Случайные процессы: семинары

Бутаков И. Д.

2023

Содержание

Предисловие

Перед вами сборник всех семинаров по случайным процессам за авторством Бутакова И. Д. Автор выражает благодарность Останину Павлу Антоновичу и Широбокову Максиму Геннадьевичу за предоставленные материалы.

Используемые обозначения

$\overset{\triangle}{\iff}$	«...по определению тогда и только тогда, когда ...»
$\triangleq$	«...по определению равно ...»
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	вероятностное пространство (Ω — множество исходов, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, $\mathbb{P}$ — вероятностная мера).
$\mathbb{I}_A$	индикаторная функция множества A.
$\mathbb{E}\, X$	математическое ожидание случайной величины X.
$\mathbb{D}\, X$	дисперсия случайной величины X.
$\mathring{X}$	«центрированная» случайная величина: $\mathring{X} = X - \mathbb{E}\, X$.
$\mathrm{Be}(p)$	распределение Бернулли с параметром p.
$\mathrm{Bi}(n, p)$	биномиальное распределение с параметрами n и p.
$\mathrm{Po}(\lambda)$	распределение Пуассона с интенсивностью λ.
$\mathrm{U}(A)$, U_A	равномерное распределение на множестве A.
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	показательное распределение с параметром λ (интенсивность).
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2.
$\xrightarrow{\text{с.к.}}$	сходимость в среднем квадратичном.
$\xrightarrow{\text{п.н.}}$	сходимость почти наверное.
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$	сходимость по вероятности.
$\xrightarrow{d}$	сходимость по распределению.
$\overset{\text{п.н.}}{=}$	равенство почти наверное.
$\overset{d}{=}$	равенство по распределению.

1 Основные сведения

Случайные процессы — математические объекты, построенные с использованием теории вероятностей для исследования и моделирования реальных явлений, растянутых во времени и имеющих стохастическую (случайную) природу.

Определение 1.1. *Пусть задано вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *и множество* $T \subseteq \mathbb{R}$. *Функция* $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ *называется* **случайным процессом**, *если* $\forall t \in T$ *функция* $X(\cdot, t) \equiv X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ *измерима (то есть является случайной величиной).*

Случайный процесс можно трактовать как семейство случайных величин, параметризованное $t \in T$. Параметр t обычно интерпретируется как время. Если T состоит из одного элемента, случайный процесс является обычной случайной величиной, если T конечно — случайным вектором. Параметр ω, как и при описании случайных величин, часто опускается.

Определение 1.2. *При фиксированном* $t_0 \in T$ *случайная величина* X_{t_0} *называется* **сечением случайного процесса** X.

Определение 1.3. *При фиксированном* $\omega_0 \in \Omega$ *функция* $X(\omega_0, \cdot)$ *называется* **реализацией случайного процесса** X.

Также случайный процесс можно считать особой случайной величиной, принимающей значения в пространстве функций; при такой интерпретации, однако, отдельных усилий стоит определить, что такое вероятностное распределение на функциях. В рамках семинаров данный вопрос освещаться со всей полнотой и строгостью не будет, поэтому приведём из этой области лишь основные факты и определения, требующиеся для работы со случайными процессами.

Рассмотрим произвольный случайный процесс X. В силу единства вероятностного пространства, любой вектор вида $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ (где $t_i \in T$) является случайным вектором.

Определение 1.4. *Вероятностное распределение вектора вида* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *называется* **конечномерным распределением случайного процесса** X. *Его функция распределения обозначается как* $F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$.

Функции распределений векторов, составленных из сечений случайного процесса, обладают всеми известными вам свойствами функций распределений случайных векторов, а также ещё двумя дополнительными свойствами:

Утверждение 1.5. *Функции конечномерных распределений случайного процесса* X *обладают следующими свойствами:*

1. **(условие симметрии)** *Для любой перестановки* k_i *выполнено равенство*

$$F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F_X(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}; t_{k_1}, \ldots, t_{k_n})$$

2. **(условие согласованности)** *Для любого индекса* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *выполнено*

$$\lim_{x_k \to +\infty} F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n; t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_n)$$

Теорема 1.6 (Колмогорова). *Пусть имеется семейство распределений случайных векторов, удовлетворяющее всем свойствам из утверждения 1.5. Тогда существует вероятностное пространство и заданный на нём случайный процесс, семейство конечномерных распределений которого совпадает с данным.*

Таким образом, случайный процесс можно задавать семейством его конечномерных распределений. На данном этапе читателю должно стать понятно, как можно задавать вероятностное распределение на множестве функций (ответ — при помощи специальных семейств конечномерных распределений).

