erro experimental define-se como sendo a variação singular que surge entre as observações sob determinado tratamento. Essa variação pode ser originada pela variabilidade do material usado no Planeamento da Experiência, ou devida à metodologia de análise e/ou interpretação.

Um dos principais fins dos Planeamentos de Experiências é tentar controlar esse erro experimental de forma a identificar e separar a variabilidade imputável a causas definidas. Para tal, recorre-se a processos específicos para organização do material em análise.

Para se conseguir um bom Planeamento de Experiências deve-se ter em consideração três princípios básicos: o uso de réplicas ou repetições, agrupamentos convenientes e casualização ou aleatorização.

Mediante certos conjuntos de circunstâncias pode-se repetir uma experiência ou parte desta. A repetição tem objectivos evidentes, por um lado incrementar o rigor das observações, por outro, obter estimativas dos erros realizados.

Ao realizar uma experiência, se tudo for elaborado tendo em conta a validação e uniformização das condições em que a mesma é executada, tanto maior será a eficiência do teste experimental. Uma das técnicas fundamentais neste contexto é a partição em blocos. Por bloco entende-se um grupo homogéneo de unidades experimentais. Estas unidades experimentais devem ser tão uniformes quanto possível, em todas as características que possam afectar a resposta.

Casualização ou Aleatorização consiste numa afectação do tratamento ou variedade às unidades experimentais de modo casual ou aleatório. Este processo é de extrema relevância no planeamento de experiências. É tão importante que alguns estatísticos asseguram que, se for respeitado, é suficiente para poder atenuar a verificação de outros pressupostos, como a normalidade e homocedasticidade.

Uma variável experimental controlável que julgamos influenciar a resposta designa-se por factor, e os valores específicos desse factor são os respectivos níveis. A variação na resposta média entre duas combinações de factor ou entre duas condições experimentais denomina-se de Efeito.

Capítulo 2

PLANEAMENTO DE EXPERIÊNCIAS EM BLOCOS

2.1. INTRODUÇÃO E HISTORIAL DOS PLANOS EM BLOCOS

Os Planos Completos Casualizados são o tipo de plano mais simples, em que os tratamentos são atribuídos aleatoriamente às unidades experimentais. Este tipo de plano é apropriado quando o material experimental é homogêneo. É um procedimento bastante frequente no âmbito das experiências laboratoriais em Biologia e Química, onde a quantidade de material é dividida em pequenas amostras às quais são aplicados os tratamentos. Similarmente adequa-se para o caso de experiências de pequena dimensão ou quando é possível a existência de observações omissas. Apesar de este tipo de planeamento ter como principal inconveniente a de falta de precisão, dada a variação ser dispersa por todas as unidades, revela algumas vantagens relevantes, como a flexibilidade global - de facto pode ser usado um número qualquer de tratamentos bem como de réplicas, sendo que o número de réplicas pode variar de tratamento para tratamento. Por outro lado, mesmo em situações em que o número de réplicas não é o mesmo para todos os tratamentos ou em que os erros experimentais diferem de tratamento para tratamento, a análise estatística é elementar.

Como se sabe, a finalidade de qualquer Planeamento de Experiências é procurar extrair a máxima informação para determinado esforço experimental, permitindo obter as comparações entre as variedades, controlando em simultâneo as fontes de variação aleatórias. Os planos de blocos usam-se ainda para controlar estas fontes de variação.

A necessidade de comparação das inúmeras variedades ou tratamentos de experiências agrícolas promoveu a investigação do planeamento de experiências em unidades experimentais ou parcelas agrupadas em blocos, sempre tendo em conta as condições de homogeneidade.

Com os Planos em Blocos Completos Casualizados ambiciona-se aperfeiçoar o rigor das estimativas de diferenças entre as médias de determinadas variedades, minorando a variabilidade dentro de cada bloco e maximizando a variabilidade entre blocos.

Seja um plano dividido em b blocos e considere-se v o número de variedades ou tratamentos do plano. Considere que em cada bloco figuram k variedades, com apenas uma única observação de cada variedade, sendo aleatória a ordem pela qual esta variedade ocorre. Neste modelo de planos tem-se que $k = v$.

No planeamento de experiências os Planos de Blocos Completos Casualizados são o delineamento mais usado, desde que cada bloco seja suficientemente grande de modo a conter as v variedades, isto é, desde que haja unidades experimentais homogêneas em número suficiente de forma que todos os tratamentos figurem conjuntamente em cada bloco. Não há restrições quanto à dimensão dos blocos como também não existe qualquer tipo de delimitação quanto ao volume de tratamentos. Estes Planos têm uma aplicação limitada sendo principalmente convenientes para campos experimentais em que o número de tratamentos é relativamente pequeno.

Num Plano em Blocos Completos Casualizados os resultados podem ser dispostos na forma de uma matriz com r linhas por b colunas, com uma observação por célula. A análise de variância a dois factores, sem interacção, é a técnica a que se recorre para analisar estes dados. Contudo temos que ter em atenção que, em vez de se tratar de dois factores, interessa estudar apenas de um factor (tratamento) mas que está sujeito a uma fonte de variação (bloco), que a nível computacional funcionará como segundo factor. Estaremos interessados nos resultados dos tratamentos e não tanto em estudar diferenças entre blocos.

Quando os blocos têm um número de unidades experimentais ou parcelas inferior ao número de tratamentos temos um Plano em Blocos Incompleto. Os Planos em Blocos Incompletos (IBD: Incomplete Block Designs) são planos com vasta dimensão de aplicabilidade pelo facto de não se colocarem restrições pré-estabelecidas. Nestes Planos gerais não é necessário que todos os blocos tenham a mesma dimensão, nem é obrigatório que cada variedade se repita o mesmo número de vezes. A sua análise, no entanto nem sempre se consegue com facilidade dado tratar-se muitas vezes de planos desequilibrados e onde não se verificam os pressupostos usuais, especialmente no que toca ao pressuposto da homocedasticidade. Torna-se necessário estabelecer algumas condições de equilíbrio para delinear planos com maior facilidade de aplicação e análise e os Planos em Blocos Equilibrados Incompletos (Balanced Incomplete Block Designs – BIBD) surgem neste âmbito.

Yates (1936) afirma que, se não é possível ter todos os pares de variedades juntos em cada bloco, pode pensar-se o delineamento impondo que cada par de variedades apareça simultaneamente em λ blocos, sendo λ uma constante. Os Planos em Blocos Incompletos

Equilibrados, têm por base esta conjectura e têm vindo a ser desenvolvidos por especialistas em Estatística, Combinatória e Matemáticos Puros.

Das obras de Yates, F. destacam-se as seguintes (1936a): Incomplete randomized blocks; (1936b): A new method for arranging variety trials involving a large number of varieties, (1937a): The design and analysis of factorial experiments; (1937b): A further note on the arrangement of variety trials: quasi-Latin squares; (1939): The recovery of inter-block information in variety trials arranged in three-dimensional lattices e (1940): The recovery of inter-block information in balanced incomplete block designs. Também a análise intrablocos e interblocos dos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados foram estudadas e definidas por Yates (1936a, 1940). Porém, Yates não se restringiu à investigação destes projectos e sugeriu novos planos assim como os reticulados simples e o delineamento quase-factorial (1936b, 1937b). Das primeiras tabelas de Planos em Blocos Equilibrados Incompletos destacamos as de Fisher & Yates (1938) que vão sofrendo sucessivas actualizações. A noção de eficiência de um BIBD é um conceito muito relevante, que surgiu também por volta desta altura.

Não podemos deixar de referir o forte contributo dado por R.C.Bose ao nível da construção e da análise das propriedades dos BIBD. Citamos por exemplo, os artigos “On the Construction of Balanced Incomplete Block Designs” (1939) e “A note on the Resolvability of Balanced Incomplete Block Designs” (1942).

Fisher (1940) comprovou que a condição $b \geq v$ se verifica num BIBD: a chamada desigualdade de Fisher. Em Oliveira, T. (1999) descobre-se uma abordagem desta demonstração. É nos artigos de Bose (1939, 1942) e de Fisher (1940) que a estrutura e a construção destes planos começaram a ser estudadas.

Kempthorne, O. (1956a) conjecturou que para qualquer conjunto de números b, v, k ($k < v$), o Plano em Blocos Incompletos mais eficiente é o Plano Equilibrado, caso este exista. Tal fica demonstrado dois anos mais tarde por Roy, J (1958).

Um novo tipo de Planos em Blocos Incompletos foi introduzido por Patterson e Williams (1976) tendo-se designado por Planos α . Estes planos podem ser aplicados sempre que o número de tratamentos é múltiplo da dimensão dos blocos, isto é de k , contudo só se aplicam quando os planos são resolúveis. Os Planos α foram descobertos através do recurso a um processo de construção cíclica, tendo uma aplicação bastante vasta. Patterson et al (1978) catalogaram os Planos α mais eficientes, com 100 tratamentos e 4 réplicas. A partir desta altura, recorrendo a algoritmos informáticos verifica-se um avanço significativo na geração de planos com factores de eficiência mais relevantes. São exemplos deste avanço os trabalhos realizados por Patterson & Patterson (1984), Patterson et al (1988).

De forma a dar resposta à rigidez das condições impostas nos BIBD, Bose e Nair (1939) admitiram e expandiram os Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados (PBIBD) e os Esquema de Associação. Nestes Planos, cada tratamento aparece junto com n_1 outros tratamentos λ_1 vezes, com n_2 outros tratamentos λ_2 vezes e assim por diante, estando ainda sujeitos a outros tipos de restrições. Bose e Nair (1939) defendiam ainda que os contrastes não eram todos estimados com a mesma variância. Bose e Shimamoto (1952) classificaram ainda os PBIBD para duas classes de associação em 5 tipos: divisível em grupos, simples, triangular, quadrados latinos e cíclico.

Considera-se que os anos 50 e 60 foram bastante proveitosos ao nível da investigação, relativamente aos esquemas de associação, com o objectivo de identificar a nomenclatura de todos os esquemas de associação bem como classificar todos os PBIBD. Roy P. (1953) introduziu os esquemas de associação hierárquicos divisíveis em grupos e Hinkelmann e Kempthorne (1963) redescobriram os esquemas de associação factoriais como sendo uma ampliação dos grupos divisíveis, tendo sido posteriormente desenvolvidos por Kusumoto (1967) e Surendran (1968). Em John, P. (1966) encontra-se uma universalização dos esquemas triangulares.

Nos trabalhos de Bose (1963), Kageyama (1974), P. John (1971) e Raghavarao (1971) a pesquisa, controlo e sistematização dos PBIBD e dos esquemas de associação são objectivos fundamentais. Tabelas de PBIBD encontram-se em Clatworthy (1973). O estudo dos planos cíclicos considera-se um dos temas centrais dos livros John (1987), John e Williams (1995) e Hinkelmann e Kempthorne (2005) e estes encontram-se igualmente tabelados em John et al (1972). Note-se que os Planos em Blocos Incompletos Equilibrados são preferencialmente usados em relação aos Parcialmente Equilibrados, sempre que é possível a sua aplicação.

Regressando ao âmbito dos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados (Balanced Incomplete Block Design - BIBD), discute-se actualmente um novo tópico relacionado com a ocorrência de blocos repetidos e diferentes estruturas de planos para os mesmos parâmetros. A ocorrência da repetição de blocos nos BIBD é desejável, não só por estar provado serem planos optimais, mas também do ponto de vista económico e da facilidade de aplicação prática - Foody and Hedayat (1977) e Hedayat and Hwang (1984). Para além disso, em casos problemáticos, em que por acidente se percam unidades experimentais, a existência de blocos repetidos revela-se de primordial importância. Relativamente à construção dos BIBD com repetições (BIBDR) são diversos os autores e investigadores que lhe dedicam particular atenção, embora ainda hoje o método original devido a Hedayat and Li (1979) - Método trade-off ou método de compensação, seja considerado.

Uma investigação detalhada dos BIBD é abordada em Oliveira, T. (1994). Nesse trabalho são definidos os IBD e os BIBD, mencionados os teoremas fundamentais, é descrita a análise estatística dos IBD e dos BIBD e é apresentado um estudo inicial dos BIBD com repetições e da problemática da sua construção. Os BIBD com Repetições permitem simplificar a concretização das experiências e a análise dos resultados obtidos. Note-se que, a definição de BIBD não impõe qualquer restrição relativamente à repetição de blocos, desta forma quando há $b^* < b$ blocos distintos num plano, diz-se que há repetição de blocos. Oliveira, T. (1999) aprofunda os temas anteriores e estuda os PBIBD com aplicações à genética. São também apresentados casos particulares de BIBD com blocos repetidos, com diferentes suportes (número de blocos não repetidos no plano) e diferentes estruturas. Modelos de BIBD com repetições de blocos são também apresentados em Oliveira, T. (2004). Neste trabalho, nos capítulos 4 e 5, estudaremos e faremos uma aplicação aos modelos de BIBDR.

2.2 PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS

2.2.1 INTRODUÇÃO

Quando não é possível dispor as v variedades em cada bloco, ou seja, quando o número de unidades experimentais ou parcelas em cada bloco é inferior ao número de tratamentos, surge um novo tópico conhecido por Planos de Blocos Incompletos, em que cada bloco contém k variedades, sendo $k < v$. Tais planos adoptaram uma função proeminente no planeamento de experiências tendo sido inicialmente introduzidos por Yates (1936 a). Em Oliveira, T. A. 1999 encontramos um estudo deste tipo de planos, entre outros. Esta problemática deu origem a um enorme progresso de teoria e prática dos planos em blocos o que fez com que novas ideias e conceitos surgissem. Emerge assim a necessidade de descrever as várias propriedades destes novos planos, os quais se mostraram bastante mais flexíveis na sua construção, uma vez que deixa de existir a condição principal dos Planos em Blocos Completos Casualizados que obriga a que todos os tratamentos figurem em cada bloco. Note-se no entanto que, tendo em conta a eficiência dos Planos, não se deve usar um Plano em Blocos Incompletos em situações que existam condições para usar um Plano em Blocos Completos Casualizados.

Considerem-se v tratamentos distribuídos em b blocos. Admita que o i -ésimo tratamento ($i=1,2,\dots,v$) é testado em r_i parcelas e que o j -ésimo bloco ($j=1,2,\dots,b$) contém k_j parcelas. Seja n_{ij} o número de vezes que cada variedade i ocorre no bloco j . Assim sendo, um plano em blocos incompletos diz-se binário se cada variedade ocorre no máximo uma vez em cada bloco, isto é:

$$n_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a variedade } i \text{ ocorre no bloco } j \\ 0, & \text{se a variedade } i \text{ não ocorre no bloco } j \end{cases};$$

O plano diz-se apropriado se $k_j = k$, qualquer que seja j , e equireplicado se $r_i = r$, qualquer que seja i .

2.2.2 OS IBD COM BLOCOS DE DIFERENTES DIMENSÕES E DIFERENTES NÚMEROS DE RÉPLICAS

Nos Planos em Blocos Incompletos, em geral, não excluimos a possibilidade destes poderem ter blocos de diferentes dimensões nem a possibilidade de haver diferentes números de réplicas.

Em muitas situações experimentais a diferente dimensão dos vários blocos acontece naturalmente. Pearce (1964) evidencia dois tipos de situações que conduzem a este tipo de planos:

- Por um lado em muitas experiências que envolvem material biológico há parcelas que podem ser agrupadas em blocos, mas o número destas não é controlável pelo experimentador, como por exemplo o número de animais obedecendo a certas condições.
- Por outro lado há situações em que tudo foi perfeitamente planeado, com blocos de igual dimensão, mas com o decorrer da experiência acontecem acidentes que conduzem à perda da informação contida em algumas parcelas.

Para resolver a problemática em qualquer uma destas situações, é possível optar pelos seguintes procedimentos:

- Reduzir a dimensão da experiência, considerando os blocos todos com a mesma dimensão e eliminando as parcelas excedentes, o que não é um procedimento razoável dada a perda de informação que implica;
- Usar a análise de Planos em Blocos Incompletos geral com os blocos de diferente dimensão. Neste caso a problemática de validade das conclusões é posta em causa caso não seja verificada a homocedasticidade da variância do erro para todos os blocos. Note-se que, em geral esta variância aumenta com a dimensão do bloco, uma vez que consiste numa medida da variabilidade das unidades experimentais dentro dos blocos. Esta é uma das razões fundamentais para que, sempre que possível, sejam adoptados planos com blocos de pequena dimensão conduzindo à redução do erro experimental.

Em muitos casos, particularmente se a diferença na dimensão dos blocos não for muito grande, é razoável assumir o pressuposto da homocedasticidade.

- No caso das observações omissas a resolução desta problemática resolve-se procedendo-se à sua estimação e usando na análise esses valores estimados. Obtém-se assim, um resultado aproximado, com a vantagem de se manter a homocedasticidade do erro experimental do plano original, sem as observações omissas.

2.3 PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS

2.3.1 INTRODUÇÃO

Originalmente, os Planos de blocos Incompletos Equilibrados foram introduzidos por Fisher em 1925. Um Plano de Blocos Incompletos Equilibrados consiste num caso especial dos planos em blocos Incompletos, no qual quaisquer dois tratamentos aparecem juntos igual número de vezes, λ , ao longo dos b blocos. Atribuindo v variedades e b blocos de dimensão k , ($k < v$), um plano em blocos incompletos equilibrados pode ser arquitectado tomando combinações de v , k a k e impondo uma determinada combinação das variedades em cada bloco.

O conjunto de blocos distintos neste tipo de planos intitula-se por suporte do plano e o número de elementos desse conjunto designar-se-á por cardinalidade do plano representando-se por b^* .

A ocorrência da repetição de blocos nestes planos é desejável, não só por estar provado serem planos optimais, mas também do ponto de vista económico e da facilidade de aplicação prática, Foody and Hedayat (1977) e Hedayat and Hwang (1984). Para além disso, em casos problemáticos que por acidente se percam unidades experimentais a existência de blocos repetidos revela-se de primordial importância.

Muitos dos novos termos que aparecem estão relacionados com o aspecto de construção dos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados (BIBD), mas alguns deles espelham certas e importantes propriedades estatísticas dos blocos. Relativamente à construção dos BIBD com repetições (BIBDR) são diversos os autores e investigadores que lhe dedicam particular atenção, embora ainda hoje o método original devido a Hedayat and Li (1979) - Método trade-off ou método de compensação, seja considerado um dos mais importantes.

Neste trabalho proporcionamos uma abordagem aos Planos de Blocos Incompletos Equilibrados, de parâmetros v , b , r , k , λ e estudamos o procedimento de análise de variância e estimação dos parâmetros respectivos. A análise de variância permite-nos reconhecer e suprimir a contribuição da variação entre as repetições, apesar de não o permitir dentro das repetições, motivo central do erro experimental. Estudamos ainda casos particulares de BIBD com repetições de blocos, dado que embora exista já uma vasta investigação deste tipo de

BIBDR, esta abrange ainda bastantes pontos por esclarecer. Será também apresentada uma aplicação do Método Trade-off.

2.3.2 CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA

Em situações em que não é possível ter todos os pares de tratamentos a ocorrer em cada bloco, é possível definir um novo delineamento que verifique a restrição de que cada par de tratamentos ocorre simultaneamente em λ blocos, sendo λ uma constante. Um BIBD é caracterizado por cinco parâmetros b , v , r , k , e λ , não independentes, que são números inteiros, que verificam as seguintes restrições:

$$n = rv = bk$$

Consideremos n o número total de parcelas do plano, sendo atribuída a cada parcela uma e uma só variedade. Esta condição traduz a avaliação do número de parcelas do plano através de dois modos distintos. Primeiro, mediante o produto do número de variedades pelo número de repetições das mesmas; Segundo, através do produto do número de blocos pelo número de parcelas de cada bloco.

$$r(k-1) = \lambda(v-1)$$

Para estabelecer esta condição adoptemos qualquer variedade v_i . Esta variedade surge em r blocos e em cada um destes blocos encontram-se ainda $(k-1)$ variedades. Existem então $r(k-1)$ parcelas livres para outras variedades distintas de v_i contidas nos mesmos blocos que a variedade v_i . Note-se que a esta variedade v_i ainda se encontram associadas outras $(v-1)$ variedades e que cada par se repete λ vezes ao longo dos blocos. Assim esta variedade v_i figura em $\lambda(v-1)$ parcelas.

Considera-se que o número de blocos não é inferior ao número de variedades, isto é,

$$b \geq v.$$

Esta expressão designa-se por “desigualdade de Fisher”, em homenagem ao autor da sua demonstração original.

Salienta-se ainda que, por exemplo para os parâmetros $b = 27$; $k = 2$; $r = 9$ e $v = 6$, apesar de estes verificarem as condições:

$$n = rv = bk \Leftrightarrow 54 = 9 \times 6 = 27 \times 2 \quad \text{e} \quad b \geq v \Leftrightarrow 27 \geq 6,$$

não conduzem, contudo, a um valor de λ inteiro.

Na realidade, a condição $r(k-1) = \lambda(v-1)$ equivale a $\lambda = \frac{r(k-1)}{v-1}$ e substituindo pelos valores anteriormente assumidos conduz-nos a $\lambda = \frac{9(2-1)}{6-1} = \frac{9}{5} \notin \mathbb{N}$.

As três condições apresentadas são portanto necessárias, mas não suficientes para a construção de um BIBD.

À data, a investigação de uma condição suficiente para garantir a existência de todo o BIBD, continua a gerar alguma controvérsia entre os investigadores. Para os casos de blocos de dimensão 3, 4 e 5, há resultados conhecidos para a suficiência. Hanani (1961), demonstrou que $\lambda(v-1) \equiv 0 \pmod{k-1}$ e $\lambda v(v-1) \equiv 0 \pmod{k(k-1)}$ é condição suficiente para $k=3$ e $k=4$ (qualquer que seja o λ) e também para $k=5$ com $\lambda=1, 4$ e 20 .

2.3.3 DEFINIÇÕES E CARACTERÍSTICAS DOS BIBD

Num modelo de um BIBD sejam τ_i e τ_h respectivamente os efeitos de quaisquer dois tratamentos, com $i \neq h$. Um BIBD é um Plano de Blocos Incompletos binário, apropriado e equireplicado, para o qual se verifica que a variância da diferença entre os efeitos dos pares dos tratamentos estimados, isto é, $V(\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_i)$, tem o mesmo valor para qualquer par de tratamentos (h, i) . Vejamos então agora algumas definições que julgamos indispensáveis.

Definição 1: BIBD RESOLÚVEL (RESOLVABLE BIBD)

A noção de BIBD Resolúvel é introduzida por Bose (1942). Se nos é possível desagregar os b blocos incompletos equilibrados em r conjuntos, com m blocos cada, $b = mr$, de modo a que cada variedade surja apenas uma vez entre os blocos de um certo conjunto e que cada conjunto (ou classe de resolução) represente uma réplica completa, tem-se um BIBD Resolúvel.

Se um plano é resolúvel a inequação de Fisher torna-se:

$$b \geq v + r - 1 \quad (\text{Oliveira, T.A. (1994)})$$

Definição 2: BIBD PARCIALMENTE RESOLÚVEL

Um BIBD será parcialmente Resolúvel se $\frac{v}{k}$ for um número inteiro e se existirem $\frac{v}{k}$ blocos cuja união compreenda cada variedade uma vez.

Definição 3: BIBD RESOLÚVEL AFIM (AFFINE RESOLVABLE BIBD)

Tem-se um BIBD Resolúvel Afim se quaisquer dois blocos pertencentes a quaisquer diferentes classes de resolução tiverem precisamente o mesmo número de tratamentos (ou variedades), $\frac{k^2}{v}$, em comum. Para estes casos verifica-se $b = v + r - 1$.

Definição 4: PLANO DE BLOCOS SIMÉTRICOS

Um plano de blocos diz-se simétrico quando $b = v$ e $r = k$. De outra forma diz-se um plano Assimétrico.

Definição 5: PLANO DERIVADO

Seja S um plano simétrico. A partir deste é possível obter-se um plano Derivado, D', ignorando todo um bloco bem como as variedades que nele constam. Assim, somos conduzidos a um plano D' de parâmetros $v' = v - k$, $b' = b - 1$, $k' = k - 1$ e $\lambda' = \lambda$.

Definição 6: PLANO DE BLOCOS EQUILIBRADO E EMPARELHADO (PAIRWISE BALANCED)

Quando, num plano de blocos, todos os elementos da diagonal não principal da matriz de concorrências NN' são iguais então diz-se que o plano é “Equilibrado e Emparelhado”.

Definição 7: BIBD AUMENTADO (AUGMENT BIBD)

Um BIBD Aumentado obtém-se acrescentado cada bloco de um PBIE em uma ou mais réplicas de controlo.

A importância de um BIBD Aumentado é que este se revela particularmente robusto nos casos em que há perdas de informação relativamente a um tratamento específico. Hedayat and John (1974) e Dey and Dhall (1988) estudaram a robustez deste tipo de planos.

Definição 8: O DUAL DE UM BIBD (BIBD DUAL)

O Plano Dual de D , D^* , é aquele que se obtém através de um plano D trocando os tratamentos e os blocos em D . Por vezes, a dualização de alguns tipos de planos conhecidos, conduz a novos planos, outras vezes a planos já conhecidos. Muitos destes planos não serão BIBD mas sim PBIBD.

Definição 9: PLANOS ISOMÓRFICOS

Dois planos em blocos incompletos dizem-se isomórficos ou estruturalmente idênticos, no caso em que os blocos e variedades de um plano possam ser recodificados de modo a dar respectivamente os blocos e variedades do outro.

Definição 9: PLANOS COMPLEMENTARES

O complemento de um bloco é um bloco contendo os tratamentos que estão em falta no bloco original. O complemento de um plano em blocos incompletos é outro plano para o qual cada um dos blocos é complemento de um bloco do plano original. Portanto, um BIBD com parâmetros v , b e k é também um BIBD com parâmetros v , b e $v - k$.

2.3.4 ALGUNS TEOREMAS IMPORTANTES:

Passamos a enunciar certos teoremas relevantes na investigação e estudo dos BIBD, cujas demonstrações constam em Oliveira, T. A. (1994).

