TỔNG LIÊN ĐOÀN LAO ĐỘNG VIỆT NAM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÔN ĐỨC THẮNG

BÁO CÁO CUỐI KỲ

MÔN HỌC: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH CHO CNTT
Mã môn học: 501032

ĐỀ TÀI SỐ 1

TP. HỒ CHÍ MINH, THÁNG 6 NĂM 2022

TỔNG LIÊN ĐOÀN LAO ĐỘNG VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÔN ĐỨC THẮNG

BÁO CÁO CUỐI KỲ

MÔN HỌC: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH CHO CNTT

Mã môn học: 501032

Họ và tên sinh viên: Trần Thị Vẹn ....

Mã số sinh viên: 52100674 ....

Ngành học: Khoa học máy tính ....

Email: 52100674@student.tdtu.edu.vn.............

TP. HỒ CHÍ MINH, THÁNG 6 NĂM 2022

BÁO CÁO ĐƯỢC HOÀN THÀNH
TẠI TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÔN ĐỨC THẮNG

Tôi xin cam đoan đây là sản phẩm đồ án của riêng tôi và được sự hướng dẫn của GV. Trần Đức Thành. Các nội dung nghiên cứu, kết quả trong đề tài này là trung thực và chưa công bố dưới bất kỳ hình thức nào trước đây. Những số liệu trong các bảng biểu phục vụ cho việc phân tích, nhận xét, đánh giá được chính tác giả thu thập từ các nguồn khác nhau có ghi rõ trong phần tài liệu tham khảo.

Ngoài ra, trong đồ án còn sử dụng một số nhận xét, đánh giá cũng như số liệu của các tác giả khác, cơ quan tổ chức khác đều có trích dẫn và chú thích nguồn gốc.

Nếu phát hiện có bất kỳ sự gian lận nào tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm về nội dung đồ án của mình. Trường đại học Tôn Đức Thắng không liên quan đến những vi phạm tác quyền, bản quyền do tôi gây ra trong quá trình thực hiện (nếu có).

TP. Hồ Chí Minh, ngày 06 tháng 06 năm 2022

Tác giả

(ký tên và ghi rõ họ tên)

Trần Thị Vẹn

LỜI CẢM ƠN

Lời đầu tiên, em xin chân thành gửi lời cảm ơn và sự tri ân sâu sắc đến với các thầy cô, giảng viên của khoa Công nghệ thông tin nói chung và các thầy cô môn Đại số tuyến tính nói riêng. Trong suốt quá trình học tập và rèn luyện, em đã nhận được rất nhiều sự giúp đỡ tận tình, sự quan tâm, chăm sóc của các thầy cô. Ngoài ra, em còn được trau dồi nhiều kiến thức, nhiều kinh nghiệm quý báu của các thầy để em có một hành trang vững chắc trên suốt chặng đường sắp tới và cũng giúp em mở rộng tầm nhìn hơn về ngành CNTT cũng như các dự định cho tương lai.

Như thầy cô cũng biết Đại số tuyến tính là môn học rất khô khan nhưng cũng đồng thời là môn học phát triển tư duy, sở trường của những bạn sinh viên đam mê với nó. Mặc dù có khô khan, khó hiểu đến đâu thì em vẫn xin cảm ơn thầy **Trần Đức Thành** giáo viên lý thuyết đã dạy và giúp đỡ chúng em rất nhiều trong việc chuyển đổi dữ liệu giữa toán một cách tư duy logic, hợp lý nhất có thể…Ngoài ra, em còn được học cô **Võ Hoàng Anh**, cô đã dạy bảo những kiến thức, phương pháp mới về toán hay ho và thú vị, cô còn giúp học trò có được nhiều niềm vui trong việc học và cảm thấy thoải mái, không bị áp lực… Em xin cảm ơn các thầy cô rất nhiều trong suốt quá trình học tập này ạ!!!

Bởi lượng kiến thức của em còn hạn hẹp và gặp nhiều vấn đề trong quá trình học nên báo cáo cuối kỳ sẽ còn nhiều thiếu sót và cần được học hỏi thêm. Em rất mong em sẽ nhận được sự góp ý của quý thầy cô về bài báo cáo cuối kỳ của em để em rút kinh nghiệm trong những môn học sắp tới. Cuối cùng, em cũng kính chúc quý thầy, cô giảng viên cùng với gia đình có được nhiều sức khỏe, nhiều may mắn, thành công trong sự nghiệp. Em xin chân thành cảm ơn quý thầy cô.

