# Случайные процессы: семинары

Бутаков И. Д.

2023

## Содержание

# Предисловие

Перед вами сборник всех семинаров по случайным процессам за авторством Бутакова И. Д. Автор выражает благодарность Останину Павлу Антоновичу и Широбокову Максиму Геннадьевичу за предоставленные материалы.

## Используемые обозначения

| | |
|---|---|
| $\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$ | «…по определению тогда и только тогда, когда …» |
| $\overset{\triangle}{=}$ | «…по определению равно …» |
| $x^*$ | эрмитово (в случае числа — комплексное) сопряжение. |
| $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ | вероятностное пространство ($\Omega$ — множество исходов, $\mathcal{F}$ — $\sigma$-алгебра, $\mathbb{P}$ — вероятностная мера). |
| $\mathcal{B}(A)$, $\mathcal{B}_A$ | Борелевская $\sigma$-алгебра, определённая на множестве $A$ (если $A$ не указано, по умолчанию предполагается $A = \mathbb{R}$). |
| $\mathbb{I}_A$ | индикаторная функция множества $A$. |
| $\mathbb{E}\,X$ | математическое ожидание случайной величины $X$. |
| $\mathbb{D}\,X$ | дисперсия случайной величины $X$. |
| $\mathring{X}$ | «центрированная» случайная величина: $\mathring{X} = X - \mathbb{E}\,X$. |
| $\mathrm{Be}(p)$ | распределение Бернулли с параметром $p$. |
| $\mathrm{Bi}(n, p)$ | биномиальное распределение с параметрами $n$ и $p$. |
| $\mathrm{Po}(\lambda)$ | распределение Пуассона с интенсивностью $\lambda$. |
| $\mathrm{U}(A)$, $\mathrm{U}_A$ | равномерное распределение на множестве $A$. |
| $\mathrm{Exp}(\lambda)$ | показательное распределение с параметром $\lambda$ (интенсивность). |
| $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ | нормальное распределение со средним $\mu$ и дисперсией $\sigma^2$. |
| l.i.m. | предел в среднем квадратичном (англ. *limit in means*). |
| $\xrightarrow{\text{с.к.}}$ | сходимость в среднем квадратичном. |
| $\xrightarrow{\text{п.н.}}$ | сходимость «почти наверное». |
| $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ | сходимость по вероятности. |
| $\xrightarrow{d}$ | сходимость по распределению. |
| $\overset{\text{п.н.}}{=}$ | равенство «почти наверное». |
| $\overset{d}{=}$ | равенство по распределению. |

# 1 Основные сведения

Случайные процессы — математические объекты, построенные с использованием теории вероятностей для исследования и моделирования реальных явлений, растянутых во времени и имеющих стохастическую (случайную) природу.

**Определение 1.1.** *Пусть задано вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *и множество* $T \subseteq \mathbb{R}$. *Функция* $X\colon \Omega \times T \to \mathbb{R}$ *называется* **случайным процессом**, *если* $\forall t \in T$ *функция* $X(\,\cdot\,, t) \equiv X_t\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *измерима (то есть является случайной величиной).*

Случайный процесс можно трактовать как семейство случайных величин, параметризованное $t \in T$. Параметр $t$ обычно интерпретируется как время. Если $T$ состоит из одного элемента, случайный процесс является обычной случайной величиной, если $T$ конечно — случайным вектором. Если $T$ счётно, говорят о случайном процессе с дискретным временем. Параметр $\omega$, как и при описании случайных величин, часто опускается.

**Определение 1.2.** *При фиксированном* $t_0 \in T$ *случайная величина* $X_{t_0}$ *называется* **сечением случайного процесса** $X$.

**Определение 1.3.** *При фиксированном* $\omega_0 \in \Omega$ *функция* $X(\omega_0, \,\cdot\,)$ *называется* **реализацией (траекторией) случайного процесса** $X$.

Также случайный процесс можно считать особой случайной величиной, принимающей значения в пространстве функций; при такой интерпретации, однако, отдельных усилий стоит определить, что такое вероятностное распределение на функциях. В рамках семинаров данный вопрос освещаться со всей полнотой и строгостью не будет, поэтому приведём из этой области лишь основные факты и определения, требующиеся для работы со случайными процессами.

Рассмотрим произвольный случайный процесс $X$. В силу единства вероятностного пространства, любой вектор вида $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ (где $t_i \in T$) является случайным вектором.

**Определение 1.4.** *Вероятностное распределение вектора вида* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *называется* **конечномерным распределением случайного процесса** $X$. *Его функция распределения обозначается как* $F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$.

