

### Задача 1.

Напишите программу, реализующую приближённое решение системы линейных алгебраических уравнений итерационным методом Якоби. С её помощью найдите решение системы уравнений следующего вида:  $Ax = f$

$$a_{ii} = 2, \quad a_{i,i+1} = -1 - \alpha, \quad a_{i,i-1} = -1 + \alpha$$
$$f_1 = 1 - \alpha, \quad f_i = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \quad f_n = 1 + \alpha$$

Какое у этой системы точное решение? С какой скоростью метод сходится в зависимости от  $n$  и  $\alpha$ ?

Здесь и далее необходимо реализовывать алгоритмы напрямую, не используя никакие встроенные методы решения СЛАУ или обращения матриц.

### Задача 2.

Напишите программу, реализующую приближённое решение системы линейных алгебраических уравнений итерационным методом Зейделя. С её помощью найдите решение системы уравнений из предыдущей задачи. Сравните между собой скорости сходимости итерационных методов Якоби и Зейделя.

### Задача 3\*.

Доказать, что при условии наличия диагонального преобладания у матрицы системы метод Зейделя сходится, причем быстрее метода Гаусса–Якоби.

### Задача 4.

Напишите программу, реализующую приближённое решение системы линейных алгебраических уравнений методом релаксации (обобщение методов Гаусса и Зейделя):

$$A = L + D + U$$
$$(D + L) \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_{k+1}} + Ax_k = f, \quad k = 1, 2, \dots$$

Исследуйте зависимость скорости сходимости этого итерационного метода от итерационного параметра  $\tau_{k+1} = \tau$  при численном решении системы уравнений из первой задачи в зависимости от параметров  $n$  и  $\alpha$ .

### Задача 5.

Напишите программу, реализующую приближённое решение системы линейных алгебраических уравнений методом верхней релаксации:

$$(D + \tau L) \cdot \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} + Ax_k = f, \quad k = 1, 2, \dots$$

Исследуйте зависимость скорости сходимости этого итерационного метода от итерационного параметра  $\tau$  при численном решении системы уравнений из первой задачи в зависимости от параметров  $n$  и  $\alpha$ .

### Задача 6\*.

Решите систему из задачи 1 с помощью Чебышевского ускорения МПИ. Все расчётные формулы можно посмотреть, например, в лекциях Аристовой.

