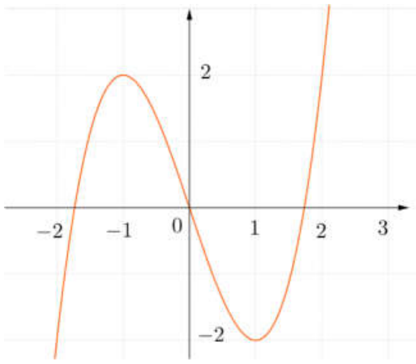
50 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CỰC TRỊ HÀM HỢP
CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

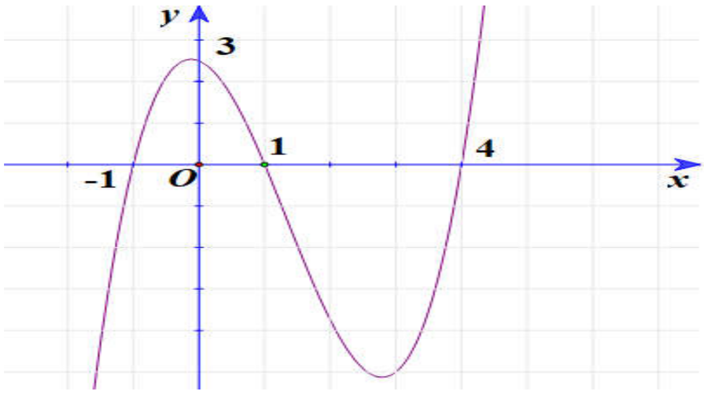
ĐỀ BÀI

Câu 1: Cho hàm số $y = f'(x+2)-2$ có đồ thị như hình bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(\frac{3}{2}x^2 - 3x\right)$ trên $\mathbb{R}$.



A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

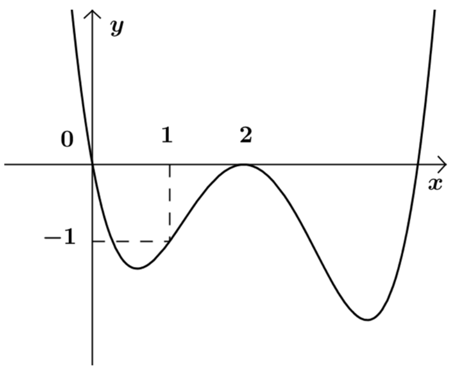
Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y = f(|3-x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 1.

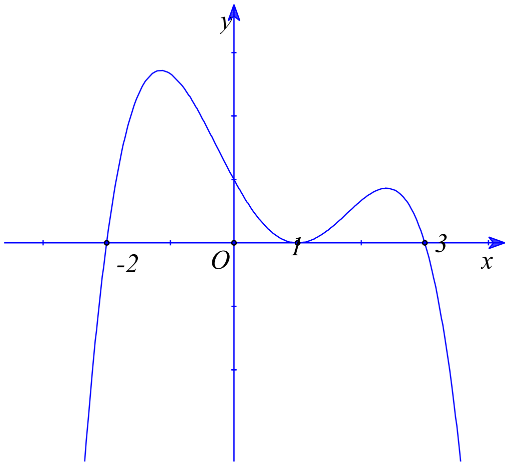
Câu 3: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 3x + 4)$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'\left(x\right)$ như hình vẽ



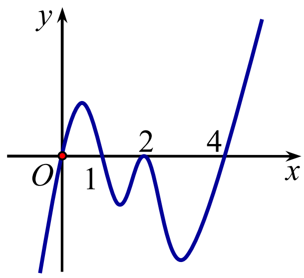
Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(x+5\right)\left(x+1\right)$ và $f\left(2\right)=1$. Hàm số $g\left(x\right)=\left[f\left(x^2\right)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

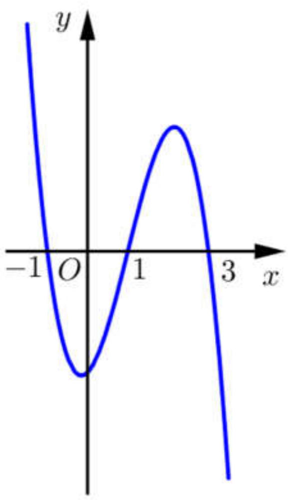
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 6: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$, phương trình $f'\left(x\right)=0$ có 4 nghiệm thực và đồ thị hàm số $f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2\right)$.



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

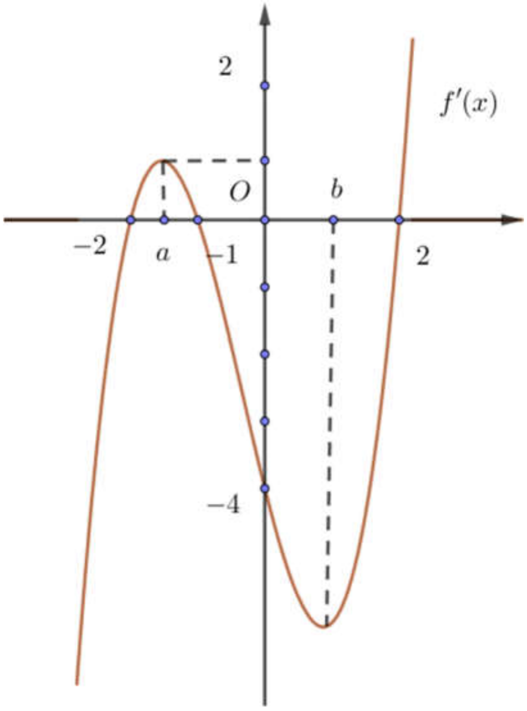
Câu 7: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số bậc bốn. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2-2x+2020}\right)$ là

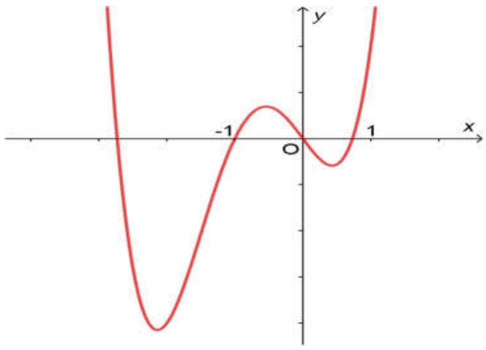
A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 8: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$, biết $f'(x)$ có hai điểm cực trị $x=a\in(-2;-1)$ và $x=b\in(1;2)$. Hỏi hàm số $g(x)=2019f\left(f'(x)\right)+2020$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 10. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 9.

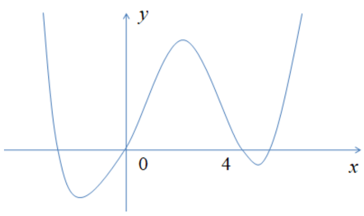
Câu 9: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(2-x^2\right)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

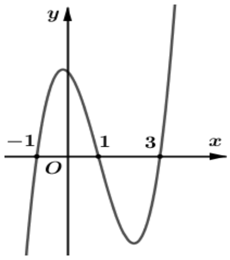
Câu 10: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(e^{x^2}+3\right)$ là

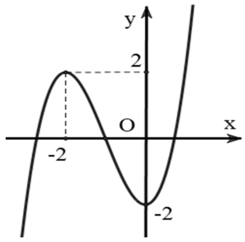
A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 11: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'\left(x\right)$. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2+2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?



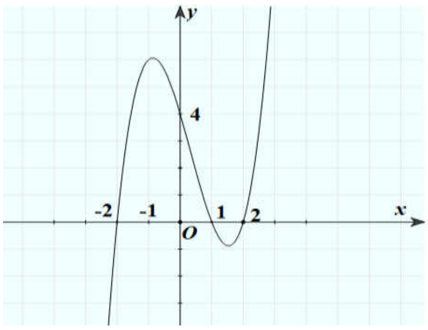
A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 12: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g\left(x\right)=f\left(-x^2-x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

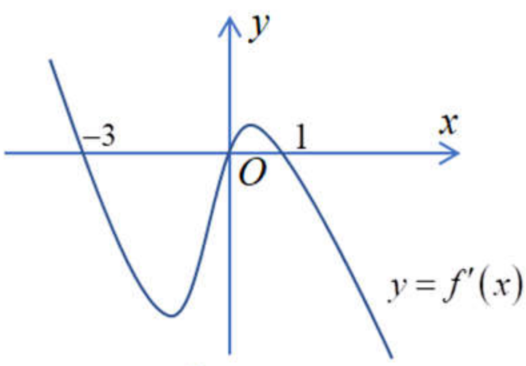
Câu 13: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(\sin x-2\right)$ trong khoảng $\left(0;2020\pi\right)$ là:

A. 4040. **B.** 8080. **C.** 8078. **D.** 2020.

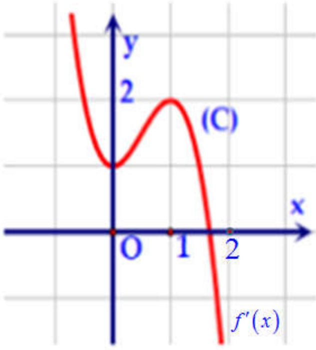
Câu 14: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(-x^2+2x)$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 15: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm $f'\left(x\right)$ như hình dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3-3\text{x}\right)$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

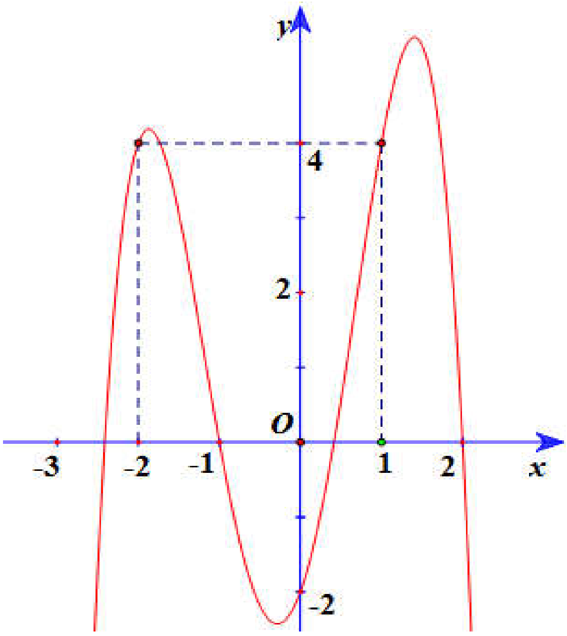
Câu 16: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		3		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(\left|x^3-6x^2+9x+3\right|\right)=0$ là

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

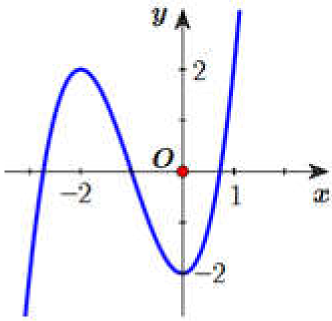
Câu 17: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(-x^2+2x\right)$ là

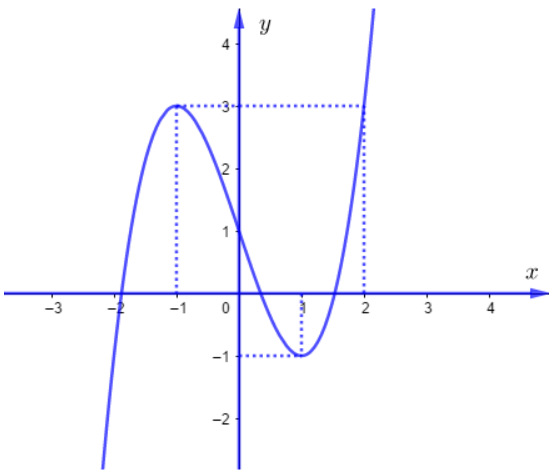
A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 18: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(-x^2+3x)$.



A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai điểm cực trị $x=-1, x=1$, có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $y=f(x^2-2x+1)+2020$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

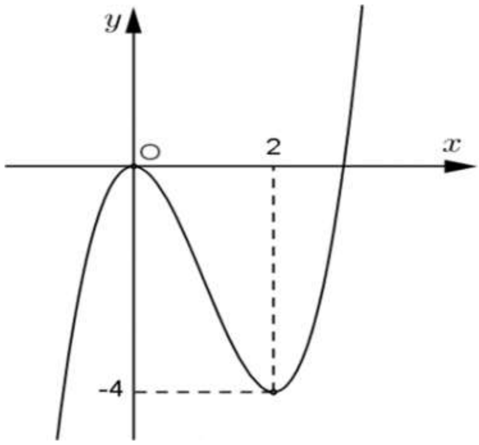
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tính tổng S tất cả các nghiệm thuộc đoạn $[0;2020\pi]$ của phương trình

$f^2(\cos x)-4f(\cos x)=0$.

A. $S=2039190\pi$. **B.** $S=4082420\pi$. **C.** $S=4078380\pi$. **D.** $S=2041210\pi$.

Câu 21: Biết rằng hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực đại của hàm số $y=f\left[f(x)\right]+2020$.