Функции распределений векторов, составленных из сечений случайного процесса, обладают всеми известными вам свойствами функций распределений случайных векторов, а также ещё двумя дополнительными свойствами:

**Утверждение 1.5.** *Функции конечномерных распределений случайного процесса* $X$ *обладают следующими свойствами:*

1. **(условие симметрии)** *Для любой перестановки* $k_i$ *выполнено равенство*
$$F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F_X(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}; t_{k_1}, \ldots, t_{k_n})$$
2. **(условие согласованности)** *Для любого индекса* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *выполнено*
$$\lim_{x_k \to +\infty} F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n; t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_n)$$

**Теорема 1.6** (Колмогорова)**.** *Пусть имеется семейство распределений случайных векторов, удовлетворяющее всем свойствам из утверждения 1.5. Тогда существует вероятностное пространство и заданный на нём случайный процесс, семейство конечномерных распределений которого совпадает с данным.*

Таким образом, случайный процесс можно задавать семейством его конечномерных распределений. На данном этапе читателю должно стать понятно, как можно задавать вероятностное распределение на множестве функций (ответ — при помощи специальных семейств конечномерных распределений).

**Задача 1.7.** Пусть $\eta$ — случайная величина с функцией распределения $F_\eta$. Найти все конечномерные распределения случайного процесса $X_t = \eta + t$.

**Решение задачи 1.7.** Одномерная функция распределения:

$$F_X(x;t) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X_t < x\} = \mathbb{P}\{\eta < x - t\} = F_\eta(x-t)$$

Конечномерная функция распределения:

$$F_X(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n) = \mathbb{P}\bigcap_{i=1}^n\{X_{t_i} < x_i\} = \mathbb{P}\bigcap_{i=1}^n\{\eta < x_i - t_i\} = \\ = \mathbb{P}\left\{\eta < \min_i\{x_i - t_i\}\right\} = F_\eta\left(\min_i\{x_i - t_i\}\right)$$

**Задача 1.8.** Пусть дана случайная величина $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$. Определим случайный процесс $X_t = \mathbb{I}_{(-\infty;\eta]}(t)$. Найдите вид реализаций процесса, его одномерные и двумерные распределения.

**Решение задачи 1.8.** Реализация процесса — функция, равная единице при $t \leqslant \eta$ и нулю при $t > \eta$, см. рис. 1.1. Одномерная функция распределения:

$$F_X(x;t) = \mathbb{P}\{X_t < x\} = \mathbb{P}\{\mathbb{I}_{(-\infty;\eta]}(t) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \mathbb{P}\{\eta < t\}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases},$$

$$\text{где} \quad \mathbb{P}\{\eta < t\} = F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ t, & 0 < t \leqslant 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

Двумерная функция распределения:

$$F_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = \mathbb{P}\left(\{X_{t_1} < x_1\} \cap \{X_{t_2} < x_2\}\right)$$

Аналогично одномерной функции распределения,

1. Если $x_1 \leqslant 0$ или $x_2 \leqslant 0$, $F_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = 0$.
2. Если $x_1 > 1$ и $x_2 > 1$, $F_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = 1$.
3. Если $0 < x_1 \leqslant 1$ и $x_2 > 1$, $F_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = F_X(x_1;t_1)$. Аналогично симметричный случай.
4. Если $0 < x_1, x_2 \leqslant 1$,

$$F(x_1,x_2;t_1,t_2) = \mathbb{P}\left(\{\eta < t_1\} \cap \{\eta < t_2\}\right) = \mathbb{P}\left\{\eta < \min\{t_1,t_2\}\right\} = F_\eta\left(\min\{t_1,t_2\}\right)$$

Через семейства конечномерных распределений также вводится понятие ***независимости*** процессов.

**Определение 1.9.** *Стохастические процессы $X$ и $Y$, определённые на одних и тех же $\Omega$ и $T$, называются* **независимыми** *в случае, если $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall \{t_i\}_{i=1}^n \subseteq T$ векторы $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})$ и $(Y_{t_1},\dots,Y_{t_n})$ независимы.*

