المدرسة الوطنية للعلوم التطبيقية -أكادير
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES - AGADIR

PROJET

Simulation du mouvement brownien :

Application au pricing des options européennes

Fokou Penanjo Vaneck
2E ANNEE FINANCE ET INGENIERIE DECISIONNELLE
ANNEE SCOLAIRE : 2020 / 2021

SIMULATION DU MOUVEMENT BROWNIEN :

APPLICATION AU PRICING DES OPTIONS EUROPEENES

SOMMAIRE

INTRODUCTION :

Depuis les travaux fondateurs de Black-Scholes-Merton en 1973, le monde de la finance est révolutionné par l'émergence d'un nouveau domaine connu sous le nom d'ingénierie financière. D'autre part, les marchés (change, taux d'intérêt, matières premières, etc.) sont devenus plus volatils, ce qui crée une augmentation de la demande de produits dérivés (options, forwards, futures, swaps, hybrides et exotiques, et dérivés de crédit pour n'en citer que quelques-uns) utilisés pour mesurer, contrôler, et gérer les risques, ainsi que spéculer et profiter des opportunités d'arbitrage. En plus d'une connaissance approfondie des théories financières, la conception, l'analyse et le développement de ces produits et services financiers complexes, nécessitent une maîtrise de mathématiques sophistiquées, de statistiques et de calculs numériques. La simulation est l'un de ces outils de finance computationnelle utilisé dans la détermination du prix (pricing) des options et pour la gestion de risque. Dans notre projet, nous allons via le logiciel MATLAB, utiliser cet outil afin de déterminer le prix d'une option européenne grâce à la méthode de Monte-Carlo.

PARTIE 1 : NOTION DE PROCESSUS ALEATOIRE

Les processus aléatoires ou stochastiques ont été conçus pour modéliser l'évolution temporelle de phénomènes et de systèmes aléatoires. Ils sont décrits par des familles discrètes ou continues de variables ou de vecteurs aléatoires $(Xt)t \in T$, où T est l'ensemble des temps d'observation des états du processus. Etant donné que les marchés financiers sont très volatils, ces processus sont très utilisés pour modéliser l'évolution des prix de certains produits financiers.

Définition :

Un processus stochastique représente l'évolution aléatoire d'une quantité dans le temps : la valeur $Xt(\omega)$ représente la quantité au temps t pour la réalisation ω. Une définition plus mathématique est la suivante :

Soit (Ω, F, P) un espace probabilisé.

On appelle processus stochastique $X = (Xt)_{t\geq 0}$une collection Xt de variables aléatoires (i.e. pour tout $t \geq 0, \omega \rightarrow Xt(\omega)$ est mesurable).

La fonction $t \rightarrow Xt(\omega)$ est une trajectoire (ou réalisation) du processus X associée à ω.

On dit que le processus $X = (Xt)_{t\geq 0}$est à trajectoires continues s'il existe un ensemble de probabilité nulle N tel que pour tout $\omega \in \Omega \setminus N$, l'application $t \rightarrow Xt(\omega)$ est continue.

Soit $X = (Xt)_{t\geq 0}$ un processus stochastique.

On appelle accroissement de X entre les temps t1 et t2 la variable aléatoire $X_{t2} - X_{t1}$.

On dit que le processus $X = (Xt)_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants si pour tout k ≥ 2, 0 = to < t1 < t2 < · · · < tk, les variables $X_{\ ti} - X_{ti-1}$, 1 ≤ i ≤ k sont indépendantes.

Etudions à présent un exemple de processus aléatoire très intéressant sur lequel est basé le mouvement brownien : la marche aléatoire.

Notion de marche aléatoire

Définition : Soit $(Xi)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. On appelle marche aléatoire la suite de variable aléatoires $(Sn)_{n\geq 0}$ définie par :

$So = 0, \quad Sn = \sum_{i=1}^{n} Xi, \quad n \geq 1.$

D'après cette définition, on voit bien que la marche aléatoire est un processus stochastique discret à accroissements indépendants.

On étend la marche aléatoire $(Sn)_{n\geq 0}$ au temps continu par interpolation linéaire :

$$St = Sn + (t - n)X_{n+1}, \qquad n \leq t \leq n + 1.$$

Exemple de marche aléatoire :

On s'intéresse à une particule qui se déplace sur un axe gradué aléatoirement à gauche ou à droite avec la même probabilité, d'un pas constant égal à 1. Elle part de l'origine et effectue 100 pas. On s'intéresse à sa position en fonction du nombre de pas effectué. La position finale se situe entre -100 et +100.