A. 1. **B.** 3. **C.** 2 . **D.** 4.

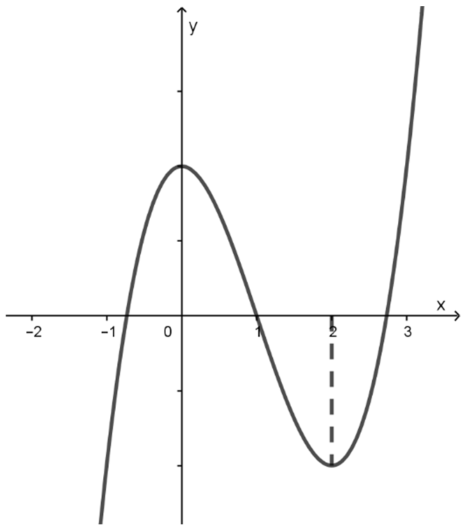
Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	0	$-$	

Hàm số $y=3f\left(-x^4+4x^2-6\right)+2x^6-3x^4-12x^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

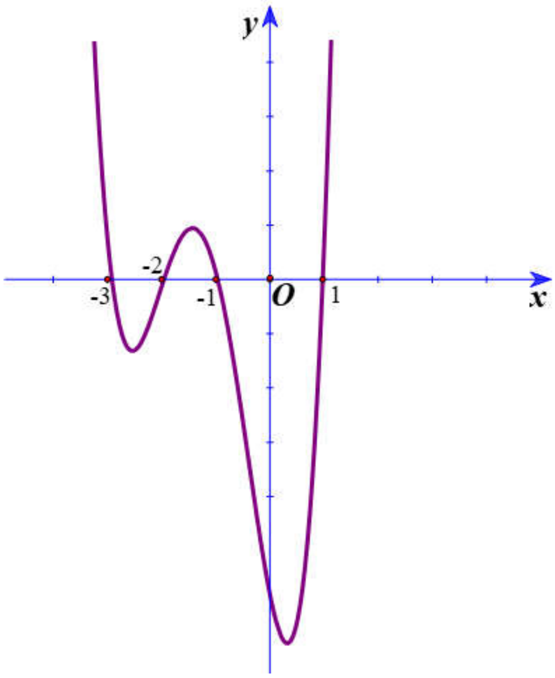
A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$.



A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

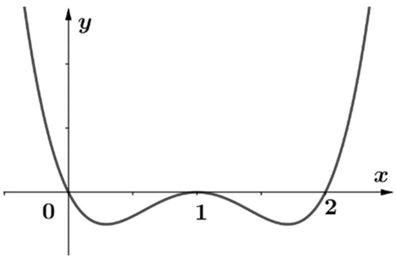
Câu 24: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(2x^3-3x^2-1)$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.

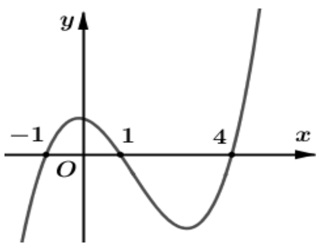
Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

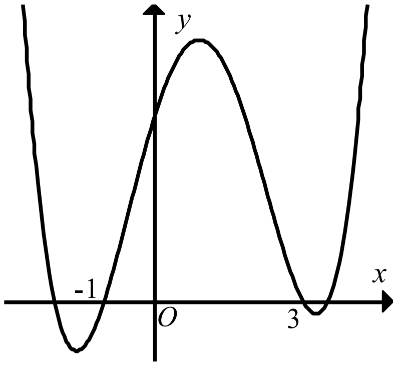
Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=e^{2f(x)+1}+5^{f(x)}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

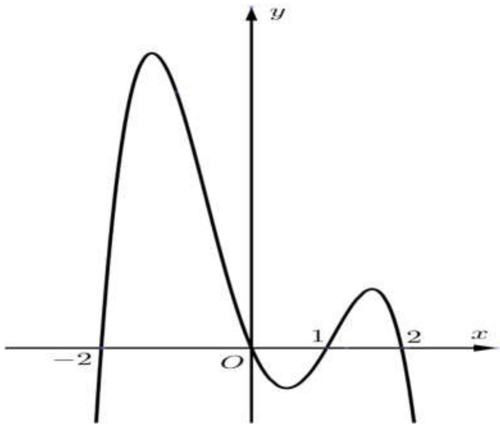
Câu 27: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2-1)$

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 28: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3-3x^2)$ là

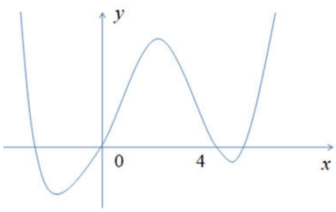
A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(3x+1)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗		↘	$-\infty$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

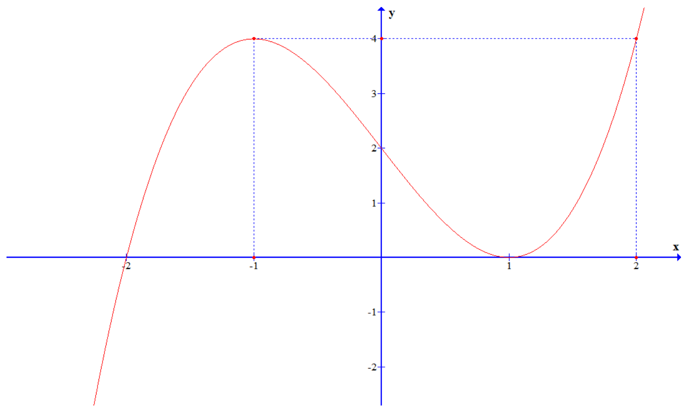
Câu 30: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(27^x-3.9^x+4)$ là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số nghiệm của phương trình $f\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) = 2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

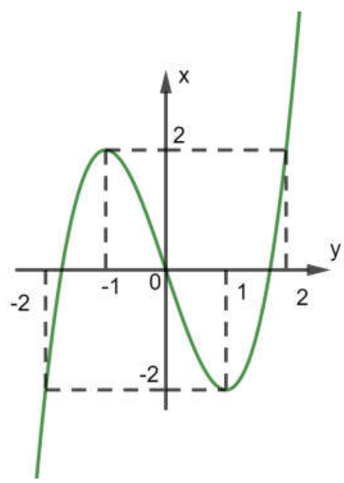
Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $\forall x \in \mathbb{R}$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây, giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ với Ox là $O(0;0); A(-1;0); B(1;0)$

x	$-\infty$	-1	x_1	0	x_2	1	$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	
y'	$-\infty$ ↗	0	↘	0	↗	0	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left[f'(x)\right]$ là

A. 7. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 8.

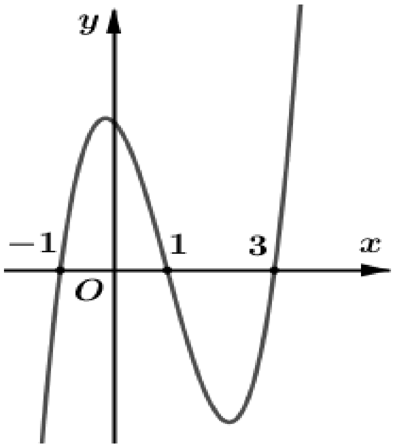
Câu 33: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số cực trị của hàm số $g(x) = \left|f\left(x^2 + 2x\right)\right|$

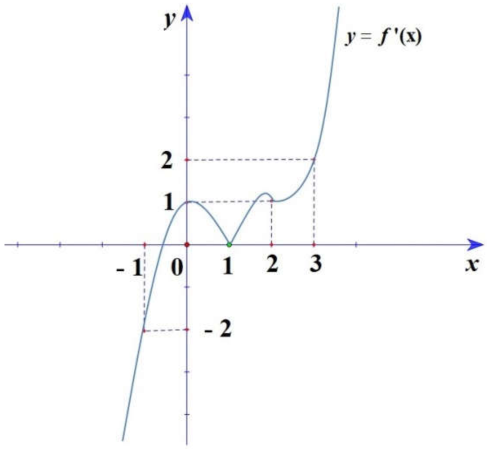
A. 5. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 34: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Đồ thị bên dưới là đồ thị của đạo hàm $y=f'(x)$. Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

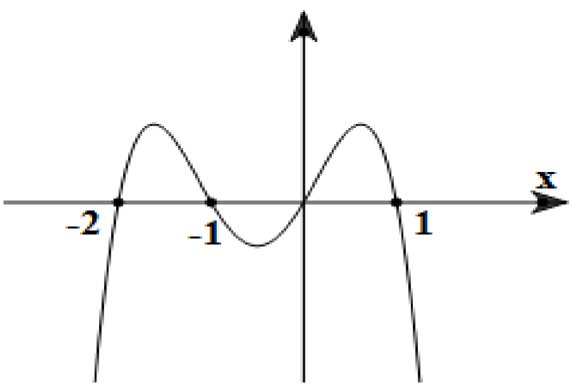
Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-2x\right)-\left(\dfrac{x^4}{2}-2x^3+x^2+2x+2020\right)$ là

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 8.

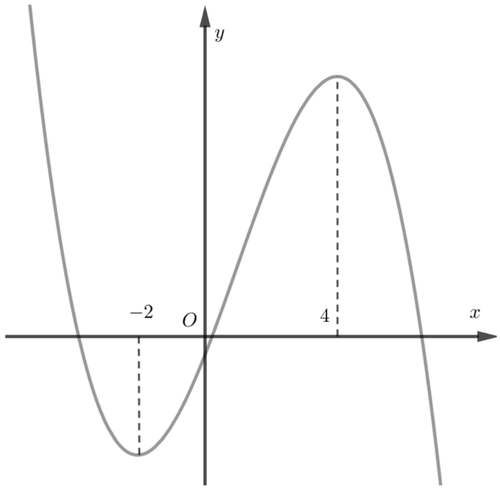
Câu 36: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(-x^3+3x^2-2\right)$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 37: Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right) = f\left(x^2 - 3x\right)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

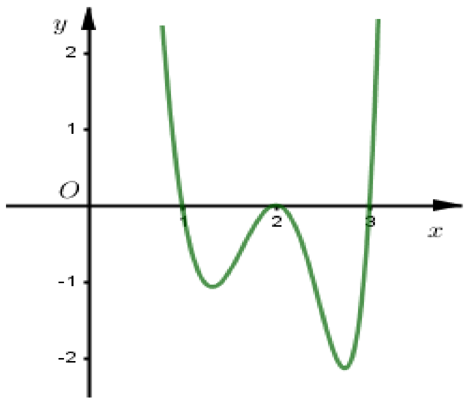
Câu 38: Cho $f(x)$ là hàm số đa thức bậc ba có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $f\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 39: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f\left(f\left(x\right)\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 40: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $y = f\left(3 - x^2\right)$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

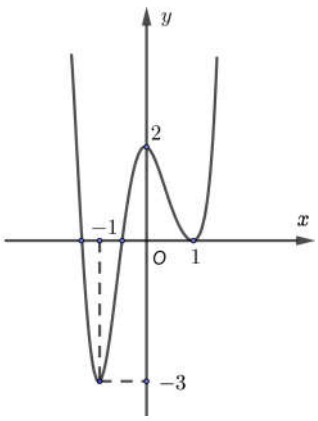
Câu 41: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực đại và cực tiểu của hàm số $y = f^2\left(2x\right) - 2f\left(2x\right) + 1$ lần lượt là

A. 2; 3. **B.** 3; 2. **C.** 1; 1. **D.** 2; 2.

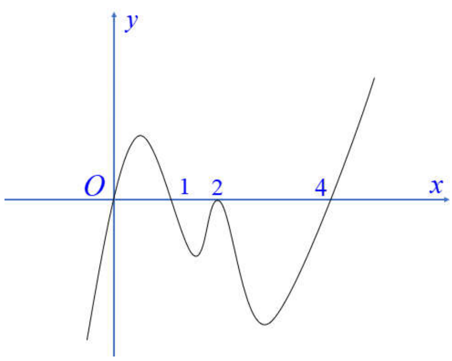
Câu 42: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của $y = f'\left(x\right)$ như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right) = f\left(4x^2 - 4x\right)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 6.

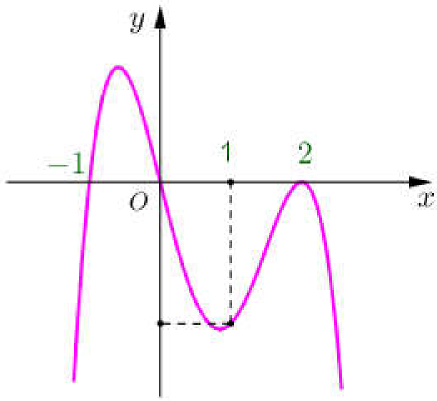
Câu 43: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x - 2019\right) - 2020x + 2021$ là

A. 3 . **B.** 1. **C.** 4 . **D.** 2 .

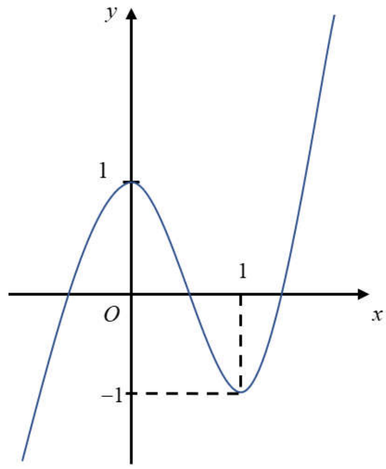
Câu 44: Cho hàm số bậc bốn $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right) = f\left(2x^3 - 3x^2 + 1\right)$ là

A. 5 . **B.** 3 . **C.** 7 . **D.** 11 .

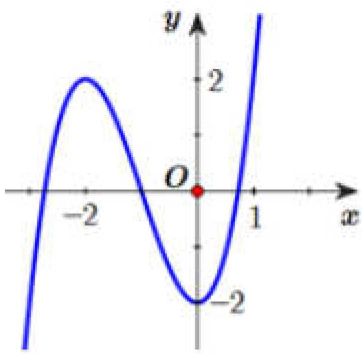
Câu 45: Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực đại của hàm số $g\left(x\right) = f\left(x^2 - 6x\right)$ là

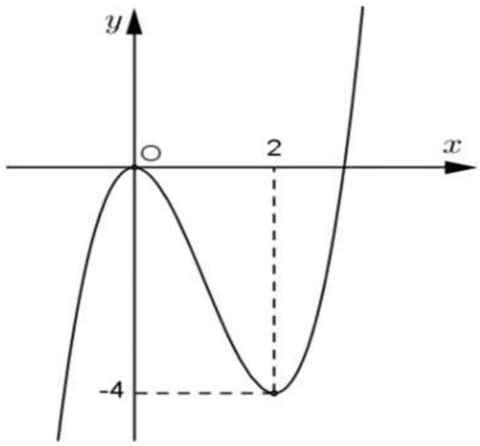
A. 2 . **B.** 3 . **C.** 1 . **D.** 4 .

