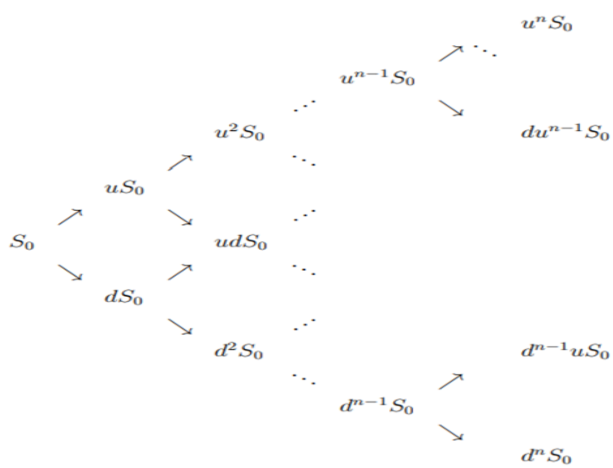
Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

1- Hypothèses du modèle

On considère sur le marché financier un actif sans risque S^0 et une action S sur un horizon de temps [0,T]. Les agents interviennent sur le marché aux dates tk= kΔt, k = 0,...N où Δt >0 est le pas de temps. L'actif sans risque est un placement bancaire au taux sans risque r > 0 : une unité monétaire investie en S0 sur un intervalle de temps τ rapporte exp(r τ) unités monétaires.

Pour une suite finie de N instants régulièrement répartis entre 0 et T, ou Δt > 0 est un réel fixé (supposé petit), la valeur (St)tϵ[0,T] de l'actif risqué est égale à un nombre positif donné S0 à l'instant t = 0, et elle évolue selon la règle suivante : si sa valeur à l'instant t $\in$ [0,T]\{N*Δt} est St, alors sa valeur à l'instant t + Δt sera soit uS_t soit dS_t , ou u et d sont des constantes qu'on supposera telles que 0 <d< 1 < u.

Donc (St) évolue sur un arbre binaire qui, à tout instant tk = kΔt $\in$ [0,T], présente k + 1 nœuds ou k + 1 valeurs possibles égales à : $S_{t_k} = S_{k\Delta t} \in \{S_0 u^j d^{k-j}$, j = 0,...,k} , l'indice j représentant le nombre de fois ou l'actif a évolué à la hausse entre l'instant t = 0 et l'instant tk = kΔt (j est nombre de "up"), l'ordre des "up" et des "down" n'important pas. En pratique, on prend souvent pour u et d les valeurs u = exp(σ √Δt) et d = 1/u = exp(−σ √δt), ou σ est la volatilité de l'actif S que l'on supposera constante.



2- Modèle de Cox-Ross-Rubinstein

La formule fondamentale pour l'évaluation du prix d'une option européenne dans un modèle de Cox-Ross-Rubinstein.

1) Option européenne

- Pour un call

$$C = e^{-rT} \sum_{j=0}^{N} C_N^j q^j (1-q)^{N-j} (S_0 u^j d^{N-j} - K)^+$$

- Pour un Put

$$C = e^{-rT}\sum_{j=0}^{N} C_N^j q^j (1-q)^{N-j} (K - S_0 u^j d^{N-j})^+$$

2) <u>Option Américaine</u>

Pour une option américaine, l'approche itérative est appliquée avec une complication supplémentaire : il faut, à chaque nœud, vérifier si l'option doit être exercée. Pour cela, la valeur de l'option non exercée est comparée à sa valeur intrinsèque. La valeur de l'option est donnée par le maximum de ces deux valeurs. Formellement, la valeur de l'option au nœud k (lorsque le cours de l'action est Stk) est :

$$V_{t_k} = Max[(\theta(S_{t_k} - K))^+, (qS^u_{t_{k+1}} + (1-q)S^d_{t_{k+1}})e^{-r\triangle t}]$$

Avec θ = 1 pour un call et θ = -1 pour un put.