TP Hồ Chí Minh, ngày 06 tháng 06 năm 2022

Sinh viên: Trần Thị Vẹn

PHẦN XÁC NHẬN VÀ ĐÁNH GIÁ CỦA GIẢNG VIÊN

Phần xác nhận của GV hướng dẫn

TP. Hồ Chí Minh, ngày tháng năm

(kí và ghi họ tên)

Phần đánh giá của GV chấm bài

TP. Hồ Chí Minh, ngày tháng năm

(kí và ghi họ tên)

MỤC LỤC

LỜI MỞ ĐẦU (TÓM TẮT)

Đại số tuyến tính là nghiên cứu của các tổ hợp tuyến tính. Nó là nghiên cứu về không gian vectơ, đường thẳng và mặt phẳng, và một số ánh xạ được yêu cầu để thực hiện các phép biến đổi tuyến tính. Nó bao gồm vectơ, ma trận và các hàm tuyến tính.

Báo cáo cuối kì Đại số tuyến tính này bao gồm các kiến thức về ma trận như biến đổi sơ cấp trên dòng hoặc cột, tính định thức, tìm hạng của ma trận, tìm ma trận nghịch đảo, ứng dụng để giải các phương trình ma trận,…

Bên cạnh đó là các kiến thức về không gian vectơ Euclide như không gian con riêng, tìm tọa độ vectơ chuyển cơ sở, tìm trị riêng, chéo hóa ma trận vuông. Bao quát gần hết các nội dung lớn của môn đại số tuyến tính cho công nghệ thông tin.

Trong bài báo cáo này tôi sẽ áp dụng các kiến thức mà giảng viên đã cung cấp trong quá trình giảng dạy để giải quyết các câu hỏi, vấn đề trong **đề tài số 1**. Thêm vào đó, sử dụng các Equation, Math được cung cấp trong Word để minh họa các phép toán trong quá trình làm bài báo cáo cuối kì.

Bài làm gồm 5 bài trải dài ở 5 Chương nên kiến thức cần phải vững để có thể suy luận và kết hợp lại với nhau nên đôi khi sẽ không tránh có sai sót nhưng tôi sẽ cố gắng hoàn thành thật tốt đề tài số 1 này.

NỘI DUNG BÁO CÁO

CHƯƠNG 1: CÂU 1

1.1 Đề bài

Sinh viên tự cho 1 ma trận A là ma trận vuông cấp 3 **khả nghịch** tuỳ ý, có chứa 1 phần tử là 2 số cuối của MSSV. Tính định thức của ma trận này mà không được dùng trực tiếp máy tính Casio.

MSSV là chọn ma trận A là $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 74 & 0 \end{bmatrix}$ trong đó chứa phần tử ở vị trí dòng 3, cột 2 là 74 (2 chữ số cuối của MSSV).

1.2 Bài làm

Ta có: A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 7 & 74 & 8 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix}$

Vì ma trận A là ma trận vuông cấp 3

=>Áp dụng công thức 6 đường chéo - Quy tắc Sarrus, ta có:

det(A) = $[1.74.1 + 1.8.1 + (-1).7.(10)] - [(-1).74.1 + 1.8.10 + 1.7.1] = -1$

CHƯƠNG 2: CÂU 2

2.1 Đề bài

Cho 2 ma trận A và B trong đó A là ma trận ở câu 1 và B là ma trận vuông cấp 3 tuỳ ý sinh viên tự cho. Giải các phương trình ma trận A.X=B và X.B=A.

2.2 Bài làm

Ma trận ở câu 1: A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 7 & 74 & 8 \\ 1 & 10 & 1 \end{bmatrix}$

Ta có det(A)≠0 (tính ở câu 1) nên ma trận A sẽ khả nghịch

Tiếp theo, để tìm ma trận nghịch đảo của A theo phương pháp định thức, ta cần tìm 9 hệ số $c_{ij}^A = (-1)^{i+j} \det[A(i|j)]\,, với\ 1 \le i, j \le n$ như sau:

$$c_{11}^A = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 74 & 8 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = 74 - 80 = -6$$

$c_{12}^{A} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(7-8) = 1$

$c_{13}^{A} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 7 & 74 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 70 - 74 = -4$