Câu 46: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực đại của hàm số $y = f\left(-x^2 + 4x\right)$.



A. 6 . **B.** 3 . **C.** 4 . **D.** 5 .

Câu 47: Biết rằng hàm số $f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $y = f\left[f\left(x\right)\right]$.



A. 5. **B.** 2. **C.** 4 . **D.** 6 .

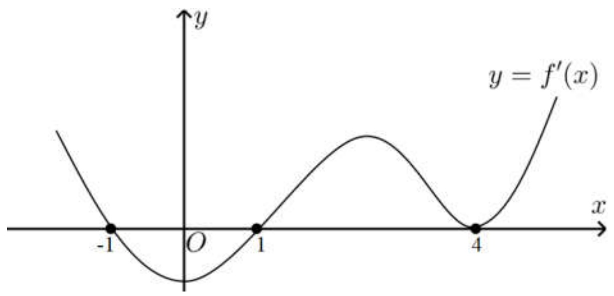
Câu 48: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	2	↗	7	↘	$-\infty$

Hỏi hàm số $y=g\left(x\right)=\left[f\left(2-x\right)\right]^2+2020$ có bao nhiêu điểm cực đại?

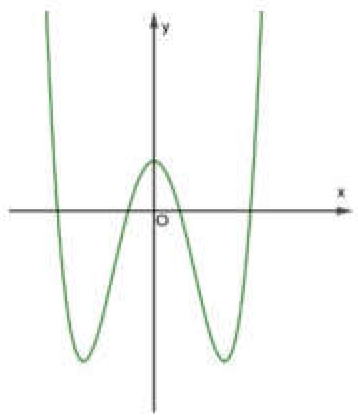
A. 1. **B.** 3 . **C.** 2 . **D.** 4 .

Câu 49: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới. Hỏi hàm số $g\left(x\right)=f\left(1-x^2\right)$ giảm trên khoảng nào sau đây?



A. $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$. **B.** $\left(-2;\,0\right)$. **C.** $\left(0;2\right)$. **D.** $\left(-1;0\right)$.

Câu 50: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



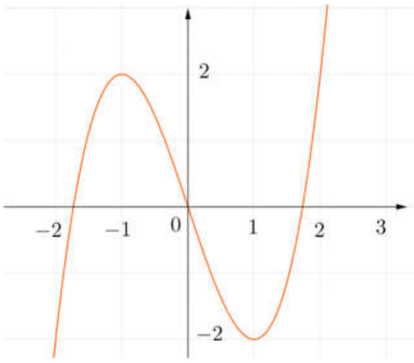
Tìm số điểm cực trị của hàm số $F(x)=3f^4(x)+2f^2(x)+5$.

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

------------------ HẾT ------------------

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y=f'(x+2)-2$ có đồ thị như hình bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(\dfrac{3}{2}x^2-3x\right)$ trên $\mathbb{R}$.

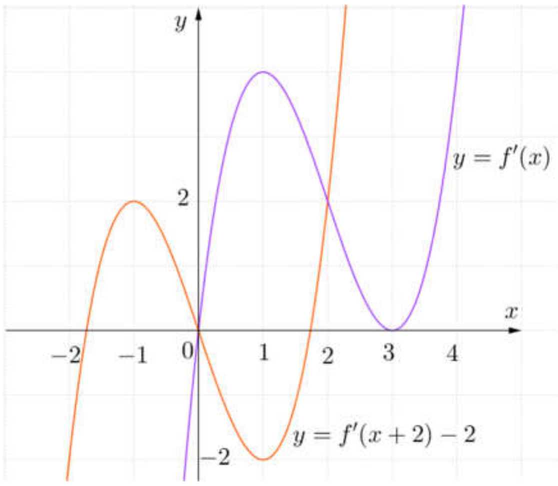


A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị của hàm số $y=f'(x+2)-2$, tịnh tiến lên trên 2 đơn vị rồi tịnh tiến sang phải 2 đơn vị, ta được đồ thị của hàm $y=f'\left(x\right)$ như sau

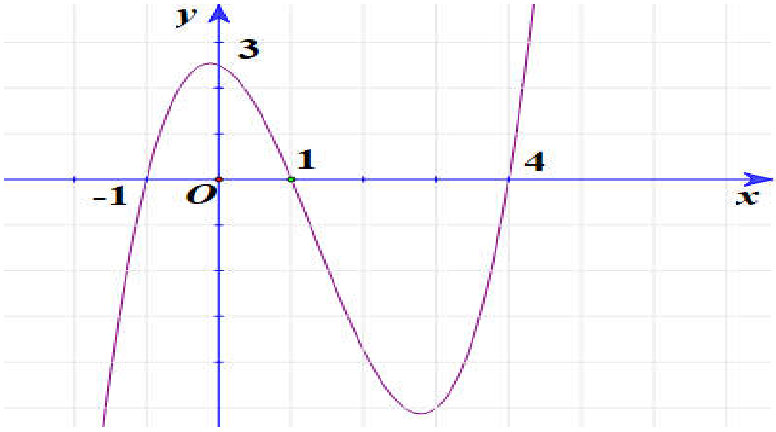


Ta có $g'\left(x\right)=\left(3x-3\right)f'\left(\dfrac{3}{2}x^2-3x\right)$

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-3=0\\ f'\left(\dfrac{3}{2}x^2-3x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ \dfrac{3}{2}x^2-3x=0\\ \dfrac{3}{2}x^2-3x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\\ x=0\\ x=1+\sqrt{3}\\ x=1-\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Trong đó $x=1+\sqrt{3}$ và $x=1-\sqrt{3}$ là hai nghiệm bội chẵn, do đó hàm số $y=g\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $y = f\left(|3-x|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Đặt $g(x) = f\left(|3-x|\right)$

$$g'(x) = \left(|3-x|\right)'.f'\left(|3-x|\right) = \frac{x-3}{|3-x|}.f'\left(|3-x|\right)$$

Điều kiện của $g'(x)$: $x \neq 3$.

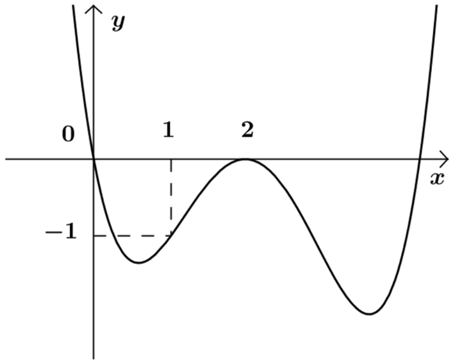
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(|3-x|\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |3-x| = -1 \\ |3-x| = 1 \\ |3-x| = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \\ x = -1 \\ x = 7 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		2		3		4		7		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $y = f\left(|3-x|\right)$ đạt cực trị tại 5 điểm.

Câu 3: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^2-3x+4)$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

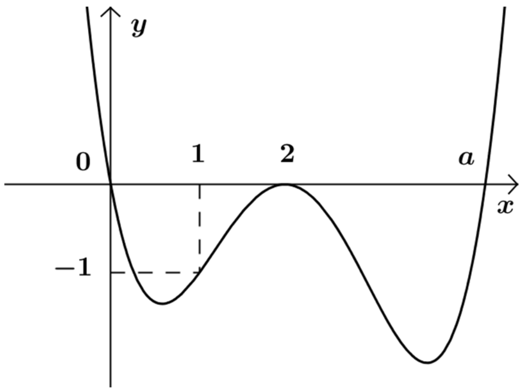
Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x)=(2x-3).f'(x^2-3x+4)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x-3=0 & (1) \\ f'(x^2-3x+4)=0 & (2) \end{array}\right..$$

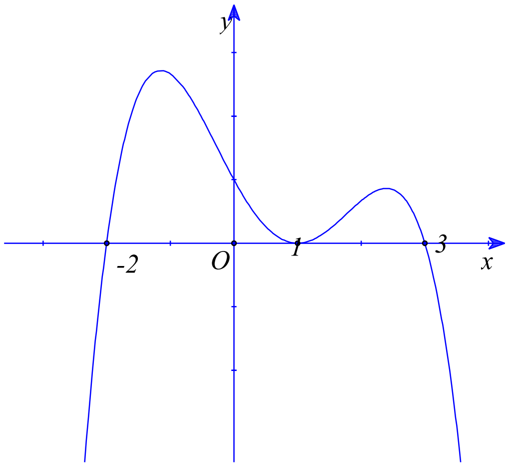
Ta có: $(1) \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.



Và $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+4=0 \text{ (vô nghiệm)} \\ x^2-3x+4=2 \text{ (PT nghiệm kép)} \\ x^2-3x+4=a,\ a>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (nghiệm kép)} \\ x=2 \text{ (nghiệm kép)} \\ x=a_1 \\ x=a_2 \end{array}\right..$

Do $a>2 \Rightarrow \begin{cases} a_1 \neq \frac{3}{2} \\ a_2 \neq \frac{3}{2} \end{cases}$, suy ra phương trình $g'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt nên $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực đại.

A. 1 . **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 4 .

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=(x^2-2x)'f'(x^2-2x)=(2x-2)f'(x^2-2x)$

Giải phương trình $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ f'(x^2-2x)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-2=0\\ x^2-2x=-2\\ x^2-2x=1\\ x^2-2x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=1+\sqrt{2}\\ x=1-\sqrt{2}\\ x=3\\ x=-1\end{array}\right.$

Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-2\\ x>3\end{array}\right.$ nên $f'(x^2-2x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-2x<-2\\ x^2-2x>3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$2x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x^2-2x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	|	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$			$\searrow$				$\nearrow$			$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g(x)=f(x^2-2x)$ có hai điểm cực đại.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(x)=(x-2)(x+5)(x+1)$ và $f(2)=1$. Hàm số $g(x)=\left[f(x^2)\right]^2$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1. **B.** 2 . **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có $f'(x)=(x-2)(x+5)(x+1) \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-5 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $y=f(x)$

x	$-\infty$		-5		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT suy ra $f(x)>0,\ \forall x \geq 0$ nên $f(x^2)>0, \forall x \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $g(x)=\left[f(x^2)\right]^2$

$g'(x)=\left(\left(f(x^2)\right)^2\right)'=4x.f(x^2)f'(x^2)=4x(x^2-2)(x^2+5)(x^2+1)f(x^2)$

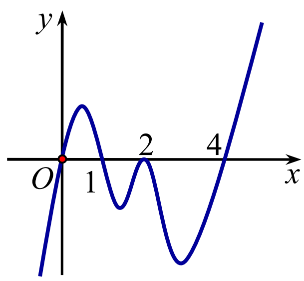
Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

BBT của $g(x)=\left[f(x^2)\right]^2$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT trên suy ra hàm số $g(x)=\left[f(x^2)\right]^2$ có ba điểm cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$, phương trình $f'(x)=0$ có 4 nghiệm thực và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2)$.



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 2x.f'\left(x^2\right)$

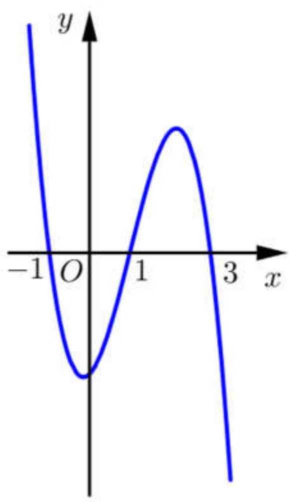
$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 2 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$$

Do $f'\left(x^2\right) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 > 4 \\ 0 < x^2 < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2 \\ -1 < x < 1 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2\right)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số có 5 điểm cực trị.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f\left(\sqrt{x^2 - 2x + 2020}\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Xét hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2-2x+2020}\right)$.

$$g'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2020}}.f'\left(\sqrt{x^2-2x+2020}\right).$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'\left(\sqrt{x^2-2x+2020}\right).\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2020}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'\left(\sqrt{x^2-2x+2020}\right)=0 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2020}}=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-2x+2020}=-1 \\ \sqrt{x^2-2x+2020}=1 \\ \sqrt{x^2-2x+2020}=3 \\ x=1 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-2x+2020}=-1(vn) \\ x^2-2x+2019=0(vn) \\ x^2-2x+2011=0(vn) \\ x=1 \end{array}\right.\Leftrightarrow x=1.$$

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có: $x>3$ thì $f'(x)<0$.

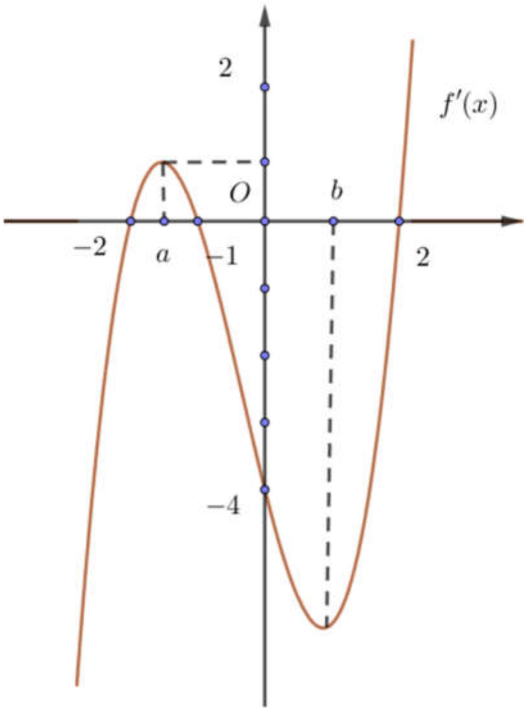
Mà $\sqrt{x^2-2x+2020}\geq\sqrt{2019}>3$ nên $f'\left(\sqrt{x^2+2x+2019}\right)<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\sqrt{2019})$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ chỉ có một cực đại.