Teorema 1:

Uma condição necessária e suficiente para um Plano ser Equilibrado é que todo o tratamento seja estimado com a mesma variância e que todo o par de tratamentos seja estimado com a mesma covariância.

Teorema 2:

Numa classe de Planos Exactos com b Blocos de dimensão k e v tratamentos o plano mais eficiente é o equilibrado, caso este exista. Este teorema foi demonstrado por Roy, J. (1958).

Teorema 3:

O Dual de um BIBD é um BIBD desde que $v = b$, ou seja desde que o plano em causa seja um Plano Simétrico.

Teorema 4:

Se um BIBD com parâmetros v, b, r, k, λ é resolúvel então é válida a inequação:

$$b - v - r + 1 \geq 0 \Leftrightarrow b \geq v + r - 1$$

E, sendo $r - 1 \geq 0 \Leftrightarrow r \geq 1$, a inequação em causa torna-se portanto mais restritiva que a desigualdade de Fisher.

Teorema 5:

Um BIBD Resolúvel é Resolúvel Afim se e só se $b = v + r - 1$.

Corolário:

Se os parâmetros de um BIBD satisfazem a igualdade $b = v + r - 1$ e $\frac{k^2}{v}$ não satisfaz a condição de ser inteiro, então o plano é não resolúvel.

2.4 PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS PARCIALMENTE EQUILIBRADOS (Partially Balanced Incomplete Block Designs - PBIBD)

Oliveira, T. (1999) estuda os PBIBD com aplicações à genética e Mascarenhas, V. (2008) apresenta uma abordagem aos PBID incluindo a sua representação geométrica. Os Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados (PBIBD: Partially Balanced Incomplete Block Designs) foram definidos originalmente por Bose e Nair (1939) como um tipo de planos constituído por v tratamentos, dispostos em b blocos, de dimensão k em que cada tratamento ocorre em r blocos; quaisquer dois tratamentos são i -ésimos associados e ocorrem simultaneamente em λ_i blocos.

O plano PBIBD(m), com m classes de associação ficará definido pelos parâmetros $v, b, r, k, \lambda_i, (1 \leq i \leq m)$.

O facto de serem impostas determinadas condições aos parâmetros dos BIBD e, estas por vezes não poderem ser contempladas ou serem de adopção crítica, deu origem a que surgissem os PBIBD. Nos BIBD o requisito de λ ser um número inteiro, pode originar que o número de blocos e que a sua dimensão atinja valores impraticáveis para a realização de uma dada experiência. Basta ver por exemplo, e recordando $\lambda = r(k-1)/(v-1)$, que se $v-1$ for um número primo, r terá de ser um número múltiplo desse primo e terá ainda que se verificar a restrição $b = rv/k$. Ponderando as restrições anteriores, para um plano onde, por exemplo, se pretende aplicar 30 tratamentos, r terá de ser um número múltiplo de 29 e, se por acaso, o número de unidades experimentais for ímpar e primo, b terá de ser múltiplo de $29 \times 30 = 870$. Um plano com 870 blocos não será certamente de fácil manuseamento.

Nos BIBD a variância da diferença entre os efeitos dos pares dos tratamentos estimados isto é, $V(\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_i)$, tem o mesmo valor para qualquer par de tratamentos (h, i) . Nos PBIBD essa propriedade nem sempre se verifica. Por exemplo, para duas classes de associação, $V(\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_i)$ pode tomar dois valores, dependendo do facto dos tratamentos serem primeiros ou segundos associados, ou seja, dependendo do número de vezes que ocorrem juntos.

Da mesma forma que não é racional usar um IBD em condições que nos permitem usar um Plano em Blocos Completos, também os BIBD consideram-se ser preferenciais sempre que possível relativamente aos PBIBD, o que se justifica pela sua eficiência superior (Oliveira, T

(1999)). Dentro dos PBIBD os planos que mais são usados são os planos divisíveis em grupo para duas classes de associação, dado que constituem a extensão mais simples de um BIBD. (Mascarenhas, Vera (2009)).

Capítulo 3

ANÁLISE ESTATÍSTICA DOS PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS

3.1. INTRODUÇÃO E FUNDAMENTOS DA ANOVA NOS BIBD

Depois da recolha dos dados observados num delineamento experimental é indispensável a realização de uma análise estatística íntegra e congruente, de modo a deduzir conclusões profícuas e que eventualmente permitam efectuar recomendações com o intuito de melhorar as investigações posteriores. A análise experimental tem por objectivo fundamental reduzir o erro experimental, o que pode ser conseguido com o recurso aos Planos em Blocos Completos Casualizados. De facto, neste tipo de planeamento a comparação é efectuada entre o efeito dos tratamentos e o efeito dos blocos, verificando-se a ortogonalidade.

A análise de Planos em Blocos Incompletos difere da análise de Planos em Blocos Completos uma vez que nas comparações entre efeitos de tratamentos e nas comparações entre efeitos dos blocos a ortogonalidade não se verifica: em Planos em Blocos Incompletos tratamentos e blocos não são ortogonais.

Para proceder à análise dos Planos em Blocos Incompletos, Yates (1936), recorre ao método dos mínimos quadrados e Teorema de Gauss-Markov, obtendo assim o melhor estimador linear centrado (BLUE) intra-bloco para a comparação de tratamentos. Yates (1939), na análise intrabloco afirma que uma quota-parte da informação retida na comparação total dos blocos seria como que uma incógnita e, como tal, propõe que seja efectuada a recuperação da informação inter-bloco, isto é entre os blocos.

A análise intra-bloco surge portanto como consequência do facto dos contrastes nos efeitos de tratamentos serem estimados como combinações lineares das comparações de observações no mesmo bloco. A análise intra-bloco ignora parte da informação contida nas comparações de tratamentos, nomeadamente a informação contida na comparação dos totais dos blocos ou

informação inter-bloco. Esta análise é assim conhecida por “restabelecimento da informação inter-bloco” ou “análise inter-bloco”.

Yates (1939, 1940) mostrou ainda que nos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados o restabelecimento da informação inter-bloco pode ser conjugado com a análise intra-bloco, para obter estimadores mais eficientes na comparação dos tratamentos. Estes resultados foram estendidos também aos Planos em Blocos Incompletos Parcialmente Equilibrados por Nair (1944). Em 1947 Rao expandiu a análise para o caso geral dos Planos em Blocos Incompletos e analisou a relação combinada intra-inter bloco.

Na análise intra-bloco o caso geral aceita que o efeito dos blocos se encaixa no modelo linear dos efeitos fixos. Porém, quer na análise intra-bloco quer na análise inter-bloco, para se resgatar a informação inter-bloco, considera-se que o efeito dos blocos é aleatório. Saliente-se que na análise intra-bloco o efeito dos blocos pode ser visto como fixo ou aleatório, dependendo do que se quer examinar. Assim, ao considerar o modelo de efeitos fixos, o método dos mínimos quadrados permitirá determinar o melhor estimador linear centrado (BLUE) intra-bloco para a comparação de tratamentos. Contudo, ao ponderar os efeitos aleatórios pode já não conseguir encontrar o melhor estimador linear centrado. E é por estas razões apresentadas que Hinkelmann e Kempthorne (2005) mencionam que deverá aplicar-se a Equação de Aitken na análise intrabloco. A Equação de Aitken também é conhecida como sendo estimador dos mínimos quadrados ponderados generalizados (generalized weighted least squares).

Na análise estatística dos BIBD o recurso à análise de variância é portanto de importância primordial. Actualmente são conhecidos diversos packages que nos permitem a célere utilização da ANOVA com discriminação dos vários delineamentos, como são o STATISTICA, o SAS, SPSS e a linguagem R bastante em voga actualmente.

Convém sempre relembrar que a ANOVA não deve nem pode ser usada indiscriminadamente. A sua utilização para realizar testes e fazer estimações requer que se assumam os usuais pressupostos de normalidade, independência e homocedasticidade acerca da sua natureza dos mecanismos subjacentes à geração dos dados.

3.2 ANÁLISE INTRA-BLOCO PARA OS PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS

3.2.1 CONSTRUÇÃO DA TABELA DE ANOVA

Para a análise intra-bloco dos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados, as diferenças entre blocos são eliminadas e as estimativas de todos os contrastes nos efeitos dos tratamentos podem ser expressas em termos de comparação entre parcelas do mesmo bloco.

Consideremos um total de N observações dispostas em b blocos, divididos em k_1, k_2, \dots, k_b unidades experimentais, de acordo com os v tratamentos, que ocorrem r_1, r_2, \dots, r_v vezes.

Verifica-se que:

$$\sum_{i=1}^v r_i = \sum_{j=1}^b k_j = N$$

Para analisar um BIBD o modelo geral apropriado será o modelo estatístico:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, i = 1, \dots, v; j = 1, \dots, b, \text{ onde:}$$

- y_{ij} representa a m -ésima observação, do i -ésimo tratamento, no j -ésimo bloco;
- μ é a média global;
- τ_i e β_j representam respectivamente o efeito do i -ésimo tratamento e do j -ésimo bloco
- ε_{ij} representa a componente aleatória do erro, obedecendo às restrições usuais de normalidade, independência e homocedasticidade, $\varepsilon_{ij} \text{ iid} \approx N(0, \sigma^2)$.

As equações normais de μ, τ_i e β_j são dadas por:

$$G = N \hat{\mu} + \sum_{i=1}^v r_i \hat{\tau}_i + \sum_{j=1}^b k_j \hat{\beta}_j$$

$$T_i = r_i \hat{\mu} + r_i \hat{\tau}_i + \sum_{j=1}^b n_{ij} \hat{\beta}_j \quad i = 1, 2, \dots, v$$

$$B_j = k_j \hat{\mu} + \sum_{i=1}^v n_{ij} \hat{\tau}_i + k_j \hat{\beta}_j \quad j = 1, 2, \dots, b$$

A soma de quadrados para o total ou a variação dos dados, é designada por SQt , expressa-se através da soma de quadrados corrigida:

$$SQt = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b (y_{ij})^2 - \frac{y_{oo}^2}{N}$$

onde $N = rv = bk$, número total de observações e y_{oo} representa a soma total das observações.

A variabilidade da soma de Quadrados total pode ser particionada da seguinte forma:

$$SQt = SQ_{tratamentos_{ajustados}} + SQ_{blocos} + SQ_{erro}$$

Representemos estas somas de quadrados da partição por:

$$SQ_{tratamentos_{ajustados}} \rightarrow SQ_{trat(aj)}$$

$$SQ_{blocos} \rightarrow SQ_b$$

$$SQ_{erro} \rightarrow SQ_e$$

A soma de quadrados é ajustada com o objectivo de separar os efeitos dos tratamentos e dos blocos. Tal ajustamento torna-se necessário uma vez que cada tratamento se representa num conjunto distinto de r blocos. Assim, $y_{1o}, y_{2o}, y_{3o}, \dots, y_{vo}$, serão afectadas pelas diferenças entre blocos, uma vez que se trata das diferenças entre os totais não ajustados para os tratamentos. Por sua vez a soma de quadrados dos blocos será dada por:

$$SQ_b = \sum_{j=1}^b \frac{y_{oj}^2}{k} - \frac{y_{oo}^2}{N}$$

Em que y_{oj} designa o total do j -ésimo bloco e onde a soma de quadrados dos blocos tem $b-1$ graus de liberdade.

Quanto à soma de quadrados para tratamentos ajustados, tem-se:

$$SQ_{trat(aj)} = \frac{k \sum_{i=1}^v (Q_i)^2}{\lambda_v}$$

onde Q_i define o ajuste global para o i -ésimo tratamento, determinado por:

$$Q_i = y_{io} - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^b n_{ij} \cdot y_{oj} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, v$$

E em que $n_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ se o } i\text{-ésimo tratamento aparece no } j\text{-ésimo bloco} \\ 0 & , \text{ se } i\text{-ésimo tratamento não aparece no } j\text{-ésimo bloco} \end{cases}$

A expressão $\frac{1}{k} \sum_{j=1}^b n_{ij} \cdot y_{oj}$ caracteriza a média do total de blocos contendo o i -ésimo tratamento. Assim sendo a soma total dos tratamentos ajustados será nula, isto é,

$$\sum_{i=1}^v Q_i = 0$$

A soma de quadrados dos tratamentos tem $v-1$ graus de liberdade.

E, por último tem-se a soma de quadrados para o erro que surge como uma subtracção:

$$SQe = SQt - SQtrat(aj) - SQb$$

Onde tem $N - v - b + 1$ graus de liberdade.

A estatística apropriada para testar a igualdade de tratamentos,

$$H_0 : \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_v = 0$$

Contra, a hipótese alternativa

$$H_1 : \exists_i : \tau_i \neq 0$$

é dada por $F_0 = \frac{QMtrat(aj)}{QMe}$

sendo:

$$QMtrat(aj) = \frac{SQtrat(aj)}{v-1}$$

$$QMe = \frac{SQe}{N-v-b+1}$$

Pelo que F_0 terá uma distribuição F-Snedecor com $(v-1, N-v-b+1)$ graus de liberdade.

TABELA 3.1: ANOVA INTRA-BLOCO PARA BIBD

Origem de Variação	Graus de Liberdade	Somas de Quadrados	Quadrados Médios	Razão de Variâncias
Tratamentos (ajustados)	$v - 1$	$\frac{k \sum_{j=1}^v (Q_i)^2}{\lambda v}$	$\frac{SQ_{trat}(aj)}{v - 1}$	$F_0 = \frac{QM_{trat}(aj)}{QMe}$
Blocos	$b - 1$	$\sum_{j=1}^b \frac{y_{oj}^2}{k} - \frac{y_{oo}^2}{N}$	$\frac{SQb}{b - 1}$	$F_1 = QM_b / QMe$
Erro	$N - v - b + 1$	$SQe = SQ_t - SQ_{trat}(aj) - SQb$	$\frac{SQe}{N - v - b + 1}$	—
Total	$N - 1$	$\sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b (y_{ij})^2 - \frac{y_{oo}^2}{N}$	—	—

A hipótese nula, H_0 , irá ser rejeitada ao nível de significância α , se e só se $F_0 > F_{1-\alpha, v-1, N-v-b+1}$.

Em certos BIBD pode-se também desejar aprofundar o estudo dos efeitos dos blocos e para isso, impõe-se fazer uma diferente partição da soma de quadrados total, ou seja:

$$SQ_t = SQe + SQ_{trat} + SQb(aj)$$

Aqui, a soma de quadrados dos tratamentos é não ajustada e a soma de quadrados dos blocos passa agora a ser ajustada.

Suponhamos agora um BIBD simétrico, para tal basta termos $b = v$. É fácil deduzir a fórmula para $SQb(aj)$.

Consideremos

$$Q'_j = y_{oj} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^v n_{ij} \cdot y_{io} \quad j = 1, 2, \dots, b$$

Como sendo os totais dos blocos ajustados, onde $\sum_j Q'_j = 0$

Logo,

$$SQtrat(aj) = \frac{r \sum_{j=1}^b (Q'_j)^2}{\lambda b}$$

Com

$$SQt \neq SQtrat(aj) + SQb(aj) + SQe$$

Este facto deve-se à existência de não ortogonalidade de tratamentos e blocos. Oliveira, T.A. (1994).

A fórmula para a soma de quadrados sem ajustamento, isto é a soma de quadrados para tratamentos ignorando os blocos, define-se por:

$$SQtrat = \sum_{i=1}^v \frac{y_{io}^2}{r} - \frac{y_{oo}^2}{N} \quad (3.3.17)$$

Assim sendo, a tabela da ANOVA, para BIBD simétricos, pode ser acrescentada da seguinte forma:

TABELA 3.2: ANOVA AJUSTADA INTRA-BLOCO - CASO BIBD SIMÉTRICO

Origem de Variação	Graus de Liberdade	Somas de Quadrados	Quadrados Médios	Razão de Variâncias
Tratamentos (ajustados)	$v - 1$	$\frac{k \sum_{j=1}^v (Q_j)^2}{\lambda v}$	$\frac{SQ_{trat}(aj)}{v - 1}$	$F_0 = \frac{QM_{trat}(aj)}{QMe}$
Tratamentos (ignorando os blocos)	$v - 1$	$\frac{\sum_i y_{io}^2}{r} - \frac{y_{oo}^2}{N}$	$\frac{SQ_{trat}}{v - 1}$	—
Blocos (ignorando os tratamentos)	$b - 1$	$\frac{\sum_{j=1}^b y_{oj}^2}{k} - \frac{y_{oo}^2}{N}$	$\frac{SQ_b}{b - 1}$	—
Blocos (ajustados)	$b - 1$	$\frac{r \sum_{j=1}^v (Q_j')^2}{\lambda b}$	$\frac{SQ_b(aj)}{b - 1}$	$F_1 = \frac{QM_b(aj)}{QMe}$
Erro	$N - v - b + 1$	$SQ_e = SQ_t - SQ_{trat}(aj) - SQ_b$	$\frac{SQ_e}{N - v - b + 1}$	—
Total	$N - 1$	$\sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b y_{ij}^2 - \frac{y_{oo}^2}{N}$	—	—

Regra de Decisão

Ao nível de significância α rejeita-se a hipótese nula:

$$H_0 : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_b = 0$$

Contra, a hipótese alternativa:

$$H_1 : \exists_j : \beta_j \neq 0$$

Se e só se $F_0 > F_{1-\alpha, v-1, N-v-b+1}$.

Já no caso de o BIBD não ser simétrico, a tabela a adoptar será a seguinte:

TABELA 3.3 - ANOVA - CASO BIBD, COMPLETO

Origem de Variação	Graus de Liberdade	Somas de Quadrados	Quadrados Médios	Razão de Variâncias
Tratamentos (ajustados)	$v - 1$	$\frac{k \sum_{j=1}^v (Q_i)^2}{\lambda v}$	$\frac{SQ_{trat}(aj)}{v - 1}$	$F_0 = \frac{QM_{trat}(aj)}{QMe}$
Tratamentos (ignorando os blocos)	$v - 1$	$\frac{\sum y_{io}^2}{r} - \frac{y_{oo}^2}{N}$	$\frac{SQ_{trat}}{v - 1}$	—
Blocos (ignorando os tratamentos)	$b - 1$	$\frac{\sum_{j=1}^b y_{oj}^2}{k} - \frac{y_{oo}^2}{N}$	$\frac{SQ_b}{b - 1}$	—
Blocos (ajustados)	$b - 1$	$SQ_b(aj)$	$\frac{SQ_b(aj)}{b - 1}$	$F_1 = \frac{QM_b(aj)}{QMe}$
Erro	$N - v - b + 1$	$SQ_e = SQ_t - SQ_{trat}(aj) - SQ_b$	$\frac{SQ_e}{N - v - b + 1}$	—
Total	$N - 1$	$\sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b y_{ij}^2 - \frac{y_{oo}^2}{N}$	—	—

Sendo que

$$SQ_b(aj) = k \sum_{i=1}^v \frac{Q_i^2}{\lambda v} + \sum_{j=1}^b \frac{y_{oj}^2}{k} + \sum_{i=1}^v \frac{y_{io}^2}{r}$$

O procedimento conclusivo é semelhante ao da tabela anterior.

3.2.2 ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS – MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Dado o modelo:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, i = 1, \dots, v; j = 1, \dots, b$$

e supondo as condições usuais, tem-se para as equações normais:

$$\mu: N \hat{\mu} + r \sum_{i=1}^v \hat{\tau}_i + k \sum_{j=1}^b n_{ij} \hat{\beta}_j = y_{oo}$$

$$\tau_i: r \hat{\mu} + r \hat{\tau}_i + \sum_{j=1}^b n_{ij} \hat{\beta}_j = y_{io} \quad i = 1, 2, \dots, v$$

$$\beta_j: k \hat{\mu} + k \hat{\tau}_i + \sum_{i=1}^v n_{ij} \hat{\tau}_i = y_{oj} \quad j = 1, 2, \dots, b$$

Impondo que

$$\sum \hat{\beta}_j = \sum \hat{\tau}_i = 0$$

obtem-se, a **média global**, ou seja:

$$\hat{\mu} = y_{..}$$

Obtemos ainda:

$$rk \hat{\tau}_i - r \hat{\tau}_i - \sum_{j=1}^b \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^v n_{ij} n_{hj} \hat{\tau}_h = ky_{io} - \sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj}$$

Como

$$Q_i = y_{io} - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj}, \quad i = 1, \dots, v$$

o 2º membro da equação fica igual a :

$$kQ_i$$

Ora, como

$$\sum_{j=1}^b n_{ij} n_{hj} = \lambda, \text{ se } h \neq i$$

e

$$n_{ij}^2 = n_{hj}^2, \text{ pois } n_{hj} = 0 \vee n_{hj} = 1$$

A equação fica equivalente a:

$$r(k-1)\hat{\tau}_i - \lambda \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^v \hat{\tau}_h = kQ_i \quad i = 1, \dots, v$$

Por último, é de frisar que

$$\sum_{i=1}^v \hat{\tau}_i = 0$$

o que implica que:

$$\sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^v \hat{\tau}_h = -\hat{\tau}_i$$

Substituindo na equação obtemos então:

$$r(k-1)\hat{\tau}_i - \lambda \left(-\hat{\tau}_i \right) = kQ_i \quad i = 1, \dots, v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r(k-1)\hat{\tau}_i + \lambda \left(\hat{\tau}_i \right) = kQ_i \quad i = 1, \dots, v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{\tau}_i [r(k-1) + \lambda] = kQ_i \quad i = 1, \dots, v$$

Ora como

$$r(k-1) = \lambda(v-1)$$

Então

$$\hat{\tau}_i [r(k-1) + \lambda] = kQ_i \quad i = 1, \dots, v$$

Equivale a

$$\hat{\tau}_i [\lambda(v-1) + \lambda] = kQ_i \Leftrightarrow \hat{\tau}_i [\lambda v - \lambda + \lambda] = kQ_i \Leftrightarrow \hat{\tau}_i \lambda v = kQ_i \quad \text{em que } i = 1, 2, \dots, v$$

O que fará com que as estimativas dos mínimos quadrados para os efeitos dos tratamentos num modelo de PBEI sejam definidas por:

$$\hat{\tau}_i = \frac{kQ_i}{\lambda v} \quad i = 1, 2, \dots, v$$

3.2.3 PESQUISAS A EFECTUAR APÓS ANOVA

Determinando que o factor em análise é de efeitos fixos, será relevante efectuar testes acerca dos valores médios dos tratamentos individuais. Empregando contrastes ortogonais estes devem ser aplicados aos $\{Q_i\}$ (totais dos tratamentos ajustados) preferencialmente aos totais dos tratamentos i .

Defina-se para contraste entre os tratamentos a expressão:

$$\psi = \sum_{i=1}^v c_i \tau_i$$

Então, num BIBD, iremos ter:

$$\psi = \frac{k \sum_{i=1}^v c_i \tau_i}{\lambda v}$$

Em que os c_i representam os coeficientes dos contrastes e onde é claro, $\sum_{i=1}^v c_i = 0$.

É de salientar que os totais de tratamentos ajustados não são independentes.

Para se achar a variância de Q_i , escreva-se $V(Q_i)$, utiliza-se um artifício de cálculo, ou seja, soma-se e subtrai-se por y_{io} , obtendo-se

$$kQ_i = (k-1)y_{io} - \left(\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} - y_{io} \right)$$

Note-se que a expressão:

$$\left(\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} - y_{io} \right)$$

é representativa da soma de $r(k-1)$ observações de outros tratamentos sem que seja o i -ésimo.

Assim, podemos escrever:

$$k^2 V(Q_i) = r(k-1)^2 \sigma^2 + r(k-1) \sigma^2$$

Logo, vem:

$$V(kQ_i) = V[(k-1)y_{io} - \left(\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} - y_{io} \right)] \Leftrightarrow V(kQ_i) = (k-1)^2 V\left(\sum_{i=1}^r y_{ij} \right) + V\left(\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} - y_{io} \right)$$

Pelo que,

$$k^2 V(Q_i) = (k-1)^2 V\left(\sum_{i=1}^r y_{ij}\right) + V\left(\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} - y_{io}\right)$$

$$k^2 V(Q_i) = (k-1)^2 r V(y_{ij.}) + r(k-1) \sigma^2 \Leftrightarrow$$

$$V(Q_i) = \frac{(k-1)^2 r \sigma^2 + r(k-1) \sigma^2}{k^2} \Leftrightarrow$$

$$V(Q_i) = \frac{r(k-1) \sigma^2 (k-1+1)}{k^2} \Leftrightarrow$$

Então concluímos que:

$$V(Q_i) = \frac{r(k-1) \sigma^2}{k}$$

Graças à simetria temos igualdade de covariâncias dos pares de Q_i, Q_j , para todo $i \neq j$.

Logo,

$$V\left(\sum_{i=1}^v Q_i\right) = v V(Q_i) + v(v-1) \text{Cov}(Q_h, Q_i)$$

$$v V(Q_i) = \frac{vr(k-1) \sigma^2}{k}$$

Então

$$v(v-1) \text{Cov}(Q_h, Q_i) = \frac{-vr(k-1) \sigma^2}{k}.$$

Podemos assim afirmar que:

$$\text{Cov}(Q_h, Q_i) = \frac{-r(k-1) \sigma^2}{k(v-1)}.$$

E uma vez que

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{(v-1)}$$

Então

$$Cov(Q_h, Q_i) = \frac{-\lambda \sigma^2}{k}$$

Finalmente, temos:

$$V\left(\hat{\tau}_h - \hat{\tau}_i\right) = \frac{2k \sigma^2}{\lambda v}$$

Relativamente aos contrastes de tratamentos:

$$\psi = c' \tau$$

Tem-se:

$$V\left(\hat{\psi}\right) = \frac{k^2}{\lambda^2 v^2} V(c' Q) = \frac{k^2 \sigma^2}{\lambda^2 v^2} \frac{\lambda v}{k} c' c \Leftrightarrow V\left(\hat{\psi}\right) = \frac{k \sigma^2}{\lambda v} \sum_{i=1}^v c_i^2$$

Pelo que testando os contrastes:

$$\left(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_j\right) \quad i \neq j, \quad c_i = 1, \quad c_j = -1 \quad \text{donde} \quad \sum_{i=1}^v c_i^2 = 2 \quad \text{e} \quad V(\tau_i - \tau_j) = \frac{2k \sigma^2}{\lambda v}.$$

A eficiência de um plano de blocos incompletos no qual cada tratamento ou variedade aparece r vezes é medida relativamente a um plano de blocos completos com o mesmo número de réplicas. Para um Plano de Bloco Completos com r observações para cada tratamento, tem-se:

$$V\left(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_j\right) = \frac{2\sigma^2}{r}.$$

Se, para um plano de blocos incompletos a média das variâncias de todos os contrastes

$\left(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_j\right)$ é dada por $\frac{2\sigma^2}{r}$, a eficiência do plano é definida como sendo $E = \frac{a}{r}$. Para um

BIBD temos que $a = \frac{\lambda v}{k}$ e, assim sendo, $E = \frac{\lambda v}{kr}$ (Oliveira, T.A. (1994)).