Задача 1

Пусть η — случайная величина с функцией распределения F_η. Найти все конечномерные распределения случайного процесса $X_t = \eta + t$.

Решение задачи 1

Одномерная функция распределения:

$$F_X(x;t) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X_t < x\} = \mathbb{P}\{\eta < x - t\} = F_\eta(x - t)$$

Конечномерная функция распределения:

$$\begin{aligned} F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \mathbb{P}\bigcap_{i=1}^{n}\{X_{t_i} < x_i\} = \mathbb{P}\bigcap_{i=1}^{n}\{\eta < x_i - t_i\} = \\ = \mathbb{P}\left\{\eta < \min_i\{x_i - t_i\}\right\} = F_\eta\left(\min_i\{x_i - t_i\}\right) \end{aligned}$$

Задача 2

Пусть дана случайная величина $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$. Определим случайный процесс $X_t = \mathbb{I}_{(-\infty;\eta]}(t)$. Найдите вид реализаций процесса, его одномерные и двумерные распределения.

Решение задачи 2

Реализация процесса — функция, равная единице при $t \leqslant \eta$ и нулю при $t > \eta$. Одномерная функция распределения:

$$F_X(x;t) = \mathbb{P}\{X_t < x\} = \mathbb{P}\{\mathbb{I}_{(-\infty;\eta]}(t) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \mathbb{P}\{\eta < t\}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases},$$

$$\text{где} \quad \mathbb{P}\{\eta < t\} = F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ t, & 0 < t \leqslant 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

Двумерная функция распределения:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}\left(\{X_{t_1} < x_1\} \cap \{X_{t_2} < x_2\}\right)$$

Аналогично одномерной функции распределения,

1. Если $x_1 \leqslant 0$ или $x_2 \leqslant 0$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = 0$.
2. Если $x_1 > 1$ и $x_2 > 1$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = 1$.
3. Если $0 < x_1 \leqslant 1$ и $x_2 > 1$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_X(x_1; t_1)$. Аналогично симметричный случай.
4. Если $0 < x_1, x_2 \leqslant 1$,

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}\left(\{\eta < t_1\} \cap \{\eta < t_2\}\right) = \mathbb{P}\left\{\eta < \min\{t_1, t_2\}\right\} = F_\eta\left(\min\{t_1, t_2\}\right)$$

Существование различных случайных процессов с одними и теми же вероятностными свойствами приводит к желанию (а иногда и необходимости) в некотором смысле отождествлять процессы, у которых конечномерные распределения совпадают.

Определение 1.7. *Пусть X и Y — два случайных процесса, определённые на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и множестве T. Данные процессы называются* **стохастически эквивалентными** *в случае равенства почти наверное их реализаций в любой выбранный момент, то есть*

$$\forall t \in T \quad \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega, t) = Y(\omega, t)\} = 1$$

В этом случае Y называют **модификацией** *процесса Y (и наоборот).*

Утверждение 1.8. *Стохастически эквивалентные случайные процессы имеют одинаковое семейство конечномерных распределений.*

Например, такое отождествление полезно для осмысленного определения непрерывного случайного процесса:

Определение 1.9. *Случайный процесс называется* **непрерывным** *в случае, если существует его модификацией с непрерывными реализациями.*

Задача 3

Пусть $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$. Определим случайный процесс $X_t = \mathbb{I}_{\{\eta\}}(t)$ (то есть $X_t = 1$ в том и только в том случае, когда $\eta = t$, и равен 0 иначе). Является ли X_t непрерывным процессом?

Решение задачи 3

Да, является. Процесс $Y_t \equiv 0$ является его модификацией.

При исследовании случайных процессов также бывает полезно рассматривать их моменты, дающие некоторое представление об усреднённом поведении процесса. В отличие от случайных величин, любые моменты случайного процесса также зависят от времени.

Определение 1.10. *Если $\forall t \in T$ существует $\mathbb{E}\, X_t$, то функция $m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t$ определена и называется* **функцией среднего**.

Аналогично вводятся функции любых других моментов случайной величины X_t. При работе со случайными процессами нас также будут интересовать моменты, «разнесённые во времени».