Dans cet exemple, les Xi suivent une loi de Bernoulli de probabilité $p = ½$.

$$P(Xi = 1) = ½ \ et \ P(Xi = -1) = ½.$$

Pour pouvoir simuler notre marche aléatoire sur MATLAB, commençons d'abord par créer une fonction qui simule une variable aléatoire de Bernoulli X à partir d'une loi uniforme sur [0,1].

```
function [ X ] = Bernoulli( p, val1, val2 )
%This function generate a Bernoulli variable X
%X takes value val1 with probability p
%X takes value val2 with probability 1-p

U = rand; %Uniform random variable
X = val1 * (U<=p) + val2 * (p<U);

end
```

Ensuite, nous pouvons simuler notre marche aléatoire et tracer le graphe :

```
% RANDOM WALK SIMULATION
%   nbpas is the number of step
%   pas is the value of a step

 pas = 1;
 nbpas = 100;
 x = 0:pas:nbpas;
 y = zeros(1, nbpas+1);

 for i = 2:nbpas+1
     y(1, i) = y(1, i-1) + Bernoulli(0.5, pas, -pas);
 end

 plot(x, y);
```

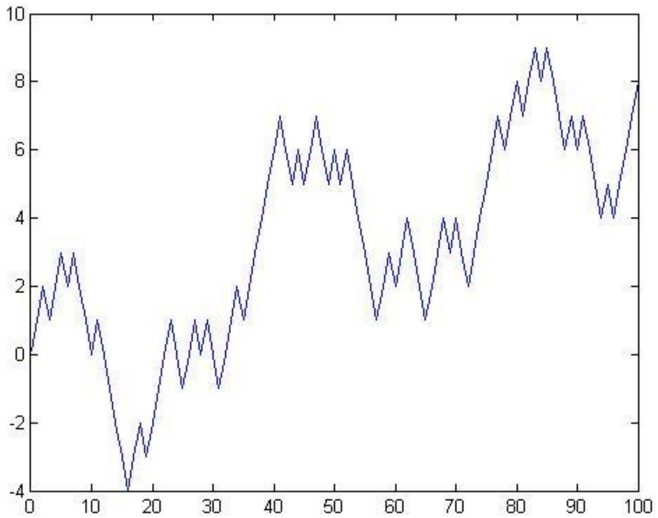

Figure 1 : Simulation d'une marche aléatoire.

PARTIE 2 : LE MOUVEMENT BROWNIEN

Historiquement, Le mouvement Brownien ou processus de Wiener est associé à l'analyse de mouvements qui évoluent aucours du temps de manière si désordonnée qu'il semble difficile de prévoir leur évolution, même dans un intervalle de temps très cours. Il joue un rôle central,dans la théorie des processus aléatoire car dans de nombreux problèmes théoriques ou appliqués, le mouvement Brownien fournit des limites simples su lesquelles de nombreux calculs peuvent être faits.

Le mouvement brownien est un processus stochastique à temps continu et à espace d'états continu. Il est le plus important de cette catégorie et il est aujourd'hui appliqué dans une multitude de domaines, notamment en finance pour le pricing des options.

Définition :

On appelle mouvement Brownien standard $B = (Bt)_{t\geq 0}$ un processus stochastique à trajectoires continues vérifiant :

i) $Bo = 0$,
ii) Pour tout $0 \leq t1 < t2$, $B_{t2} - B_{t1} \sim N\,(0,\ t2 - t1)$,
iii) Pour tout $k \geq 2$, $0 = t0 < t1 < t2 < \cdots < tk$, les accroissements $(B_{ti} - B_{ti-1})_{1\leq i\leq k}$ sont indépendants.

Construction du mouvement brownien :

On étend la marche aléatoire $(Sn)_{n\geq 0}$ au temps continu par interpolation linéaire

$$St = Sn + (t - n)X_{n+1}, \qquad n \leq t \leq n + 1.$$

Théorème de Donsker

On suppose les Xi de carré intégrable de moyenne m et variance σ^2. Alors la marche aléatoire renormalisée $Xn = \frac{Snt - ntm}{\sigma\sqrt{n}}$, $t \geq 0$, converge en loi vers un mouvement Brownien standard $(Bt)_{t\geq 0}$ quand n tend vers l'infini. On voit donc que le mouvement Brownien apparaît comme limite de marches aléatoires renormalisées.