Obviamente que para qualquer plano $E < 1$.

Iremos agora proceder a outra abordagem da demonstração do resultado da variância da diferença entre contrastes estimados. Este resultado considera-se ser um dos alicerces e a razão pela qual os BIBD serem tão importantes.

Demonstração:

Assim:

$$V\left(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_j\right) = V\left(\hat{\tau}_i\right) - V\left(\hat{\tau}_j\right) - 2\text{cov}\left(\hat{\tau}_i \hat{\tau}_j\right)$$

Como,

$$\hat{\tau}_i = \frac{kQ_i}{\lambda v}$$

e

$$V\left(\hat{\tau}_i\right) = \frac{2k\sigma^2}{\lambda v} \left(\frac{r(k-1)}{k}\right) \sigma^2$$

e ainda,

$$\hat{\tau}_j = \frac{kQ_h}{\lambda v}$$

com

$$V\left(\hat{\tau}_j\right) = \frac{2k\sigma^2}{\lambda v} \left(\frac{r(k-1)}{k}\right) \sigma^2$$

E sendo

$$\text{cov}\left(\hat{\tau}_i \hat{\tau}_j\right) = \frac{k^2}{\lambda^2 v^2} \left(\frac{-\lambda \sigma^2}{k}\right) = \frac{k^2}{\lambda^2 v^2} \left(\frac{-\lambda}{k}\right) \sigma^2$$

Podemos assim escrever:

$$\begin{aligned} V\left(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_j\right) &= \\ &= \frac{k^2}{\lambda^2 v^2} \left[\frac{r(k-1)}{k} \sigma^2 + \frac{r(k-1)}{k} \sigma^2 - 2 \left(\frac{-\lambda}{k}\right) \sigma^2 \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{k^2 \sigma^2}{\lambda^2 v^2} \left[\frac{1}{k} (2r(k-1) + 2\lambda) \right]$$

Note-se que, recordando

$$\lambda v = r(k-1) + \lambda$$

$$\frac{(r(k-1) + \lambda)}{\lambda v} = 1$$

Por outro lado, sabemos que:

$$\lambda v = r(k-1) + \lambda \Leftrightarrow \lambda v - \lambda = r(k-1) \Leftrightarrow \lambda(v-1) = r(k-1)$$

Assim, podemos redigir a seguinte expressão:

$$V\left(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_j\right) =$$

$$= \frac{2k \sigma^2}{\lambda^2 v^2} [(r(k-1) + \lambda)] =$$

$$= \frac{2k \sigma^2}{\lambda v} \left[\frac{(r(k-1) + \lambda)}{\lambda v} \right] =$$

$$= \frac{2k \sigma^2}{\lambda v} \quad (c.q.d.)$$

3.2.4 ANÁLISE INTER-BLOCO PARA BIBD

Anteriormente contemplámos, na análise intra-bloco, que as diferenças entre blocos são suprimidas e que todos os contrastes nos efeitos de tratamentos podem ser expressos como comparações entre observações no mesmo bloco. Yates (1940) observou que, se os efeitos dos blocos são variáveis aleatórias não correlacionadas com média zero e variância $\sigma^2\beta$, seria então possível obter informação adicional sobre os efeitos de tratamentos τ_i , tendo este método de aquisição de informação suplementar sido denominado como Análise Inter-Bloco.

Consideremos os totais de blocos como uma compilação de b observações. De acordo com John (1971), o modelo a seguir para estas observações será:

$$y_{oj} = k\mu + \sum_{i=1}^v n_{ij}\tau_i + \left(k\beta_j + \sum_{j=1}^b (\varepsilon_{ij}) \right)$$

De referir que o termo que se encontra entre parêntesis pode-se considerar como sendo o erro ou resíduo e ao designá-lo por f_i .

Sabemos que $E(f_i) = 0$ e $\sigma^2(f_i) = V(f_i) = k^2\sigma_\varepsilon^2 + k^2\sigma_\eta^2$.

Ao minimizar a função dos Mínimos Quadrados, iremos encontrar os estimadores Inter-Bloco de μ e τ_i .

Assim, considerando:

$$L = \sum_{j=1}^b \left(y_{oj} - k\mu - \sum_{i=1}^v n_{ij}\tau_i \right)^2 = \sum_{j=1}^b \left(B_j - k\mu - \sum_{i=1}^v n_{ij}\tau_i \right)^2$$

passamos então deduzir as equações normais. Para tal, deriva-se a função L em ordem a cada uma das respectivas variáveis μ e τ_i :

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \Leftrightarrow 2 \left[\sum_{j=1}^b \left(y_{oj} - k\mu - \sum_{i=1}^v n_{ij}\tau_i \right) \right] \times \left[\sum_{j=1}^b \left(y_{oj} - k\mu - \sum_{i=1}^v n_{ij}\tau_i \right) \right]' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \left[\sum_{j=1}^b \left(y_{oj} - k\mu - \sum_{i=1}^v n_{ij}\tau_i \right) \right] \times \left[\sum_{j=1}^b \left(y_{oj} - k\mu - \sum_{i=1}^v n_{ij}\tau_i \right) \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \left[\sum_{j=1}^b \left(y_{oj} - k\mu - \sum_{i=1}^v n_{ij}\tau_i \right) \right] \times (-k) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2k \times \left[\sum_{j=1}^b \left(y_{oj} - k\mu - \sum_{i=1}^v n_{ij} \tau_i \right) \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2k = 0 \vee \sum_{j=1}^b \left(y_{oj} - k\mu - \sum_{i=1}^v n_{ij} \tau_i \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^b \left(y_{oj} - k\mu - \sum_{i=1}^v n_{ij} \tau_i \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^b y_{oj} - \sum_{j=1}^b k\mu - \sum_{j=1}^b \left(\sum_{i=1}^v n_{ij} \tau_i \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_{oo} = N\tilde{\mu} + r \sum_{i=1}^v \tilde{\tau}_i$$

Logo, podemos escrever:

$$\mu : N\tilde{\mu} + r \sum_{i=1}^v \tilde{\tau}_i = y_{oo} = G$$

De forma análoga chegaríamos ao valor estimado dos efeitos de tratamentos:

$$\tau_i : kr\tilde{\mu} + r\tilde{\tau} + \lambda \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^v \tilde{\tau}_p = \sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} = \sum_{j=1}^b n_{ij} B_j, i=1, \dots, v$$

Em que $\tilde{\mu}$ e $\tilde{\tau}_i$ designam os estimadores inter-bloco.

E, se aplicarmos a restrição $\sum_{i=1}^v \tilde{\tau}_i = 0$ iremos obter a seguinte solução:

$$\tilde{\mu} = y_{..}$$

Ou média global.

$$\tilde{\tau}_i = \frac{\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} - kr y_{..}}{r - \lambda}, i=1, \dots, v$$

Torna-se assim possível demonstrar que os estimadores inter-bloco $\left\{ \tilde{\mu} \right\}_{..}$ e intra-bloco $\left\{ \tilde{\tau}_i \right\}$

são não correlacionados, podendo até ser distintos um do outro.

3.2.5 ANÁLISE INTER-INTRA BLOCO PARA OS BIBD

Consideremos agora que queremos combinar os estimadores inter-bloco com os estimadores intra-bloco de modo a alcançar uma estimação simples não enviesada da variância para cada τ_i . É possível provar que ambos os estimadores de τ_i são não enviesados, assim como também se tem que:

$$V\left(\hat{\tau}_i\right) = \frac{k(v-1)\sigma^2}{\lambda v^2} \quad \text{Intra-Bloco}$$

$$V\left(\tilde{\tau}_i\right) = \frac{k(v-1)(\sigma^2 + k\sigma^2\beta)}{v(r-\lambda)} \quad \text{Inter-Bloco}$$

Pelo que, para estimar τ_i , usaremos agora uma combinação linear dos dois estimadores:

$$\tau_i^* = \alpha_1 \hat{\tau}_i + \alpha_2 \tilde{\tau}_i$$

Neste método de estimação, o estimador centrado τ_i^* de variância mínima não enviesado deve conter pesos, sejam:

$$\alpha_1 = \frac{u_1}{(u_1 + u_2)} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{u_2}{(u_1 + u_2)}$$

Em que,

$$u_1 = \frac{1}{V\left(\hat{\tau}_i\right)} \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{V\left(\tilde{\tau}_i\right)}$$

Pelo que substituindo em α_1 e α_2 obtemos os valores de:

$$\alpha_1 = \frac{u_1}{(u_1 + u_2)} = \frac{\frac{1}{V(\hat{\tau}_i)}}{\frac{1}{V(\hat{\tau}_i)} + \frac{1}{V(\tilde{\tau}_i)}} = \frac{\frac{1}{V(\hat{\tau}_i)}}{\frac{V(\hat{\tau}_i) + V(\tilde{\tau}_i)}{V(\hat{\tau}_i) \times V(\tilde{\tau}_i)}} = \frac{V(\hat{\tau}_i) \times V(\tilde{\tau}_i)}{V(\hat{\tau}_i) \times [V(\hat{\tau}_i) + V(\tilde{\tau}_i)]} = \frac{V(\tilde{\tau}_i)}{V(\hat{\tau}_i) + V(\tilde{\tau}_i)}$$

E analogamente,

$$\alpha_2 = \frac{u_2}{(u_1 + u_2)} = \frac{\frac{1}{V(\tilde{\tau}_i)}}{\frac{1}{V(\hat{\tau}_i)} + \frac{1}{V(\tilde{\tau}_i)}} = \frac{\frac{1}{V(\tilde{\tau}_i)}}{\frac{V(\hat{\tau}_i) + V(\tilde{\tau}_i)}{V(\hat{\tau}_i) \times V(\tilde{\tau}_i)}} = \frac{V(\hat{\tau}_i) \times V(\tilde{\tau}_i)}{V(\tilde{\tau}_i) \times [V(\hat{\tau}_i) + V(\tilde{\tau}_i)]} = \frac{V(\hat{\tau}_i)}{V(\hat{\tau}_i) + V(\tilde{\tau}_i)}$$

Assim sendo, o melhor estimador combinado é dado por:

$$\begin{aligned} \tau_i^* &= \frac{V(\tilde{\tau}_i)}{V(\hat{\tau}_i) + V(\tilde{\tau}_i)} \hat{\tau}_i + \frac{V(\hat{\tau}_i)}{V(\hat{\tau}_i) + V(\tilde{\tau}_i)} \tilde{\tau}_i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tau_i^* &= \frac{\hat{\tau}_i \frac{k(v-1)}{v(r-\lambda)} (\sigma^2 + k\sigma_\beta^2) + \tilde{\tau}_i \frac{k(v-1)}{\lambda v^2} \sigma^2}{\frac{k(v-1)\sigma^2}{\lambda v^2} + \frac{k(v-1)(\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)}{v(r-\lambda)}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \tau_i^* &= \frac{\hat{\tau}_i \frac{k(v-1)(\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)}{v(r-\lambda)} + \tilde{\tau}_i \frac{k(v-1)\sigma^2}{\lambda v^2}}{\frac{k(v-1)\sigma^2}{\lambda v^2} + \frac{k(v-1)(\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)}{v(r-\lambda)}} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{\hat{\tau}_i \frac{k(v-1)(\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)\lambda v^2}{v(r-\lambda)\lambda v^2} + \tilde{\tau}_i \frac{k(v-1)\sigma^2 v(r-\lambda)}{\lambda v^2 v(r-\lambda)}}{\frac{v(r-\lambda)k(v-1)\sigma^2}{\lambda v^2 v(r-\lambda)} + \frac{\lambda v^2 k(v-1)(\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)}{\lambda v^2 v(r-\lambda)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{\hat{\tau}_i \frac{k(v-1)(\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)\lambda v^2}{v(r-\lambda)\lambda v^2} + \tilde{\tau}_i \frac{k(v-1)\sigma^2 v(r-\lambda)}{\lambda v^2 v(r-\lambda)}}{\frac{v(r-\lambda)k(v-1)\sigma^2 + \lambda v^2 k(v-1)(\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)}{\lambda v^2 v(r-\lambda)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{\hat{\tau}_i \frac{k(v-1)(\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)\lambda v^2}{v(r-\lambda)k(v-1)\sigma^2 + \lambda v^2 k(v-1)(\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)} + \tilde{\tau}_i \frac{k(v-1)\sigma^2 v(r-\lambda)}{v(r-\lambda)k(v-1)\sigma^2 + \lambda v^2 k(v-1)(\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)}}{\frac{v(r-\lambda)k(v-1)\sigma^2 + \lambda v^2 k(v-1)(\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)}{\lambda v^2 v(r-\lambda)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{k(v-1)v \left[\hat{\tau}_i (\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)\lambda v + \tilde{\tau}_i \sigma^2 (r-\lambda) \right]}{k(v-1)v \left[(r-\lambda)\sigma^2 + \lambda v (\sigma^2 + k\sigma_\beta^2) \right]} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{\hat{\tau}_i (\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)\lambda v + \tilde{\tau}_i \sigma^2 (r-\lambda)}{(r-\lambda)\sigma^2 + \lambda v (\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)}$$

E, como vimos que:

$$\hat{\tau}_i = \frac{kQ_i}{\lambda v} \quad i = 1, 2, \dots, v$$

E que:

$$\tilde{\tau}_i = \frac{\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} - kr y_{..}}{r - \lambda} \quad i = 1, 2, \dots, v$$

Então podemos escrever:

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{\frac{kQ_i}{\lambda v}(\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)\lambda v + \frac{\sum_{j=1}^b n_{ij}y_{oj} - kr y_{..}}{r - \lambda} \sigma^2 (r - \lambda)}{(r - \lambda)\sigma^2 + \lambda v (\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{kQ_i(\sigma^2 + k\sigma_\beta^2) + \left(\sum_{j=1}^b n_{ij}y_{oj} - kr y_{..}\right)\sigma^2}{(r - \lambda)\sigma^2 + \lambda v (\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)} \quad i = 1, 2, \dots, v$$

Não é conveniente usar τ_i^* para estimar τ_i pois as variâncias σ^2 e σ_β^2 são desconhecidas, Oliveira, T. A. (1994).

Assim, é usual estimarem-se σ^2 e σ_β^2 a partir dos dados e substituir estes parâmetros pelas respectivas estimativas. Pelo que a estimativa usada para σ^2 é QMe da análise de variância intra-bloco.

Para σ_β^2 a estimativa encontra-se através do $QMb(aj)$.

Concluimos então, que em geral para um BIBD

$$QMb(aj) = \frac{k \sum_{i=1}^v \left(\frac{Q_i^2}{\lambda v} \right) + \sum_{j=1}^b \left(\frac{y_{oj}^2}{k} \right) - \sum_{i=1}^v \left(\frac{y_{io}^2}{r} \right)}{b - 1}$$

E tem-se que:

$$E[QMb(aj)] = \sigma^2 + \frac{v(r-1)}{b-1} \sigma_\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [E[QMb(aj)] - \sigma^2] = \frac{v(r-1)}{b-1} \sigma_\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{[E[QMb(aj)] - \sigma^2](b-1)}{v(r-1)} = \sigma_\beta^2 \Leftrightarrow e \quad \text{como} \quad \sigma^2 = QMe \quad \text{e se então, } QMb(aj) > QMe$$

$$\text{então o estimador de } \hat{\sigma}_\beta^2 \quad \text{será:} \quad \hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{[QMb(aj) - QMe](b-1)}{v(r-1)}$$

Para o caso $QMb(aj) \leq QMe$ fazemos $\hat{\sigma}_\beta^2 = 0$.

Este resultado permite-nos chegar finalmente à expressão do estimador combinado:

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{kQ_i \left(\hat{\sigma}^2 + k \hat{\sigma}_\beta^2 \right) + \left(\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} - kry.. \right) \hat{\sigma}^2}{(r - \lambda) \hat{\sigma}^2 + \lambda v \left(\hat{\sigma}^2 + k \hat{\sigma}_\beta^2 \right)} \quad se \ \hat{\sigma}_\beta^2 > 0$$

e,

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{y_{io} - \left(\frac{1}{v} \right) y_{oo}}{r} \quad se \ \hat{\sigma}_\beta^2 = 0.$$

De facto, se $\hat{\sigma}_\beta^2 = 0$ então:

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{kQ_i \left(\hat{\sigma}^2 + 0 \right) + \left(\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} - kry.. \right) \hat{\sigma}^2}{(r - \lambda) \hat{\sigma}^2 + \lambda v \left(\hat{\sigma}^2 + 0 \right)}$$

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{kQ_i \hat{\sigma}^2 + \left(\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} - kry.. \right) \hat{\sigma}^2}{(r - \lambda) \hat{\sigma}^2 + \lambda v \hat{\sigma}^2} \quad \Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{\left[kQ_i + \left(\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} - kry.. \right) \right] \hat{\sigma}^2}{[(r - \lambda) + \lambda v] \hat{\sigma}^2} \quad se \ \hat{\sigma}_\beta^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{kQ_i + \left(\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} - kry.. \right)}{(r - \lambda) + \lambda v} \quad se \ \hat{\sigma}_\beta^2 > 0$$

E, como $\Leftrightarrow Q_i = y_{io} - \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} \right)$ então temos :

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{k \left[y_{io} - \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} \right) \right] + \left(\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} - kry_{..} \right)}{(r - \lambda) + \lambda v}$$

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{ky_{io} - \left(\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} \right) + \sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} - kry_{..}}{(r - \lambda) + \lambda v} \quad \Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{k(y_{io} - ry_{..})}{r + \lambda(v - 1)}$$

Ora, como $\lambda(v - 1) = r(k - 1) \Leftrightarrow \lambda(v - 1) = rk - r \Leftrightarrow \Leftrightarrow \lambda(v - 1) + r = rk$, vem:

$$\Leftrightarrow \tau_{io}^* = \frac{k(y_{io} - ry_{..})}{rk} \quad \Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{y_{io} - ry_{..}}{r} \quad \Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{y_{io} - r \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{i=1}^v y_{ij}}{rv}}{r}$$

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{y_{io} - \frac{\sum_{j=1}^b \sum_{i=1}^v y_{ij}}{v}}{r}$$

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{y_{io} - \frac{y_{oo}}{v}}{r}$$

Capítulo 4

PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS COM REPETIÇÕES (BIBDR)

4.1 INTRODUÇÃO E NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

A importância da repetição de blocos nos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados e dos seus tópicos fundamentais é bem conhecida na literatura e são conhecidas aplicações relevantes em áreas como por exemplo a Agricultura, a Genética, a Indústria, as Ciências do Consumo Alimentar, a Biologia e a Criptografia.

Foody and Hedayat (1977) e Wynn (1977) destacam nos seus trabalhos que os Planos em Blocos Incompletos Equilibrados desempenham um papel fundamental nos contextos do Planeamento de Experiências e da Amostragem Controlada, particularmente se admitirem a repetição de blocos.

Muitos autores dedicam especial atenção aos BIBDR, nomeadamente pesquisas da análise da cardinalidade e multiplicidade dos blocos, condições de existência, construção, características particulares e aplicações. Destacamos, entre outros os trabalhos desenvolvidos por Van Lint (1973) e Foody and Hedayat (1977) e mais recentemente por Dobcsányi, Preece and Soicher (to appear). Hedayat and Li (1979), desenvolvem o método “trade-off” ou método de compensação, ainda hoje considerado um dos mais importantes métodos para a construção de BIBDR. No âmbito da repetição de blocos Constantine and Hedayat (1983), desenvolvem um estudo de planos completos com blocos de máxima multiplicidade. Hedayat and Hwang (1984), apresentam um estudo exaustivo das possíveis repetições de blocos nos casos particulares dos BIB(8,56,21,3,6) e BIB(10,30,9,3,2). Raghavarao, Federer and Schwager (1986) desenvolvem algumas das características que permitem a distinção entre os BIBDR. Hedayat, Landgev and Tonchev (1989) apresentam novos resultados no que respeita ao suporte dos BIBD. No trabalho de Hedayat, Stufken and Zhang (1995) estudam critérios de optimalidade para os BIBD e Gosh and Shrivastava (2001) focam o seu trabalho no estudo de uma classe particular dos BIBDR. Em Sousa e Oliveira (2004) é feita uma análise às cardinalidades dos BIBD(9,24,8,3,2) e em Oliveira e Sousa (2004) são estudados os

BIBD(12,44,11,3,2). Bailey and Cameron (to appear) desenvolvem uma família de BIBDR para grupos lineares gerais.

Como é sabido, atendendo a certos critérios e sob o modelo linear aditivo homocedástico usual, os BIBD são considerados planos óptimos, podendo por diversas razões ser desejável a consideração da repetição de blocos no plano. Destas razões apontamos as seguintes:

- Os custos da implementação podem diferir bastante recorrendo ou não à repetição de blocos;
- Por alguma razão especial o investigador experimental pode considerar que algumas combinações de tratamentos são preferíveis a outras;
- Pode ter de se evitar blocos com uma determinada composição;
- Pode haver a pretensão de diminuir o risco de perda de observações.

Outra razão importante para se recorrer à repetição de blocos num vasto número de aplicações tem a ver com o facto de que, apesar da expressão da variância de comparações para cada plano ser a mesma, o número de comparações de efeitos dos blocos com a mesma variância é diferente para BIBD considerando ou não a repetição de blocos.

Os BIBD com Repetição de Blocos (BIBDR) têm alguns estimadores de contrastes de blocos com variância mínima. Detalhes sobre esta temática são abordados em Oliveira, Ceranka and Graczyk (2006).

4.2 BIBD COM BLOCOS REPETIDOS

4.2.1 Introdução e definições

Se num BIBD há menos de b blocos distintos então o plano tem blocos repetidos. O conjunto de todos os blocos distintos num BIBD designa-se por suporte do plano sendo a sua cardinalidade b^* . A notação $\text{BIBD}(v,b,r,k,\lambda b^*)$ é usada para denotar um $\text{BIBD}(v,b,r,k,\lambda)$ com precisamente b^* blocos distintos no plano.

Considere um determinado BIBD, e seja B um bloco específico aleatoriamente seleccionado neste plano. Seja x_i , $i=0,1,\dots,k$ o número de blocos para além do próprio bloco B , que têm exactamente i variedades em comum com B .

Sousa e Oliveira (2004) desenvolvem as condições necessárias de existência dos BIBD para obter um limite para o número de blocos, de modo a que o plano admita a repetição de blocos.

Assim, admitamos que x_i , $i=0,1,...,k$ representa o número de blocos de um BIBD(v,b,r,k,λ) distintos de um bloco B seleccionado aleatoriamente entre os repetidos e com exactamente i variedades em comum com B. Sabe-se que:

$$\sum_{i=0}^k x_i = b - 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^k C_1^i x_i = k(r-1) \quad \text{e} \quad \sum_{i=2}^k C_2^i x_i = \frac{k(k-1)(\lambda-1)}{2}$$

Mais ainda, sabemos que os BIB obedecem às condições:

- i. $n = rv = bk$;
- ii. $r(k-1) = \lambda(v-1)$
- iii. $b \geq v$

Oliveira, T. A. (1999) demonstrou que se tem:

$$b \geq \frac{(k-1)(k-2)}{2} + 1 + k(r-1) - \frac{k(k-1)(\lambda-1)}{2}$$

Em Oliveira T.A. (1999) são ainda apresentados parâmetros para possíveis BIBDR para os casos particulares $k=3$, considerando $5 \leq v \leq 40$, $\lambda \leq 10$ e $b \leq 200$, $k=4$ com $8 \leq v \leq 40$, $\lambda \leq 10$ e $b \leq 200$ e $k=5$ com $13 \leq v \leq 40$, $\lambda \leq 10$ e $b \leq 200$. Estes parâmetros atendem aos resultados do algoritmo implementado nesse trabalho, obedecendo às condições de existência dos BIBDR desenvolvidas.

4.2.2 Limites das cardinalidades e multiplicidade dos blocos

Relativamente aos limites para b^* podemos encontrar na literatura uma vasta investigação. Foody and Hedayat (1977) estabeleceram limites para b^* , nomeadamente chegando à expressão $b_{\min}^* \geq \frac{b}{\lambda}$ onde b_{\min}^* representa a dimensão mínima de suporte para um BIBD baseado em v e k . Para casos particulares com $b < b_{\min}^*$ e utilizando a desigualdade de Mann(1969), Hedayat, Landgev and Tonchev (1989) obtiveram um limite mais restritivo:

$$b_{\min}^* \geq 2 \frac{v(v-1)}{k(k-1)}$$

A multiplicidade de um bloco é o número de vezes que o bloco ocorre no plano.

Se num BIBD existirem exactamente α blocos com multiplicidade i , exactamente β blocos com multiplicidade j , ..., e todos os outros blocos com multiplicidade 1 então o plano tem como padrão de multiplicidade $\alpha^i \beta^j \dots$.

Se na condução da experiência um bloco é consideravelmente menos dispendioso que outros, será de extrema importância repeti-lo um máximo número de vezes, desde que não se altere o critério de definição do BIBD.

Constantine and Hedayat (1983) apresentam a construção de planos completos com blocos de máxima multiplicidade e estabelecem a sua relevância no contexto da amostragem aleatória simples.