Câu 8: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$, biết $f'(x)$ có hai điểm cực trị $x=a\in(-2;-1)$ và $x=b\in(1;2)$. Hỏi hàm số $g(x)=2019f\left(f'(x)\right)+2020$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 10. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 9.

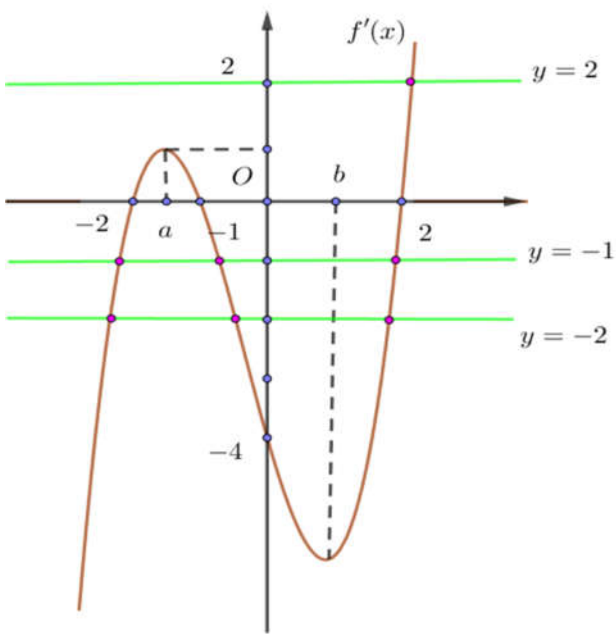
Lời giải

Chọn D

Ta có :

$g(x) = 2019f(f'(x)) + 2020$; $g'(x) = 2019f''(x).f'(f'(x))$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2019f''(x).f'(f'(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x) = 0 \\ f'(f'(x)) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \in (-2;-1) \\ x = b \in (1;2) \\ f'(x) = -2 \\ f'(x) = -1 \\ f'(x) = 2 \end{array}\right.$$



$f'(x) = -2$ có 3 nghiệm $x_1; x_2; x_3$ phân biệt.

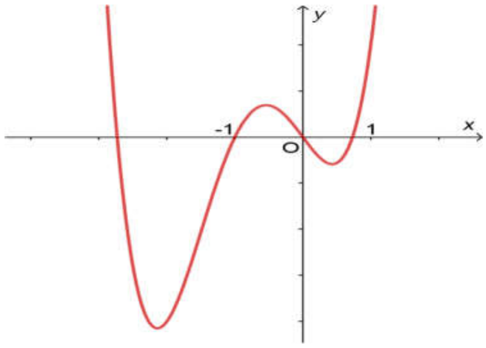
$f'(x) = -1$ có 3 nghiệm $x_4; x_5; x_6$ phân biệt.

$f'(x) = 2$ có 1 nghiệm x_7.

Tất cả 9 nghiệm trên đều là nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = 2019 f(f'(x)) + 2020$ có 9 điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây

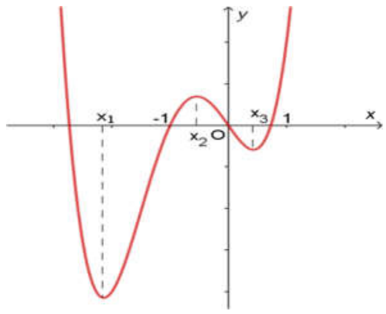


Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(2 - x^2)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D



Dựa vào đồ thị $y = f(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \in (-\infty; -1) \\ x = x_2 \in (-1; 0) \\ x = x_3 \in (0; 1) \end{array}\right.$

Ta có $g'(x) = -2x.f'(2 - x^2)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x.f'(2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(2 - x^2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ 2 - x^2 = x_1 \in (-\infty; -1) & (1) \\ 2 - x^2 = x_2 \in (-1; 0) & (2) \\ 2 - x^2 = x_3 \in (0; 1) & (3) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $h(x) = 2 - x^2$

Có $h'(x) = -2x; h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

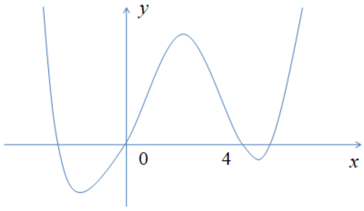
Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 7 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 10: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(e^{x^2}+3\right)$ là

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Do $y=f(x)$ là hàm số bậc bốn nên là hàm số liên tục và có đạo hàm luôn xác định tại mọi điểm $x\in\mathbb{R}$.

Theo đồ thị hàm số ta có được $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in(-\infty;0)\\x=b\in(0;4)\\x=c\in(4;+\infty)\end{array}\right.$.

Mặt khác $g'(x)=2x.e^{x^2}.f'\left(e^{x^2}+3\right)$.

Do đó $g'(x)=0\Leftrightarrow 2x.e^{x^2}f'\left(e^{x^2}+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(e^{x^2}+3\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\e^{x^2}+3=a\in(-\infty;0)\\e^{x^2}+3=b\in(0;4)\\e^{x^2}+3=c\in(4;+\infty)\end{array}\right.$.

Xét hàm số $h(x)=e^{x^2}+3$.

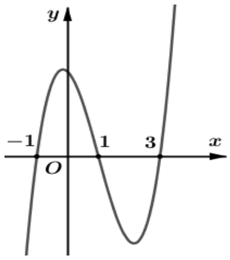
Ta có $h'(x)=2xe^{x^2}$; $h'(x)=0\Leftrightarrow x=0$. Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $e^{x^2}+3=a$, $e^{x^2}+3=b$ vô nghiệm; còn hai đồ thị hàm số $y=h(x)$ và $y=c$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ khác 0 do đó phương trình $e^{x^2}+3=c$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(e^{x^2}+3\right)$ có ba điểm cực trị.

Câu 11: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $g(x)=f\left(x^2+2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=\left(x^2+2x\right)'f'\left(x^2+2x\right)=(2x+2)f'\left(x^2+2x\right)$.

Suy ra

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+2=0\\ f'\left(x^2+2x\right)=0\end{array}\right.\xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)}\left[\begin{array}{l}2x+2=0\\ x^2+2x=-1\\ x^2+2x=1\\ x^2+2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-1+\sqrt{2}\\ x=-1-\sqrt{2}\\ x=1\\ x=-3\end{array}\right..$$

Ta lại có: $f'\left(x^2+2x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x^2+2x<1\\ x^2+2x>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x-1<0\\ x^2+2x+1>0\\ x^2+2x-3>0\end{array}\right.$

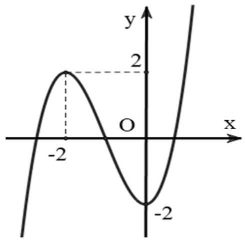
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}\\ x\neq-1\\ x>1\\ x<-3\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu của $y'=(2x+2)f'\left(x^2+2x\right)$.

x	$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$2x+2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'\left(x^2+2x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó suy ra hàm số $g(x)=f(x^2+2x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 12: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=f(-x^2-x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

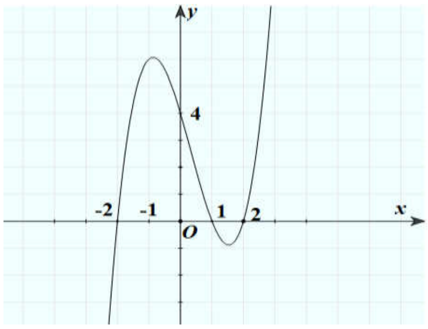
Dựa vào đồ thị ta thấy $x=-2$ và $x=0$ là nghiệm của phương trình $f'(x)=0$.

Ta có $g'(x)=\left[f(-x^2-x)\right]'=(-x^2-x)'f'(-x^2-x)=-(2x+1)f'(-x^2-x)$.

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+1=0\\ f'(-x^2-x)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ -x^2-x=-2\\ -x^2-x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ -x^2-x+2=0\\ x=0\\ x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=1\\ x=-2\\ x=0\\ x=-1\end{array}\right.$.

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 13: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(\sin x-2)$ trong khoảng $(0;2020\pi)$ là:

A. 4040. **B.** 8080. **C.** 8078. **D.** 2020.

Lời giải

Chọn D

+ Do $y=f(x)$ là hàm số bậc ba nên là hàm số liên tục và có đạo hàm luôn xác trên tập $\mathbb{R}$.

+ Hàm số $g(x)=f(\sin x-2)$ là hàm tuần hoàn với chu kì 2π. Nên ta xét hàm số $g(x)=f(\sin x-2)$ trong một chu kì $(0;2\pi]$.

+ Mặt khác $g'(x) = \cos x . f'(\sin x - 2)$.

+ Đặt $t = \sin x - 2$, do $x \in (0; 2\pi]$ nên $t \in [-3; -1]$, dựa vào đồ thị hàm f thì $f'(t) > 0, \forall t \in [-3; -1]$.

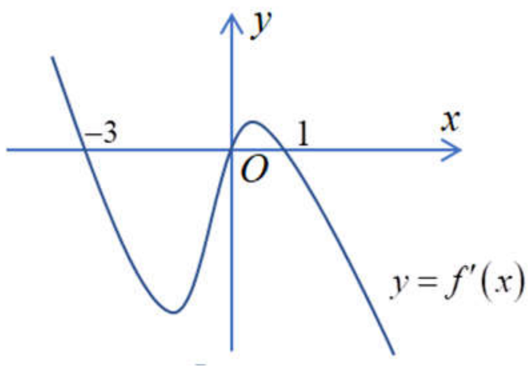
Hay $f'(\sin x - 2) > 0, \forall x \in (0; 2\pi]$ nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \end{array}\right.$.

+ Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

+ Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực trị trong $(0; 2\pi)$. Vậy hàm số $g(x) = f(\sin x - 2)$ trên khoảng $(0; 2020\pi)$ có 2020 điiểm cực trị.

Câu 14: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(-x^2 + 2x)$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = f(-x^2 + 2x)$ có đạo hàm $y' = (-2x + 2) . f'(-x^2 + 2x)$

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \\ x = 0 \end{array}\right.$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ x < -3 \end{array}\right.$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ -3 < x < 0 \end{array}\right.$

Vậy ta có:

$$f'\left(-x^2+2x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-x^2+2x=1\\-x^2+2x=-3\\-x^2+2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\x=3\\x=0\\x=2\end{array}\right.$$

$$f'\left(-x^2+2x\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<-x^2+2x<1\\-x^2+2x<-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<1\\1<x<2\\x>3\\x<-1\end{array}\right.$$

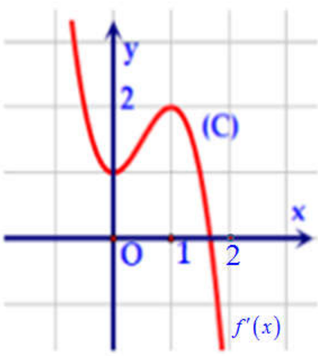
$$f'\left(-x^2+2x\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-x^2+2x>1\\-3<-x^2+2x<0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2<x<3\\-1<x<0\end{array}\right.$$

Xét bảng xét dấu của $y'=(-2x+2).f'\left(-x^2+2x\right)$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		3		$+\infty$
$-2x+2$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$f'\left(-x^2+2x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$y'=(-2x+2).f'\left(-x^2+2x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị.

Câu 15: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị hàm $f'(x)$ như hình dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x\right)$ là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

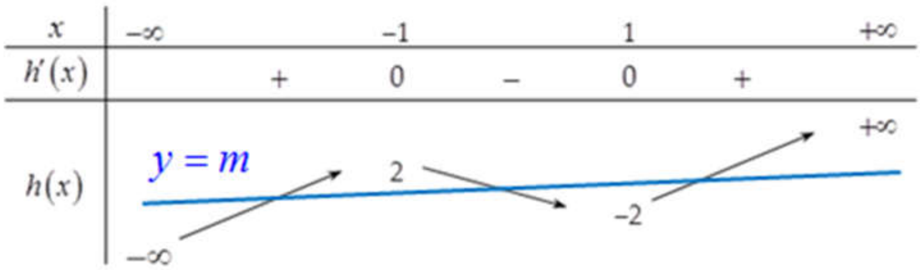
Chọn D

$$g(x)=f\left(x^3-3x\right) \Rightarrow g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x^2-3=0\\f'\left(x^3-3x\right)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x^3-3x=m \quad (1), m\in(1;2)\end{array}\right..$$

Xét hàm số $h(x)=x^3-3x \Rightarrow h'(x)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

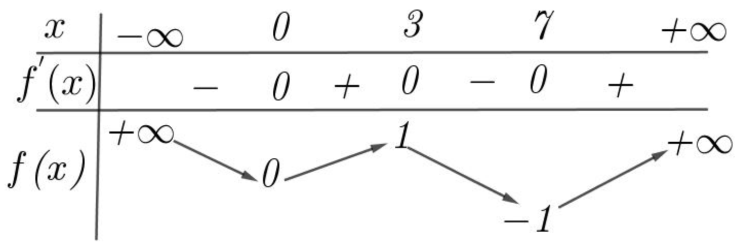
Ta có bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khác -1 và 1.