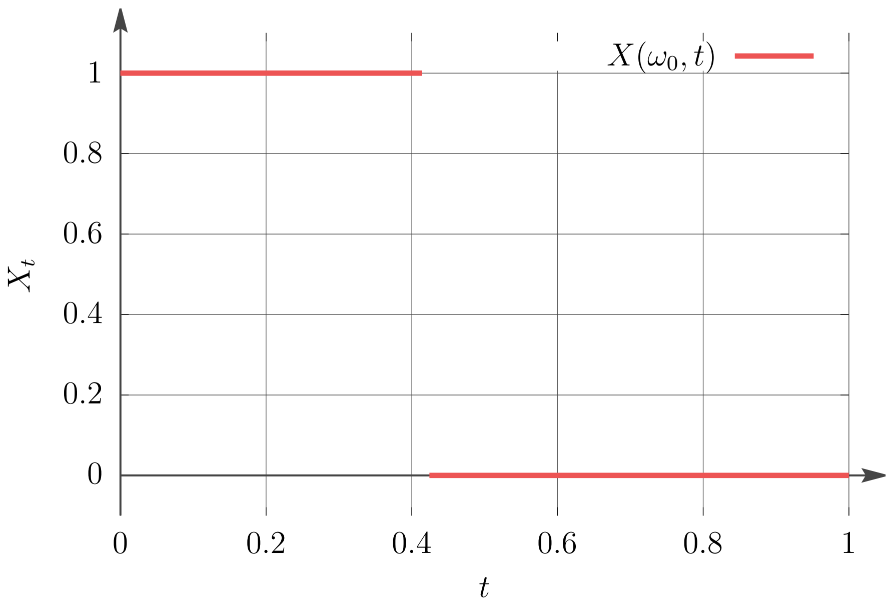


Рис. 1.1: График одной из реализаций случайного процесса из задачи 1.8.

**Замечание 1.10.** *Определение 1.9 не изменится (не станет строго сильнее), если потребовать независимости любых векторов из сечений соответствующих процессов.*

*Доказательство.* Рассмотрим $t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_m \in T$. Если векторы

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}, X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}) \quad \text{и} \quad (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}, Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_m})$$

независимы, то независимы и векторы $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ и $(Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_m})$. $\square$

Задавать процессы на вероятностных пространствах удобно также при помощи ***выборочного (вторичного) пространства***.

**Определение 1.11.** *Рассмотрим определённый на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ случайный процесс $X \colon \Omega \times T \to \mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{X}$ — пространство функций, содержащее в себе все траектории $X(\omega, \cdot\,)$ (но не обязательно только их). Рассмотрим $\sigma$-алгебру, порождённую* **цилиндрическими множествами***:*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T = \sigma\left(\{x \in \mathcal{X} \mid x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n\}_{n \in \mathbb{N}, \{t_k\}_{k=1}^n \subseteq T, \{B_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathcal{B}}\right)$$

*Отображение $X(\omega, \cdot\,)$ определяет измеримое отображение $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T)$:*

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T \quad \{\omega \in \Omega \mid X(\omega, \cdot\,) \in B\} \in \mathcal{F}$$

*На пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T)$ вероятностную меру можно определить следующим образом:*

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T \quad \mathbb{P}_X B = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega, \cdot\,) \in B\}$$

*Вероятностное пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T, \mathbb{P}_X)$ называется* **выборочным (вторичным) пространством***.*

**Задача 1.12.** Рассмотрим вероятностное пространство $\left(\{0,1,2,3\}, 2^{\{0,1,2,3\}}, \mathbb{P}\right)$, где $\mathbb{P}$ : $\mathbb{P}\{0\} = \ldots = \mathbb{P}\{3\} = \frac{1}{4}$, и случайный процесс $X(\omega, t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\omega\right)$, $t \in T = [0; 2\pi]$. Построить вторичное (выборочное) вероятностное пространство.

**Решение задачи 1.12.** Возьмём в качестве пространства функций $\mathcal{X} = \left\{\sin(t), \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(t + \pi\right)\right.$
Тогда $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{T} = 2^{\mathcal{X}}$, так как для любого подмножества $\mathcal{X}$ можно подобрать цилиндрическое множество, с которым оно совпадает. Наконец,

$$\mathbb{P}_X : \quad \mathbb{P}_X \left\{\sin(t)\right\} = \ldots = \mathbb{P}_X \left\{\sin\left(t + 3\pi/2\right)\right\} = \frac{1}{4}$$

Существование различных случайных процессов с одними и теми же вероятностными свойствами приводит к желанию (а иногда и необходимости) в некотором смысле отождествлять процессы, у которых конечномерные распределения совпадают.

**Определение 1.13.** *Пусть $X$ и $Y$ — два случайных процесса, определённые на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и множестве $T$. Данные процессы называются* **стохастически эквивалентными** *в случае равенства «почти наверное» их реализаций в любой выбранный момент, то есть*

$$\forall t \in T \quad \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega, t) = Y(\omega, t)\} = 1$$

*В этом случае $Y$ называют* **модификацией** *процесса $Y$ (и наоборот).*

**Утверждение 1.14.** *Стохастически эквивалентные случайные процессы имеют одинаковое семейство конечномерных распределений.*

Например, такое отождествление полезно для осмысленного определения непрерывного случайного процесса:

**Определение 1.15.** *Случайный процесс называется* **непрерывным** *в случае, если существует его модификация с непрерывными реализациями.*

**Задача 1.16.** Пусть $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$. Определим случайный процесс $X_t = \mathbb{I}_{\{\eta\}}(t)$ (то есть $X_t = 1$ в том и только в том случае, когда $\eta = t$, и равен 0 иначе). Является ли $X_t$ непрерывным процессом?