Dobcsányi, Preece and Soicher (to appear) apresentam, entre outros resultados, novos limites para a multiplicidade de um bloco em termos dos parâmetros de um BIBDR.

4.2.3 BIBDR: Classificação em famílias e alguns exemplos

Segundo Hedayat and Hwang (1984) os planos que cumprem as condições necessárias de existência, são agregados numa das seguintes famílias de Planos:

- Família 1

Planos cujos parâmetros b , r e λ têm um divisor comum e existe o BIBD($v, b/t, r/t, k, \lambda/t$) com $t > 1$

Exemplo: O BIBD(15,84,28,5,8) pertence a esta família pois existe o BIBD(15,42,14,5,4)

- Família 2

Planos cujos parâmetros b , r e λ têm um divisor comum, mas não existe o PBIE($v, b/t, r/t, k, \lambda/t$) com $t > 1$ um dos divisores comuns de b , r e λ .

Exemplo: O BIBD(15,42,14,5,4) pertence a esta família pois não existe o BIBD(15,21,7,5,2).

- Família 3

Planos cujos parâmetros b , r e λ são primos entre si.

Exemplo: O BIBD(9,12,8,6,5) pertence a esta família pois 12, 8 e 5 são primos entre si.

Com base em Oliveira, T. A. (1999), podemos concluir acerca da possibilidade de existência de blocos repetidos nos planos (caso existam os BIBD) com parâmetros apresentados nas tabelas 1,2 e 3, incluindo a respectiva classificação em Famílias.

Tabela 4.1- Parâmetros de possíveis BIBDR, dimensão de bloco 3, e classificação em famílias

v	b	r	k	λ	Família		v	b	r	k	λ	Família
5	10t	6t	3	3t	1		15	35t	7t	3	t	1
6	10t	5t	3	2t	1		16	80	15	3	2	3
7	7t	3t	3	t	1		16	80t	15t	3	2t	1
8	56	21	3	6	3		17	136	24	3	3	3
8	56t	21t	3	6t	1		17	136t	24t	3	3t	1
9	12t	4t	3	t	1		18	102	17	3	2	3
10	30	9	3	2	3		18	102t	17t	3	2t	1
10	30t	9t	3	2t	1		19	57t	9t	3	t	1
11	55	15	3	3	3		21	70t	10t	3	t	1
11	55t	15t	3	3t	1		22	154	21	3	2	3
12	44	11	3	2	3		22	154t	21t	3	2t	1
12	44t	11t	3	2t	1		24	184	23	3	2	3
13	26t	6t	3	t	1		24	184t	23t	3	2t	1
14	182	39	3	6	3		25	100t	12t	3	t	1
14	182t	39t	3	6t	1							

Tabela 4.2- Parâmetros de possíveis BIBDR, dimensão de bloco 4, e classificação em famílias

v	b	r	k	λ	Família		v	b	r	k	λ	Família
5	5t	4t	4	3t	1		16	20t	5t	4	t	1
6	15	10	4	6	3		17	68	16	4	3	3
6	15t	10t	4	6t	1		17	68t	16t	4	3t	1
7	7t	4t	4	2t	1		18	153	34	4	6	3
8	14t	7t	4	3t	1		18	153t	34t	4	6t	1
9	18t	8t	4	3t	1		19	57	12	4	2	3
10	15t	6t	4	2t	1		19	57t	12t	4	2t	1
11	55	20	4	6	3		20	95	19	4	3	3
11	55t	20t	4	6t	1		20	95t	19t	4	3t	1
12	33	11	4	3	3		21	105	20	4	3	3
12	33t	11t	4	3t	1		21	105t	20t	4	3t	1
13	13t	4t	4	t	1		22	77	14	4	2	3
14	91	26	4	6	3		22	77t	14t	4	2t	1
14	91t	26t	4	6t	1		24	138	23	4	3	3
15	105	28	4	6	3		25	50t	8t	4	t	1
15	105t	28t	4	6t	1		28	63t	9t	4	t	1

Tabela 4.3 - Parâmetros de possíveis BIBDR, dimensão de bloco 5, e classificação em famílias

v	b	r	K	λ	Família		v	b	r	K	λ	Família
6	6t	5t	5	4t	1		17	68	20	5	5	3
7	21	15	5	10	3		17	68t	20t	5	5t	1
7	21t	15t	5	10t	1		19	171	45	5	10	3
9	18	10	5	5	3		19	171t	45t	5	10t	1
9	18t	10t	5	5t	1		20	76	19	5	4	3
10	18	9	5	4	3		20	76t	19t	5	4t	1
10	18t	9t	5	4t	1		21	21t	5t	5	t	1
11	11t	5t	5	2t	1		25	30t	6t	5	t	1
13	39	15	5	5	3		26	130	25	5	4	3
13	39t	15t	5	5t	1		26	130t	25t	5	4t	1
15	21t	7t	5	2t	*		30	174	29	5	4	3
16	48	15	5	4	3		30	174t	29t	5	4t	1
16	48t	15t	5	4t	1							

*Não existe o BIBD(15,21,7,5,2) logo o BIBDR(15,42,14,5,4) pertence à família 2- Hedayat and Hwang (1984)

4.2.4 Breve revisão dos principais métodos de construção dos BIBDR

Desde o método inicial de Bose (1939), diversos métodos foram desenvolvidos para a construção de BIB Designs e alguns especialmente para os casos de BIB Designs admitindo a repetição de blocos. Foody and Hedayat(1977) apresentam diversas referencias a investigação prévia nesta área e mostram que o problema combinatorial da busca de BIBDR é equivalente ao problema algébrico de encontrar soluções para um conjunto de equações lineares homogêneas. Estes autores apresentam ainda a construção de BIB designs com $v=8$ e $k=3$, dimensões de suporte entre 22 e 55.

Um catálogo recente de BIB Designs com blocos repetidos da Família 3, para $r < 20$, pode ser encontrado em Dobcsányi, Preece and Soicher (to appear), preenchendo as faltas no trabalho iniciado em van Lint and Ryser(1972) e van Lint(1973).

Claro que a forma mais trivial de obter um BIBD com blocos repetidos é simplesmente recolher cópias de um plano existente. Por exemplo podemos ter um BIBDR(13,26,8,4,2) por duplicação do BIBD(13,13,4,4,1). É também muito importante a consideração dos planos complementares, particularmente para casos com k de grande dimensão. Como vimos o complementar de um BIBD(v, b, r, k, λ) é também um BIBD com b blocos, cada um de dimensão $v-k$. A existência de um BIBD com blocos de dimensão k implica portanto a existência de outro BIBD com dimensão de blocos $v-k$.

Assim, uma técnica simples para a construção de um BIBD a partir de outro é por substituição das variedades em cada bloco pelo conjunto de variedades que não estão no bloco (conjunto complementar).

No entanto, quando pretendemos desenvolver a análise de cardinalidade para um determinado plano tipo BIB Design, torna-se necessário recorrer a ferramentas mais sofisticadas, como o método Trade-Off.

4.2.5 O método “Trade-off” na construção de BIBDR

O método trade-off desenvolvido por Hedayat and Li (1979) é o mais importante usado na construção de BIBDR. A ideia básica é compensar ou trocar alguns blocos com outros blocos, sem perder as características gerais que definem um BIBD.

No Handbook of Combinatorial Designs (2006), Chap 60, Hedayat and Khosrovshah apresentam um capítulo dedicado inteiramente aos “Trades” .

O volume de um “trade” é a soma de todas as entradas positivas de um bloco no trade, e v e k são os parâmetros do trade. Se D e D^* são dois BIBD com os mesmos parâmetros v , k e λ , então $D-D^*$ será um (v, k) - trade.

Hedayat and Hwang (1984) chamam ao seguinte conjunto de blocos um $(v, 3)$ -trade de volume 4 para todo $v \geq 6$, desde que as 6 variedades (x, y, z, u, v, w) ocorram em cada conjunto de quatro blocos, de acordo com:

I	II
xyz	uvw
xuv	yzw
yuw	xzv
zvw	xyu

Se num plano os blocos do conjunto I forem substituídos pelos blocos do conjunto II, as propriedades de BIBD não se perdem. O plano resultante pode no entanto diferir do plano original no que respeita à dimensão do suporte.

Hedayat and Hwang (1984) usam o método trade-off na construção dos BIBDR(8,56,21,3,6) e BIBDR(10,30,9,3,2) com diferentes cardinalidades de suporte e apresentam uma solução para cada b^* possível.

4.2.6 Alguns exemplos de Construção de BIBDR

Exemplo 4.1)

Para 7 variedades consideremos os casos $k=3$ e $k=4$ e os BIBDR(7,14,6,3,2) e BIBDR(7,14,8,4,4). Podemos construir:

(i) Planos com diferentes cardinalidades

BIBDR (7,14,6,3,2| $b^*=13$)

125	236
127	246
136	247
137	345
145	347
146	567
235	567

BIBDR (7,14,6,3,2|b*=11)

123	247
123	256
145	257
145	346
167	347
167	356
246	357

(ii) Planos Complementares**BIBDR (7,14,6,3,2|b*=13)**

125	236
127	246
136	247
137	345
145	347
146	567
235	567

BIBDR (7,14,8,4,4|b*=13)

3467	1457
3456	1357
2457	1356
2456	1267
2367	1256
2357	1234
1467	1234

Se tivermos a construção das possíveis cardinalidades do BIBDR (v, b, r, k, λ) , podemos obter facilmente a construção para as possíveis cardinalidades do BIBDR com v variedades em b blocos de tamanho $v-k$.

Exemplo 4.2)

Os planos múltiplos de outros correspondem a planos uniformes. De acordo com Calinski and Kageyama (2003) este método designa-se por “juxtaposition method”.

A título exemplificativo tem-se para $k=3$ e $k=6$, BIBDR $(9,24,8,3,2)$ e BIBDR $(9,24,16,6,10)$

Considere i variedades, $i = 1, \dots, 9$.

Uma possível estrutura do BIBD $(9,12,4,3,1)$ será:

BIBD (9,12,4,3,1)

126	239	358
137	245	479
148	278	567
159	346	689

Assim qualquer BIBDR $(9,12t,4t,3,t)$, para $t \geq 2$, pode ser construído por cópias de um plano reduzido, BIBD $(9,12,4,3,1)$.

Uma forma simples de obter a construção de um BIBDR $(9,120,40,3,10)$ será por consideração de $b^*=12$ e repetindo um BIBD $(9,12,4,3,1)$ 10 vezes (juxtaposition).

Qualquer BIBDR $(9,24,8,3,2|b^*=12)$ pode ser obtido por simples duplicação de um BIBD $(9,12,4,3,1)$.

Vejamos ainda algumas considerações sobre os efeitos dos blocos no BIBD $(9,24,8,3,2)$.

Como é desejável, os BIBDR possuem alguns contrastes de blocos com variância mínima e para os casos particulares do BIBD $(9,24,8,3,2)$ quando se deseja comparar quaisquer dois

blocos do plano deparamo-nos com $\binom{24}{2}$ comparações possíveis. É resultado conhecido

Raghavarao et al (1986) que, $Var\left(\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_j\right) = \left[\frac{2}{k} + \frac{2(k-\alpha)}{v k \lambda}\right] \sigma^2$ com $\alpha = 0, 1, \dots, k$

Em que α são os tratamentos comuns entre quaisquer dois blocos.

Tem-se assim:

BIBD (9,24,8,3,2) – variância para o efeito dos blocos

$\alpha=0$	$\alpha=1$	$\alpha=2$	$\alpha=3$
$\frac{7}{9}\sigma^2$	$\frac{20}{27}\sigma^2$	$\frac{19}{27}\sigma^2$	$\frac{2}{3}\sigma^2$

Conclui-se portanto que BIBDR (9,24,8,3,2) com um máximo número de blocos repetidos, tem um máximo número de contrastes de blocos com variância mínima. Este é o caso do BIBDR (9,24,8,3,2lb*=12).

Exemplo 4.3)

Vejamos agora um exemplo de aplicação do método trade-off na construção de BIBDR com diferentes cardinalidades

Usando o método trade-off foram obtidos BIBDR(9,24,8,3,2) com diferentes cardinalidades. Tem-se:

BIBDR (9,24,8,3,2lb*=18)

BIBDR (9,24,8,3,2lb*=20)

TRADE

123	247	359		123	247	358
123	249	359		123	248	359
147	257	367	348→259	147	257	367
149	258	367	359→248	149	259	367
157	268	456	249→358	157	268	456
158	269	456	258→349	158	269	456
168	348	789		168	348	789
169	348	789		169	349	789

No Capítulo 5 deste trabalho será feita a análise estatística de uma aplicação do BIBDR (9,24,8,3,2lb*=20) constante na última tabela.



Capítulo 5

ANÁLISE ESTATÍSTICA DE UM BIBDR: APLICAÇÃO AO BIBDR (9,24,8,3,2|b*=20)

5.1. ANÁLISE ESTATÍSTICA

Neste capítulo abordamos um exemplo prático da análise estatística de um Plano em Blocos Incompletos Equilibrados com Repetições. Consideremos então que na tabela estão representados dados de uma suposta experiência em que determinado engenheiro informático se preocupa em compreender o efeito de um tratamento, aplicado a novas componentes electrónicas adequadas a PC's, na velocidade de acesso à memória. Pretende-se comparar 20 níveis desse mesmo tratamento, contudo o software disponível apenas dispõe de três peças às quais pode ser aplicada o tratamento.

A experiência foi delineada de acordo com a concretização de um Plano em Blocos Incompletos Equilibrados com repetições, o BIBDR (9,24,8,3,2| b*=20), cuja estrutura se obteve pelo Método Trade-off no capítulo anterior, recorde-se:

Tabela 5.1: BIBDR (9,24,8,3,2| b*=20)

123	247	358
123	248	359
147	257	367
149	259	367
157	268	456
158	269	456
168		
169	349	789

Elaborando o esquema de estrutura de acordo com as parcelas/variedades podemos construir a matriz que se representa em seguida.

Tabela 5.2: Esquema de estrutura do $BIBD(\nu = 9, b = 24, r = 8, k = 3, \lambda = 2)$

<i>Tratamentos</i> <i>Blocos</i>	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
B_1				–	–	–	–	–	–
B_2				–	–	–	–	–	–
B_3					–	–		–	–
B_4									
B_5									
B_6									
B_7									
B_8									
B_9									
B_{10}									
B_{11}									
B_{12}									
B_{13}									
B_{14}									
B_{15}									
B_{16}									
B_{17}									
B_{18}									
B_{19}									
B_{20}									
B_{21}									
B_{22}									
B_{23}									
B_{24}									

Legenda:

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Esquema 5.1: Blocos do BIBD ($v = 9, b = 24, r = 8, k = 3, \lambda = 2$)

Bloco 1 1 2 3	Bloco 2 1 2 3	Bloco 3 1 4 7
Bloco 4 1 4 9	Bloco 5 1 5 7	Bloco 6 1 5 8
Bloco 7 1 6 8	Bloco 8 1 6 9	Bloco 9 2 4 7
Bloco 10 2 4 8	Bloco 11 2 5 7	Bloco 12 2 5 9
Bloco 13 2 6 8	Bloco 14 2 6 9	Bloco 15 3 4 8
Bloco 16 3 4 9	Bloco 17 3 5 8	Bloco 18 3 5 9
Bloco 19 3 6 7	Bloco 20 3 6 7	Bloco 21 4 5 6
Bloco 22 4 5 6	Bloco 23 7 8 9	Bloco 24 7 8 9

Na tabela 5.3 constam os valores simulados para as observações resultantes da suposta experiência.

Tabela 5.3: Valores Simulados do BIBD ($\nu = 9, b = 24, r = 8, k = 3, \lambda = 2$)

<i>Tratamentos</i> <i>Blocos</i>	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	<i>Total Bloco</i>
B_1	10,5	13,2	14,5							38,2
B_2	12,3	13,4	15,8							41,5
B_3	10,8			16,5			10,5			37,8
B_4	10,8			18,2					19,1	48,1
B_5	11,3				17,5		12,4			41,2
B_6	11,2				15,7			15,7		42,6
B_7	10,7					16,3		12,7		39,7
B_8	10,2					15,7			12,5	38,4
B_9		15,4		11,7			10,2			37,3
B_{10}		15,2		12,4				15,2		42,8
B_{11}		13,4			16,4		10,4			40,2
B_{12}		17,2			17,5				12,4	47,1
B_{13}		16,8				14,4		14,3		45,5
B_{14}		12,9				11,2			14,2	38,3
B_{15}			14,2	16,3				13,4		43,9
B_{16}			16,3	15,7					15,9	47,9
B_{17}			17,6		13,3			16,4		47,3
B_{18}			10,7		13,4				14,1	38,2
B_{19}			16,9			15,3	11,6			43,8
B_{20}			10,7			14,5	11,2			36,4
B_{21}				15,3	14,4	13,7				43,4
B_{22}				13,6	15,8	12,7				42,1
B_{23}							11,6	15,8	15,3	42,7
B_{24}							12,9	18,2	16,6	47,7
<i>Total Trat.</i>	87,8	117,5	116,7	119,7	124	113,8	90,8	121,7	120,1	$y_{oo} = 1012,1$

Para testarmos se existem ou não diferenças significativas entre tratamentos e entre os PC's iremos proceder à análise de variância do plano. Impõe-se testar a hipótese nula de igualdade entre tratamentos.

É apresentada em anexo a folha de cálculo de Excel, com os cálculos auxiliares necessários.

Os nossos cálculos são baseados nas expressões:

$$SQ_t = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b (y_{ij})^2 - \frac{y_{oo}^2}{N}$$

$$SQ_b = \sum_{j=1}^b \frac{y_{oj}^2}{k} - \frac{y_{oo}^2}{N}$$

$$SQ_{trat}(aj) = \frac{k \sum_{j=1}^v (Q_i)^2}{\lambda_v}$$

$$Q_i = y_{io} - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^b n_{ij} \cdot y_{oj}$$

Comecemos então por calcular a soma de quadrados total:

$$SQ_t = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b (y_{ij})^2 - \frac{y_{oo}^2}{N} \Leftrightarrow SQ_t = 14.616,79 - \frac{(1012,10)^2}{72} \Leftrightarrow SQ_t = 389,757$$

Para a soma de quadrados dos blocos temos:

$$SQ_b = \sum_{j=1}^b \frac{y_{oj}^2}{k} - \frac{y_{oo}^2}{N} \Leftrightarrow SQ_b = \frac{\sum y_{oj}^2}{3} - \frac{1004,01}{72} \Leftrightarrow SQ_b = \frac{42.997,61}{3} - \frac{(1012,01)^2}{72}$$

$$\Leftrightarrow SQ_b = 105,503$$

Para a soma de quadrados dos tratamentos ajustados temos:

$$SQtrat(aj) = \frac{k \sum_{j=1}^v (Q_i)^2}{\lambda v} \Leftrightarrow$$

$$SQtrat(aj) = \frac{3}{2 \times 9} (21,367^2 + 7,2^2 + 4,3^2 + 5,267^2 + 9,967^2 + 4,6^2 + 18,233^2 + 4,3^2 + 3,967^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow SQtrat(aj) = 173,632$$

Como

$$Q_i = y_{io} - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^b n_{ij} \cdot y_{oj}$$

Então temos,

$$Q_1 = 87,8 - \frac{1}{3} (38,2 + 41,5 + 37,8 + 48,1 + 41,2 + 42,6 + 39,7 + 38,4) = 87,8 - 109,167 = -21,367$$

$$Q_2 = 117,5 - \frac{1}{3} (38,2 + 41,5 + 37,3 + 42,8 + 40,2 + 47,1 + 45,5 + 38,3) = 117,5 - 110,3 = 7,2$$

$$Q_3 = 116,7 - \frac{1}{3} (38,2 + 41,5 + 43,9 + 47,9 + 47,3 + 38,2 + 43,8 + 36,4) = 116,7 - 112,4 = 4,3$$

$$Q_4 = 119,7 - \frac{1}{3} (37,8 + 48,1 + 37,3 + 42,8 + 43,9 + 47,9 + 43,4 + 42,1) = 119,7 - 114,433 = 5,267$$

$$Q_5 = 124 - \frac{1}{3} (41,2 + 42,6 + 40,2 + 47,1 + 47,3 + 38,2 + 43,4 + 42,1) = 124 - 114,033 = 9,967$$

$$Q_6 = 113,8 - \frac{1}{3} (39,7 + 38,4 + 45,5 + 38,3 + 43,8 + 36,4 + 43,4 + 42,1) = 113,8 - 109,2 = 4,6$$

$$Q_7 = 90,8 - \frac{1}{3} (37,8 + 41,2 + 37,3 + 40,2 + 43,8 + 36,4 + 42,7 + 47,7) = 90,8 - 109,033 = -18,233$$

$$Q_8 = 121,7 - \frac{1}{3} (42,6 + 39,7 + 42,8 + 45,5 + 43,9 + 47,3 + 42,7 + 47,7) = 121,7 - 117,4 = 4,3$$

$$Q_9 = 120,1 - \frac{1}{3} (48,1 + 38,4 + 47,1 + 38,3 + 47,9 + 38,2 + 42,7 + 47,7) = 120,1 - 116,133 = 3,967$$

Em suma temos que:

$$Q_1 = -21,367 \quad Q_2 = 7,2 \quad Q_3 = 4,3 \quad Q_4 = 5,267 \quad Q_5 = 9,967 \quad Q_6 = 4,6$$

$$Q_7 = -18,233 \quad Q_8 = 4,3 \quad Q_9 = 3,967$$

Assim, o valor da **soma de quadrados** para o **erro** é dada por:

$$SQ_e = SQ_t - SQ_{trat} (aj) - SQ_b \Leftrightarrow$$

$$SQ_e = 389,757 - 173,632 - 105,503 \Leftrightarrow$$

$$SQ_e \cong 110,622$$

Procedemos de seguida à construção da Tabela de **Anova**.

Tabela 5.4: Tabela de ANOVA

Origem de Variação	Graus de Liberdade	Somas de Quadrados	Quadrados Médios	Razão de Variâncias
Tratamentos (ajustados)	$v - 1 = 9 - 1 = 8$	$k \sum_{j=1}^v (Q_i)^2 = 173,632$	$\frac{SQ_{trat}(aj)}{v - 1} = \frac{173,632}{8} = 21,704$	$F_0 = \frac{21,704}{4,587} = 7,847$
Blocos	$b - 1 = 24 - 1 = 23$	$\sum_{j=1}^b \frac{y_{oj}^2}{k} - \frac{y_{oo}^2}{N} = 105,503$	$\frac{SQ_b}{b - 1} = \frac{105,503}{23} \cong 4,587$	$F_1 = \frac{4,587}{2,766} = 1,658$
Erro	$N - v - b + 1 = 72 - 24 - 9 + 1 = 40$	$SQ_e = SQ_t - SQ_{trat} (aj) - SQ_b$ $SQ_e = 110,622$	$\frac{SQ_e}{N - v - b + 1} = \frac{110,622}{40} \cong 2,766$	—
Total	$N - 1 = 72 - 1 = 71$	$SQ_t = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^b (y_{ij})^2 - \frac{y_{oo}^2}{N} = 389,757$	—	—

Sabe-se que iremos rejeitar a hipótese nula de igualdade entre tratamentos se e só se:

- $F_0 > F_{b-1, N-v-b+1}$ ao nível de significância desejado.

Ao nível de significância de 5% tem-se:

$$RV_{TRAT(AJ)} = 7,847 > F_{8,40}(5\%) = 2,18$$

Ao nível de significância de 1% tem-se:

$$RV_{TRAT(AJ)} = 7,847 > F_{8,40}(1\%) = 2,99$$

Conclusão: Quer ao nível de significância de 5% quer ao nível de significância de 1% somos conduzidos à rejeição da hipótese nula de igualdade entre tratamentos ajustados.

No entanto, o mesmo não se conclui no caso dos blocos, pois não existem diferenças significativas entre blocos.

$$RV_{Blocos} = 1,658 < F_{23,40}(5\%) = 1,79$$

$$RV_{Blocos} = 1,658 < F_{23,40}(1\%) = 2,29$$

A fim de investigarmos a homogeneidade dos blocos, realizaremos uma segunda tabela de ANOVA, tendo em conta uma partição diferente da soma de quadrados total.

Assim, teremos:

$$SQ_t = SQ_{trat} + SQ_{blocos(aj.)} + SQ_e$$

Uma vez que o nosso BIBD não é simétrico usaremos:

$$SQ_{trat(ign.blocos)} = \sum_{i=1}^v \frac{y_{io}^2}{r} - \frac{y_{..}^2}{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow SQ_{trat(ign.blocos)} = \frac{115.268,05}{8} - \frac{(1012,1)^2}{72} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow SQ_{trat(ign.blocos)} = 14.408,50625 - \frac{1024144}{72} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow SQ_{trat(ign.blocos)} = 14.408,50625 - 14.224,22(2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow SQ_{trat(ign.blocos)} = 184,28403$$

$$SQb(aj) = k \sum_{i=1}^v \left(\frac{Q_i^2}{\lambda v} \right) + \sum_{j=1}^b \frac{y_{oj}^2}{k} - \sum_{i=1}^v \frac{y_{io}^2}{r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow SQb(aj) = \frac{3 \times 1.041,79}{2 \times 9} + \frac{42.997,61}{3} - \frac{115.268,05}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow SQb(aj) = 173,6316667 + 14.332,53667 - 14.408,50625 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow SQb(aj) = 97,6620837 \Leftrightarrow SQb(aj) \cong 97,662$$

$$\text{Como, } QMb(aj) = \frac{\left[k \sum_{i=1}^v \left(\frac{Q_i^2}{\lambda v} \right) + \sum_{j=1}^b \frac{y_{oj}^2}{k} - \sum_{i=1}^v \frac{y_{io}^2}{r} \right]}{(b-1)}$$

Então

$$QMb(aj) = \frac{97,662}{24-1} \Leftrightarrow QMb(aj) = \frac{97,662}{24-1} \Leftrightarrow QMb(aj) \cong 4,246$$

E, por observação da tabela 5.4. sabemos que:

$$QMe = 2,766$$

Então podemos construir a nova tabela da ANOVA no caso de um BIBD completo e não simétrico:

Tabela 5.5 : Tabela da ANOVA CASO BIBD COMPLETO

Origem de Variação	Graus de Liberdade	Somas de Quadrados	Quadrados Médios	Razão de Variâncias
Tratamentos (ajustados)	8	173,632	21,704	$F_0 = 7,847$
Tratamentos (ignorando os blocos)	8	184,284	23,035	—
Blocos (ignorando os tratamentos)	23	105,503	4,587	—
Blocos (ajustados)	23	97,662	4,246	$F_1 = \frac{4,246}{2,766} = 1,535$
Erro	$N - v - b + 1$	110,662	2,766	—
Total	$N - 1$	389,757	—	—

Ao nível de significância de 5% tem-se:

$$RV_{\text{TRAT(AJ)}} = 1,535 < F_{8,40}(5\%) = 2,18$$

Ao nível de significância de 1% tem-se:

$$RV_{\text{TRAT(AJ)}} = 1,535 < F_{8,40}(1\%) = 2,99$$

Conclusão: Quer ao nível de significância de 5% quer ao nível de significância de 1% somos conduzidos à não rejeição da hipótese nula de igualdade entre blocos ajustados, ou seja, não se encontram diferenças significativas entre os blocos. Logo podemos concluir que existe homogeneidade nos blocos.