Определение 1.11. *Если $\forall t_1, t_2 \in T$ существует $\mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2}$, то функции $K_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2}$ и $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\, \mathring{X}_{t_1} \mathring{X}_{t_2}$ определены и называются, соответственно,* **ковариационной** *и* **корреляционной функциями**.[1]

Утверждение 1.12. *Функции $K_X(t_1, t_2)$ и $R_X(t_1, t_2)$ одновременно либо определены, либо не определены, причём в первом случае функция $m_X(t)$ определена и $R_X(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) - m_X(t_1) m_X(t_2)$.*

Доказательство. Следует из свойств моментов. □

[1] Данные обозначения не являются общепринятыми, а также несколько контринтуитивны; при чтении сторонних источников будьте внимательны.

Задача 4

Найти корреляционную функцию случайного процесса из задачи 2.

Решение задачи 4

Для любого t_0 случайная величина X_{t_0} может принимать только два значения — 0 или 1; это бернуллиевская случайная величина. Найдём параметр её распределения:

$$\mathbb{P}\{X_t = 1\} = \mathbb{P}\{t < \eta\} = 1 - F_\eta(t)$$

Следовательно, $m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = 1 - F_\eta(t)$. Далее,

$$K_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2} = 1 \cdot \mathbb{P}\left(\{X_{t_1} = 1\} \cap \{X_{t_2} = 1\}\right) = \\ = \mathbb{P}\left(\{t_1 < \eta\} \cap \{t_2 < \eta\}\right) = 1 - F_\eta\left(\max\{t_1, t_2\}\right)$$

Наконец,

$$R_X(t_1, t_2) = 1 - F_\eta\left(\max\{t_1, t_2\}\right) - (1 - F_\eta(t_1)) \cdot (1 - F_\eta(t_2)) = \\ = F_\eta(t_1) \cdot F_\eta(t_2) - F_\eta(t_1) - F_\eta(t_2) - F_\eta(\max\{t_1, t_2\})$$

Задача 5

Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $\eta \sim U_{[-\pi;\pi]}$ — независимые случайные переменные. Определим случайный процесс X следующим образом: $X_t = \xi \cdot \cos(t + \eta)$, где $t \in \mathbb{R}$. Найдите функцию среднего и корреляционную функцию процесса.

Решение задачи 5

Поскольку ξ и η независимы,

$$m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = \mathbb{E}\, \xi \cdot \mathbb{E} \cos(t + \eta) = 0 \cdot \ldots = 0$$

$$R_X(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) - 0 = \mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2} = \mathbb{E}\, \xi^2 \cdot \mathbb{E}\left(\cos(t_1 + \eta) \cdot \cos(t_2 + \eta)\right) = \\ = 1 \cdot \frac{1}{2}\, \mathbb{E}\left(\cos(t_1 - t_2) + \cos(t_1 + t_2 + 2\eta)\right) = \frac{1}{2} \cos(t_1 - t_2)$$

Задача 6

Пусть U, V и W — независимые в совокупности случайные величины. Известно, что U и V обладают нулевым матожиданием и дисперсией D, а W распределена с плотностью

$$\rho_W(w) = \frac{2\lambda}{\pi} \cdot \frac{\mathbb{I}_{[0;+\infty)}(w)}{\lambda^2 + w^2}, \quad \lambda > 0$$

Определим случайный процесс $X_t = U \cos(Wt) + V \sin(Wt)$. Вычислите функцию среднего и корреляционную функцию.

Решение задачи 6

Поскольку U, V и W независимы в совокупоности,

$$m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = \mathbb{E}\, U \cdot \mathbb{E} \cos(Wt) + \mathbb{E}\, V \cdot \mathbb{E} \sin(Wt) = 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots = 0$$

Корреляционную функцию удобно искать с помощью формулы полной вероятности в непрерывном случае:

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2} \mid W = w)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2} \mid W = w)}_{\triangleq R(t_1, t_2 | w)} \cdot \rho_W(w)\, dw$$

В силу нулевого матожидания,

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E}\left((U\cos(wt_1) + V\sin(wt_1)) \cdot (U\cos(wt_2) + V\sin(wt_2))\right) = \\ &= \mathbb{E}(U^2) \cdot \cos(wt_1) + 2 \cdot \underbrace{\mathbb{E}\, U\, \mathbb{E}\, V}_{0} \cdot \ldots + \mathbb{E}(V^2) \cdot \sin(wt_1)\sin(wt_2) = D\cos(w(t_1 - t_2)) \end{aligned}$$

Наконец,

$$R_X(t_1, t_2) = \int\limits_0^{+\infty} D\cos(w(t_1 - t_2)) \cdot \frac{2\lambda}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + w^2}\, dw = De^{-\lambda|t_1 - t_2|}$$

Здесь использовалось значение интеграла Лапласа:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$$