$c_{21}^{A} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = -(1+10) = -11$

$c_{22}^{A} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2$

$c_{23}^{A} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = -(10-1) = -9$

$c_{31}^{A} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 74 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 74 = 82$

$c_{32}^{A} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(8+7) = -15$

$c_{33}^{A} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 74 \end{vmatrix} = 74 - 7 = 67$

Vậy ta có ma trận C = $\left(c_{ij}^{A}\right)_{1\le i,j\le 3} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -4 \\ -11 & 2 & -9 \\ 82 & -15 & 67 \end{pmatrix}$

⇨ $C^T = adj(A) = \begin{pmatrix} -6 & -11 & 82 \\ 1 & 2 & -15 \\ -4 & -9 & 67 \end{pmatrix}$ (Đây là ma trận chuyển vị của C hay ma trận liên hợp của A)

Và ta có $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.C^T = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -6 & -11 & -4 \\ 1 & 2 & -15 \\ -4 & -9 & 67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 4 \\ -1 & -2 & 15 \\ 4 & 9 & -67 \end{pmatrix}$

Cho ma trận: B = $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận B bằng cách viết theo dạng ma trận hóa $(B|I_3)$ rồi biến đổi ma trận theo phương pháp GAUSS-JORDAN như sau:

Ta có: $(B|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\to(1)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[(1)\to-(1)]{(3)\to(3)+2(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[(2)\to-(2)]{\substack{(1)\to(1)-(2)\\(3)\to(3)-(2)}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1\\0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(1)\to(1)+(3)\\(2)\to(2)-(3)}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2\\0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -3\\0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3\end{array}\right)$$

Ta có $B_4 = I_3$ nên B khả nghịch và ta có $B^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\-2 & 0 & -3\\2 & -1 & 3\end{pmatrix}$

Giải các phương trình:

$\mathbf{A.X = B \Leftrightarrow \boldsymbol{A^{-1}}.A.X = \boldsymbol{A^{-1}.B}}$

$$\Leftrightarrow \mathrm{X} = A^{-1}.B = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\7 & 74 & 8\\1 & 10 & 1\end{bmatrix}^{-1}.\begin{bmatrix}-3 & 4 & 6\\0 & -1 & -1\\2 & -3 & -4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}6 & 11 & 4\\-1 & -2 & 15\\4 & 9 & -67\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-3 & 4 & 6\\0 & -1 & -1\\2 & -3 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-10 & 1 & 9\\33 & -47 & -64\\-146 & 208 & 283\end{bmatrix}$$

$\mathbf{X.B = A \Leftrightarrow X.B.\boldsymbol{B^{-1}} = \boldsymbol{A.B^{-1}}}$

$$\Leftrightarrow \mathrm{X} = A.B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\7 & 74 & 8\\1 & 10 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-3 & 4 & 6\\0 & -1 & -1\\2 & -3 & -4\end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\7 & 74 & 8\\1 & 10 & 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\-2 & 0 & -3\\2 & -1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & -1 & -4\\-125 & -22 & -184\\-17 & -3 & -25\end{bmatrix}$$

CHƯƠNG 3: CÂU 3

3.1 Đề bài

Sinh viên tự cho 1 cơ sở S (S khác cơ sở chính tắc) và 1 vectơ v trong không gian $\mathbb{R}^3$. Tìm toạ độ của v trong cơ sở S.

3.2 Bài làm

Cơ sở: $S = \{\, u_1 = (1,1,2),\ u_2 = (2,-3,5),\ u_3 = (3,-6,7)\,\}$

Vectơ $v = (14,-23,33)$

Do S có 3 vectơ => cần tìm c_1, c_2, c_3 sao cho:

$v = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3$

$\Leftrightarrow (14, -23, 33) = c_1(1,1,2) + c_2(2,-3,5) + c_3(3,-6,7)$

$\Leftrightarrow (14, -23, 33) = (c_1 + 2c_2 + 3c_3, c_1 - 3c_2 - 6c_3, 2c_1 + 5c_2 + 7c_3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 14 \\ c_1 - 3c_2 - 6c_3 = -23 \\ 2c_1 + 5c_2 + 7c_3 = 33 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = 3 \end{cases}$$

⇨ Tọa độ của vectơ v trong cơ sở S là: $[v]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

CHƯƠNG 4: CÂU 4

4.1 Đề bài

Tìm trị riêng và không gian con riêng tương ứng của 1 ma trận vuông A cấp 3 sinh viên tự cho trước.