5.2. ESTIMATIVA DOS MÍNIMOS QUADRADOS

$$\hat{\mu} = y_{..} = \frac{\sum \sum y_{ij}}{n} = \frac{1012.1}{72} = 14,057$$

E como,

$$\hat{\tau}_i = \frac{kQ_i}{\lambda v} \quad i = 1, 2, \dots, v$$

Então calculemos os respectivos valores para os efeitos dos tratamentos:

$$\hat{\tau}_1 = \frac{kQ_1}{\lambda v} \Leftrightarrow \hat{\tau}_1 = \frac{3(-21,367)}{2 \times 9} \Leftrightarrow \hat{\tau}_1 = -3,561$$

$$\hat{\tau}_2 = \frac{kQ_2}{\lambda v} \Leftrightarrow \hat{\tau}_2 = \frac{3(7,2)}{2 \times 9} \Leftrightarrow \hat{\tau}_2 = 1,2$$

$$\hat{\tau}_3 = \frac{kQ_2}{\lambda v} \Leftrightarrow \hat{\tau}_3 = \frac{3(4,3)}{2 \times 9} \Leftrightarrow \hat{\tau}_3 = 0,717$$

$$\hat{\tau}_4 = \frac{kQ_2}{\lambda v} \Leftrightarrow \hat{\tau}_4 = \frac{3(5,267)}{2 \times 9} \Leftrightarrow \hat{\tau}_4 = 0,878$$

$$\hat{\tau}_5 = \frac{kQ_2}{\lambda v} \Leftrightarrow \hat{\tau}_5 = \frac{3(9,967)}{2 \times 9} \Leftrightarrow \hat{\tau}_5 = 1,661$$

$$\hat{\tau}_6 = \frac{kQ_2}{\lambda v} \Leftrightarrow \hat{\tau}_6 = \frac{3(4,6)}{2 \times 9} \Leftrightarrow \hat{\tau}_6 = 0,767$$

$$\hat{\tau}_7 = \frac{kQ_2}{\lambda v} \Leftrightarrow \hat{\tau}_7 = \frac{3(-18,233)}{2 \times 9} \Leftrightarrow \hat{\tau}_7 = -3,039$$

$$\hat{\tau}_8 = \frac{kQ_2}{\lambda v} \Leftrightarrow \hat{\tau}_8 = \frac{3(4,3)}{2 \times 9} \Leftrightarrow \hat{\tau}_8 = 0,717$$

$$\hat{\tau}_9 = \frac{kQ_2}{\lambda v} \Leftrightarrow \hat{\tau}_9 = \frac{3(3,967)}{2 \times 9} \Leftrightarrow \hat{\tau}_9 = 0,661$$

5.3 RESTABELECIMENTO DA INFORMAÇÃO INTERBLOCO

Seja então,

$$\tilde{\mu} = \hat{\mu} = y_{..} = \frac{1012.1}{72} = 14,057$$

$$\tilde{\tau}_i = \frac{\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} - kr y_{..}}{r - \lambda}, \quad i = 1, \dots, v$$

$$\tilde{\tau}_1 = \left[327,501 - \frac{1012.1}{72} \right] \div (8 - 2) = [327,501 - 337,367] \div 6 = -1,644$$

$$\tilde{\tau}_2 = \left[330,9 - \frac{1012.1}{72} \right] \div (8 - 2) = [330,9 - 337,367] \div 6 = -1,078$$

$$\tilde{\tau}_3 = \left[337,2 - \frac{1012.1}{72} \right] \div (8 - 2) = [337,2 - 337,367] \div 6 = -0,167$$

$$\tilde{\tau}_4 = \left[343,299 - \frac{1012.1}{72} \right] \div (8 - 2) = [343,299 - 337,367] \div 6 = 0,989$$

$$\tilde{\tau}_5 = \left[342,099 - \frac{1012.1}{72} \right] \div (8 - 2) = [342,099 - 337,367] \div 6 = 0,789$$

$$\tilde{\tau}_6 = \left[327,6 - \frac{1012.1}{72} \right] \div (8 - 2) = [327,6 - 337,367] \div 6 = -1,628$$

$$\tilde{\tau}_7 = \left[327,099 - \frac{1012.1}{72} \right] \div (8 - 2) = [327,099 - 337,367] \div 6 = -1,711$$

$$\tilde{\tau}_8 = \left[352,2 - \frac{1012.1}{72} \right] \div (8 - 2) = [352,2 - 337,367] \div 6 = 2,472$$

$$\tilde{\tau}_9 = \left[348,339 - \frac{1012.1}{72} \right] \div (8 - 2) = [348,339 - 337,367] \div 6 = 1,827$$

5.4 COMBINAÇÃO LINEAR DOS ESTIMADORES

Iremos agora ver a combinação linear dos dois estimadores calculados anteriormente, ou seja,

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{kQ_i(\sigma^2 + k\sigma_\beta^2) + \left(\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} - kr y_{..}\right) \sigma^2}{(r - \lambda)\sigma^2 + \lambda v (\sigma^2 + k\sigma_\beta^2)} \quad i = 1, 2, \dots, v$$

Sabemos que, $\sigma^2 = QMe = 2,766$.

Logo, por observação da tabela 5.5 vem que

$$\sigma^2 = QMe = 2,766$$

E, como $QMb(aj) > QMe$ então o estimador de

$$\hat{\sigma}_\beta^2 \text{ será: } \hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{[QMb(aj) - QMe](b - 1)}{v(r - 1)} = \frac{[4,246 - 2,766]}{9 \times (8 - 1)} \cong 0,54$$

Este resultado permite-nos chegar finalmente à expressão do estimador combinado:

$$\Leftrightarrow \tau_i^* = \frac{kQ_i\left(\hat{\sigma}^2 + k\hat{\sigma}_\beta^2\right) + \left(\sum_{j=1}^b n_{ij} y_{oj} - kry_{..}\right) \hat{\sigma}^2}{(r - \lambda)\hat{\sigma}^2 + \lambda v \left(\hat{\sigma}^2 + k\hat{\sigma}_\beta^2\right)} \quad \text{se } \hat{\sigma}_\beta^2 > 0$$

$$\begin{aligned} \tau_1^* &= \left[\frac{3 \times (-21,367) \times 3,306 + (327,501 - 337,367) \times 2,766}{2,766 \times (8 - 2) + 2 \times 8 \times (2,766 + 0,54)} \right] = \\ &= \frac{-211,918 + (-9,866) \times 2,766}{69,492} = \frac{-239,207356}{69,492} = -3,442 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_2^* &= \left[\frac{3 \times (7,2) \times 3,306 + (330,9 - 337,367) \times 2,766}{2,766 \times (8 - 2) + 2 \times 8 \times (2,766 + 0,54)} \right] = \\ &= \frac{71,4096 + (-6,467) \times 2,766}{69,492} = \frac{53,521878}{69,492} = 0,77 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_3^* &= \left[\frac{3 \times (4,3) \times 3,306 + (337,2 - 337,367) \times 2,766}{2,766 \times (8 - 2) + 2 \times 8 \times (2,766 + 0,54)} \right] = \\ &= \frac{42,6474 + (-0,167) \times 2,766}{69,492} = \frac{42,185478}{69,492} = 0,607\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_4^* &= \left[\frac{3 \times (5,267) \times 3,306 + (343,299 - 337,367) \times 2,766}{2,766 \times (8 - 2) + 2 \times 8 \times (2,766 + 0,54)} \right] = \\ &= \frac{52,238106 + (5,932) \times 2,766}{69,492} = \frac{68,646018}{69,492} = 0,988\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_5^* &= \left[\frac{3 \times (9,967) \times 3,306 + (342,099 - 337,367) \times 2,766}{2,766 \times (8 - 2) + 2 \times 8 \times (2,766 + 0,54)} \right] = \\ &= \frac{98,852706 + (4,732) \times 2,766}{69,492} = \frac{111,941418}{69,492} = 1,61\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_6^* &= \left[\frac{3 \times (4,6) \times 3,306 + (327,6 - 337,367) \times 2,766}{2,766 \times (8 - 2) + 2 \times 8 \times (2,766 + 0,54)} \right] = \\ &= \frac{45,6228 + (-9,767) \times 2,766}{69,492} = \frac{18,607278}{69,492} = 0,268\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_7^* &= \left[\frac{3 \times (-18,233) \times 3,306 + (327,099 - 337,367) \times 2,766}{2,766 \times (8 - 2) + 2 \times 8 \times (2,766 + 0,54)} \right] = \\ &= \frac{-180,834894 + (-10,268) \times 2,766}{69,492} = \frac{-209,236182}{69,492} = -3,011\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_8^* &= \left[\frac{3 \times (4,3) \times 3,306 + (352,2 - 337,367) \times 2,766}{2,766 \times (8 - 2) + 2 \times 8 \times (2,766 + 0,54)} \right] = \\ &= \frac{42,6474 + (14,833) \times 2,766}{69,492} = \frac{83,675478}{69,492} = 1,204\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_9^* &= \left[\frac{3 \times (3,967) \times 3,306 + (348,399 - 337,367) \times 2,766}{2,766 \times (8 - 2) + 2 \times 8 \times (2,766 + 0,54)} \right] = \\ &= \frac{39,344706 + (11,032) \times 2,766}{69,492} = \frac{69,859218}{69,492} = 1,005\end{aligned}$$

5.5 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE COMPARAÇÃO MÚLTIPLA DE TUCKEY

Na análise de um problema quando somos conduzidos à rejeição da hipótese nula de igualdade de tratamentos devemos enveredar esforços no sentido de estudar as diferenças detectadas. Assim, têm sido desenvolvidos os mais variados métodos de comparação múltipla, dos quais destacamos o método de Scheffé, o método de Duncan, o método de Bonferroni e o método de Tuckey.

Neste problema de aplicação optamos por usar o método de comparação múltipla de Tuckey, dado tratar-se de um problema envolvendo amostras de igual dimensão. Nesta situação o método de Tuckey é o mais adequado do que o método de Scheffé, que tem a desvantagem de ser um método conservador. Comparativamente com o método de Scheffé, o método de Tuckey conduz a intervalos de menor amplitude e portanto sendo mais preciso.

Considere-se um contraste de parâmetros $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_9$ como uma combinação linear $\sum c_i \tau_i$ tal que $\sum c_i = 0$. Assim toda a diferença $\tau_i - \tau_{i'}$ para $i \neq i'$ representa um contraste.

Com o método de Tuckey consegue-se obter intervalos de confiança simultâneos para toda a diferença $\tau_i - \tau_{i'}$ ($i \neq i'$).

Sabe-se que $1 - \alpha$ é a probabilidade de todas as $C_2^v = \frac{v!}{2!(v-2)!} = \frac{v(v-1) \times (v-2)!}{2 \times 1 \times (v-2)!} = \frac{v(v-1)}{2}$

diferenças $\tau_i - \tau_{i'}$ satisfazerem em simultâneo o intervalo de confiança para os contrastes.

Nesta situação particular temos $C_2^v = \frac{9(9-1)}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = \frac{72}{2} = 36$ contrastes.

No caso dos BIBD é resultado conhecido (Oliveira, T. A., 1994) que os intervalos de confiança simultâneos de Tuckey são dados por:

$$\left(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'} \right) - Q_{v,gle,\alpha} S \leq \tau_i - \tau_{i'} \leq \left(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'} \right) + Q_{v,gle,\alpha} S$$

Em que

$$S = \sqrt{\frac{kQ_{Merro}}{\lambda v}} \text{ e onde}$$

$Q_{v,gle,\alpha}$ = valor tabelado “Studentized Range”

No nosso caso particular: $Q_{9,40}(5\%) = 4.63$ e $Q_{9,40}(1\%) = 5.5$, sendo $S = \sqrt{\frac{3 \times 2,766}{2 \times 9}}$.

Pelo que, para 5% tem-se:

$$Q_{9,40}(5\%) * S = 4,63 \times 0,679 = 3,144$$

E, para 1% tem-se:

$$Q_{9,40}(1\%) * S = 5,5 \times 0,679 = 3,735$$

Sendo o intervalo de confiança a 5% dado por:

$$\left(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'} \right) - 3,144 \leq \tau_i - \tau_{i'} \leq \left(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'} \right) + 3,144$$

Para o intervalo de confiança a 1% tem-se:

$$\left(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'} \right) - 3,735 \leq \tau_i - \tau_{i'} \leq \left(\hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'} \right) + 3,735$$

Tabela 5.6: Tabela de Intervalos de Contrastes

Contrastes em Módulo		Intervalo dos Contrastes Tuckey (1%) (3,735)	Intervalo dos Contrastes Tuckey (5%) (3,144)
1 vs 2	$\tau_1 - \tau_2$	$-8,496 \leq \tau_1 - \tau_2 \leq -1,026$	$-7,905 \leq \tau_1 - \tau_2 \leq -1,617$
1 vs 3	$\tau_1 - \tau_3$	$-8,013 \leq \tau_1 - \tau_3 \leq -0,543$	$-7,422 \leq \tau_1 - \tau_3 \leq -1,134$
1 vs 4	$\tau_1 - \tau_4$	$-7,814 \leq \tau_1 - \tau_4 \leq -1,064$	$-7,583 \leq \tau_1 - \tau_4 \leq -1,295$
1 vs 5	$\tau_1 - \tau_5$	$-8,757 \leq \tau_1 - \tau_5 \leq -1,487$	$-8,366 \leq \tau_1 - \tau_5 \leq -2,078$
1 vs 6	$\tau_1 - \tau_6$	$-8,063 \leq \tau_1 - \tau_6 \leq -0,593$	$-7,472 \leq \tau_1 - \tau_6 \leq -1,184$
1 vs 7	$\tau_1 - \tau_7$	$-4,257 \leq \tau_1 - \tau_7 \leq 3,213$	$-3,666 \leq \tau_1 - \tau_7 \leq 2,622$
1 vs 8	$\tau_1 - \tau_8$	$-8,013 \leq \tau_1 - \tau_8 \leq 0,543$	$-7,422 \leq \tau_1 - \tau_8 \leq 1,134$

Tabela 5.6: Tabela de Intervalos de **Contrastes** (continuação):

Contrastes		Intervalo dos Contrastes		Intervalo dos Contrastes	
	Tuckey	Tuckey (1%)	(3,735)	Tuckey (5%)	(3,144)
2					$-2,661 \leq \tau_2 - \tau_3 \leq 3,627$
vs	$\tau_2 - \tau_3$		$-2,892 \leq \tau_2 - \tau_3 \leq 3,858$		
3					
2					$-2,822 \leq \tau_2 - \tau_4 \leq 3,466$
vs	$\tau_2 - \tau_4$		$-3,413 \leq \tau_2 - \tau_4 \leq 4,057$		
4					
2					$-3,605 \leq \tau_2 - \tau_5 \leq 2,683$
vs	$\tau_2 - \tau_5$		$-3,836 \leq \tau_2 - \tau_5 \leq 2,914$		
5					
2					$-3,836 \leq \tau_2 - \tau_6 \leq 2,914$
vs	$\tau_2 - \tau_6$		$-2,942 \leq \tau_2 - \tau_6 \leq 3,808$		
6					
2					$1,095 \leq \tau_2 - \tau_7 \leq 7,383$
vs	$\tau_2 - \tau_7$		$0,864 \leq \tau_2 - \tau_7 \leq 7,614$		
7					
2					$-2,661 \leq \tau_2 - \tau_8 \leq 3,627$
vs	$\tau_2 - \tau_8$		$-2,892 \leq \tau_2 - \tau_8 \leq 3,858$		
8					
2					$-2,605 \leq \tau_2 - \tau_9 \leq 3,683$
vs	$\tau_2 - \tau_9$		$-2,836 \leq \tau_2 - \tau_9 \leq 3,914$		
9					
3					$-3,305 \leq \tau_3 - \tau_4 \leq 2,983$
vs	$\tau_3 - \tau_4$		$-3,536 \leq \tau_3 - \tau_4 \leq -3,214$		
4					
3					$-4,088 \leq \tau_3 - \tau_5 \leq 2,2$
vs	$\tau_3 - \tau_5$		$-4,319 \leq \tau_3 - \tau_5 \leq 2,431$		
5					
3					$-3,194 \leq \tau_3 - \tau_6 \leq 3,094$
vs					
6	$\tau_3 - \tau_6$		$-3,425 \leq \tau_3 - \tau_6 \leq 3,325$		

Tabela 5.6: Tabela de Intervalos de Contrastes (continuação):

		Intervalo dos Contrastes Tuckey (1%) (3,735)		Intervalo dos Contrastes Tuckey (5%) (3,144)
3vs				$0,612 \leq \tau_3 - \tau_7 \leq 6,9$
7	$\tau_3 - \tau_7$	$0,381 \leq \tau_3 - \tau_7 \leq 7,131$		
3				$-3,144 \leq \tau_3 - \tau_8 \leq 3,144$
vs				
8	$\tau_3 - \tau_8$	$-3,375 \leq \tau_3 - \tau_8 \leq 3,375$		
3				$-3,088 \leq \tau_3 - \tau_9 \leq 3,2$
vs				
9	$\tau_3 - \tau_9$	$-3,319 \leq \tau_3 - \tau_9 \leq 3,431$		
4				$-3,927 \leq \tau_4 - \tau_5 \leq 2,361$
vs				
5	$\tau_4 - \tau_5$	$-4,158 \leq \tau_4 - \tau_5 \leq 2,592$		
4				$-3,033 \leq \tau_4 - \tau_6 \leq 3,255$
vs				
6	$\tau_4 - \tau_6$	$-3,264 \leq \tau_4 - \tau_6 \leq 3,486$		
4				$0,773 \leq \tau_4 - \tau_7 \leq 7,061$
vs				
7	$\tau_4 - \tau_7$	$0,542 \leq \tau_4 - \tau_7 \leq 7,292$		
4				$-2,983 \leq \tau_4 - \tau_8 \leq 3,305$
vs				
8	$\tau_4 - \tau_8$	$-3,214 \leq \tau_4 - \tau_8 \leq 3,536$		
4				$-2,927 \leq \tau_4 - \tau_9 \leq 3,361$
vs				
9	$\tau_4 - \tau_9$	$-3,158 \leq \tau_4 - \tau_9 \leq 3,592$		
5				$-2,25 \leq \tau_5 - \tau_6 \leq 4,038$
vs				
6	$\tau_5 - \tau_6$	$-2,481 \leq \tau_5 - \tau_6 \leq 4,269$		
5				$1,556 \leq \tau_5 - \tau_7 \leq 7,844$
vs				
7	$\tau_5 - \tau_7$	$1,325 \leq \tau_5 - \tau_7 \leq 8,075$		
5				$-2,2 \leq \tau_5 - \tau_8 \leq 4,088$
vs				
8	$\tau_5 - \tau_8$	$-2,431 \leq \tau_5 - \tau_8 \leq 4,319$		
5				$-2,144 \leq \tau_5 - \tau_9 \leq 4,144$
vs				
9	$\tau_5 - \tau_9$	$-2,375 \leq \tau_5 - \tau_9 \leq 4,375$		
6				$1,556 \leq \tau_6 - \tau_7 \leq 7,844$
vs				
7	$\tau_6 - \tau_7$	$0,434 \leq \tau_6 - \tau_7 \leq 7,184$		
6vs				$-3,094 \leq \tau_6 - \tau_8 \leq 3,194$
8	$\tau_6 - \tau_8$	$-3,325 \leq \tau_6 - \tau_8 \leq 3,425$		
6				$-3,088 \leq \tau_6 - \tau_9 \leq 3,2$
vs				
9	$\tau_6 - \tau_9$	$-3,319 \leq \tau_6 - \tau_9 \leq 3,431$		

		Intervalo dos Contrastes Tuckey		Intervalo dos Contrastes Tuckey	
		(1%)	(3,735)	(5%)	(3,144)
Contrastes Tuckey					
7 vs 8	$\tau_7 - \tau_8$	$-7,131 \leq \tau_7 - \tau_8 \leq 0,381$		$-6,9 \leq \tau_7 - \tau_8 \leq -0,612$	
7 vs 9	$\tau_7 - \tau_9$	$-7,075 \leq \tau_7 - \tau_9 \leq -0,325$		$-6,844 \leq \tau_7 - \tau_9 \leq -0,556$	
8 vs9	$\tau_8 - \tau_9$	$-3,319 \leq \tau_8 - \tau_9 \leq 3,431$		$-3,088 \leq \tau_8 - \tau_9 \leq 3,2$	

Considera-se que as diferenças $\left| \hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'} \right|$ superiores a $Q_{9,40,5\%} S = 4,63 \times 0,679 = 3,144$ são significativas ao nível de 5%.

Assim como, se as diferenças $\left| \hat{\tau}_i - \hat{\tau}_{i'} \right|$ forem superiores a $Q_{9,40,1\%} S = 5,5 \times 0,679 = 3,735$ dizem-se que estas são significativas ao nível de 1%.

Na tabela que se segue, iremos apresentar a análise aos contrastes e representaremos por **Sig** e **N Sig**, respectivamente, as diferenças significativas e não significativas. Assim, tem-se:

Tabela 5.7: Tabela de Contrastes

	Contrastes em Módulo	Comparação Contraste Tuckey (1%) (3,735)	Comparação Contraste Tuckey (5%) (3,144)
1 vs 2	$\left \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2 \right = 4,761$	Sig	Sig
1 vs 3	$\left \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_3 \right = 4,278$	Sig	Sig
1 vs 4	$\left \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_4 \right = 4,439$	Sig	Sig
1 vs 5	$\left \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_5 \right = 5,222$	Sig	Sig
1 vs 6	$\left \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_6 \right = 4,328$	Sig	Sig
1 vs 7	$\left \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_7 \right = 0,522$	N Sig	N Sig
1 vs 8	$\left \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_8 \right = 4,278$	Sig	Sig
1 vs 9	$\left \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_9 \right = 4,222$	Sig	Sig
2 vs 3	$\left \hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_3 \right = 0,483$	N Sig	N Sig
2 vs 4	$\left \hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_4 \right = 0,322$	N Sig	N Sig

Tabela 5.7: Tabela de Contrastes (continuação)

	Contrastes em Módulo	Comparação Contraste Tuckey (1%) (3,735)	Comparação Contraste Tuckey (5%) (3,144)
2 vs 5	$\left \hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_5 \right = 0,461$	N Sig	N Sig
2 vs 6	$\left \hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_6 \right = 0,433$	N Sig	N Sig
2 vs 7	$\left \hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_7 \right = 4,239$	Sig	Sig
2 vs 8	$\left \hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_8 \right = 0,483$	N Sig	N Sig
2 vs 9	$\left \hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_9 \right = 0,539$	N Sig	N Sig
3 vs 4	$\left \hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_4 \right = 0,161$	N Sig	N Sig
3 vs 5	$\left \hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_5 \right = 0,944$	N Sig	N Sig
3 vs 6	$\left \hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_6 \right = 0,05$	N Sig	N Sig
3 vs 7	$\left \hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_7 \right = 3,756$	Sig	Sig
3 vs 8	$\left \hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_8 \right = 0$	NSig	NSig
3 vs 9	$\left \hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_9 \right = 0,056$	NSig	NSig
4 vs 5	$\left \hat{\tau}_4 - \hat{\tau}_5 \right = 0,783$	NSig	NSig

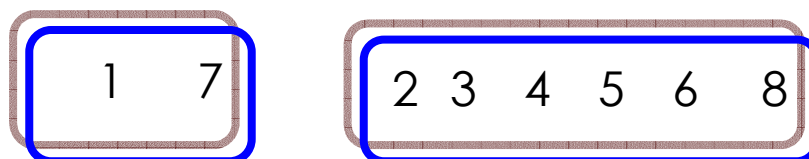
Tabela 5.7: Tabela de **Contrastes** (continuação)

	Contrastes em Módulo	Comparação Contraste Tuckey (1%) (3,735)	Comparação Contraste Tuckey (5%) (3,144)
4 vs 6	$\left \hat{\tau}_4 - \hat{\tau}_6 \right = 0,111$	NSig	NSig
4 vs 7	$\left \hat{\tau}_4 - \hat{\tau}_7 \right = 3,917$	Sig	Sig
4 vs 8	$\left \hat{\tau}_4 - \hat{\tau}_8 \right = 0,161$	NSig	NSig
4 vs 9	$\left \hat{\tau}_4 - \hat{\tau}_9 \right = 0,217$	NSig	NSig
5 vs 6	$\left \hat{\tau}_5 - \hat{\tau}_6 \right = 0,894$	NSig	NSig
5 vs 7	$\left \hat{\tau}_5 - \hat{\tau}_7 \right = 4,7$	Sig	Sig
5 vs 8	$\left \hat{\tau}_5 - \hat{\tau}_8 \right = 0,944$	NSig	NSig
5 vs 9	$\left \hat{\tau}_5 - \hat{\tau}_9 \right = 1$	NSig	NSig
6 vs 7	$\left \hat{\tau}_6 - \hat{\tau}_7 \right = 3,806$	Sig	Sig
6 vs 8	$\left \hat{\tau}_6 - \hat{\tau}_8 \right = 0,05$	NSig	NSig
6 vs 9	$\left \hat{\tau}_6 - \hat{\tau}_9 \right = 0,056$	NSig	NSig

Tabela 5.7: Tabela de **Contrastes** (continuação)

	Contrastes em Módulo	Comparação Contraste Tuckey (1%) (3,735)	Comparação Contraste Tuckey (5%) (3,144)
7 vs 8	$\left \hat{\tau}_7 - \hat{\tau}_8 \right = 3,756$	Sig	Sig
7 vs 9	$\left \hat{\tau}_7 - \hat{\tau}_9 \right = 3,7$	Sig	Sig
8 vs 9	$\left \hat{\tau}_8 - \hat{\tau}_9 \right = 0,056$	NSig	NSig

Conclusões:



Aos níveis de significância de **1%** e **5%** conclui-se que:

- Não há evidência de diferenças significativas entre os **tratamentos 1 e 7** e entre os **tratamentos 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9**;
- Os **tratamentos 1 e 7** diferem dos **restantes**.