Nên phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt $\Rightarrow g(x)=f\left(x^3-3x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số nghiệm của phương trình $f\left(\left|x^3-6x^2+9x+3\right|\right)=0$ là

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$$f\left(\left|x^3-6x^2+9x+3\right|\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \left|x^3-6x^2+9x+3\right|=0 & (1) \\ \left|x^3-6x^2+9x+3\right|=a\,(3<a<7) & (2) \\ \left|x^3-6x^2+9x+3\right|=b\,(b>7) & (3) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=x^3-6x^2+9x+3$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có $g'(x)=3x^2-12x+9$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\left|g\left(x\right)\right|$

x	$-\infty$				1		3		$+\infty$
$\left|g(x)\right|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT trên ta thấy

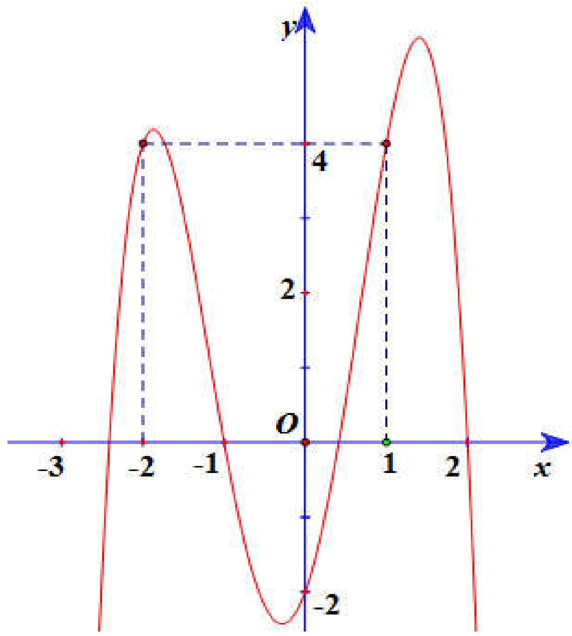
+Phương trình (1) có 1 nghiệm

+Phương trình (2) có nghiệm 4 phân biệt

+Phương trình (3) có nghiệm 2 phân biệt

Vậy phương trình có nghiệm 7 phân biệt.

Câu 17: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(-x^2+2x\right)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $g'\left(x\right)=\left(-2x+2\right)f'\left(-x^2+2x\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2x+2=0\\ f'(-x^2+2x)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ -x^2+2x=a,\ a\in(-2;-1)\\ -x^2+2x=b,\ b\in(-1;0)\\ -x^2+2x=c,\ c\in(1;2)\end{array}\right..$$

Đặt $h(x)=-x^2+2x$.

$h'(x)=-2x+2$.

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta suy ra:

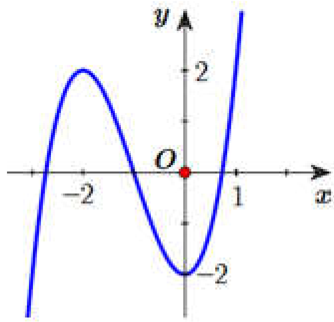
+ Phương trình: $-x^2+2x=a,\ a\in(-2;-1)$: có 2 nghiệm đơn.

+ Phương trình: $-x^2+2x=b,\ b\in(-1;0)$: có 2 nghiệm đơn.

+ Phương trình: $-x^2+2x=c,\ c\in(1;2)$: vô nghiệm.

Suy ra số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(-x^2+2x)$ là 5.

Câu 18: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(-x^2+3x)$.



A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$g'(x)=(-x^2+3x)'.f'(-x^2+3x)=(-2x+3)f'(-x^2+3x)$.

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow (-2x+3)f'(-x^2+3x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2x+3=0\\ f'(-x^2+3x)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ f'(-x^2+3x)=0\end{array}\right.$

Xét phương trình $f'\left(-x^2+3x\right)=0$. Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy

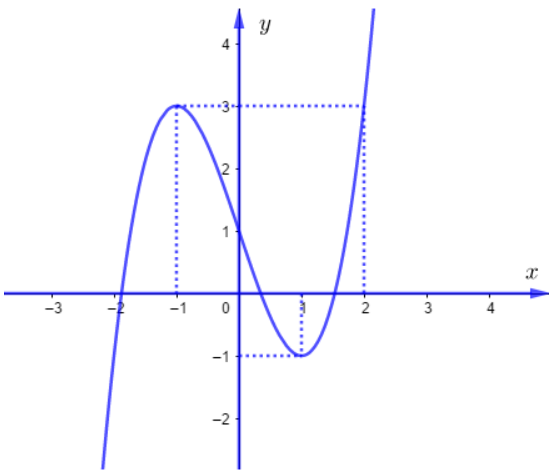
$$f'\left(-x^2+3x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-x^2+3x=0\\-x^2+3x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\\-x^2+3x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\\x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\\x=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên hàm số $g\left(x\right)=f\left(-x^2+3x\right)$.

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$		0		$\frac{3}{2}$		3		$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Nhìn vào bảng biến thiên, $g'\left(x\right)=0$ có 5 nghiệm phân biệt và $g'\left(x\right)$ đổi dấu khi qua các nghiệm này nên hàm số $g\left(x\right)=f\left(-x^2+3x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 19: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng hai điểm cực trị $x=-1, x=1$, có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2x+1\right)+2020$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Do hàm số $y = f(x)$ có đúng hai điểm cực trị $x = -1, x = 1$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $x = -1, x = 1$. Dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có $y' = (2x-2)f'(x^2-2x+1)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-2=0 \\ x^2-2x+1=-1 \\ x^2-2x+1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Ta có: 3 nghiệm 0, 1, 2 của $y' = 0$ đều là nghiệm bội lẻ nên y' đổi dấu khi qua các điểm này. Mặt khác với $x > 2$ thì $2x-2 > 0$ và $x^2-2x+1 > 0, f'(x^2-2x+1) > 0$.

Do đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y = f(x^2-2x+1)+2020$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Tính tổng S tất cả các nghiệm thuộc đoạn $[0;2020\pi]$ của phương trình

$f^2(\cos x) - 4f(\cos x) = 0$.

A. $S = 2039190\pi$. **B.** $S = 4082420\pi$. **C.** $S = 4078380\pi$. **D.** $S = 2041210\pi$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f^2(\cos x)-4f(\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(\cos x)=0 \\ f(\cos x)=4 \end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có

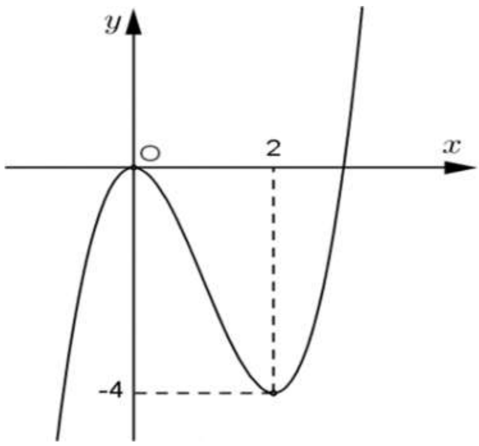
$f(\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=1 \\ \cos x=a<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x=1.\quad (1)$

$f(\cos x)=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-1 \\ \cos x=b>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x=-1.\quad (2)$

Do đó $f^2(\cos x)-4f(\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=1 \\ \cos x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Từ $k\pi\in[0;2020\pi] \Leftrightarrow k\in\{0,1,2....,2020\}$ suy ra tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là $S=(1+2+\cdots+2020)\pi=2041210\pi$.

Câu 21: Biết rằng hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực đại của hàm số $y=f[f(x)]+2020$.



A. 1. **B.** 3. **C.** 2 . **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=f[f(x)]$, $y'=f'(x).f'[f(x)]$;

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'[f(x)]=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=a\in(2;+\infty) \\ x=b\in(a;+\infty) \end{array}\right.$.

Với $x\in(-\infty;0) \Rightarrow \begin{cases} f'(x)>0 \\ f(x)<0 \end{cases} \Rightarrow f'[f(x)]>0 \Rightarrow y'>0$.

Với $x\in(0;2) \Rightarrow \begin{cases} f'(x)<0 \\ f(x)<0 \end{cases} \Rightarrow f'[f(x)]>0 \Rightarrow y'<0$.

Với $x\in(2;a)\Rightarrow\begin{cases}f'(x)>0\\f(x)<0\end{cases}\Rightarrow f'[f(x)]>0\Rightarrow y'>0$.

Với $x\in(a;b)\Rightarrow\begin{cases}f'(x)>0\\0<f(x)<2\end{cases}\Rightarrow f'[f(x)]<0\Rightarrow y'<0$.

Với $x\in(b;+\infty)\Rightarrow\begin{cases}f'(x)>0\\f(x)>2\end{cases}\Rightarrow f'[f(x)]>0\Rightarrow y'>0$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		a		b		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	0	+	
y		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y=f[f(x)]$ có hai điểm cực đại.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	

Hàm số $y=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=g(x)=3f(-x^4+4x^2-6)+2x^6-3x^4-12x^2$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Có $g'(x)=3(-4x^3+8x)f'(-x^4+4x^2-6)+12x^5-12x^3-24x$

$=12x(-x^2+2)f'(-x^4+4x^2-6)+12x(x^4-x^2-2)$

$=12x(-x^2+2)f'(-x^4+4x^2-6)+12x(x^2-2)(x^2+1)$

$=12x(-x^2+2)\left[f'(-x^4+4x^2-6)-(x^2+1)\right]$

Có $-x^4+4x^2-6=-(x^4-4x^2+6)=-\left[(x^2-2)^2+2\right]=-(x^2-2)^2-2\le-2,\forall x$

$\Rightarrow f'\left[-(x^2-2)^2-2\right]<0$, (theo bbt).

Suy ra $\left[f'(-x^4+4x^2-6)-(x^2+1)\right]<0$

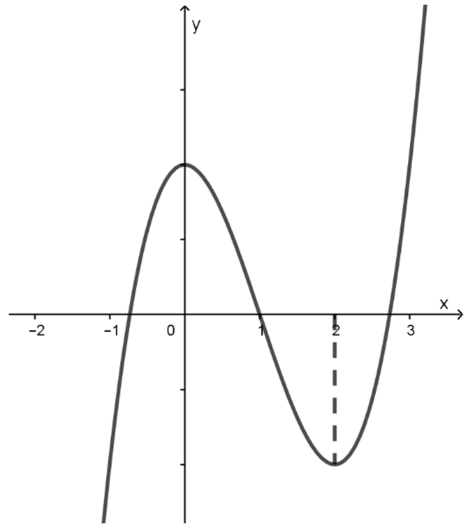
Do đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow 12x\left(-x^2+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y=g(x)$ có hai điểm cực tiểu.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$.



A. 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

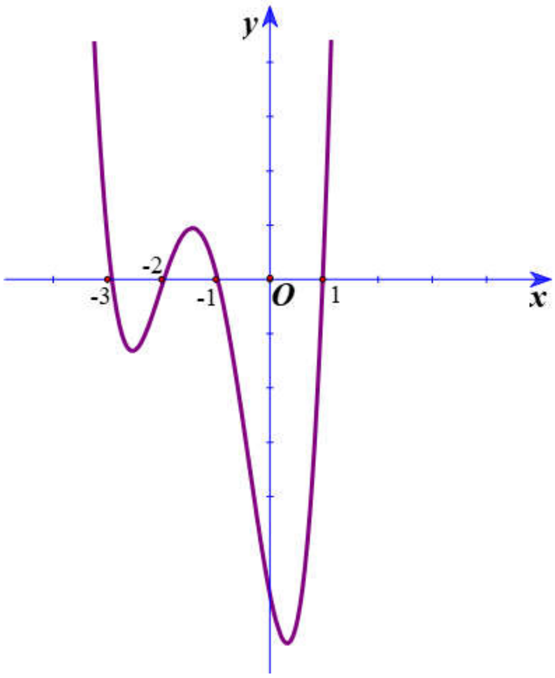
Ta có: $f'\left(x^2-2x\right)=(2x-2).f'\left(x^2-2x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'\left(x^2-2x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=0 \\ x^2-2x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=2 \\ x=1\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Ta thấy $f'\left(x^2-2x\right)=0$ có 5 nghiệm đơn nên $f'\left(x^2-2x\right)$ đổi dấu khi qua các nghiệm đó.

Suy ra hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 24: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(2x^3 - 3x^2 - 1)$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \in (-3;-2) \\ x = b \in (-2;-1) \\ x = c \in (0;1) \end{array}\right.$.

Mặt khác: $g'(x) = (6x^2 - 6x) f'(2x^3 - 3x^2 - 1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ x = 1 & \\ 2x^3 - 3x^2 - 1 = a & (1) \\ 2x^3 - 3x^2 - 1 = b & (2) \\ 2x^3 - 3x^2 - 1 = c & (3) \end{array}\right.$$

Xét hàm số: $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$, ta có: $h'(x) = 6x^2 - 6x \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

- Do $a \in (-3;-2)$ nên phương trình (1) có 1 nghiệm đơn không trùng với $x = 0$ và $x = 1$.

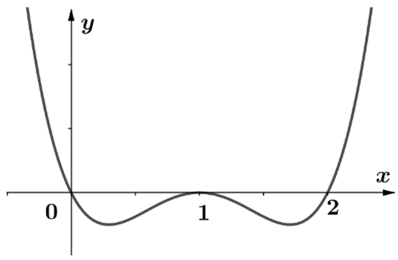
- Do $b\in(-2;-1)$ nên phương trình (2) có 3 nghiệm đơn không trùng với $x=0$, $x=1$ và không trùng với nghiệm của phương trình (1).

- Do $c\in(0;1)$ nên phương trình (3) có 1 nghiệm đơn không trùng với $x=0$, $x=1$ và không trùng với bất kì nghiệm nào của phương trình (1) và phương trình (2).