Application: Call et Put européens

- So = 100
- K = 100
- r = 0.06
- sigma = 0.1

```
%European options pricing
%CRR with 200 steps
Ce = CoxRossRubinstein(100, 100, 0.06, 0.1, 1/200, 200, 'CALL', false)
```

```
Ce = 7.4538
```

```
Pe = CoxRossRubinstein(100, 100, 0.06, 0.1, 1/200, 200, 'PUT', false)
```

```
Pe = 1.6303
```

Application: Call et Put américains

- So = 100
- K = 100
- r = 0.06
- sigma = 0.1

```
% American options pricing
%CRR with 200 steps
Ca = CoxRossRubinstein(100, 100, 0.06, 0.1, 1/200, 200, 'CALL', true)
```

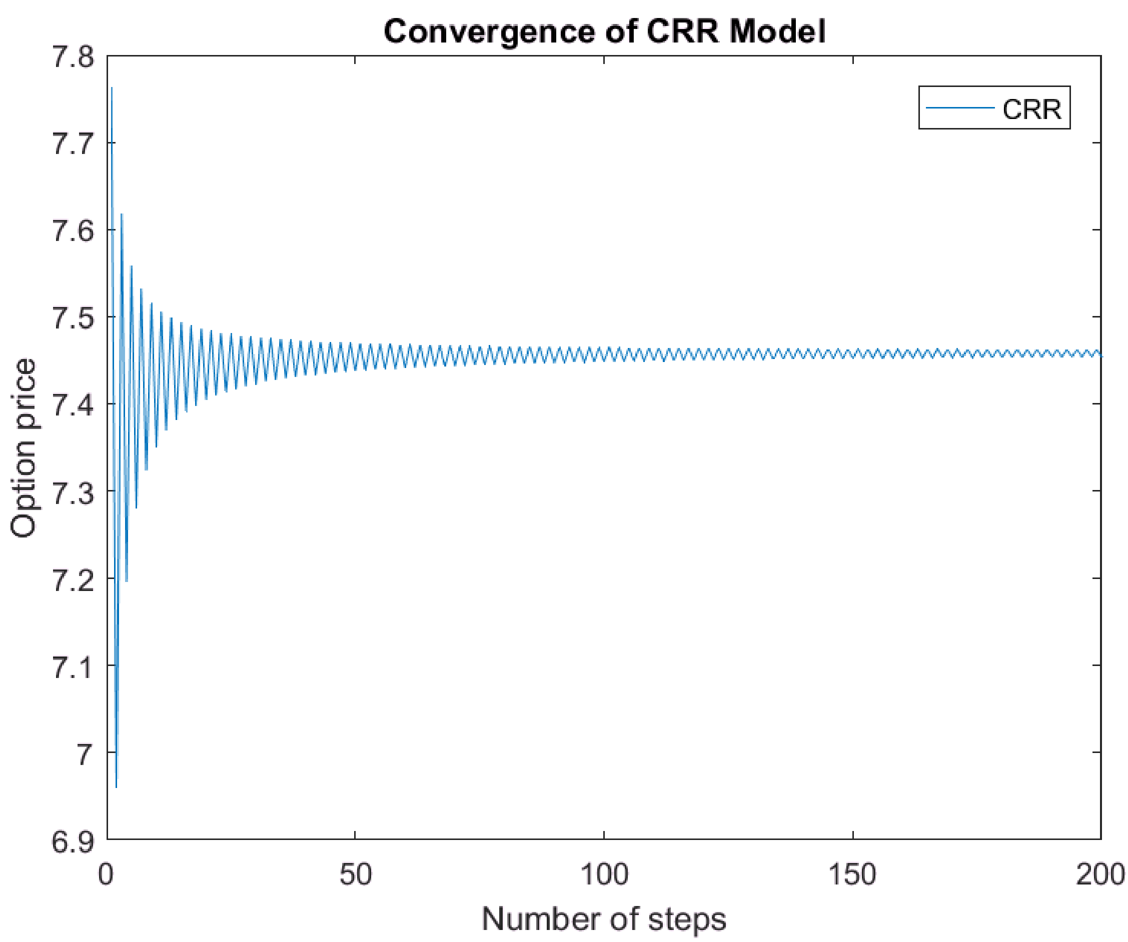
```
Ca = 7.4538
```

```
Pa = CoxRossRubinstein(100, 100, 0.06, 0.1, 1/200, 200, 'PUT', true)
```

```
Pa = 2.2333
```

3) Convergence du modèle CRR vers le modèle de Black-Scholes

```
% Visualizing option price vs number of steps of CRR
%Initialize the vector containing the number of steps and the price
N = 1:200;
ValueCall = zeros(size(N));
%For each number of step compute the call's price using CRR
for i = N
    ValueCall(i) = CoxRossRubinstein(100, 100, 0.06, 0.1, 1/i, i, 'CALL', false);
end
%Plot Option price VS Number of steps
plot(N, ValueCall);
legend('CRR');
title('Convergence of CRR Model');
xlabel('Number of steps');
ylabel('Option price');
```



On démontre que pour N assez grand le moèle de CRR converge vers le modèle de Black-Scholes.