Simulation du mouvement brownien

Avec MATLAB, on peut simuler les valeurs du processus brownien $(Bt)_{t\geq 0}$ en un nombre fini de points. Par exemple, pour $tk = k\frac{T}{n}, 0 \leq k \leq n$ variant entre $to = 0\ et\ tn = T$, on commence par simuler les accroissements $\Delta k = B_{tk} - B_{tk-1}$, 1 ≤ k ≤ n, qui sont i.i.d. de loi $\boldsymbol{N}(0, T/n)$ et on pose $Bo = 0$, $B_{tk} = \sum_{i=1}^{k}(B_{ti} - B_{ti-1})$ = $\sum_{i=1}^{k} \Delta k$, 1 ≤ k ≤ n.

```
% STANDARD BROWNIAN MOTION
% nbpas is the number of step
% T is the duration
% delta is the difference of time between two period

T = 100;
nbpas = 1000;
delta = T/nbpas;
x = 0:delta:T;
y = zeros(1, nbpas+1);

for i = 2:nbpas+1
    y(1, i) = y(1, i-1) + sqrt(delta)*randn;
end

plot(x, y);
```

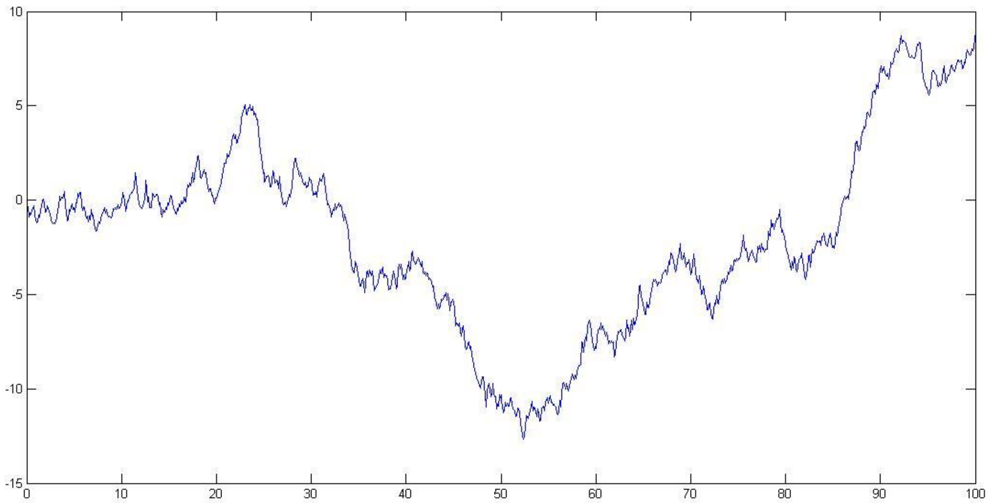

Figure 2 : Simulation d'un mouvement Brownien Standard.

Remarque : le logiciel fait une interpolation linéaire entre B_{ti} et B_{ti+1} ! On a donc une représentation approchée du mouvement Brownien. Evidemment, la qualité de cette représentation est meilleure lorsque « nbpas » est grand.

PARTIE 3 : SIMULATION DE MONTE CARLO ET APPLICATION AU PRICING DES OPTIONS EUROPEENNES

La méthode Monte Carlo (MC) est une méthode de calcul numérique utilisée pour effectuer des calculs de fonctions de variables aléatoires. L'approche consiste à effectuer une séquence d'expériences et à prendre leur valeur moyenne. Cette expérience repose sur un théorème : La loi forte des grands nombres. De plus, le théorème central limite pourra par la suite nous donner par la suite un intervalle de confiance sur la valeur approchée trouvée.

Théorème : (**Loi forte des grands nombres**)

Soit (Xi) i≥1 une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que E(X1) < +∞. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi\right) = E(X1)$$

De plus, si les variables aléatoires Xi sont de carré intégrable, alors : (**Théorème central limite**)

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi - E(X1)\right) \;\rightarrow\; Z \sim N(0,\sigma^2) \;\; avec\; \sigma = Var(X1)$$

Présentation de la méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo permet d'utiliser des algorithmes probabilistes pour trouver une valeur approchée de n'importe quelle espérance. Considérons le cas ou les variables aléatoires Xi suivent une loi uniforme sur [0,1]. Alors, un générateur aléatoire permet de simuler cette loi. Pour approcher son espérance, il suffit donc de simuler un grand nombre de fois cette loi et de faire la moyenne des simulations.