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 7 nghiệm đơn nên hàm số $g(x)=f(2x^3-3x^2-1)$

$g(x)=f(x^3-3x^2)$ có 7 cực trị.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 5.. **B.** 3.. **C.** 4.. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

+ Ta có $g(x)=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)\Rightarrow g'(x)=\dfrac{5(-x^2+4)}{(x^2+4)^2}.f'\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$.

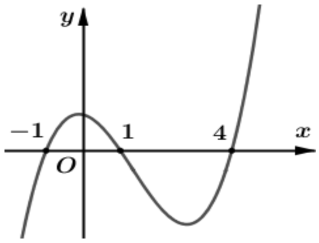
$$+\ g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{5x}{x^2+4}=0\\ \dfrac{5x}{x^2+4}=1\\ \dfrac{5x}{x^2+4}=2\\ -x^2+4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\ \text{(nghiệm bội chẵn)}\\ x=4\ \text{(nghiệm bội chẵn)}\\ x=2\\ x=-2\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Vậy hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$ có 2 điểm cực tiểu.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=e^{2f(x)+1}+5^{f(x)}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

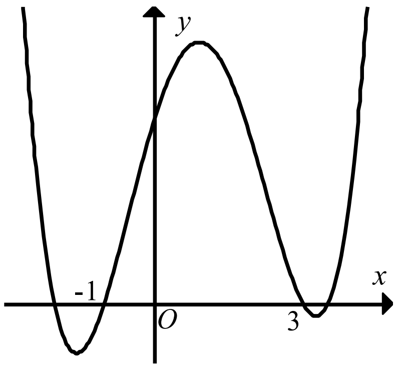
Ta thấy đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt, suy ra hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Ta có $g'(x)=2f'(x).e^{2f(x)+1}+f'(x).5^{f(x)}.\ln 5=f'(x).\left(2e^{2f(x)+1}+5^{f(x)}.\ln 5\right)$.

Vì $2e^{2f(x)+1}+5^{f(x)}.\ln 5>0$ với mọi x nên $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=0$.

Suy ra số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Câu 27: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x^2-1\right)$

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

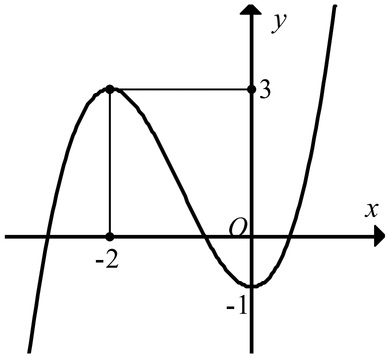
Ta có $g'(x)=\left(3x^2+6x\right)f'\left(x^3+3x^2-1\right)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\f'\left(x^3+3x^2-1\right)=0\,(*)\end{array}\right.$$.

Xét phương trình $(*)$

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $f'\left(x^3+3x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+3x^2-1=x_1<-1\\x^3+3x^2-1=x_2\in(-1;3)\\x^3+3x^2-1=x_3>3\end{array}\right.$.

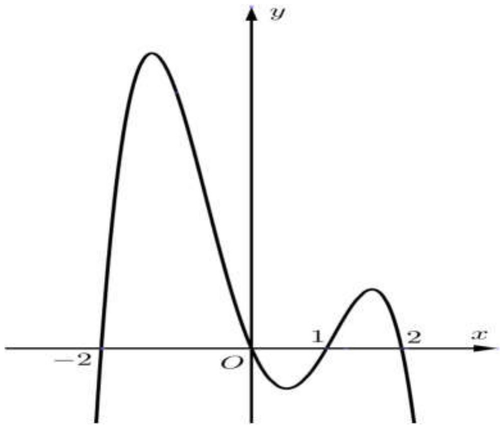
Dựa vào đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2-1$ như hình vẽ



Ta thấy phương trình (*) có 5 nghiệm phân biệt khác 0 và 2.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 7 nghiệm phân biệt. Do đó hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 28: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3-3x^2)$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g(x)=f(x^3-3x^2)\Rightarrow g'(x)=(3x^2-6x)f'(x^3-3x^2)$.

$$g'(x)=(3x^2-6x)f'(x^3-3x^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\f'(x^3-3x^2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\\x^3-3x^2=a\in(-2;0)\\x^3-3x^2=b\in(0;1)\\x^3-3x^2=c\in(1;2)\end{array}\right..$$

Xét phương trình $x^3-3x^2=m$.

Hàm số $y=x^3-3x^2\Rightarrow y'=3x^2-6x$ có các nghiệm $x=0$; $x=2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

- Phương trình $x^3-3x^2=a\in(-2;0)$ có 3 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3.

- Phương trình $x^3-3x^2=b\in(0;1)$ có 1 nghiệm x_4.

- Phương trình $x^3-3x^2=c\in(1;2)$ có 1 nghiệm x_5.

Nhận thấy: x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 phân biệt và khác $0;2$.

Vậy $g'(x)$ có 7 nghiệm đơn phân biệt do đó hàm số $g(x)=f(x^3-3x^2)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(3x+1)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x)=f(3x+1)\Rightarrow g'(x)=3f'(3x+1)$.

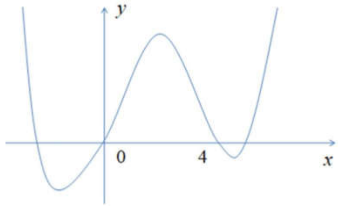
$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(3x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+1=-1\Rightarrow x=-\dfrac{2}{3} \\ 3x+1=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{3} \\ 3x+1=1\Rightarrow x=0 \end{array}\right..$$

Ta có BBT sau:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=-\dfrac{1}{3}$.

Câu 30: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(27^x-3.9^x+4\right)$ là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=t_1<0\\x=t_2\in\left(0;4\right)\\x=t_3>4\end{array}\right.$

Ta có $g'\left(x\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(27^x\ln27-3.9^x\ln9\right)f'\left(27^x-3.9^x+4\right)=0\left(*\right)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_3 2\\27^x-3.9^x+4=t_1<0\\27^x-3.9^x+4=t_2\in\left(0;4\right)\\27^x-3.9^x+4=t_3>4\end{array}\right.$

Xét hàm số $h\left(x\right)=27^x-3.9^x+4$ với $x\in\mathbb{R}$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\log_3 2$		$+\infty$
h'(x)		-	0	+	
h(x)	4	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra:

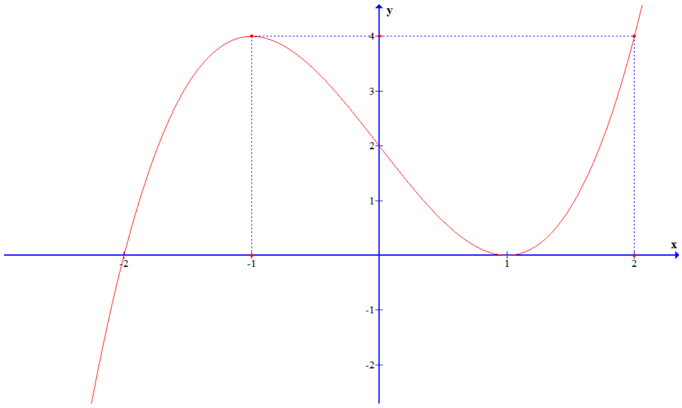
+) với $t\in\left(0;4\right)$ phương trình $27^x-3.9^x+4=t$ có 2 nghiệm phân biệt

+) với $t>4$ phương trình $27^x-3.9^x+4=t$ có 1 nghiệm.

+) với $t<0$ phương trình $27^x-3.9^x+4=t$ vô nghiệm.

Do đó phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt và là nghiệm bội lẻ, mà $g'\left(x\right)$ là hàm liên tục nên đổi dấu khi x đi qua các nghiệm.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số nghiệm của phương trình $f\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)=2$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta thấy

$$f\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{x^2+1}=0\\ \dfrac{x}{x^2+1}=a>\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{x}{x^2+1}=b<-\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

Xét hàm số $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ có

TXĐ $D=\mathbb{R}$; $y'=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$

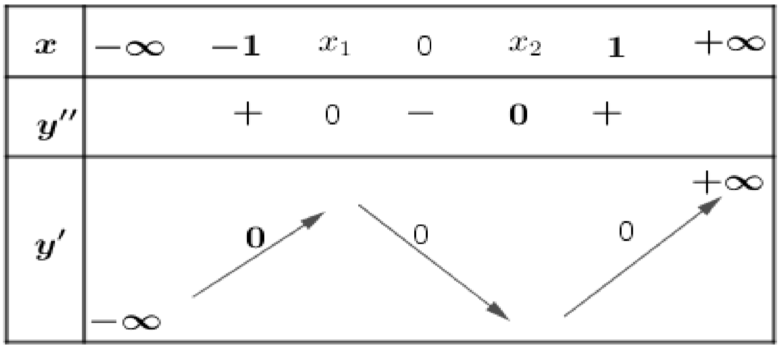
Nên ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0

Từ đó $\dfrac{x}{x^2+1}=0$ có gnhiệm duy nhất; $\dfrac{x}{x^2+1}=a>\dfrac{1}{2}$ vô nghiệm; $\dfrac{x}{x^2+1}=b<-\dfrac{1}{2}$ vô nghiệm.

Vậy phương trình $f\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)=2$ có đúng 1 nghiệm.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại $\forall x\in\mathbb{R}$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây, giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ với Ox là $O(0;0)$; $A(-1;0)$; $B(1;0)$



Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left[f'(x)\right]$ là

A. 7. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Từ giả thiết, có đồ thị hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm $O(0;0); A(-1;0); B(1;0)$.

Khi đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} c = 0 \\ a + b = -1 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow f'(x) = x^3 - x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 1$

Đặt: $g(x) = f\left(f'(x)\right)$

Ta có: $g'(x) = \left(f\left[f'(x)\right]\right)' = f'\left[f'(x)\right].f''(x) = \left[\left(x^3 - x\right)^3 - \left(x^3 - x\right)\right]\left(3x^2 - 1\right)$

$= x(x-1)(x+1)\left(x^3 - x - 1\right)\left(x^3 - x + 1\right)\left(3x^2 - 1\right)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x^3 - x - 1 = 0 \\ x^3 - x + 1 = 0 \\ 3x^2 - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = a\,(\approx 1,32) \\ x = b\,(b \approx -1,32) \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$$

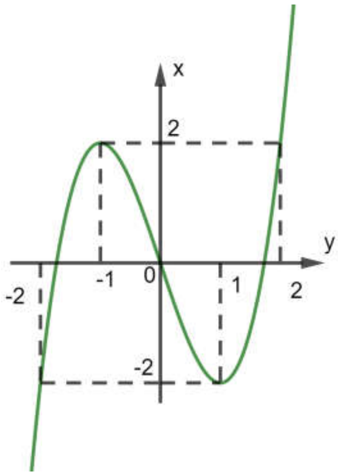
Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		b		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1		a		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

*** Cách xét dấu** $g'(x)$: chọn $x=2\in(a;+\infty)$ ta có: $g'(2)>0\Rightarrow g'(x)>0\forall x\in(a;+\infty)$, từ đó suy ra dấu của $g'(x)$ trên các khoảng còn lại.

Dựa vào BBT suy ra hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 33. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^2+2x\right)\right|$

A. 5. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Số cực trị của hàm số $y=g(x)$ bằng số nghiệm phương trình $f\left(x^2+2x\right)=0$ (*) cộng với số cực trị (khác các nghiệm ở (*)) của hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$.

Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta có

$$f\left(x^2+2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x=0\\x^2+2x=a\in(-2;-1)\\x^2+2x=b\in(1;2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\vee x=0\\x\in\varnothing\\x=x_1\vee x=x_2\end{array}\right.$$

Mặt khác $\left(f\left(x^2+2x\right)\right)'=2(x+1).f'\left(x^2+2x\right)$

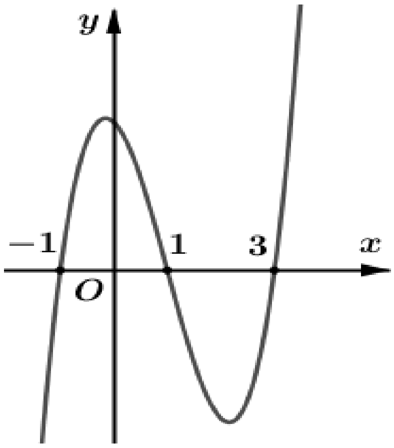
Nên $\left(f\left(x^2+2x\right)\right)'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\f'\left(x^2+2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=-1&\\x^2+2x=-1&(1)\\x^2+2x=1&(2)\end{array}\right.$

Phương trình (1) có nghiệm kép $x=-1$, phương trình (2) có hai nghiệm $x=-1\pm\sqrt{2}$ nên phương trình $\left(f\left(x^2+2x\right)\right)'=0$ có $x=-1$ là nghiệm bội ba và hai nghiệm đơn $x=-1\pm\sqrt{2}$.

Vậy phương trình $\left(f\left(x^2+2x\right)\right)'=0$ có ba nghiệm bội lẻ nên hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ có ba cực trị là -1 và $-1\pm\sqrt{2}$ khác 4 nghiệm của phương trình (*).

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 7 cực trị là -1,0,-2, x_1, x_2 và $-1\pm\sqrt{2}$.

Câu 34: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Đồ thị bên dưới là đồ thị của đạo hàm $y=f'(x)$. Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$.

Suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=0 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị của đạo hàm $y=f'(x)$ suy ra $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=-1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1+2\sqrt{2} \\ x=-1-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

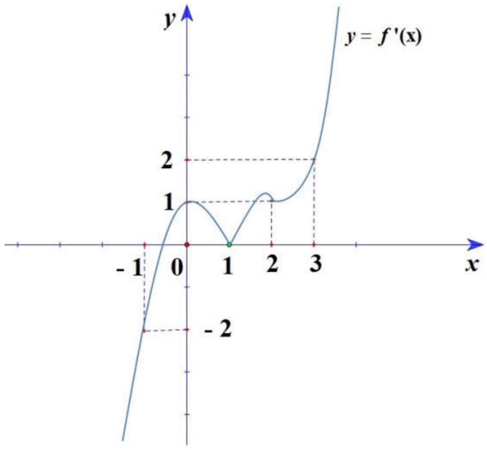
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-1-2\sqrt{2}$		-1		$-1+2\sqrt{2}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

(Cách xét dấu $g'(x)$ là ta lấy một giá trị x_0 thuộc khoảng đang xét rồi thay vào $g'(x)$).

Từ đó suy ra hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^2-2x)-\left(\dfrac{x^4}{2}-2x^3+x^2+2x+2020\right)$ là

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

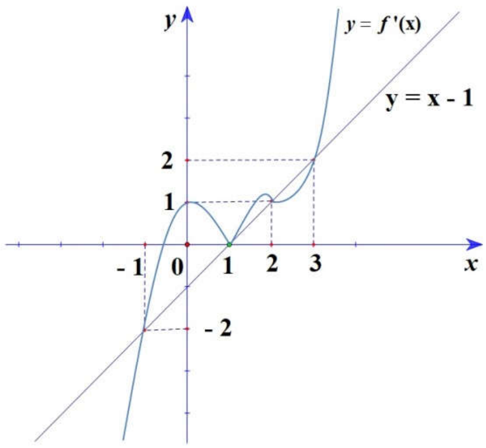
Chọn C

+) Ta có $g'(x)=(2x-2)f'(x^2-2x)-(2x^3-6x^2+2x+2)=2(x-1).\left[f'(x^2-2x)-(x^2-2x-1)\right]$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=0\\ f'(x^2-2x)-(x^2-2x-1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ f'(x^2-2x)=x^2-2x-1\ (*)\end{array}\right..$$

+) Giải (*):

Đặt $t=x^2-2x$, phương trình trở thành $f'(t)=t-1$.



Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=x-1$ ta có

$$f'(t)=t-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=1\\ t=2\\ t=3\end{array}\right..$$

Suy ra

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=1 \\ x^2-2x=2 \\ x^2-2x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2=0 \\ x^2-2x-1=0 \\ x^2-2x-2=0 \\ x^2-2x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{2} \\ x=1\pm\sqrt{3} \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right..$$

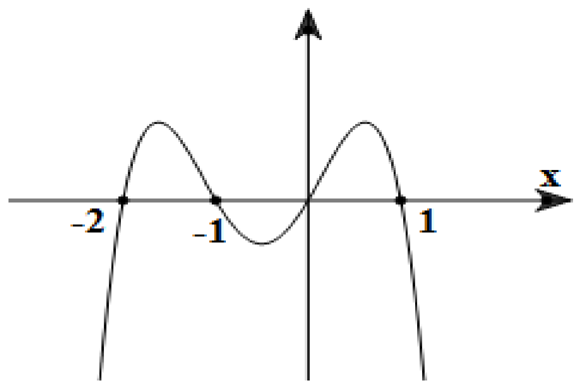
Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$1-\sqrt{3}$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$1+\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

(Xét dấu của $g'(x)$ bằng cách lấy một điểm x_0 thuộc khoảng đang xét, thay vào $g'(x)$, kết hợp với đồ thị).

Vậy hàm số $g(x)=f(x^2-2x)-\left(\frac{x^4}{2}-2x^3+x^2+2x+2020\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 36: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(-x^3+3x^2-2)$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

+ Dựa vào đồ thị của $y=f(x)$ ta thấy hàm số này có 3 điểm cực trị thỏa mãn:

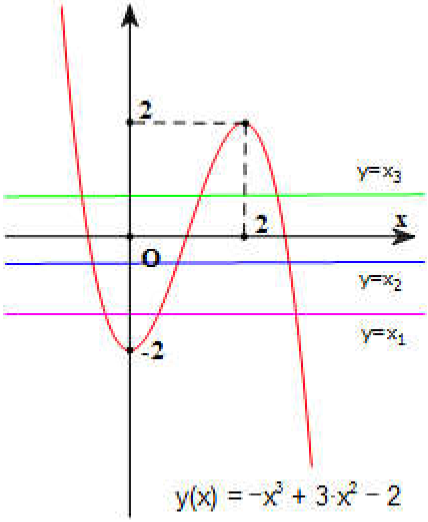
$-2<x_1<-1<x_2<0<x_3<1$.

+ $g(x)=f(-x^3+3x^2-2) \Rightarrow g'(x)=(-3x^2+6x)f'(-x^3+3x^2-2)$.

+ $g'(x)=0 \Leftrightarrow (-3x^2+6x)f'(-x^3+3x^2-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f'(-x^3+3x^2-2)=0 \end{array}\right.$.

Ta có $f'(-x^3+3x^2-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^3+3x^2-2=x_1 \\ -x^3+3x^2-2=x_2 \\ -x^3+3x^2-2=x_3 \end{array}\right.$.

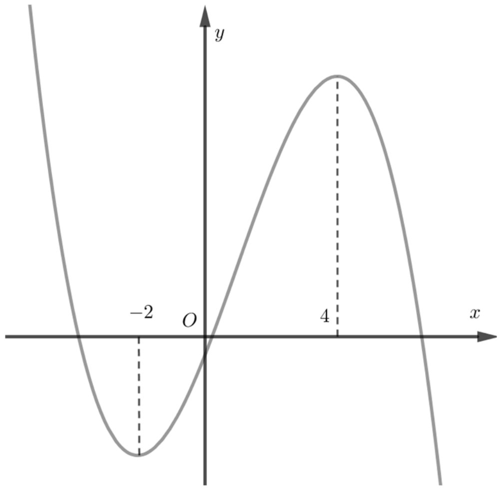
Xét hàm số $h(x)=-x^3+3x^2-2$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị (C) như hình vẽ và các đường thẳng $y=x_1$; $y=x_2$; $y=x_3$ cắt (C) tại 9 điểm phân biệt khác 0 và 2.



+ Suy ra $f'\left(-x^3+3x^2-2\right)=0$ có 9 nghiệm đơn khác 0 và 2.

Vậy $g'(x)=0$ có 11 nghiệm đơn hay hàm số $g(x)$ có đúng 11 điểm cực trị.

Câu 37: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x\right)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=(2x-3)f'\left(x^2-3x\right)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3=0 \\ f'\left(x^2-3x\right)=0 \end{array}\right.$$

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ ta có phương trình

$$f'\left(x^2-3x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x=-2 \\ x^2-3x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+2=0 \\ x^2-3x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=-1 \\ x=4 \end{array}\right..$$

Ta cũng có $f'\left(x^2-3x\right)>0 \Leftrightarrow -2<x^2-3x<4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<1 \\ 2<x<4 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$3/2$		2		4		$+\infty$
$2x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $g(x)=f\left(x^2-3x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 38: Cho $f(x)$ là hàm số đa thức bậc ba có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $f\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)$ có tập xác định $\mathcal{D}=[-1;3]$.

Đặt $t=\sqrt{3+2x-x^2}$. Ta có $t'=\dfrac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ và $t'=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên của hàm số t như sau

x	-1		1		3
t'		$+$	0	$-$	
t	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Trong bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta thay x thành t và thu được bảng biến thiên như sau

t	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ hai bảng biến thiên trên ta lập luận và suy ra bảng biến thiên của hàm số $f\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)$ trên đoạn $[-1;3]$ như dưới đây

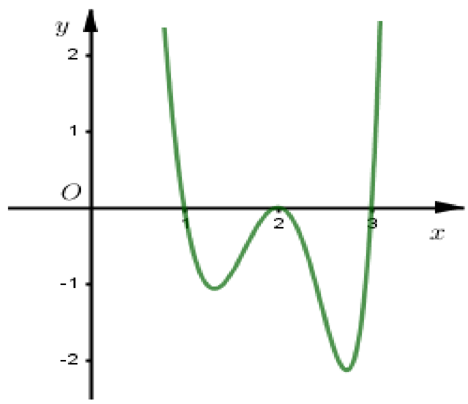
Khi x tăng từ -1 đến 1 thì t tăng từ 0 đến 2. Tương ứng $f(t)$ tăng từ $f(0)$ lên 2 rồi giảm xuống 0.

Khi x tăng từ 1 đến 3 thì t giảm từ 2 xuống 0. Tương ứng $f(t)$ tăng từ 0 lên 2 rồi giảm xuống $f(0)$.

x	-1				1				3
$f\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)$	$f(0)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$f(0)$

Vậy hàm số $f\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y=f(f(x))$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 9

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=f'(x).f'(f(x)) \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow f'(x).f'(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(f(x))=0 \end{array}\right.$.

Lại có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(1;2) \\ x=2 \\ x=b\in(2;3) \end{array}\right.$; $f'(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a\in(1;2) \\ f(x)=2 \\ f(x)=b\in(2;3) \end{array}\right.$.

Quan sát đồ thị ta thấy phương trình $f(x)=a$; $f(x)=2$; $f(x)=b$ có tổng tất cả 6 nghiệm phân biệt khác các nghiệm $x=a$; $x=2$; $x=b$. Từ đó suy ra phương trình $y'=0$ có 9 nghiệm đơn phân biệt. Suy ra hàm số đã cho có 9 điểm cực trị.

Câu 40: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g\left(x\right)=f\left(3-x^2\right)$.

Ta có: $g'\left(x\right)=\left[f\left(3-x^2\right)\right]'=\left(3-x^2\right)'.f'\left(3-x^2\right)=-2x.f'\left(3-x^2\right)$.

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow -2x.f'\left(3-x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'\left(3-x^2\right)=0\end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 3-x^2=1\\ 3-x^2=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=2\\ x^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt{2}\\ x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$$ (các nghiệm này đều là nghiệm bội lẻ).

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Cách xét dấu $g'\left(x\right)$: Chọn giá trị $x_0=1\in\left(0;\sqrt{2}\right)\Rightarrow g'\left(1\right)=-2.f'\left(2\right)>0$

(vì $f'\left(2\right)<0$). Từ đó có bảng biến thiên trên.Qua bảng biến thiên: Ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực đại.

Câu 41: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực đại và cực tiểu của hàm số $y=f^2\left(2x\right)-2f\left(2x\right)+1$ lần lượt là

A. 2; 3. **B.** 3; 2. **C.** 1; 1. **D.** 2; 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 2f(2x).f'(2x).2 - 4f'(2x) = 4f'(2x)[f(2x) - 1]$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(2x) = 0 \\ f(2x) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -1 \\ 2x = 2 \\ 2x = m \in (-\infty; -1) \\ 2x = n \in (-1; 2) \\ 2x = p \in (2; +\infty) \end{array}\right.$$

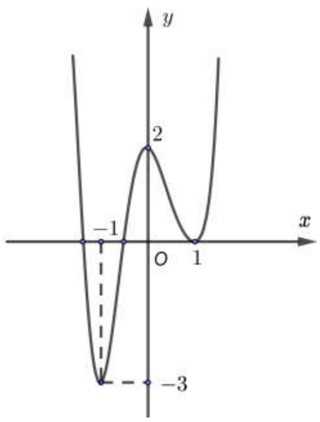
Ta có bảng xét dấu đạo hàm của hàm số $y = f^2(2x) - 2f(2x) + 1$

x	$-\infty$		$\frac{m}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{n}{2}$		1		$\frac{p}{2}$		$+\infty$
$f'(2x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$f(2x)-1$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta thấy y' có ba lần đổi dấu từ âm sang dương, hai lần đổi dấu từ dương sang âm.

Vậy hàm số $y = f^2(2x) - 2f(2x) + 1$ có hai điểm cực đại và ba điểm cực tiểu.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của $y = f'(x)$ như hình dưới đây



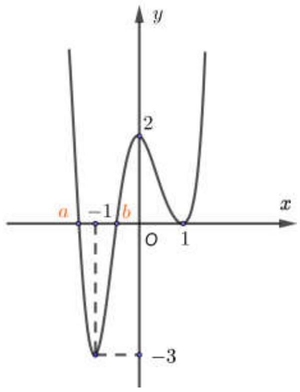
Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(4x^2 - 4x)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Cách 1.



Ta có $g'(x) = 4(2x-1)f'(4x^2-4x)$.

Từ đồ thị suy ra $f'(x) < 0 \Leftrightarrow a < x < b$. Suy ra

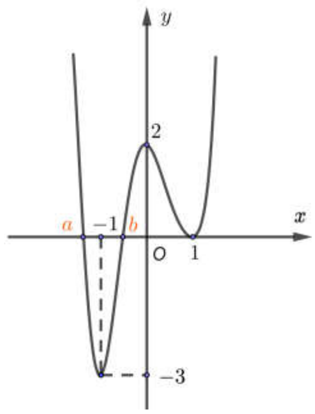
$f'(4x^2-4x) < 0 \Leftrightarrow a < 4x^2-4x < b \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{1+b}}{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{1+b}}{2}, b \in (-1;0)$ (vì $4x^2-4x > a, \forall x \in \mathbb{R}$ với $a < -1$).

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{1+b}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{1+b}}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(4x^2-4x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng biến thiên suy ra số cực trị của hàm số $y = g(x)$ là 3.

Cách 2.



Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \in (-\infty;-1) \\ x = b \in (-1;0) \\ x = 1\,(nghieäm\ keùp) \end{array}\right.$.

Ta có $g(x) = f(4x^2-4x) \Rightarrow g'(x) = 4(2x-1)f'(4x^2-4x)$.