4.2 Bài làm

Cho ma trận: A = $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

Tìm các trị riêng cho ma trận A:

Tính chất:

Khi c là một trị riêng của A, ta có phương trình đặc trưng $p_A(c) = 0$, nghĩa là c là một nghiệm của phương trình $p_A(c) = 0$. Nên để tìm tất cả các trị riêng của A, ta giải phương trình $p_A(c) = 0$ (trên F) thì các nghiệm chính là các trị riêng.

Ta có:

$$p_A(c) = \det(x.I_3 - A) = \left| x.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} x-4 & -2 & 1 \\ 6 & x+4 & -3 \\ 6 & 6 & x-5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-4 & -2 & 1 \\ 6 & x+4 & -3 \\ 0 & 2-x & x-2 \end{vmatrix} \text{(Dòng 3 = Dòng 3 - Dòng 2)}$$

$$= \begin{vmatrix} x-4 & -2 & -1 \\ 6 & x+4 & x+1 \\ 0 & 2-x & 0 \end{vmatrix} \text{(Cột 3 = Cột 3 + Cột 2)}$$

Tính chất của định thức:

Cộng vào một dòng (cột) tích của dòng (cột) khác với số α (α∈ℝ) thì định thức không đổi. Cụ thể, α=1 ở cả 2 bước biến đổi trên.

$\Rightarrow p_A(c) = \det(x.I_3 - A)$

Dùng công thức 6 đường chéo – Quy tắc Sarrus:

$= [(x-4).(x+4).0 + (-2).(x+1).0 + (-1).6.(2-x)] - [-1.(x+4).0 + (x-4).(x+1).(2-x) + (-2).6.0]$

$= -6.(2-x) - (x-4).(x+1).(2-x)$

$= (x-2)[6 + (x-4).(x+1)]$

$= (x-2)(x^2 - 3x + 2)$

$= (x-2)^2(x-1)$

Để tìm các trị riêng, ta giải phương trình:

$p_A(c) = (x-2)^2(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = x_1 = 1 \\ c_2 = x_2 = 2 \end{cases}$

Ma trận A có 2 trị riêng là: $c_1 = 1, c_2 = 2$

Tìm các không gian con riêng:

****Với $c_1 = 1$ ta có:***

$E_{c_1} = E_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 | A - 1.I_3 | X = 0\}$

Hệ phương trình: $(A - 1.I_3)X = 0$ bằng phương pháp bán chuẩn hóa:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right]$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}3 & 2 & -1\\ -6 & -5 & 3\\ -6 & -6 & 4\end{matrix}\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.\right]\xrightarrow[(3)\to(3)+2.(1)]{(2)\to(2)+2.(1)}\left[\begin{matrix}3 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2\end{matrix}\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.\right]\xrightarrow{(3)\to(3)-2.(2)}\left[\begin{matrix}3 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.\right]$$

Do cột 3 không chuẩn hóa được $\Rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm

Đặt $x_2 = \mathrm{a}, (\forall \mathrm{a} \in \mathbb{R})$

Từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = x_2 = a \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\dfrac{a}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_{c_1} = E_1 = \left\{X = (x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{a}{3}, a, a\right) = (-a, 3a, 3a) \middle| \forall a \in \mathbb{R}\right\}$$

Vậy không gian con riêng thứ nhất với $c_1 = 1$ là:

$\boldsymbol{E_{c_1} = \{X = a(-1, 3, 3) | \forall a \in \mathbb{R}\}}$

***Với $c_2 = 2$ ta có:**

$E_{c_2} = E_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 | (A - 2.I_3)X = 0\}$

Hệ phương trình: $(A - 2.I_3)X = 0$ bằng phương pháp bán chuẩn hóa:

$$\Leftrightarrow\left[\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ -6 & -4 & 3\\ -6 & -6 & 5\end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.\right]$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}2 & 2 & -1\\ -6 & -6 & 3\\ -6 & -6 & 3\end{matrix}\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.\right]\xrightarrow[(3)\to(3)+3.(1)]{(2)\to(2)+3.(1)}\left[\begin{matrix}2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right.\right]$$

Do cột 2 không chuẩn hóa được $\Rightarrow$ Hệ có vô số nghiệm

Đặt $x_1 = \mathrm{a}, x_2 = \mathrm{b} (\forall \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R})$