Formule de BS pour un call européen:

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

avec $d_1 = \frac{ln(S_0/K)+rT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \quad et \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

Formule de BS pour un put européen:

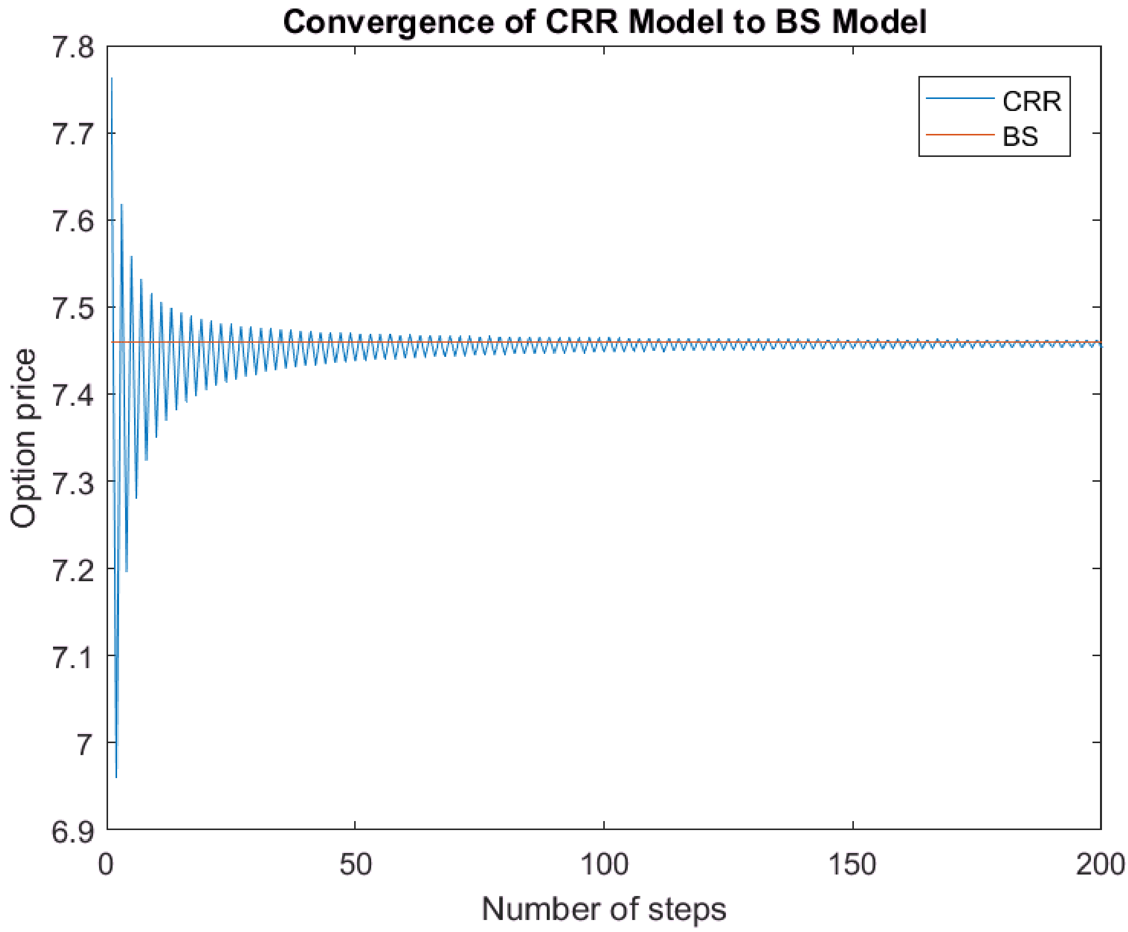
$$P = -S_0 N(-d_2) + Ke^{-rT} N(-d1)$$

```
% Convergence of CRR to BS
% European call pricing
%Initialize the vector containing the number of steps
N = 1:200;
ValueCall = zeros(size(N));

%For each number of step compute the call's price using CRR
for i = N
    ValueCall(i) = CoxRossRubinstein(100, 100, 0.06, 0.1, 1/i, i, 'CALL', false);
end

%Compute the call price using BS
Cbs = CallBS(100, 100, 1, 0.06, 0.1)*ones(size(N));

%Plot CRR and BS
plot(N, ValueCall);
hold on
plot(N, Cbs);
hold off
legend('CRR', 'BS');
title('Convergence of CRR Model to BS Model');
xlabel('Number of steps');
ylabel('Option price');
```


Convergence of CRR Model to BS Model
CRR
BS
Option price
Number of steps
7.8
7.7
7.6
7.5
7.4
7.3
7.2
7.1
7
6.9
0
50
100
150
200