Cette méthode permet aussi de calculer un certain nombre d'intégrale. Soit $I = \int_0^1 f(u)du$. On voit que I se réécrit comme $I = E[f(U)]$ ou U est une variable aléatoire de loi $U_{[0,1]}$. En appliquant l'algorithme précédent à $Xi = f(Ui)$, on trouve une valeur approchée de I.

Le problème qui se pose ensuite est d'évaluer théoriquement l'efficacité de cette méthode. Le théorème central limite nous permet de déduire des intervalles de confiance qui sont des indicateurs importants de la méthode de Monte Carlo.

Présentation des options européennes simples.

Une option d'achat (resp. de vente) européenne, de prix d'exercice K (strike en anglais), d'échéance T sur un actif désigné (sous-jacent) est un contrat qui donne à son détenteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter (resp. de vendre) cet actif au prix K à la date T. Le prix K est fixé à la signature du contrat. Suivant la terminologie anglo-saxonne, on désigne par call l'option d'achat et par put, l'option de vente. On note généralement St, pour $t \in [0,T]$, le prix de l'actif sous-jacent, tel qu'il est coté sur un marché à un instant t de la période $[0,T]$. A la date d'échéance, l'option peut être exercée ou non, suivant le gain obtenu à partir du sous-jacent.

- L'acheteur d'un call ne décide d'exercer (acheter les titres) que si le cours (prix à l'échéance) du sous-jacent est supérieur à son prix d'exercice K.
- De même, l'acheteur d'un put ne décide d'exercer (vendre les titres) que si le cours du support est inférieur à son prix d'exercice.

Ainsi, à l'échéance du contrat, l'exercice (ou non) de l'option, dégage un flux financier, toujours positif ou nul, qu'on appelle payoff.

Le payoff du call : $(S_t - K)_+ = \max\,(S_t - K,\ 0)$

Le payoff du put : $(K - S_t)_+ = \max\,(K - S_t,\ 0)$

Dans le modèle de Black-Scholes, le prix du sous-jacent à chaque instant est donné par :

$$St = So\ \exp\,((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma Wt),\ \ \forall t \geq 0$$

Ou $(Wt)t\epsilon[0,T]$ est un mouvement brownien standard de dimension un et où σ est la volatilité du sous-jacent.

Notons que St est solution de l'équation différentielle stochastique :

$dSt\ =\ St(rdt\ +\ \sigma dWt)$, avec $S_{t=0} = S_0$ avec $So\ donné$.

Or $(Wt)t\ \epsilon\ [0,T]$ étant un mouvement brownien standard, on sait que pour tout $t\ \epsilon\ [0,T], Wt$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance t. Nous obtenons donc également l'expression suivante de St :

$$St(w) = So\exp((r - \frac{\sigma^2}{2})\,t +\ \sigma\sqrt{t}\,w),\ \ \forall\ t \in [0,T]$$

Ou w suit une loi normale centrée réduite $N(0{,}1)$. Le processus St ainsi obtenu est appelé brownien géométrique.

Pour simuler le prix du sous-jacent St entre les instants t = 0 et t = T, on va utiliser la discrétisation suivante : $S_{(n+1)\Delta t} =\ S_{n\Delta t}.\exp\,(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t +\ \sigma\sqrt{\Delta t}\,w_n)$, où $\Delta t\ =\ T/N$ est le pas constant de la discrétisation.

La formule de Black-Scholes permet de calculer la valeur théorique d'une option à partir des cinq données : $So, K, r, \sigma\ et\ T$.

Le prix de l'option d'achat est donné par l'espérance sous la probabilité risque neutre du payoff terminal actualisé : $Call \ = \ E\ [max(ST \ - \ K, 0). exp(-r. T)]$ (1)

Le prix de l'option de vente est donné par l'espérance sous probabilité risque neutre du payoff terminal actualisé : $Put \ = \ E\ [max(K \ - \ ST\ , 0). exp(-r. T)]$ (2)

La relation de parité call-put s'écrit : $call - \ put \ = \ C(T, K) - P(T, K) = So - \ K. exp(-rT)$.