Khi đó

$$g'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=0 \\ 4x^2-4x=a\in(-\infty;-1) \\ 4x^2-4x=b\in(-1;0) \\ 4x^2-4x=1\left(\text{nghieäm keùp}\right) \end{array}\right. .$$

Đặt $h(x)=4x^2-4x$.

+) $2x-1=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ và $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=-1\ \Rightarrow f'(-1)=-3\neq 0$.

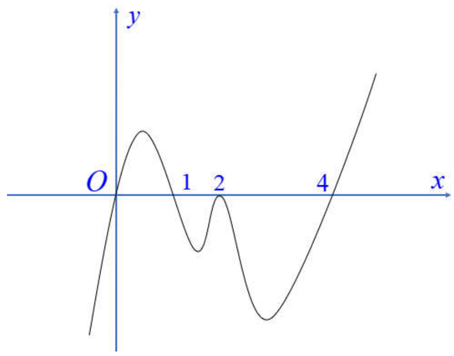
+) $4x^2-4x=(2x-1)^2-1\geq -1\Rightarrow 4x^2-4x=a\in(-\infty;-1)$ vô nghiệm.

+) $4x^2-4x=b\in(-1;0)\Rightarrow \Delta'=4(1+b)>0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ đều khác $\dfrac{1}{2}$.

+) $4x^2-4x=1\left(\text{nghieäm keùp}\right)\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\left(\text{nghieäm boäi hai}\right) \\ x=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\left(\text{nghieäm boäi hai}\right) \end{array}\right. .$

Vậy hàm số $g(x)=f\left(4x^2-4x\right)$ có số điểm cực trị là 3.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x-2019)-2020x+2021$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

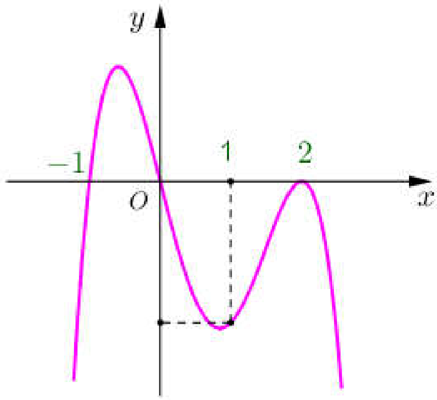
Chọn B

Ta có $y'=\left[f(x-2019)-2020x+2021\right]'=f'(x-2019)-2020$.

Đồ thị hàm số $y=f'(x-2019)-2020$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ bằng cách tịnh tiến sang phải 2017 đơn vị và tịnh tiến xuống dưới 2018 đơn vị.

Do đó đồ thị hàm số $y=f'(x-2019)-2020$ chỉ cắt trục hoành tại 1 điểm và đổi dấu qua điểm đó nên hàm số $y=f(x-2019)-2020x+2021$ có một điểm cực trị.

Câu 44: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(2x^3 - 3x^2 + 1)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = (6x^2 - 6x) f'(2x^3 - 3x^2 + 1)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x^2 - 6x = 0 \\ f'(2x^3 - 3x^2 + 1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ x = 1 & \\ f'(2x^3 - 3x^2 + 1) = 0 & (1) \end{array}\right..$$

Mặt khác, từ đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \in (-1;0) \\ x = b \in (0;1) \\ x = 2 \end{array}\right..$

Do đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x^3 - 3x^2 + 1 = a & (2) \\ 2x^3 - 3x^2 + 1 = b & (3) \\ 2x^3 - 3x^2 + 1 = 2 & (4) \end{array}\right..$

Xét hàm số $u = 2x^3 - 3x^2 + 1$, $u' = 6x^2 - 6x$, $u' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right..$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
u'		$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ đó ta có

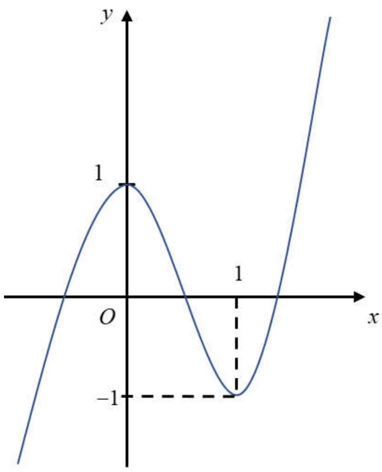
Với $a \in (-1;0)$, phương trình (2) có một nghiệm duy nhất $x_1 < 0$.

Phương trình (4) có một nghiệm duy nhất $x_2 > 1$.

Với $b\in(0;1)$, phương trình (3) có ba nghiệm lần lượt là $x_3\in(x_1;0);x_4\in(0;1);x_5\in(1;x_2)$.

Vậy $g'(x)=0$ có 7 nghiệm đơn nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 45: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực đại của hàm số $g(x)=f(x^2-6x)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Ta có $f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\x>1\end{array}\right.$.

$g'(x)=(2x-6)f'(x^2-6x)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-6=0\\f'(x^2-6x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-6=0\\x^2-6x=1\\x^2-6x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=3-\sqrt{10}\\x=3+\sqrt{10}\\x=0\\x=6\end{array}\right..$$

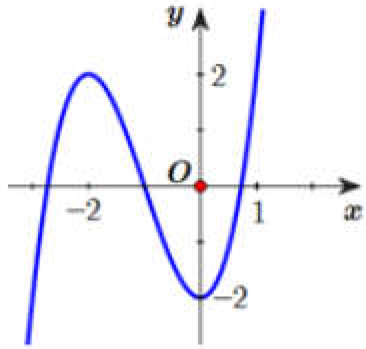
$$f'(x^2-6x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-6x>1\\x^2-6x<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\left(-\infty;3-\sqrt{10}\right)\cup\left(3+\sqrt{10};+\infty\right)\\x\in(0;6)\end{array}\right..$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		$3-\sqrt{10}$		0		3		6		$3+\sqrt{10}$		$+\infty$
$2x-6$		-	|	-	|	-	0	+	|	+	|	+	
$f'(x^2-6x)$		+	0	-	0	+	|	+	0	-	0	+	
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Từ BXD ta có $g(x)$ có hai điểm cực đại.

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực đại của hàm số $y=f(-x^2+4x)$.



A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị đã cho, ta có: $f'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right.$.

và $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-2 \end{array}\right.$

Ta có: $y'=\left(-x^2+4x\right)'.f'\left(-x^2+4x\right)=\left(-2x+4\right).f'\left(-x^2+4x\right)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x+4=0 \\ f'\left(-x^2+4x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ -x^2+4x=-2 \\ -x^2+4x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2-4x-2=0 \\ x^2-4x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=2+\sqrt{6} \\ x=2-\sqrt{6} \\ x=0 \\ x=4 \end{array}\right. . \ (*)$$

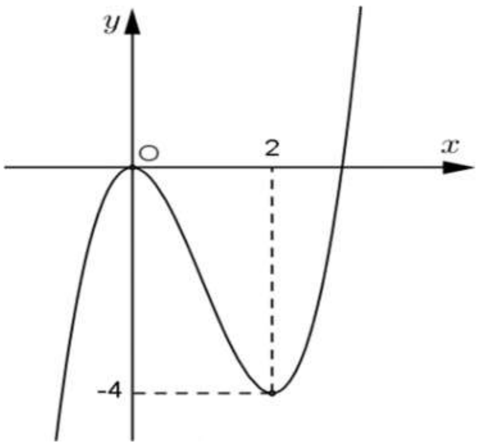
Ta lại có: $f'\left(-x^2+4x\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+4x>0 \\ -x^2+4x<-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x<0 \\ x^2-4x-2>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<4 \\ x>2+\sqrt{6} \\ x<2-\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của $y'=\left(-2x+4\right).f'\left(-x^2+4x\right)$:

x	$-\infty$		$2-\sqrt{6}$		0		2		4		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
$-2x+4$		+		+		+	0	−		−		−	
$f'\left(-x^2+4x\right)$		+	0	−	0	+		+	0	−	0	+	
y'		+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	

Vậy hàm số $y=f\left(-x^2+4x\right)$ có 3 điểm cực đại.

Câu 47: Biết rằng hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $y=f\left[f(x)\right]$.



A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = f\left[f\left(x\right)\right]$, ta có: $y' = f'\left(x\right).f'\left[f\left(x\right)\right]$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(x\right) = 0 \\ f'\left[f\left(x\right)\right] = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ f\left(x\right) = 0 \\ f\left(x\right) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = a \in \left(2; +\infty\right) \\ x = b \in \left(a; +\infty\right) \end{array}\right..$$

Với $x \in \left(-\infty; 0\right) \Rightarrow \begin{cases} f'\left(x\right) > 0 \\ f\left(x\right) < 0 \Rightarrow f'\left[f\left(x\right)\right] > 0 \end{cases} \Rightarrow y' > 0$.

Với $x \in \left(0; 2\right) \Rightarrow \begin{cases} f'\left(x\right) < 0 \\ f\left(x\right) < 0 \Rightarrow f'\left[f\left(x\right)\right] > 0 \end{cases} \Rightarrow y' < 0$.

Với $x \in \left(2; a\right) \Rightarrow \begin{cases} f'\left(x\right) > 0 \\ f\left(x\right) < 0 \Rightarrow f'\left[f\left(x\right)\right] > 0 \end{cases} \Rightarrow y' > 0$.

Với $x \in \left(a; b\right) \Rightarrow \begin{cases} f'\left(x\right) > 0 \\ 0 < f\left(x\right) < 2 \Rightarrow f'\left[f\left(x\right)\right] < 0 \end{cases} \Rightarrow y' < 0$.

Với $x \in \left(b; +\infty\right) \Rightarrow \begin{cases} f'\left(x\right) > 0 \\ f\left(x\right) > 2 \Rightarrow f'\left[f\left(x\right)\right] > 0 \end{cases} \Rightarrow y' > 0$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		a		b		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f\left[f\left(x\right)\right]$ có hai điểm cực tiểu.

Câu 48: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

Hỏi hàm số $y=g(x)=\left[f(2-x)\right]^2+2020$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=-2.f(2-x).f'(2-x)$.

Khi đó

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow -2.f(2-x).f'(2-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(2-x)=0 \\ f'(2-x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x=a<-2 \\ 2-x=b>1 \\ 2-x=-2 \\ 2-x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-a>4 \\ x=2-b<1 \\ x=4 \\ x=1 \end{array}\right.$$

$g'(x)$ không xác định $\Leftrightarrow f'(2-x)$ không xác định $\Leftrightarrow 2-x=0 \Leftrightarrow x=2$

Dựa vào bảng biến thiên của $f(x)$ ta thấy $f(2-x)>0 \Leftrightarrow a<2-x<b \Leftrightarrow 2-b<x<2-a$

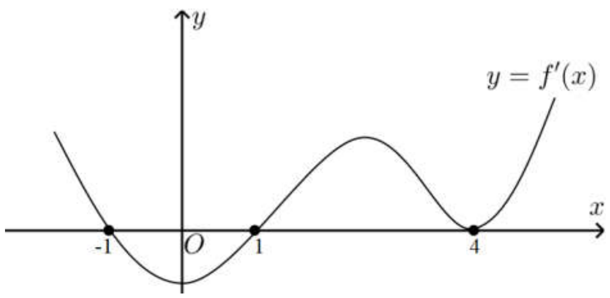
$$f'(2-x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x<-2 \\ 0<2-x<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ 1<x<2 \end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		$2-b$		1		2		4		$2-a$		$+\infty$
$f'(2-x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$f(2-x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=g(x)=\left[f(2-x)\right]^2+2020$ có 2 điểm cực đại.

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị $y=f'(x)$ có đồ thị như hình dưới. Hỏi hàm số $g(x)=f\left(1-x^2\right)$ giảm trên khoảng nào sau đây?



A. $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$. **B.** $\left(-2;0\right)$. **C.** $\left(0;2\right)$. **D.** $\left(-1;0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'\left(x\right)=f'\left(1-x^2\right)\left(-2x\right)$.

Ta có $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(1-x^2\right)=0\\\left(-2x\right)=0\end{array}\right.$.

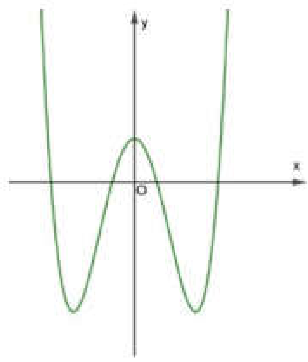
Khi: $f'\left(1-x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-x^2=-1\\1-x^2=1\\1-x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{2}\\x=0\\\text{vô nghiệm}\end{array}\right.$.

Cho $f'\left(1-x^2\right)<0\Leftrightarrow-1<1-x^2<1\Leftrightarrow\begin{cases}x^2<2\\-x^2<0\ (\text{đúng }\forall x\neq0)\end{cases}\Leftrightarrow-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Bảng biến thiên:

x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$-2x$	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$
$f'\left(1-x^2\right)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g'\left(x\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g\left(x\right)$	↗		↘		↗		↘

Câu 50: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Tìm số điểm cực trị của hàm số $F\left(x\right)=3f^4\left(x\right)+2f^2\left(x\right)+5$.

A. 6. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $F'\left(x\right)=12.f'\left(x\right).f^3\left(x\right)+4.f'\left(x\right).f\left(x\right)=4.f'\left(x\right).f\left(x\right).\left(3f^2\left(x\right)+1\right)$.

$$F'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1) \\ f(x)=0 & (2) \\ 3f^2(x)+1=0 & (VN) \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị, nhận thấy $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt; $f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt, các nghiệm ở phương trình (1) và (2) không trùng nhau, đồng thời hàm $F(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên có 7 điểm cực trị.

-------------------- HẾT --------------------