Случайные процессы: домашние задания

2023

Домашнее задание на первую неделю

Задача 1 *(Задача из канонического задания)*

Пусть случайный процесс $X(\omega, t) = \omega t$, $t \in [0; 1]$, определен на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F}$ — множество всех подмножеств множества Ω, а мера $\mathbb{P}$ такова, что $\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = 1/3$. Построить вторичное (выборочное) вероятностное пространство процесса.

Задача 2

Случайный процесс X задан формулой $X_t = t \cdot \eta$, где $\eta \sim \mathrm{U}_{(0;1)}$, $t \in (0; 1)$. Найдите n-мерные функции распределения этого процесса.

Задача 3

Найдите математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию процесса из предыдущей задачи.

Задача 4

Пусть дана случайная величина $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$. Определим случайный процесс $X_t = \mathbb{I}_{(-\infty;\eta]}(t)$. Найдите вероятность, что скачок с единицы до нуля произойдёт на интервале $[t_0; t_0 + \Delta t]$, если достоверно известно, что на $[0; t_0]$ скачка не было (параметр Δt задан и строго меньше $1 - t_0$).

Задача 5

Пусть ξ и η — независимые случайные величины с функциями распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$. Пусть X — случайный процесс, определённый формулой $X_t = \xi \cdot t + \eta$. Найдите семейство конечномерных распределений процесса.

Задача 6

Пусть X_1, X_2 — два независимых случайных процесса с корреляционными функциями $R_{X_1}(t, s)$ и $R_{X_2}(t, s)$ и функциями среднего $m_{X_1}(t)$ и $m_{X_2}(t)$. Найдите корреляционную функцию процесса $Y = X_1 \cdot X_2$.