Détermination du prix d'une option européenne par la méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo consiste à approcher l'espérance mathématique dans les formules (1) et (2) par une moyenne d'un nombre finit $nbMC$ de réalisations aléatoires indépendantes du prix ST :

$$E[\max(ST - K, 0) . \exp(-rT)] \approx \frac{1}{nbMC} \sum_{i=1}^{nbMC} [\max\left(ST^{i} - K, 0\right) . \exp(-rT)]$$

Pour cela, on simule des réalisation ST^{i} par la méthode de discrétisation qui induit une erreur d'ordre Δt. Ces réalisations sont indépendantes entre elles, si la succession des variables aléatoires w_n sont indépendantes entre elles et entre les trajectoires simulées. Ayant toutes ces espérances, on calcule une moyenne des simulations pour obtenir la valeur du prix d'une option.

De plus, on pourra aussi calculer la variance de la variable aléatoire simulée, afin d'obtenir un ordre de grandeur de la précision numérique obtenue, pour un échantillon de taille $nbMC$ de simulations.

L'algorithme que nous allons suivre est le suivant :

−Générer $nbMC$ réalisations indépendantes du prix de l'actif ST : $ST^1, ST^2, ST^3, \dots, ST^{nbMC}$,

−Calculer $F\left(ST^{i}\right) = \ \max\left(ST^{i} - K, 0\right) * \exp(-rT), \ pour\ 1 \ \leq \ i \ \leq \ nbMC,$

−Estimer Call(T, K) (et donc Put(T, K)) par : $E \approx \frac{1}{nbMC} \sum_{i=1}^{nbMC} F(ST^{i})$

−Calculer la variance par : $\frac{1}{nbMC-1} (\sum_{i=1}^{nbMC} \left(F(ST^{i})\right)^2 - nbMC * E^2)$ et donner les intervalles de confiance.

```
% MONTE CARLO SIMULATION FOR EUROPEAN OPTIONS PRICING
% T is the maturity
% St is the price of the asset at the time t
% nbMC is the number of simulation of the price ST
% N is the number of discretisation
% deltaT is the step
% So is the price at t = 0
% K is the strike
% sig = volatility
% r is the risk free rate


deltaT = T/N;
FST = zeros(1,nbMC);

% price ST simulation
for j = 1:nbMC
    St = So;
    for t = 0:deltaT:T
    St = St * exp((r-(sig^2)/2)*deltaT + sig*sqrt(deltaT)*randn);
    end
FST(1,j) = max(St-K, 0)*exp(-r*T);
end
call = mean(FST);
put = call-So + K*exp(-r*T);

% 95% Confidence interval and precision
varSt = var(FST);
% Call
bornInfCall = call-1.96*sqrt(varSt/nbMC);
bornSupCall = call+1.96*sqrt(varSt/nbMC);
% Put
bornInfPut = put-1.96*sqrt(varSt/nbMC);
bornSupPut = put+1.96*sqrt(varSt/nbMC);
```

Résultats de la simulation : On lance l'algorithme précédent pour S0 = 100, T = 1, r = 0.05, σ = 0.25, N= 1000. On obtient les résultats suivants :

	K = 50	K = 80	K = 100	K = 120
CALL	52.9843	25.4658	11.9507	4.85361
IC du call	[52.4836, 53.485]	[25.0021, 25.929]	[11.5901, 12.311]	[4.61311, 5.0941]
PUT	0.545769	1.56416	7.07368	19.0011
IC put	[0.04504, 1.0464]	[1.10041, 2.0279]	[6.71302, 7.4343]	[18.760, 19.2416]
Variance	652.594	559.708	338.484	150.562

Simulation pour nbMC = 10^4

	K = 50	K = 80	K = 100	K = 120
CALL	52.4378	25.3956	12.33	5.03246
IC du call	[52.3879, 52.487]	[25.3498, 25.441]	[12.2937, 12.366]	[5.00797, 5.0569]
PUT	-0.00074	1.494	7.4529	19.18
IC du put	[-0.0506, 0.0491]	[1.4481, 1.53989]	[7.41665, 7.4891]	[19.155, 19.2045]
Variance	648.17	546.033	343.005	156.122

Simulation pour nbMC = 10^6

Interprétation :

Lorsque le prix du Strike K augmente, le prix du call diminue tandis que le prix du put augmente.

Plus le nombre de simulation est grand, plus l'amplitude de l'intervalle de confiance est petite ; et donc plus la méthode de Monte Carlo converge rapidement.