Capítulo 6

PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS: APLICAÇÃO NO ÂMBITO DA GENÉTICA

6.1. ESTATÍSTICA E A GENÉTICA - RETROSPECTIVA HISTÓRICA E RECENTES PESQUISAS

Procuramos apresentar uma retrospectiva histórica de como as duas ciências, Estatística e Genética, se têm vindo a desenvolver ao longo de mais de um século de história, com muitos caminhos e objectivos comuns. Assim e antes de mais, tornou-se necessário começar a nossa abordagem pela introdução de alguns dos conceitos fundamentais em Genética - que advém de Genesis, nome grego que significa variação.

Numa primeira fase vamos descrever a evolução da Genética. Iremos evidenciar alguns trabalhos decisivos para a sua implementação, algumas técnicas cujo desenvolvimento foi categórico para o surpreendente avanço da Genética nas últimas décadas. São conhecidas aplicações, que actualmente se fazem em genética e, em particular a análise do DNA em áreas como a: medicina, agricultura, farmácia, história, identificação da paternidade, e também na análise forense que, nas últimas décadas introduziu, para o esclarecimento de alguns crimes, uma poderosa arma: as “impressões digitais” genéticas.

Tentamos descrever alguns conceitos gerais de uma forma sumária, contudo a própria linguagem da Genética obriga-nos à exploração de outros conceitos inerentes.

A transmissão de caracteres hereditários de uma geração às seguintes, suscitou desde sempre a curiosidade humana. Acompanhada durante muito tempo por algum mistério, só no século passado se começaram a desvendar alguns dos seus princípios básicos.

No século XIX diversos investigadores, nomeadamente Kolreuter, Garther, Helbert e Wichura, realizaram experiências com o objectivo de compreender e esclarecer os “enredos” da hereditariedade.

Mendel (1822-1884) iniciou o desvendar de alguns segredos centrando os seus estudos nas diferenças de um número limitado de caracteres de fácil distinção e não nas semelhanças entre indivíduos de diferentes gerações. Mendel realizou experiências com a chamada ervilha-de-cheiro, planta “*Pisum sativum*”. Trata-se de uma planta de fácil cultivo e a fertilização de qualquer flor feminina com o pólen de qualquer flor masculina consegue-se espontaneamente. Por outro lado, num curto espaço de tempo, produz sementes em elevado número e existem várias variedades destas plantas que se distinguem por alguns caracteres.

A ervilha-de-cheiro contém 34 variedades, desta Mendel escolheu 22 cujas características lhe pareciam oportunas e estudou-as isoladamente. Analisou um carácter de cada vez e não a planta como um todo; utilizou conhecimentos matemáticos para interpretar os resultados obtidos chegando a uma hipótese que explicava os resultados de vários cruzamentos. Comparativamente a outras investigações estes aspectos determinaram a diferença. Mendel progrediu para a grande descoberta usando “contagens” ao passo que os investigadores tentavam “medir” semelhanças.

Mendel realizou também experiências de poli-hibridismo, efectuando cruzamentos tendo em conta vários caracteres diferentes.

Gregor Mendel (1822-1884) publicou o seu estudo sobre a hereditariedade das ervilhas, em 1866 no jornal periódico de História Natural de Viena, onde abordou esta questão sob ponto de vista matemático. Além de observar o tipo de descendentes compostos, contabilizava ainda, a quantidade de cada tipo de descendente, reconhecendo que a proporção de cada descendente era indispensável. Porém, por várias questões biológicas, as suas experiências não podiam ser repetidas com qualquer tipo de planta. Mendel ao tentar realizá-las com uma variedade de chicória-do-café não obteve o sucesso esperado.

Gregor Mendel (1822-1884) foi ainda o responsável pela enunciação das bases científicas de modo a perceber as analogias e transformações surgindo assim uma nova ciência, a Genética, que deste modo veio complementar, desenvolver e dinamizar grande parte da Biologia familiarizando-se com variadas áreas do saber, nas quais é contemplada a Estatística.

Por volta de 1884, com a utilização de microscópios cada vez mais sofisticados, o estudo das células permitiu a identificação de corpos finos e compridos, que eram identificados durante a

divisão celular e ficavam armazenados no núcleo da célula. Por se corarem intensamente, estas estruturas foram denominadas: cromossomas.

A redescoberta dos trabalhos de Mendel surge em 1900. As contribuições de Mendel foram fundamentais para o contributo na Revolução ao nível da Biologia. De facto, Mendel: compreendeu que existem factores característicos que são transmitidos pelos pais à descendência; constatou ainda que estes factores ocorrem aos pares e que os descendentes recebem um factor de cada progenitor. Mais, Mendel descobriu ainda que a predominância destes factores era distinta e que só alguns se manifestavam quando se encontravam repetidos como duplos, enquanto outros mesmo em dose simples determinavam a sua característica. Mendel é responsável pela criação das leis da hereditariedade – Leis de Mendel: A Lei da Uniformidade dos híbridos; A Lei da Segregação e a Lei da Independência.

Ainda assim, os trabalhos de Mendel deixaram uma pertinente pergunta em aberto: O que eram os factores específicos, que podiam ser transmitidos de pais para filhos?

Para além de Mendel, o esclarecimento da transmissão, localização, e natureza dos caracteres hereditários associa-se na história da Genética, essencialmente a Morgan, Avery, Waston e Crick. Morgan, conseguiu revelar o mistério da localização, estabelecendo que os genes são responsáveis pela hereditariedade e se localizam nos cromossomas. Com o auxílio dos seus colaboradores e do uso da frequência estatística de determinados acontecimentos deduziu certas diferenças entre genes, mesmo não conhecendo a sua composição e natureza, inaugurando assim a cartografia genética.

Somente em 1902, Walter Sutton associaria Mendel aos cromossomas. Sutton percebeu que os cromossomas tinham muito em comum com os factores de Mendel, pois todos formavam pares nas células dos organismos, mas, nos gâmetas, apenas um dos componentes de cada par estava presente. Com experiências independentes, Theodor Boveri, chegou ao mesmo desfecho. Assim, a teoria de Sutton-Boveri confirmava que os factores de Mendel estavam nos cromossomas. Factores estes que passaram a chamar-se genes.

Fisher (1918-1939) com a introdução dos Planos com Blocos nas experiências agrícolas conduziu e estimulou essa estreita ligação existente entre a Estatística e a Genética. Relação esta, que hoje em dia, se traduz num assunto de enorme evidência ao nível da investigação científica pelas razões atrás anunciadas. Este tema chama para a atenção tanto dos cientistas da área da Genética como dos matemáticos e estatísticos, designadamente numa área específica designada de “Diallel Crosses”. Diversos estatísticos reconhecidos por trabalhos em várias áreas da Estatística e principalmente do Delineamento Experimental, debruçam-se

sobre o estudo destes problemas – “Cruzamentos Cromossômicos”, tradução que melhor se adapta à expressão “Diallel Crosses”.

Em 1944, Avery associa o ácido desoxirribonucleico – DNA – à hereditariedade e investiga a sua natureza. O gene passa a ser uma entidade física, correspondendo a um fragmento de DNA. Waston e Crick, em 1953, constituíram a estrutura da molécula de DNA sendo esta uma molécula, que é responsável pela reprodução do código genético, pela transmissão das características hereditárias de cada espécie, quer seja nas plantas, nos animais ou nos microrganismos.

F. Yates (1947) investiga a análise de variância dos cruzamentos cromossômicos numa aplicação a dados autênticos fornecidos pela “Welsh Plant Breeding Station”. Tais dados reportam-se a cruzamentos entre indivíduos da primeira geração e é então desenvolvida um ajustamento especial para estes casos da técnica de análise variância.

No âmbito da Genética, em 25 de Abril de 1953, James Watson e Francis Crick, publicaram na revista Nature o modelo da molécula de DNA, devido ao qual receberam o Prémio Nobel em 1962.

Hayman (1954) estabelece uma análise de variância de tabelas cromossômicas (diallel tables) a qual testa efeitos aditivos e dominantes nas tabelas cromossômicas obtidas a partir da prole de um cruzamento cromossômico. Hayman (1954b) expande ainda algumas noções ideológicas e investiga cruzamentos cromossômicos.

Griffing (1956a) expõe um formato universal de tratamento dos cruzamentos cromossômicos em enigmas de Hereditariedade Quantitativa, colaborando com métodos para, a partir de dados experimentais, testar e estimar parâmetros genéticos.

O assunto fascinante da Estatística aplicada à Genética suscita também o interesse de Kempthorne (1956b), que enuncia um pouco de teoria e regista certos pontos fracos existentes no método de análise geral. Similarmente enunciámos, da criação de Kempthorne (1957), o livro “An Introduction to Genetic Statist”. Em Kempthorne & Curnow (1961), deduziu-se que um cruzamento cromossômico completo (CCC) ‘equivale’ a um plano em blocos Incompletos Equilibrados. O assunto dos Cruzamentos Cromossômicos Parciais é analisado e discutido, tal como acontece com a respectiva análise de variância.

Em Gilbert (1958) a correspondência existente entre os Cruzamentos Cromossômicos Parciais (CCP) e os Planos em Blocos Incompletos com blocos de dimensão 2 é evidenciada.

Em 1959, Arthur Kornberg recebeu o Prémio Nobel pela descoberta da enzima e do processo de duplicação semi-conservativa do DNA. Em 1960 foi descoberto o RNA mensageiro.

Curnow (1963) efectua uma amostragem de cruzamentos cromossómicos e expõe alguns cruzamentos cromossómicos parciais derivados de blocos incompletos parcialmente equilibrados com duas classes de associação.

Fyfe & Gilbert (1963) expõem CCP derivados de blocos incompletos parcialmente equilibrados com 2 e 3 classes de associação (ou planos factoriais).

Hinkelmann & Kempthorne (1963) divulgam esta correspondência entre CCP e PBIBD para m classes de associação estabelecendo um método geral de análise destes planos.

Em 1966 a partir da molécula de RNA mensageiro, o código genético foi totalmente decifrado tendo sido elaborada uma tabela que é utilizada desde essa altura. Tal só foi possível tendo em conta todos os trabalhos dos vários pesquisadores.

Por volta de 1970-1973 iniciaram-se as pesquisas sobre tecnologia de DNA recombinante (engenharia genética).

Em Arya & Narain (1977) aprofundam e exemplificam a relação entre PBIBD e CCC.

Arya (1983) desenvolve um processo sistemático para estruturação de Planos em CCP mais flexíveis e eficazes e é produzida uma relação com alguns dos melhores planos. Define ainda os Cruzamentos Cromossómicos Cíclicos.

Em 1988 iniciou-se o projecto Genoma Humano, que foi concluído em 2003, identificando que maior parte da molécula de DNA não estava envolvida na codificação de proteínas, sendo, portanto designada como DNA 'lixo'.

Arya (1989) exhibe agora uma norma elementar para o reconhecimento de planos equivalentes ao caso da construção de CCP Cíclicos.

Agarwal and Das (1990) descrevem os PBI para CCP, a fim de fazer face a situações em que não é recomendável acomodar nos blocos casualizados tradicionais.

No trabalho desenvolvido por Crusio, Wim E. (1993): "Bi-multivariate Analyses of Diallel Crosses: a Tool for the Genetic Dissection of Neurobehavioral Phenotypes" efectua-se um ensaio, com aplicação em ratos, executado com a aplicação dos Diallel Crosses. Os autores consideram que a aproximação da correlação genética fornece uma ferramenta muito poderosa para a análise de relações causais entre fenótipos.

Gupta and Kageyama (1994) pesquisam a Optimalidade de Cruzamentos Cromossômicos Completos em Blocos Incompletos e expõem uma tábua dos próprios planos ótimos com 15 linhas. Os planos ótimos em cruzamentos cromossômicos completos são ainda caracterizados, assim como, utilizando os planos em blocos incompletos equilibrados hierárquicos, se obtêm os planos binários.

Sing and Hinkelmann (1995) aprofundam a contribuição para a investigação dos CCP em Blocos Incompletos.

Dey, A and Midha (1996) expõem planos em blocos ótimos para um modelo experimental particular de cruzamentos cromossômicos.

Ghosh and Divecha (1997) expõem a construção dos planos CCP de duas classes de associação em PBIPE., Demonstram que o estudo de um CCP poderá resumir-se à concepção de planos em blocos incompletos parcialmente equilibrados, realçando esta matéria com um exemplo.

Em Das et al (1998) é apresentada uma abordagem da otimização dos Diallel Crosses Parciais.

Chai, F-S., Mukerjee, R. (1999) analisam os efeitos genéricos das linhas assim como os seus efeitos específicos. Considera-se ainda que os PBIBD com esquema de associação triangular assumem um papel fundamental neste âmbito.

Na construção de Planeamentos Diallel Crosses com recurso aos PBIBD destacam-se os trabalhos de Shama (2000) que sugerem a rotina dos PBIBD para a construção de planeamentos Diallel Crosses Completos e de Varghese et al (2004) onde se divulga a utilização dos PBIBD com três classes de associação para a construção de Diallel Crosses Parciais.

Em Oliveira T. A., Sousa, M.F. (2002) apresentam-se aplicações dos PBIBD e dos BIBD com repetições em delineamentos Diallel Crosses.

Ghosh and Biswas (2003) apresentam PDCC recorrendo aos BIBD. É desenvolvida uma análise dos Planos em Diallel Crosses Completos com aplicações dos BIBD para estimar os efeitos gerais da i -ésima linha ($i=1,\dots,v$) onde são obtidas a análise intra-bloco da soma de quadrados ajustada e a soma de quadrados dos blocos, bem como a consequente relação as estimativas dos BIBD e dos efeitos dos PDCC. Provou-se ainda, ilustrando com um exemplo, que os PDCC obtidos com recurso a dois BIBD satisfazendo as relações $v_1 = b_1 = 4\lambda_1 + 3 = v_2 = b_2$ e $r_1 = 2\lambda_1 + 1 = r_2 = k_1 = k_2$ com $\lambda_1 = \lambda_2$ são universalmente

ótimas. Como resultado conclusivo deste trabalho Ghosh and Biswas salientam que a relevância desta investigação consiste em evidenciar que a análise de PDCC se pode reduzir à análise de BIBD convenientemente gerados. Os investigadores Mexia J.T. e Mejza, S. dedicam também especial atenção aos Planos em Diallel Crosses. Assim, Mejza S., Mexia J. T.(2002) apresentam as comunicações “Variance Free Model of Line x tester Experiments” e “Variance Free Model of Diallel Cross Experiments”.

Mejza S., Mexia J. T. apresentam ainda em 2002 a comunicação “Variance Free Model Griffing's Type IV Diallel Cross Experiments” na Akademia Rolnicza em Poznań.

Em 2003 Mexia J. T., Mejza S., apresentam também a comunicação “Variance Free Model of Griffing's Type II Diallel Cross Experiments”, em Leuven.

No âmbito da Genética em geral, em 2005, a revista “Ciência Hoje” publica um artigo sobre os achados do biólogo Peter Andolfatto, da Universidade da Califórnia em San Diego (EUA), os quais levam a crer que a contribuição do DNA ‘lixo’ é muito significativa, especialmente para a evolução.

Alghamdi, S. S.(2009) apresenta um trabalho de aplicação dos Diallel crosses ao estudo da evolução de determinada espécie de insectos entre 2004 e 2006.

6.2. FUNDAMENTOS E NOÇÕES DA GENÉTICA

Mendel permitiu esclarecer algumas questões sobre o sistema de transmissão de características de geração em geração, no entanto, a localização e natureza dos caracteres hereditários continuavam por explicar. De facto, na época em que Mendel desenvolveu as suas experiências, não dispunha de meios técnicos suficientes para atingir o conhecimento da estrutura celular.

De facto, com os novos instrumentos e as novas tecnologias os estudos em Genética sofreram consideráveis avanços, tendo sido intensificadas as ligações à Estatística, nomeadamente no que concerne à análise do *DNA*. Actualmente, uma das grandes metas é a descodificação e localização de genes e outras sequências de *DNA* nos cromossomas de vários organismos e em particular no Homem.

A molécula do *DNA* é formada por fosfato e açúcar e por duas cadeias enroladas uma na outra dado o emparelhamento de bases químicas complementares: adenina (A) – timina (T) e citosina (C) – guanina (G) ligadas por pontes de hidrogénio, formando uma dupla hélice. Consequentemente, a partir daqui todos os empenhos se orientam para descodificar as mensagens hereditárias “escritas” com este alfabeto de quatro letras: A, G, C e T.

Os fragmentos de *DNA* podem ser medidos, com intervenção estatística, em termos dos pares de bases (adenina - timina, citosina – guanina) ou milhares de pares de bases. Esses fragmentos são obtidos com enzimas de restrição que cortam o *DNA* de um organismo em sequências específicas vulgarmente com 4, 6 ou 8 pares de bases. A cartografia genética, em grande evolução, ocupa-se da representação ordenada de fragmentos de *DNA* exposta, por exemplo através de um mapa físico. Esta evolução da cartografia tem contribuído para um desenvolvimento de técnicas estatísticas auxiliares neste campo.

Um mapa físico de um cromossoma pode obter-se ordenando fragmentos de *DNA* que resultam da fragmentação desse cromossoma por diferentes enzimas que actuaram separadamente e o cortaram todas as sequências específicas que reconheceram. Como tal, cada fragmento resultante da actuação de outra enzima divergente. Outro processo é usar fragmentos de *DNA* resultantes de incisões aleatórias por actuação de uma enzima em que são inseridas em “máquinas fotocopiadoras biológicas” que além de as armazenar produzem uma série de cópias indispensáveis para os diferentes e rigorosos estudos.

Uma das técnicas laboratoriais mais divulgada nos nossos dias é a técnica de clonagem. Mediante este método tem que se adquirir um maior empenho de modo a compensar a cobertura quase total do cromossoma. Neste processo, a estatística intervém para determinar, por exemplo, o número de fragmentos com uma determinada dimensão que se pretende “fotocopiar” de maneira a atingir a cobertura desejada ou o grau de sobreposição esperado entre os fragmentos seleccionados.

O código genético do homem tem cerca de três mil milhões de letras (bases químicas). A análise do DNA afigura-se se à análise linguística. Jones (1995) refere que: “A genética é, em si mesma, uma linguagem, um conjunto de instruções herdadas, transmitidas de geração em geração. Tem um vocabulário - os próprios genes, uma gramática - a forma como a informação herdada está disposta e uma literatura - os milhares de instruções para compor um ser humano”.

A decodificação das mensagens hereditárias faz-se por etapas da mesma forma que a aprendizagem de uma língua. Ao conhecer-se a grafia -o código genético de uma palavra, não quer dizer que se conheça o seu significado - função de um gene. Contudo, o significado de uma palavra numa frase está relacionado com a sua localização. A Gramática é fundamental para a compreensão da língua assim como a cartografia para a Genética.

Com a descoberta do DNA surge o consequente desenvolvimento de técnicas para a sua análise sobretudo a partir dos anos 60. A Biologia Molecular incumbiu-se de observar o DNA de modo a facultar mensurações em termos de pares de bases; Actualmente, sabe-se que determinados genes tem um determinado número de pares de bases ou que dois genes diferem um do outro milhar de pares de bases, por exemplo. Morgan inaugurou a cartografia genética.

Actualmente, anseia-se cartografar o genoma - conjunto de cromossomas de certos organismos, até o máximo detalhe - que é descrevê-lo base por base.

Presentemente, os mapas mais em curso são os denominados mapas físicos. Para os elaborar, o genoma ou os cromossomas de um organismo são dissecados através de enzimas de restrição em sequência de bases específicas, resultando um certo número de fragmentos de DNA cuja ordem se perdeu; é então necessário restituir essa ordem. A intervenção da Estatística nesta edificação pode revelar-se amplamente vantajosa.

6.3. DIALLEL CROSSES E PLANOS EM BLOCOS INCOMPLETOS EQUILIBRADOS

Em meados dos anos 20 emerge, como instrumento de comparação da produção obtida de alguns caracteres da progénie resultantes da reprodução de certos seres vivos, o denominado processo de Recombinações Cromossómicas ou o processo de Inter-Cruzamento. Posteriormente, por volta dos anos 30, este método surge sobreposto ao nível da reprodução animal.

O processo “Diallel Crosses” surge assim como um processo que pretende indagar as características genéticas de determinada população, e podemos afirmar sendo o mais eficaz e potente. O interesse dos geneticistas espelha-se em alcançar linhas de plantas ou de raças de animais ‘apuradas’ e, como tal, adoptam com frequência este método com o propósito de realizar experiências que envolvam a reprodução destas espécies. O seu objectivo fulcral baseia-se essencialmente no apuramento ou melhoria destas linhas de espécies ou raças. O Diallel Cross é ainda usado para estimar as capacidades produtivas de cada tipo de cruzamento. O termo Diallel Cross (Cruzamento Cromossómico), pela sua essência, é utilizado para considerar o conjunto de todos os possíveis cruzamentos entre diversos tipos de genótipos, em que estes podem ser representativos de indivíduos, clones, linhas homozigóticas, etc.

No máximo poderão existir n^2 combinações possíveis de cruzamentos se ponderarmos n linhas homozigóticas. Registam-se observações junto dos valores atribuídos a determinadas características da progénie alcançadas através dos cruzamentos de pares de linhas homozigóticas. Tais observações são geralmente apresentadas na forma de uma Tabela Cromossómica.

Uma Tabela Cromossómica é uma tabela de dupla entrada formada pelas n^2 medições, sendo que estas correspondem às combinações possíveis de cruzamentos das linhas. Cada célula da tabela equivale à progénie com um genótipo progenitor comum. A elaboração desta tabela é de extrema importância uma vez que, é a partir desta que, no futuro, se efectuará estudos sobre gerações posteriores, que serão obtidos a partir de cruzamentos entre esta geração e/ou a geração parental.

Assim, e por tudo o que foi dito concluímos, que a construção de uma Tabela Cromossómica não se trata apenas de um mero arrumar de números numa tabela.

Em termos algébricos, uma Tabela Cromossómica define-se como uma matriz $n \times n$ com elementos y_{ij} , tais que y_{ij} designa o cruzamento dentro da i -ésima linha homozigótica, y_{ij} representa a geração F_1 resultante dos cruzamentos das linhas puras i e j entre si e y_{ij} representa o recíproco.

Griffing (1956a) descreveu que as n^2 combinações possíveis podem ser divididas em três grupos:

- I. As n linhas homozigóticas;
- II. Um grupo de $\frac{n \times (n-1)}{2}$ indivíduos de geração F_1 ;
- III. Um grupo de $\frac{n \times (n-1)}{2}$ indivíduos de geração F_1 recíprocos.

Este autor discute ainda quatro processos experimentais, que também foram abordados na em Oliveira, T.A.(1999).

Passamos então a referi-los:

- Os métodos 1 e 2 envolvem as n linhas parentais;
- Os métodos 3 e 4 suprimem as n linhas parentais;
- Nos métodos 1 e 3 consideram-se os cruzamentos recíprocos;
- Nos métodos 2 e 4 ignoram-se as diferenças entre recíprocos (efeitos sexo).

A concepção de Cruzamento Cromossómico mais completo é obviamente aquele que tem como objectivo todas as combinações possíveis entre progenitores, inclusivamente os recíprocos e auto reproduções, o que inicialmente se atribuiu à definição de Cruzamento Cromossómico Completo.

A excelência deste processo é fundamentalmente o de criar o número máximo de famílias que se pode obter num determinado planeamento que envolva cruzamentos e onde interfiram apenas duas gerações. Contudo, esta noção de Cruzamento Cromossómico Completo é revista por Griffing (1956a) que reforma o sentido dado previamente passando a estabelecer que esta designação se refere apenas ao método 4.

Deste modo, o método 4 passa então a ser o mais usual e reconhecido ao nível da investigação científica.

Um Cruzamento Cromossómico Completo é aquele em que o nº de cruzamentos possível é dado por $C_2^n = \frac{n \times (n-1)}{2}$ em que não se tem em consideração os cruzamentos recíprocos, nem mesmo as linhas parentais.

Gilbert (1958) refere a semelhança entre os Planos em Blocos Incompletos com duas parcelas e os Cruzamentos Cromossómicos Completos. Kempthorne and Curnow (1961) admite-se que qualquer Plano em Blocos Incompletos Equilibrados poderá ser ‘moldado’ a um Cruzamento Cromossómico Completo.

Relembremos que $k \times v$ variedades que surgem num bloco de dimensão k de um BIBD se encontram $k(k-1)$ vezes nos restantes blocos e que em cada bloco B existem C_2^k pares de variedades diferentes. Seja por exemplo um Plano em Blocos Incompletos com v tratamentos, b blocos, r o nº de réplicas constante, $k' = 2k$ o tamanho do bloco, também este valor constante. Podemos assim, formar k pares de progenitores em cada bloco. E, claro que resultarão num Cruzamento Cromossómico Completo.