Từ hệ phương trình:

$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 2x_1 + 2x_2 = 2a + 2b$

$\Rightarrow E_{c_2} = E_2 = \{X = (x_1, x_2, x_3) = (a, b, 2a + 2b) | \forall a, b \in \mathbb{R}\}$

Vậy không gian con riêng thứ hai với $c_2 = 2$ là:

$\boldsymbol{E_{c_2} = \{X = (a, b, 2a + 2b) | \forall a, b \in \mathbb{R}\}}$

Kết luận: Vậy ma trận A có hai không gian con riêng:

$E_{c_1} = \{X = a(-1,3,3) | \forall a \in \mathbb{R}\}$

$E_{c_2} = \{X = (a, b, 2a + 2b) | \forall a, b \in \mathbb{R}\}$

CHƯƠNG 5: CÂU 5

5.1 Đề bài

Chéo hoá ma trận A (nếu được) ở câu 4.

5.2 Bài làm

Ở câu 4 ta giải hệ phương trình:

$p_A(c) = (x-2)^2(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = x_1 = 1, r_1 = 1\ (nghiệm\ bội\ 1) \\ c_2 = x_2 = 2, r_2 = 2\ (nghiệm\ bội\ 2) \end{cases}$

Ta có:

$r_1 + r_2 = 2 + 1 = 3 =$ cấp của ma trận A (1)

Lại có:

c_1 là trị riêng đơn và $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{E}(c_1) = 3 - r(A - 1.I_3) = 3 - 2 = 1$ (2)

c_2 là trị riêng kép và $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{E}(c_2) = 3 - r(A - 2.I_3) = 3 - 1 = 2$ (3)

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow$ Ma trận A chéo hóa được

Khi có được các cơ sở:

- **Với $c_1 = 1$, ta có không gian con riêng:**

$E_{c_1} = \{X = a(-1,3,3) | \forall a \in \mathbb{R}\}$ (đáp án câu 4)

Đặt $\alpha_1 = (-1,3,3) \neq (0,0,0)$ và gọi $S_1 = \{\alpha_1\}$

$\Rightarrow E_{c_1} = E_1 = \left\{X = a.\alpha_1 \middle| \begin{matrix} a \in \mathbb{R} \\ \alpha_1 \in S_1 \end{matrix}\right\} = \langle S_1 \rangle$

Lại có $\alpha_1 \neq 0$ nên $S_1 = \{\alpha_1\}$ vừa là hệ sinh, vừa là cơ sở của E_{c_1}

- **Với $c_2 = 2$ ta có không gian con riêng:**

$E_{c_2} = \{X = (a, b, 2a + 2b) | \forall a, b \in \mathbb{R}\}$ (đáp án câu 4)

Đặt $\alpha_2 = (1,0,2) \neq (0,0,0), \alpha_3 = (0,1,2) \neq (0,0,0)$ và gọi $S_2 = \{\alpha_2, \alpha_3\}$

$\Rightarrow E_{c_2} = E_2 = \left\{X = a.\alpha_2 + b.\alpha_3 \middle| \begin{matrix} a, b \in \mathbb{R} \\ \alpha_2, \alpha_3 \in S_2 \end{matrix}\right\} = \langle S_2 \rangle$

Lại có $\alpha_2, \alpha_3 \neq 0$ nên $S_2 = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ vừa là hệ sinh, vừa là cơ sở của E_{c_2}

- Gọi $S = S_1 \cup S_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

$\Rightarrow S$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$

Đặt $P = P_{\beta_0 \to S} = \left([\alpha_1]_{\beta_0}[\alpha_2]_{\beta_0}[\alpha_3]_{\beta_0}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ P luôn khả nghịch (luôn có P^{-1}) thỏa:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(Đây là dạng chéo hóa cần tìm của ma trận A)

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Đặng Quang Vinh, 2020, *Giáo trình Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc Gia.

[2] TS. Nguyễn Duy Thuận, 2002, *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Sư Phạm.

[3] Đồng sáng tác, 2021, *Bài giảng đại số*, NXB Bách Khoa Hà Nội.

Tiếng Anh

[4] Sheldon Axler, 1995, *Linear algebra done right*, Hamish Hamilton, London.

[5] Gilbert Strang, 2016, *Introduction to Linear Algebra, 3rd Edition*, Wellesley - Cambridge Press.