On remarque également que les variances obtenues sont très importantes, ce qui réduit considérablement la convergence de la méthode de Monte Carlo. Des méthodes mathématiques de réduction de la variance permettent de résoudre ce problème.

Réduction de la variance par la méthode des variables antithétiques

C'est une technique permettant d'augmenter la précision de l'estimation des options. Cela revient à effectuer une réduction de variance. Son principe est le suivant :

On désire estimer $I = E[\varphi(Z)]$, où Z est une variable aléatoire et φ une fonction borélienne. Par échantillonnage moyen, $I_n = \sum_{k=1}^{N} \varphi(Z_k)$ et $J_n = \sum_{k=1}^{N} \varphi(L(Z_k))$ sont des estimateurs de I, où :

– $(Zk)k \geq 0$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans R, de même loi que Z

– L désigne une transformation de R dans R telle que $L(Z)$ ait même loi que $Z \; et \; L \circ L = Id$

Considérons l'estimateur moyen des deux précédents de $E[\varphi(Z)]$ de la forme :

$$\theta_N = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^{N} (\varphi(Z_k) + \varphi(L(Z_k)))$$

Dans ce cas, la variance de l'estimateur θ_N est :

$$\begin{aligned} Var(\theta_N) &= \frac{1}{4N}[Var(\varphi(Z)) + Var\left(\varphi(L(Z))\right) + 2 * cov(\varphi(Z), \varphi(L(Z))) \\ &= \frac{1}{2N}[Var(\varphi(Z)) + cov(\varphi(Z), \varphi(L(Z)))] \end{aligned}$$

La variance de I_N et de J_N est donnée par : $Var(I_N) = Var(J_N) = \frac{Var(\varphi(Z))}{N}$

Alors, dans le cas où $Cov(\varphi(Z), \varphi(L(Z))) \leq 0$, on a : $Var(\theta_N) \leq \frac{1}{2} \, Var(I_N) = \frac{1}{2} Var(J_N)$.

L'idée de cette méthode est de trouver la transformation L de sorte que $L(Z)$ soit de même loi que Z, et que $Cov(\varphi(Z), \varphi(L(Z))) \leq 0$.

Proposition : Soit Z une v.a. réelle, φ une fonction monotone, Soit L une transformation involutive (i.e. $L \circ L = Id$) monotone de R dans R telle que $L(Z)$ ait même loi que Z, et telle que φ et $\varphi \circ L$ soient de monotonies contraires. Alors, $Cov(\varphi(Z), \varphi(L(Z))) \leq 0$.

Application aux options européennes :

Si ω est une v.a gaussienne centrée réduite, alors $L(\omega) = -\omega$ l'est également. Posons :

$X = e\,(-rT)(ST\,(\omega) - K) + = \varphi(\omega)\; et\; Y = e\,(-rT)\,(ST\,(-\omega) - K) + = \varphi(-w) = \varphi(L(\omega))$

Posons : $Z = \frac{1}{2}(X + Y)$.

Alors on a : $Call(T, K) = E(Z) = E(X) = E(Y)$ et $Var(Z) = \frac{1}{4}Var(X) + \frac{1}{4}Var(Y) + \frac{1}{2}Cov(X, Y)$

Ici, L est une transformation décroissante, et φ est une fonction croissante de ω. Donc d'après ce qui précède, $Cov(X, Y) \leq 0$; On obtient donc : $Var(Z) \leq \frac{1}{2}Var(X) = \frac{1}{2}Var(Y)$

Cela permet donc de diminuer au moins de moitié la variance de l'estimateur initial, et donc d'améliorer considérablement la précision de l'estimation par la méthode de Monte Carlo.

CONCLUSION :

La simulation est un outil de calcul très utilisés en finance qui permet entre autres grâce à la méthode de simulation de Monte Carlo d'estimer le prix d'une option européenne. Nous avons pu au cours de ce projet définit des outils nous permettant d'aboutir à cette fin. En commençant par les processus stochastiques, puis le mouvement brownien que nous avons construit comme une suite de marches aléatoires renormalisées et puis simulé grâce au logiciel MATLAB. Ensuite, le modèle de Black-Scholes nous a permit d'avoir la formule du prix d'une option européenne. Grâce à la méthode de simulation de Monte Carlo effectuée sur MATLAB, nous avons pu estimer le prix de l'option ; Enfin, nous avons vu que la réduction de variance basée sur la méthode des variables antithétiques nous permet d'améliorer considérablement la précision de notre estimation.