Gupta and Kageyama (1994) sugerem o exemplo, também adoptado em Oliveira, T.A. (1999):

Seja um BIBD com p linhas dispostas em $b = 5$ blocos de dimensão $k' = 2k = 4$ $r = 4$, nº de vezes que cada linha aparece nos blocos, e $\lambda = 3$ o número de vezes que cada par de linhas concorre no mesmo bloco. Pelo que temos, os seguintes blocos:

1	2	3	4
1	2	3	5
1	2	4	5
1	3	4	5
2	3	4	5

Por sua vez este podem dividir-se em sub-blocos:

1	2	3	4	1	3	2	5	1	5	2	4	1	4	3	5	2	3	4	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Estamos perante caso de um BIBD em que as v variedades podem ser consideradas como sendo as linhas genéticas e os pares distintos em cada bloco o cruzamento destas linhas, o que

irá constituir um cruzamento completo. Por sua vez, estes pares formam um BIBD em que cada bloco é composto por duas parcelas:

1	2	1	3	1	4	1	5	2	3	2	4	2	5	3	4	3	5	4	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

E, se ponderarmos a totalidade dos pares que simbolizavam os blocos do BIBD inicial submetem-se três réplicas de um cruzamento completo o que equivale a realizar três observações para cada cruzamento.

A contemplação de um BIBD do tipo $2 \times \text{BIBD}$, ou seja por duplicação, permite-nos alcançar um Cruzamento Completo que abrange os recíprocos, isto se o procedimento fôr igual ao do primeiro caso. Tal irá permitir o estudo não só dos efeitos gerais das linhas como também dos efeitos específicos, uma vez que se considera o par $(i, j) \neq (j, i)$. Seguindo um modelo de análise de variância clássico, isto é considerando todos os pares iremos obter λ réplicas de Cruzamentos Completos incluindo os recíprocos.

Um BIBD que admita blocos repetidos, irá possibilitar tratar o caso de efeitos específicos de cada combinação em Genética.

Capítulo 7

CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS DE INVESTIGAÇÃO FUTURA

Com o desenvolvimento científico e tecnológico premente nos nossos dias, muitos são os assuntos abertos à investigação sucessiva. Neste trabalho procurámos aprofundar o estudo dos Planos em Blocos Incompletos Equilibrados e abordar as temáticas mais em foco na actualidade, no âmbito deste contexto: a problemática da condição suficiente de existência dos BIBD, a repetição dos blocos neste tipo de planos e métodos de construção usuais. Ilustrámos sempre que possível com exemplos práticos e sistematizámos a análise estatística de um BIBDR(9,24,8,3,2|b*=20). Numa pesquisa das aplicações em outras áreas da Ciência interessámo-nos por investigar o historial de aplicações dos BIBD no âmbito da Genética, visto ser um tema extremamente relevante.

No decorrer deste estudo muitas e interessantes questões ficaram em aberto, que ambicionamos continuar a aprofundar.

Salientamos:

- A análise de Planos Incompletos com blocos de diferentes dimensões e diferentes números de réplicas;
- O estudo de condições suficientes de existência dos BIBD;
- O estudo das condições de Optimalidade e de Planos Optimais;
- Os métodos de construção de BIBD com blocos repetidos;
- A análise de estruturas dos BIBDR;
- O estudo de aplicações a problemas reais dos BIBD e dos BIBDR na Genética;
- A aplicação dos BIBD e dos BIBDR em variadas áreas da Ciência, como por exemplo a Educação.

Referências Bibliográficas

Adhikari, Avishek; Bose, Mausumi; Kumar, Dewesh & Roy, Bimal (2000): *Applications of Partially Balanced Incomplete Block Designs in Developing (2,n) Visual Cryptographic Schemes*; Special Section on Discrete Mathematics and Its Applications.

Agarwal, S. C. and Das, M. N. (1990): Incomplete Block Designs for Partial Diallel Cross; , Series A, Volume 52-B, 1, 75-81.

Alghamdi, S.S. (2009): Heterosis and Combining Ability in a Diallel Cross of Eight Faba Bean (*Vicia faba* L.) Genotypes; Asian Journal of Crop Science.Vol.1, Issue 2, 66-76.

Arya, A. S. (1983): Circulant Plans for Partial Diallel Crosses; *Biometrics*, Vol.39, 1, 43-52.

Arya, A. S. (1989): On Equivalence and Enumeration of Circulant Partial Diallel Crosses; , Vol.51, 2, 184-195.

Arya, A. S. And Nair (1977): Partial Diallel Crosses based on some association schemes with three or four associate classes; , Vol.39 B, 394-399.

Atiqullah, M. (1957): On a property of Balanced Designs; , Vol.20, 394-399.

Atiqullah, M. (1961): On configurations and non-isomorphism of some Incomplete Block Designs; *Biometrika*, Vol. 48, 215-218.

Atkinson, A. C. (1996): The usefulness of Optimum Experiment Designs; J. R. Statist. Soc. B, Vol. 58, n.º1, 59-76.

Bofill, P. and Torras, C. (2004): *MBMUDs: A combinatorial extension of BIBDs showing good optimality behaviour*. Journal of Statistical Planning and Inference, 124, 185-204.

Bailey, R. A. and Cameron, P. J. (to appear): *A family of balanced-incomplete designs with repeated blocks on which general linear groups act*

Bailey, R. A., Monod, H., Morgan, J. P. (1995): *Construction and optimality and affine resolvable designs*; *Biometrika*, Vol.82, 1, 187-200.

Baker, R. J. (1978); Issues in Diallel Analysis; Crop Science, Vol. 18, 4, 533-536.

BellHouse, D. R., (1984); A Review of optimal designs in survey sampling; The Canadian Journal of Statistics, Vol.12, Issue 1, 53-65.

Bose, Mausumi & Mukerjee, Rahul (2006): Optimal (2, n) visual cryptographic schemes, Designs, Codes and Cryptography, Volume 40, 3, 255 – 267.

Bose, R. C. (1939): *On the construction of Balanced Incomplete Block Designs*, Annals of Eugenics, 9, 353-399.

- Bose, R. C. (1942):** *A note of the resolvability of Balanced Incomplete Block Designs*, , 6, 105-110.
- Bose, R. C. (1947):** *On a resolvable series of Balanced Incomplete Block Designs*, , 6, 105-110.
- Bose, R. C. (1961):** On configurations and non-isomorphism of some Incomplete Block Designs; *Biometrika*, Vol.48, 215-218.
- Bose, R. C. (1963):** *Combinatorial properties of partially balanced designs and association schemes*, , Series A, Volume 25, part 2.
- Bose, R. C. & Connor, W. S. (1952):** *Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs*, *Annals of Mathematical Statistics*, Volume 23, 367-383.
- Bose, R. C. & Clatworthy, W. H. (1955):** *Some classes of partially balanced designs*, *Annals of Mathematical Statistics*, Volume 26, 212-232.
- Bose, R. C. & Shrikhande, S. S. (1960):** On the composition of Balanced Incomplete Block Designs, *Canad. J.Math.*, Vol 12, 177-188.
- Bose, R. C.; Clatworthy, W. H. & Shrikhande, S. S. (1954):** Tables of partially balanced incomplete block designs with two associate classes, *North Carolina Agricultural Experimental Bulletin*, 107.
- Bose, R. C.; Shrikhande, S. S. & Bhattacharya, K. N. (1953):** On the construction of group Divisible Incomplete Block Designs; *The Annals of Math. Stat.*, Vol 24, 167-195.
- Bose, R. C. & Laskar, R. (1967):** *A characterization of tetrahedral graphs*, *Journal of Combinatorial Theory*, 2, 266-385.
- Bose, R. C. & Mesner, D. M. (1959):** *On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs*, *Annals of Mathematical Statistics*, Volume 30, 31-38.
- Bose, R. C. & Nair, K. R. (1939):** *Partially balanced incomplete block designs*, *Journal* , Volume 4, 337-372.
- Bose, R. C. & Shimamoto, T. (1952):** *Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two association schemes*, *Journal of the American Statistical Association*, Volume 47, 151-184.
- Cameron, Peter J. (2004):** *Strongly regular graphs*, *Topics in Algebraic Graph Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, 203-221.
- Carmichael, R. D. (1937):** *Introduction to the Theory of Groups of Finite Order*, Ginn & Co, Boston.

Calínski, T. (1993): Balance, Efficiency and Orthogonality Concepts in Block Design; Journal of Statistical Planning and Inference, Vol.36, 283-300.

Calinski, T. (1971): *On some desirable patterns in block designs.* Biometrics 27, 275-92.

Calinski,T. and Kageyama, S. (2003):Block Design: A Randomization Approach, Volume II: Design, Lecture Notes in Statistics, Springer.

Colbourn and Dinitz Editors (2006):*The CRC Handbook of Combinatorial Designs*, CRC Press.

Constantine, C.M. and Hedayat (1983): *Complete designs with blocks of maximal multiplicity.* Journal of Statistical Planning and Inference, 7, 289-294.

Chai, F. - S., Mukerjee, R. (1999): Optimal Designs for Diallel Crosses with specific combining abilities; Biometrika, Vol. 86, 2, 453- 458.

Clatworthy, W.H. (1956): *Contributions on Partially Balanced Incomplete Block Designs with Two Associate Classes*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 47, Washington D.C..

Clatworthy, W. H. (1973): *Tables of Two-Associate Partially Balanced Designs*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 63, Washington D.C..

Cochran, G. W. & Cox, G. (1957): *Experimental Design*; John Wiley and Sons.

Connor, W. S. (1952): On the Structure of Balanced Incomplete Block Designs; The Annals of Mathematical Statistics, Volume 23, 57-71.

Connor, W. S. & Clatworthy, W. H. (1954): *Some theorems for partially balanced designs*, Annals of Mathematical Statistics, Volume 25, 100-112.

Curnow, R. N. (1963): Simpling the Diallel Cross Designs, Biometrics, Vol.19, 287-306.

Crusio, Wim E. (1993): “Bi-multivariate Analyses of Diallel Crosses: a Tool for the Genetic Dissection of Neurobehavioral Phenotypes”. Behavior Genetics, 23, 59-67. Université René Descartes (Paris V).

Das, Ashish; Dean, Angela M. & Gupta, Sudhi (1998): On optimality of some partial diallel cross designs, Sankhya, Series: B, Volume: 60, 3, 511-524.

Delsarte, P. (1973): *An algebraic approach to the association scheme of coding theory*, Ph. D. thesis, Université Dey, Alope (1986): *Theory of block designs*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Dobcsányi, D.A., Preece, D. A. and Soicher, L. H. (to appear): *On balanced incomplete-block designs with repeated blocks.*

Dugué, Daniel; Traité de Statistique Théorique et Appliquée, Analyse Aleatoire-Algèbre Aleatoire.

Endres, Heinz G; Hucke, Christian; Holland-Letz & Trampisch, Joachim (2006): *A new efficient trial design for assessing reliability of ankle-brachial index measures by three different observer groups*, BMC Cardiovascular Disorders.

Fiala, Nick C. & Haemers, Willem H. (2006): *5-chromatic strongly regular graphs*, Discrete Mathematics, Volume 306, Issue 23, 3083-3096.

Fisher, R. A. (1925): *Statistical methods for research workers*, Oliver and Boyd, Edinburgh.

Fisher, R. A. (1935): *The design of experiments*, Oliver and Boyd, Edinburgh.

Fisher, R. A. (1940): *An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks*, Annals of Eugenics, 10, 52-75.

Foody, W and Hedayat, A, (1977): *On theory and applications of BIB Designs with repeated blocks*. The Annals of Statistics, Vol 5, n°5, 932 - 945.

Gallagher S, Marras WS, Litsky AS & Burr D. (2005): *Torso flexion loads and the fatigue failure of human lumbosacral motion segments*, Spine, Volume 30, 20, 2265-2273.

Ghosh, D. K. & Biwas, P. C. (2003): Complete Diallel Crosses Plans and Balanced Incomplete Block Designs; Journal of Applied Statistic, Volume 30, Number 6, 697-708.

Ghosh, D. K. & Divecha, J. (1997): Two associate class partially balanced incomplete block designs and partial diallel crosses; Biometrika 84 (1), 245-248.

Gosh and Shrivastava (2001): *A class of BIB designs with repeated blocks*. Journal of Applied Statistics, Vol.28, n°7, 821-833.

Guimarães, R. C., J. A. S (1997): Estatística; Mac-Graw-Hill.

Haemers, Willem H. (2000): Matrix techniques for strongly regular graphs and related geometries, Intensive Course on Finite Geometries and Applications, University of Ghent.

Hanani, H. (1961): *The existence and construction of Balanced Incomplete Block Designs*. The Ann. Math. Statist., Vol 32, 361 - 386.

Harshbarger, B. (1946): *Preliminary report on the rectangular lattices*, Biometrics 2, 115-119.

Harshbarger, B. (1947): *Rectangular lattices*, Virginia Agricultural Experiment Station, Memoir 1.

Harshbarger, B. (1949): *Triple rectangular lattices*, Biometrics 5, 1-13.

Henson, D; Sarvate, D.G.& Hurdb, S.P (2007): *Group divisible designs with three groups and block size four*, Discrete Mathematics, Volume 307, Issue 14, 28 June 2007, 1693-1706.

Hedayat, A.S., and Hwang, H. L. (1984): *BIB(8,56,21,3,6) and BIB(10,30,9,3,2) Designs with Repeated Blocks*. Journal of Combinatorial Theory, Series A 36, 73 - 91.

- Hedayat, A. S., Landgev, I. N. and Tonchev, V. D. (1989):** *Results on the support of BIB designs*. Journal of Statistical Planning and Inference, 22, 295-306.
- Hedayat, A. and. Shuo-Yen, R. Li (1979):** *The trade off method in the construction of BIB Design with repeaped blocks*, The Annals of Statistic, Volume 7, Issue 6, 1277-1287.
- Hedayat, A. S., Stufken, J., Zhang, W. G. (1995):** *Contingently and virtually balanced incomplete block designs and their efficiencies under various optimality criteria*. Statistica Sinica 5, 575-591.
- Hicks, Charles (1982):** Fundamental concept in the Designs of Experiments. Holt. Rinehart and Winston, inc..
- Hinkelmann, K. (1964):** *Extended group divisible partially balanced incomplete block designs*, Annals of Mathematical Statistics, 35, 681-695.
- Hinkelmann, K. & Kempthorne, D. (1963):** *Two classes of group divisible partial diallel crosses*, Biometrika, 50 (3, 4), 281-291.
- Hinkelmann, Klaus e Kempthorne, Oscar (2005):** *Design and Analysis of Experiments, Advanced Experimental Design*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley-Interscience.
- Hurd, Spencer P. & Sarvat, Dinesh G. (2008):** *Group divisible designs with block size four and two groups*, Discrete Mathematics; Volume 308, Issue 13, 6 July 2008, 2663-2673.
- James, A. T. & Wilkinson, G. N. (1971):** *Factorization of the residual operator and canonical decomposition of nonorthogonal factors in the analysis of variance*, Biometrika, 58, 279-294.
- John, J. A. & Williams, E. R. (1995):** *Cyclic and Computer generated Designs*, Chapman and Hall, London.
- John, J. A. (1987):** *Cyclic Designs*, Chapman and Hall, London.
- John, J. A.; Wolock, F. W. & David, H. A. (1972):** *Cyclic Designs*, Applied Mathematics Series, 62, National Bureau of Standards, Washington D. C..
- John, P. W. M. (1966):** *An extension of the triangular association scheme to three associate classes*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 28, 361-365.
- John, P. W. M. (1971):** *Statistical Design and Analysis of Experiments*, Macmillan, New York.
- Kageyama, S. (1974):** *Reduction of associate classes of block designs and related combinatorial arrangements*, Hiroshima Mathematical Journal, 4, 527 – 618.
- Kempthorne O. (1952):** *The Design an Analysis of Experiments*, Wiley, New York.

- Kempthorne O. (1956):** *The efficiency factor of an incomplete block design*, Annals of Mathematical Statistics, 27, 846-849.
- Kirkman, T. P. (1847):** *On a problem in combinations*, Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 2, 191-204.
- Kusumoto, K. (1965):** *Hyper cubic designs*, Wakayama Medical Reports, 9, 123-132.
- Kusumoto, K. (1967):** *Association schemes of new types and necessary conditions for existence of regular and symmetrical PBIB designs with those association schemes*, Annals of Mathematical Statistics, 19, 73-100.
- Lee, Eun Mee; Lee, Heung Kyu & Park, Sung Hyuk (2008):** *Method of generating anti-collusion fingerprint codes using*; <http://www.freshpatents.com/Method-of-generating-anti-collusion-fingerprint-codes-using-dt20080306ptan20080056497.php>
- Mann, H.B.(1969):** *A note on balanced incomplete block designs*. The Annals of Math. Statist., Vol.40, n°2, 679-680.
- Mexia J. T., Mejza S., (2003):** *Variance Free Model of Griffing's Type II Diallel Cross Experiments*, Katholike Universiteit Leuven, 18, 6, Belgia.
- Mejza S., Mexia J. T., (2002):** *Variance Free Model of Line x tester Experiments*, University of Athens, 17, 5, Grecja.
- Mejza S., Mexia J. T., (2002):** *Variance Free Model of Diallel Cross Experiments*, UKZUZ, Czechy, 2002, 7.
- Mejza I., Mejza S., (2002):** *Some Supplemented Block Designs with Special Reference to Line x tester Experiments*, UKZUZ, Czechy, 8.
- Mejza S., Mexia J. T., (2002):** *Variance Free Model Griffing's Type IV Diallel Cross Experiments*, Akademia Rolnicza, 3, Agriculture, Poznań, 2002, 6.
- Moore, E. H. (1896):** *Tactical memoranda*, American Journal of Mathematics, 18, 264-303.
- Montgomery, Douglas (2009):** *The Design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons, 7^a Ed.
- Morales, Luis B. (2005):** *Constructing Cyclic PBIBD (2)s through an Optimization Approach: Thirty Two New Cyclic Design*, Journal of Combinatorial. Designs, Volume 13, 5, 377-387.
- Murteira, B., Ribeiro, C. S., Silva, J. A., Pimenta, C. (2002):** *Introdução à Estatística*. Mac-Graw-Hill.
- Nair, K. R. (1944):** *The recovery of inter-block information in incomplete block designs*, Sankhyā, 6, 383-390.
- Nair, K. R. & Rao, C. R. (1942):** *A note on partially balanced incomplete block designs*, Science and Culture, 7, 568-569.

Nandi, H. K. & Adhikary, B. (1966): On the definition of Bose Shimamoto cyclical association scheme, *Cal. Stat. Assoc. Bull.* 15, 165-168.

Oliveira, T. A., Ceranka, B., Graczyk, M. (2006): *The variance of the difference of block effects in the balanced incomplete block designs with repeated blocks*, *Colloquium Biometryczne* 36, 115-124.

Oliveira, T. A. (1994): *Planos de Blocos Equilibrados Incompletos com Repetições*, Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Oliveira, T. A. (1999): *Planeamento de Experiências*, Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Oliveira, T & Sousa, M. (2002): *Some correspondence between Diallel Crosses and BIB Designs*, *Proceedings of the 17th International Workshop on Statistical Modelling*, 515-520, Editors Mikis Stasinopoulos and Giota Touloumi.

Oliveira, T. A., Sousa, M. F. (2004): *BIBD with repeated block: some analysis on BIBD(12,44,11,3,2) with different structures*. *Colloquium Biometryczne*, 34a, 131-140.

Oliveira, T. A. & Sousa, M. F. (2004): *BIBDR: Some analysis on BIBD (9, 24, 8, 3, 2) cardinalities*, *Colloquium Biometryczne*, Tom 34a, 161-170.

Patterson, H. D.; Williams, E. R. (1976): *Some theoretical results on general block designs*, *Congressus Numerantium*, 15, 489-496.

Patterson, H. D.; Williams, E. R.; Hunter E. A. (1978): *Block designs for variety trials*, *Journal of Agricultural Science*, 90, 395 – 400.

Pearce, S. C. (1968): *The mean efficiency of equi-replicate designs*, *Biometrika*, 55, 251-253.

Pearce, C.; Calinski, T. & Marshall, T. F. de C. (1974): *The basic contrasts of an experimental design with special reference to the analysis of data*, *Biometrika*, 61, 449-460.

Rao, C. R. (1947): *General methods of analysis for incomplete block designs*, *Journal of the American Statistical Association*, 42, 541-561.

Raghavarao, D. (1960): A generalization of group divisible designs, *Annals of Mathematical Statistics*, 31, 756-771.

Raghavarao, D. (1971): *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments*, John Wiley and Sons, New York.

Raghavarao, D., Federer, W. T. and Schwager, S. J. (1986): *Characteristics for distinguish among balanced incomplete block designs with repeated blocks*. *Journal of Statistical Planning and Inference* 13, 151-163.

Raghavarao, D. & Chandrasekhararao, K. (1964): Cubic designs, *Annals of Mathematical Statistics*, 35, 389-397.

Reis, E., Melo, P., Andrade, R., Calapez, T.: Estatística Aplicada; Vol. I e II; Edições Sílabo.

Roy, J. (1958): *On the efficiency factor of block designs*, Sankhyā, 19, 181-188.

Roy, P. M. (1953): *Hierarchical group divisible incomplete block designs with m-associate classes*, Science and Culture, 19, 210-211.

See, K.; Song, S.Y. & Stufken, J. (1997): *On a class of partially incomplete block designs with applications in survey sampling*, Comm. Statist. Theory Methods 26, 1-13.

Siegel, S. (1975): Estatística não Paramétrica, Mac-Graw-Hill.

Sinha, Kishore & Kageyama, Sanpei (2006): *Constructions of group divisible designs and related combinatorial structures*; Journal of Statistical Planning and Inference, Volume 136, Issue 9, 1 September 2006, 3281-3286.

Sousa, M. F., Oliveira, T. A. (2004): *BIBDR: Some analysis on BIBD(9,24,8,3,2) cardinalities*. Colloquium Biometryczne, 34a,161-170.

Sharma, M. K. (2000): Application of PBIB designs in CDC Method IV, Journal of Applied Statistics, Volume 27, Number 8, 1 November, 1013-1019(7).

Shah, S. M. (1958): On balancing in factorial experiments, Annals of Mathematical Statistics, 29, 766-779.

Shah, S. M. (1964): *An upper bound for the number of disjoint blocks in certain PBIB design*, Annals of Mathematical Statistics, 35, 398-407.

Scheffé, H. (1959): The Analysis of Variance, John Wiley and Sons, New York.

Steiner, J. (1853): *Combinatorische Aufgabe*, Journal fur reine und angewandte Mathematik, 45, 181-182.

Street, Anne Penfold & Street, Deborah J. (1987): *Combinatorics of Experimental Design*, Claredon Press, Oxford.

Sun H.-M. (2002): *PBIB designs and association schemes obtained from finite rings*, Discrete Mathematics, Volume 252, Number 1, 31., 267-277.

Surendran, P. U. (1968): *Association matrices and Kronecker product of designs*, Annals of Mathematical Statistics, 39, 676-680.

Takemura, K.; Hogan, J. S. & Smith, K. L. (2003): *Effect of Immunoglobulin G from Cows Immunized with Ferric Citrate Receptor (FecA) on Iron Uptake by Escherichia coli*, American Dairy Science Association, J. Dairy Sci. 86:133–137.

Thannippara, A.; Kurian, B.; Ghosh, D.; Bagui, S. Mandal, S. (2007): *Hypercubic designs and applications*; Statistical Papers, Volume 48, Number 3, 503-508(6).

- Tharthare, S. K. (1963):** Right angular designs, *Annals of Mathematical Statistics*, 36, 1051-1062.
- Tharthare, S. K. (1965):** Generalized right angular designs, *Annals of Mathematical Statistics*, 34, 1057-1067.
- Van Lint, J.H. (1973):** *Block Designs with repeated blocks and* . J. Combinatorial Theory Ser A 15, 288 - 309.
- Van Lint, J. H. and Ryser, H. J. (1972):** *Block Designs with repeated blocks*. Discrete Math., Vol 3, 381 - 396.
- Vakil, F. & Parnes, M. (1994):** *On the structure of a class of sets useful in nonadaptive group testing*, *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 39,, n.^o1, 57-69.
- Varghese, Cini; Sharma, V. K. (2004):** *A series of resolvable PBIB(3) designs with two replicates*, *Metrika*, Volume 60, Number 3, November, 251-254(4).
- Varghese, Cini, Sharma, V.K., Jaggi, Seema and Sharma, (2004):** *Three-associate class partially balanced incomplete block designs and their application to partial diallel crosses*, Technical Report, IASRI Publication.
- Varghese, Cini, Sharma, V.K., Jaggi, Seema and Sharma, (2008):** Indian Agricultural Statistics Research Institute; <http://www.iasri.res.in/webPBIB3/>
- Vartak, M. N. (1955):** *On application of Kronecker product of matrices to statistical designs*, *Annals of Mathematical Statistics*, 26, 420-438.
- Vartak, M.N. (1959):** *The non-existence of certain PBIB designs*, *Annals of Mathematical Statistics*, 30, 1051-1062.
- Wynn, H. P. (1977):** *Convex sets of finite plans*. *Ann. Statist.*, Vol. 5,n^o2, 414-418.
- Yates, F. (1936):** *Incomplete Randomized Blocks*. *Annals of Eugenics*, 7,121-140.
- Yates, F. (1936a):** *Incomplete randomized blocks*, *Annals of Eugenics*, 7, 121-140.
- Yates, F. (1936b):** *A new method for arranging variety trials involving a large number of varieties*, *Journal of Agricultural Science*, 26, 424-455.
- Yates, F. (1937a):** *The design and analysis of factorial experiments*, Technical Communication, 35, Imperial Bureau of Soil Science, Harpenden.
- Yates, F. (1937b):** *A further note on the arrangement of variety trials:quasi-Latin squares*, *Annals of Eugenics*, 7, 319-332.
- Yates, F. (1939):** *The recovery of inter-block information in variety trials arranged in three-dimensional lattices*, *Annals of Eugenics*, 9, 136-156.
- Yates, F. (1940):** *The recovery of inter-block information in balanced incomplete block designs*, *Annals of Eugenics*, 10, 317-325.

ANEXO 1

Tabela 1 Auxiliar da Análise de Variância - Exemplo Prático:

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	Total	Médias Blocos
B1	10,5	13,2	14,5							38,2	12,733
B2	12,3	13,4	15,8							41,5	13,833
B3	10,8			16,5			10,5			37,8	12,6
B4	10,8			18,2					19,1	48,1	16,033
B5	11,3				17,5		12,4			41,2	13,733
B6	11,2				15,7			15,7		42,6	14,2
B7	10,7					16,3		12,7		39,7	13,233
B8	10,2					15,7			12,5	38,4	12,8
B9		15,4		11,7			10,2			37,3	12,433
B10		15,2		12,4				15,2		42,8	14,267
B11		13,4			16,4		10,4			40,2	13,4
B12		17,2			17,5				12,4	47,1	15,7
B13		16,8				14,4		14,3		45,5	15,167
B14		12,9				11,2			14,2	38,3	12,767
B15			14,2	16,3				13,4		43,9	14,633
B16			16,3	15,7					15,9	47,9	15,967
B17			17,6		13,3			16,4		47,3	15,767
B18			10,7		13,4				14,1	38,2	12,733
B19			16,9			15,3	11,6			43,8	14,6
B20			10,7			14,5	11,2			36,4	12,133
B21				15,3	14,4	13,7				43,4	14,467
B22				13,6	15,8	12,7				42,1	14,033
B23							11,6	15,8	15,3	42,7	14,233
B24							12,9	18,2	16,6	47,7	15,9
Total	87,8	117,5	116,7	119,7	124	113,8	90,8	121,7	120,1	1012,1	
MédiaTrat.	10,975	14,6875	14,5875	14,9625	15,5	14,225	11,35	15,2125	15,0125		

ANEXO 2

Tabela 2 Auxiliar da Análise de Variância - Exemplo Prático:

	T_1^2	T_2^2	T_3^2	T_4^2	T_5^2	T_6^2	T_7^2	T_8^2	T_9^2	Total
B1	110,25	174,24	210,25	0	0	0	0	0	0	-
B2	151,29	179,56	249,64	0	0	0	0	0	0	-
B3	116,64	0	0	272,25	0	0	110,25	0	0	-
B4	116,64	0	0	331,24	0	0	0	0	364,81	-
B5	127,69	0	0	0	306,25	0	153,76	0	0	-
B6	125,44	0	0	0	246,49	0	0	246,49	0	-
B7	114,49	0	0	0	0	265,69	0	161,29	0	-
B8	104,04	0	0	0	0	246,49	0	0	156,25	-
B9	0	237,16	0	136,89	0	0	104,04	0	0	-
B10	0	231,04	0	153,76	0	0	0	231,04	0	-
B11	0	179,56	0	0	268,96	0	108,16	0	0	-
B12	0	295,84	0	0	306,25	0	0	0	153,76	-
B13	0	282,24	0	0	0	207,36	0	204,49	0	-
B14	0	166,41	0	0	0	125,44	0	0	201,64	-
B15	0	0	201,64	265,69	0	0	0	179,56	0	-
B16	0	0	265,69	246,49	0	0	0	0	252,81	-
B17	0	0	309,76	0	176,89	0	0	268,96	0	-
B18	0	0	114,49	0	179,56	0	0	0	198,81	-
B19	0	0	285,61	0	0	234,09	134,56	0	0	-
B20	0	0	114,49	0	0	210,25	125,44	0	0	-
B21	0	0	0	234,09	207,36	187,69	0	0	0	-
B22	0	0	0	184,96	249,64	161,29	0	0	0	-
B23	0	0	0	0	0	0	134,56	249,64	234,09	-
B24	0	0	0	0	0	0	166,41	331,24	275,56	-
Total	966,48	1746,05	1751,57	1825,37	1941,4	1638,3	1037,18	1872,71	1837,73	14.616,79

ANEXO 3

CÁLCULO DOS CONTRASTES E RESPECTIVOS INTERVALOS DE CONFIANÇA

- Intervalos de confiança referentes aos contrastes, ao nível de significância de 5%:

$$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2 = (-3,561) - 1,2 = -4,761$$

Para este contraste tem-se:

$$(-4,761) - 3,144 \leq \tau_1 - \tau_2 \leq (-4,761) + 3,144 \Leftrightarrow -7,905 \leq \tau_1 - \tau_2 \leq -1,617$$

$$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_3 = (-3,561) - 0,717 = -4,278$$

Para este contraste tem-se:

$$(-4,278) - 3,144 \leq \tau_1 - \tau_3 \leq (-4,278) + 3,144 \Leftrightarrow -7,422 \leq \tau_1 - \tau_3 \leq -1,134$$

$$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_4 = (-3,561) - 0,878 = -4,439$$

Para este contraste tem-se:

$$(-4,439) - 3,144 \leq \tau_1 - \tau_4 \leq (-4,439) + 3,144 \Leftrightarrow -7,583 \leq \tau_1 - \tau_4 \leq -1,295$$

$$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_5 = (-3,561) - 1,661 = -5,222$$

Para este contraste tem-se:

$$(-5,222) - 3,144 \leq \tau_1 - \tau_5 \leq (-5,222) + 3,144 \Leftrightarrow -8,366 \leq \tau_1 - \tau_5 \leq -2,078$$

$$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_6 = (-3,561) - 0,767 = -4,328$$

Para este contraste tem-se:

$$(-4,328) - 3,144 \leq \tau_1 - \tau_6 \leq (-4,328) + 3,144 \Leftrightarrow -7,472 \leq \tau_1 - \tau_6 \leq -1,184$$

$$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_7 = (-3,561) - (-3,039) = -0,522$$

Para este contraste tem-se:

$$(-0,522) - 3,144 \leq \tau_1 - \tau_7 \leq (-0,522) + 3,144 \Leftrightarrow -3,666 \leq \tau_1 - \tau_7 \leq 2,622$$

$$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_8 = (-3,561) - (0,717) = -4,278$$

Para este contraste tem-se:

$$(-4,278) - 3,144 \leq \tau_1 - \tau_8 \leq (-4,278) + 3,144 \Leftrightarrow -7,422 \leq \tau_1 - \tau_8 \leq 1,134$$

$$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_9 = (-3,561) - (0,661) = -4,222$$

Para este contraste tem-se:

$$(-4,222) - 3,144 \leq \tau_1 - \tau_9 \leq (-4,222) + 3,144 \Leftrightarrow -7,366 \leq \tau_1 - \tau_9 \leq -1,078$$

$$\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_3 = (1,2) - (0,717) = 0,483$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,483) - 3,144 \leq \tau_2 - \tau_3 \leq (0,483) + 3,144 \Leftrightarrow -2,661 \leq \tau_2 - \tau_3 \leq 3,627$$

$$\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_4 = (1,2) - (0,878) = 0,322$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,322) - 3,144 \leq \tau_2 - \tau_4 \leq (0,322) + 3,144 \Leftrightarrow -2,822 \leq \tau_2 - \tau_4 \leq 3,466$$

$$\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_5 = (1,2) - (1,661) = -0,461$$

Para este contraste tem-se:

$$(-0,461) - 3,144 \leq \tau_2 - \tau_5 \leq (-0,461) + 3,144 \Leftrightarrow -3,605 \leq \tau_2 - \tau_5 \leq 2,683$$

$$\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_6 = (1,2) - (0,767) = 0,433$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,433) - 3,144 \leq \tau_2 - \tau_6 \leq (0,433) + 3,144 \Leftrightarrow -3,836 \leq \tau_2 - \tau_6 \leq 2,914$$

$$\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_7 = (1,2) - (-3,039) = 4,239$$

Para este contraste tem-se:

$$(4,239) - 3,144 \leq \tau_2 - \tau_7 \leq (4,239) + 3,144 \Leftrightarrow 1,095 \leq \tau_2 - \tau_7 \leq 7,383$$

$$\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_8 = (1,2) - (0,717) = 0,483$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,483) - 3,144 \leq \tau_2 - \tau_8 \leq (0,483) + 3,144 \Leftrightarrow -2,661 \leq \tau_2 - \tau_8 \leq 3,627$$

$$\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_9 = (1,2) - (0,661) = 0,539$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,539) - 3,144 \leq \tau_2 - \tau_9 \leq (0,539) + 3,144 \Leftrightarrow -2,605 \leq \tau_2 - \tau_9 \leq 3,683$$

$$\hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_4 = (0,717) - (0,878) = -0,161$$

Para este contraste tem-se:

$$(-0,161) - 3,144 \leq \tau_3 - \tau_4 \leq (-0,161) + 3,144 \Leftrightarrow -3,305 \leq \tau_3 - \tau_4 \leq 2,983$$

$$\hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_5 = (0,717) - (1,661) = -0,944$$

Para este contraste tem-se:

$$(-0,944) - 3,144 \leq \tau_3 - \tau_5 \leq (-0,944) + 3,144 \Leftrightarrow -4,088 \leq \tau_3 - \tau_5 \leq 2,2$$

$$\hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_6 = (0,717) - (0,767) = -0,05$$

Para este contraste tem-se:

$$(-0,05) - 3,144 \leq \tau_3 - \tau_6 \leq (-0,05) + 3,144 \Leftrightarrow -3,194 \leq \tau_3 - \tau_6 \leq 3,094$$

$$\hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_7 = (0,717) - (-3,039) = 3,756$$

Para este contraste tem-se:

$$(3,756) - 3,144 \leq \tau_3 - \tau_7 \leq (3,756) + 3,144 \Leftrightarrow 0,612 \leq \tau_3 - \tau_7 \leq 6,9$$

$$\hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_8 = (0,717) - (0,717) = 0$$

Para este contraste tem-se:

$$(0) - 3,144 \leq \tau_3 - \tau_8 \leq (0) + 3,144 \Leftrightarrow -3,144 \leq \tau_3 - \tau_8 \leq 3,144$$

$$\hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_9 = (0,717) - (0,661) = 0,056$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,056) - 3,144 \leq \tau_3 - \tau_9 \leq (0,056) + 3,144 \Leftrightarrow -3,088 \leq \tau_3 - \tau_9 \leq 3,2$$

$$\hat{\tau}_4 - \hat{\tau}_5 = (0,878) - (1,661) = -0,783$$

Para este contraste tem-se:

$$(-0,783) - 3,144 \leq \tau_4 - \tau_5 \leq (-0,783) + 3,144 \Leftrightarrow -3,927 \leq \tau_4 - \tau_5 \leq 2,361$$

$$\hat{\tau}_4 - \hat{\tau}_6 = (0,878) - (0,767) = 0,111$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,111) - 3,144 \leq \tau_4 - \tau_6 \leq (0,111) + 3,144 \Leftrightarrow -3,033 \leq \tau_4 - \tau_6 \leq 3,255$$

$$\hat{\tau}_4 - \hat{\tau}_7 = (0,878) - (-3,039) = 3,917$$

Para este contraste tem-se:

$$(3,917) - 3,144 \leq \tau_4 - \tau_7 \leq (3,917) + 3,144 \Leftrightarrow 0,773 \leq \tau_4 - \tau_7 \leq 7,061$$

$$\hat{\tau}_4 - \hat{\tau}_8 = (0,878) - (0,717) = 0,161$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,161) - 3,144 \leq \tau_4 - \tau_8 \leq (0,161) + 3,144 \Leftrightarrow -2,983 \leq \tau_4 - \tau_8 \leq 3,305$$

$$\hat{\tau}_4 - \hat{\tau}_9 = (0,878) - (0,661) = 0,217$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,217) - 3,144 \leq \tau_4 - \tau_9 \leq (0,217) + 3,144 \Leftrightarrow -2,927 \leq \tau_4 - \tau_9 \leq 3,361$$

$$\hat{\tau}_5 - \hat{\tau}_6 = (1,661) - (0,767) = 0,894$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,894) - 3,144 \leq \tau_5 - \tau_6 \leq (0,894) + 3,144 \Leftrightarrow -2,25 \leq \tau_5 - \tau_6 \leq 4,038$$

$$\hat{\tau}_5 - \hat{\tau}_7 = (1,661) - (-3,039) = 4,7$$

Para este contraste tem-se:

$$(4,7) - 3,144 \leq \tau_5 - \tau_7 \leq (4,7) + 3,144 \Leftrightarrow 1,556 \leq \tau_5 - \tau_7 \leq 7,844$$

$$\hat{\tau}_5 - \hat{\tau}_8 = (1,661) - (0,717) = 0,944$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,944) - 3,144 \leq \tau_5 - \tau_8 \leq (0,944) + 3,144 \Leftrightarrow -2,2 \leq \tau_5 - \tau_8 \leq 4,088$$

$$\hat{\tau}_5 - \hat{\tau}_9 = (1,661) - (0,661) = 1$$

Para este contraste tem-se:

$$(1) - 3,144 \leq \tau_5 - \tau_9 \leq (1) + 3,144 \Leftrightarrow -2,144 \leq \tau_5 - \tau_9 \leq 4,144$$

$$\hat{\tau}_6 - \hat{\tau}_7 = (0,767) - (-3,039) = 3,809$$

Para este contraste tem-se:

$$(3,809) - 3,144 \leq \tau_6 - \tau_7 \leq (3,809) + 3,144 \Leftrightarrow 1,556 \leq \tau_6 - \tau_7 \leq 7,844$$

$$\hat{\tau}_6 - \hat{\tau}_8 = (0,767) - (0,717) = 0,05$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,05) - 3,144 \leq \tau_6 - \tau_8 \leq (0,05) + 3,144 \Leftrightarrow -3,094 \leq \tau_6 - \tau_8 \leq 3,194$$

$$\hat{\tau}_6 - \hat{\tau}_9 = (0,767) - (0,661) = 0,056$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,056) - 3,144 \leq \tau_6 - \tau_9 \leq (0,056) + 3,144 \Leftrightarrow -3,088 \leq \tau_6 - \tau_9 \leq 3,2$$

$$\hat{\tau}_7 - \hat{\tau}_8 = (-3,039) - (0,717) = -3,756$$

Para este contraste tem-se:

$$(-3,756) - 3,144 \leq \tau_7 - \tau_8 \leq (-3,756) + 3,144 \Leftrightarrow -6,9 \leq \tau_7 - \tau_8 \leq -0,612$$

$$\hat{\tau}_7 - \hat{\tau}_9 = (-3,039) - (0,661) = -3,7$$

Para este contraste tem-se:

$$(-3,7) - 3,144 \leq \tau_7 - \tau_9 \leq (-3,7) + 3,144 \Leftrightarrow -6,844 \leq \tau_7 - \tau_9 \leq -0,556$$

$$\hat{\tau}_8 - \hat{\tau}_9 = (0,717) - (0,661) = 0,056$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,056) - 3,144 \leq \tau_8 - \tau_9 \leq (0,056) + 3,144 \Leftrightarrow -3,088 \leq \tau_8 - \tau_9 \leq 3,2$$

- Por fim, expomos os intervalos de confiança para os respectivos contrastes ao nível de significância de 1%:

$$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2 = (-3,561) - 1,2 = -4,761$$

Para este contraste tem-se:

$$(-4,761) - 3,375 \leq \tau_1 - \tau_2 \leq (-4,761) + 3,375 \Leftrightarrow -8,496 \leq \tau_1 - \tau_2 \leq -1,026$$

$$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_3 = (-3,561) - 0,717 = -4,278$$

Para este contraste tem-se:

$$(-4,278) - 3,375 \leq \tau_1 - \tau_3 \leq (-4,278) + 3,375 \Leftrightarrow -8,013 \leq \tau_1 - \tau_3 \leq -0,543$$

$$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_4 = (-3,561) - 0,878 = -4,439$$

Para este contraste tem-se:

$$(-4,439) - 3,375 \leq \tau_1 - \tau_4 \leq (-4,439) + 3,375 \Leftrightarrow -7,814 \leq \tau_1 - \tau_4 \leq -1,064$$

$$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_5 = (-3,561) - 1,661 = -5,222$$

Para este contraste tem-se:

$$(-5,222) - 3,375 \leq \tau_1 - \tau_5 \leq (-5,222) + 3,375 \Leftrightarrow -8,757 \leq \tau_1 - \tau_5 \leq -1,487$$

$$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_6 = (-3,561) - 0,767 = -4,328$$

Para este contraste tem-se:

$$(-4,328) - 3,375 \leq \tau_1 - \tau_6 \leq (-4,328) + 3,375 \Leftrightarrow -8,063 \leq \tau_1 - \tau_6 \leq -0,593$$

$$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_7 = (-3,561) - (-3,039) = -0,522$$

Para este contraste tem-se:

$$(-0,522) - 3,375 \leq \tau_1 - \tau_7 \leq (-0,522) + 3,375 \Leftrightarrow -4,257 \leq \tau_1 - \tau_7 \leq 3,213$$

$$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_8 = (-3,561) - (0,717) = -4,278$$

Para este contraste tem-se:

$$(-4,278) - 3,375 \leq \tau_1 - \tau_8 \leq (-4,278) + 3,375 \Leftrightarrow -8,013 \leq \tau_1 - \tau_8 \leq 0,543$$

$$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_9 = (-3,561) - (0,661) = -4,222$$

Para este contraste tem-se:

$$(-4,222) - 3,375 \leq \tau_1 - \tau_9 \leq (-4,222) + 3,375 \Leftrightarrow -7,957 \leq \tau_1 - \tau_9 \leq -0,487$$

$$\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_3 = (1,2) - (0,717) = 0,483$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,483) - 3,375 \leq \tau_2 - \tau_3 \leq (0,483) + 3,375 \Leftrightarrow -2,892 \leq \tau_2 - \tau_3 \leq 3,858$$

$$\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_4 = (1,2) - (0,878) = 0,322$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,322) - 3,375 \leq \tau_2 - \tau_4 \leq (0,322) + 3,375 \Leftrightarrow -3,413 \leq \tau_2 - \tau_4 \leq 4,057$$

$$\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_5 = (1,2) - (1,661) = -0,461$$

Para este contraste tem-se:

$$(-0,461) - 3,375 \leq \tau_2 - \tau_5 \leq (-0,461) + 3,375 \Leftrightarrow -3,836 \leq \tau_2 - \tau_5 \leq 2,914$$

$$\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_6 = (1,2) - (0,767) = 0,433$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,483) - 3,375 \leq \tau_2 - \tau_6 \leq (0,483) + 3,375 \Leftrightarrow -2,942 \leq \tau_2 - \tau_6 \leq 3,808$$

$$\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_7 = (1,2) - (-3,039) = 4,239$$

Para este contraste tem-se:

$$(4,239) - 3,375 \leq \tau_2 - \tau_7 \leq (4,239) + 3,375 \Leftrightarrow 0,864 \leq \tau_2 - \tau_6 \leq 7,614$$

$$\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_8 = (1,2) - (0,717) = 0,483$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,483) - 3,375 \leq \tau_2 - \tau_8 \leq (0,483) + 3,375 \Leftrightarrow -2,892 \leq \tau_2 - \tau_8 \leq 3,858$$

$$\hat{\tau}_2 - \hat{\tau}_9 = (1,2) - (0,661) = 0,539$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,539) - 3,375 \leq \tau_2 - \tau_9 \leq (0,539) + 3,375 \Leftrightarrow -2,836 \leq \tau_2 - \tau_9 \leq 3,914$$

$$\hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_4 = (0,717) - (0,878) = -0,161$$

Para este contraste tem-se:

$$(-0,161) - 3,375 \leq \tau_3 - \tau_4 \leq (-0,161) + 3,375 \Leftrightarrow -3,536 \leq \tau_3 - \tau_4 \leq -3,214$$

$$\hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_5 = (0,717) - (1,661) = -0,944$$

Para este contraste tem-se:

$$(-0,944) - 3,375 \leq \tau_3 - \tau_5 \leq (-0,944) + 3,375 \Leftrightarrow -4,319 \leq \tau_3 - \tau_5 \leq 2,431$$

$$\hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_6 = (0,717) - (0,767) = -0,05$$

Para este contraste tem-se:

$$(-0,05) - 3,375 \leq \tau_3 - \tau_6 \leq (-0,05) + 3,375 \Leftrightarrow -3,425 \leq \tau_3 - \tau_6 \leq 3,325$$

$$\hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_7 = (0,717) - (-3,039) = 3,756$$

Para este contraste tem-se:

$$(3,756) - 3,375 \leq \tau_3 - \tau_7 \leq (3,756) + 3,375 \Leftrightarrow 0,381 \leq \tau_3 - \tau_7 \leq 7,131$$

$$\hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_8 = (0,717) - (0,717) = 0$$

Para este contraste tem-se:

$$(0) - 3,375 \leq \tau_3 - \tau_8 \leq (0) + 3,375 \Leftrightarrow -3,375 \leq \tau_3 - \tau_8 \leq 3,375$$

$$\hat{\tau}_3 - \hat{\tau}_9 = (0,717) - (0,661) = 0,056$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,056) - 3,375 \leq \tau_3 - \tau_9 \leq (0,056) + 3,375 \Leftrightarrow -3,319 \leq \tau_3 - \tau_9 \leq 3,431$$

$$\hat{\tau}_4 - \hat{\tau}_5 = (0,878) - (1,661) = -0,783$$

Para este contraste tem-se:

$$(-0,783) - 3,375 \leq \tau_4 - \tau_5 \leq (-0,783) + 3,375 \Leftrightarrow -4,158 \leq \tau_4 - \tau_5 \leq 2,592$$

$$\hat{\tau}_4 - \hat{\tau}_6 = (0,878) - (0,767) = 0,111$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,111) - 3,375 \leq \tau_4 - \tau_6 \leq (0,111) + 3,375 \Leftrightarrow -3,264 \leq \tau_4 - \tau_6 \leq 3,486$$

$$\hat{\tau}_4 - \hat{\tau}_7 = (0,878) - (-3,039) = 3,917$$

Para este contraste tem-se:

$$(3,917) - 3,375 \leq \tau_4 - \tau_7 \leq (3,917) + 3,375 \Leftrightarrow 0,542 \leq \tau_4 - \tau_7 \leq 7,292$$

$$\hat{\tau}_4 - \hat{\tau}_8 = (0,878) - (0,717) = 0,161$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,161) - 3,375 \leq \tau_4 - \tau_8 \leq (0,161) + 3,375 \Leftrightarrow -3,214 \leq \tau_4 - \tau_8 \leq 3,536$$

$$\hat{\tau}_4 - \hat{\tau}_9 = (0,878) - (0,661) = 0,217$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,217) - 3,375 \leq \tau_4 - \tau_9 \leq (0,217) + 3,375 \Leftrightarrow -3,158 \leq \tau_4 - \tau_9 \leq 3,592$$

$$\hat{\tau}_5 - \hat{\tau}_6 = (1,661) - (0,767) = 0,894$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,894) - 3,375 \leq \tau_5 - \tau_6 \leq (0,894) + 3,375 \Leftrightarrow -2,481 \leq \tau_5 - \tau_6 \leq 4,269$$

$$\hat{\tau}_5 - \hat{\tau}_7 = (1,661) - (-3,039) = 4,7$$

Para este contraste tem-se:

$$(4,7) - 3,375 \leq \tau_5 - \tau_7 \leq (4,7) + 3,375 \Leftrightarrow 1,325 \leq \tau_5 - \tau_7 \leq 8,075$$

$$\hat{\tau}_5 - \hat{\tau}_8 = (1,661) - (0,717) = 0,944$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,944) - 3,375 \leq \tau_5 - \tau_8 \leq (0,944) + 3,375 \Leftrightarrow -2,431 \leq \tau_5 - \tau_8 \leq 4,319$$

$$\hat{\tau}_5 - \hat{\tau}_9 = (1,661) - (0,661) = 1$$

Para este contraste tem-se:

$$(1) - 3,375 \leq \tau_5 - \tau_9 \leq (1) + 3,375 \Leftrightarrow -2,375 \leq \tau_5 - \tau_9 \leq 4,375$$

$$\hat{\tau}_6 - \hat{\tau}_7 = (0,767) - (-3,039) = 3,806$$

Para este contraste tem-se:

$$(3,806) - 3,375 \leq \tau_6 - \tau_7 \leq (3,806) + 3,375 \Leftrightarrow 0,434 \leq \tau_6 - \tau_7 \leq 7,184$$

$$\hat{\tau}_6 - \hat{\tau}_8 = (0,767) - (0,717) = 0,05$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,05) - 3,375 \leq \tau_6 - \tau_8 \leq (0,05) + 3,375 \Leftrightarrow -3,325 \leq \tau_6 - \tau_8 \leq 3,425$$

$$\hat{\tau}_6 - \hat{\tau}_9 = (0,767) - (0,661) = 0,056$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,056) - 3,375 \leq \tau_6 - \tau_9 \leq (0,056) + 3,375 \Leftrightarrow -3,319 \leq \tau_6 - \tau_9 \leq 3,431$$

$$\hat{\tau}_7 - \hat{\tau}_8 = (-3,039) - (0,717) = -3,756$$

Para este contraste tem-se:

$$(-3,756) - 3,375 \leq \tau_7 - \tau_8 \leq (-3,756) + 3,375 \Leftrightarrow -7,131 \leq \tau_7 - \tau_8 \leq 0,381$$

$$\hat{\tau}_7 - \hat{\tau}_9 = (-3,039) - (0,661) = -3,7$$

Para este contraste tem-se:

$$(-3,7) - 3,375 \leq \tau_7 - \tau_9 \leq (-3,7) + 3,375 \Leftrightarrow -7,075 \leq \tau_7 - \tau_9 \leq -0,325$$

$$\hat{\tau}_8 - \hat{\tau}_9 = (0,717) - (0,661) = 0,056$$

Para este contraste tem-se:

$$(0,056) - 3,375 \leq \tau_8 - \tau_9 \leq (0,056) + 3,375 \Leftrightarrow -3,319 \leq \tau_8 - \tau_9 \leq 3,431$$