**Решение задачи 1.16.** Да, является. Процесс $Y_t \equiv 0$ является его модификацией.

При исследовании случайных процессов также бывает полезно рассматривать их моменты, дающие некоторое представление об усреднённом поведении процесса. В отличие от моментов случайных величин, любые моменты случайного процесса также зависят от времени.

**Определение 1.17.** *Если $\forall t \in T$ существует и конечно $\mathbb{E}\, X_t$, то функция $m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t$ определена и называется* **функцией среднего**.

Аналогично вводятся функции любых других моментов случайной величины $X_t$. При работе со случайными процессами нас также будут интересовать моменты, «разнесённые во времени».

**Определение 1.18.** *Если $\forall t_1, t_2 \in T$ существует и конечно $\mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2}$, то функции $K_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2}$ и $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\, \mathring{X}_{t_1} \mathring{X}_{t_2}$ определены и называются, соответственно,* **ковариационной** *и* **корреляционной функциями**.[1]

**Утверждение 1.19.** *Функции $K_X(t_1, t_2)$ и $R_X(t_1, t_2)$ одновременно либо определены, либо не определены, причём в первом случае функция $m_X(t)$ определена и $R_X(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) - m_X(t_1) m_X(t_2)$.*

*Доказательство.* Следует из свойств моментов. □

**Определение 1.20.** *Процесс, у которого существует ковариационная/корреляционная функция, называется* **$\mathbb{L}_2$-процессом**, *или* **процессом второго порядка**.

[1]Данные обозначения не являются общепринятыми, а также несколько контринтуитивны; при чтении сторонних источников будьте внимательны.

**Задача 1.21.** Найти корреляционную функцию случайного процесса из задачи 1.8.

**Решение задачи 1.21.** Для любого $t_0$ случайная величина $X_{t_0}$ может принимать только два значения — 0 или 1; это бернуллиевская случайная величина. Найдём параметр её распределения:

$$\mathbb{P}\{X_t = 1\} = \mathbb{P}\{t \leqslant \eta\} = 1 - F_\eta(t)$$

Следовательно, $m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = 1 - F_\eta(t)$. Далее,

$$K_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2} = 1 \cdot \mathbb{P}\left(\{X_{t_1} = 1\} \cap \{X_{t_2} = 1\}\right) = \\ = \mathbb{P}\left(\{t_1 \leqslant \eta\} \cap \{t_2 \leqslant \eta\}\right) = 1 - F_\eta\left(\max\{t_1,t_2\}\right)$$

Наконец,

$$R_X(t_1,t_2) = 1 - F_\eta\left(\max\{t_1,t_2\}\right) - (1 - F_\eta(t_1)) \cdot (1 - F_\eta(t_2)) = \\ = F_\eta(t_1) + F_\eta(t_2) - F_\eta(t_1) \cdot F_\eta(t_2) - F_\eta(\max\{t_1,t_2\})$$

В частности, если $t_1, t_2 \in [0;1]$,

$$R_X(t_1,t_2) = t_1 + t_2 - t_1 t_2 - \max\{t_1,t_2\} = \min\{t_1,t_2\} - t_1 t_2$$

**Задача 1.22.** Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ и $\eta \sim U_{[-\pi;\pi]}$ — независимые случайные величины. Определим случайный процесс $X$ следующим образом: $X_t = \xi \cdot \cos(t + \eta)$, где $t \in \mathbb{R}$. Найдите функцию среднего и корреляционную функцию процесса.

**Решение задачи 1.22.** Поскольку $\xi$ и $\eta$ независимы,

$$m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = \mathbb{E}\,\xi \cdot \mathbb{E}\cos(t+\eta) = 0 \cdot \ldots = 0$$

$$R_X(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2) - 0 = \mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2} = \mathbb{E}\,\xi^2 \cdot \mathbb{E}\left(\cos(t_1+\eta) \cdot \cos(t_2+\eta)\right) = \\ = 1 \cdot \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left(\cos(t_1 - t_2) + \cos(t_1 + t_2 + 2\eta)\right) = \frac{1}{2}\cos(t_1 - t_2)$$

**Задача 1.23.** Пусть $U$, $V$ и $W$ — независимые в совокупности случайные величины. Известно, что $U$ и $V$ обладают нулевым матожиданием и дисперсией $D$, а $W$ распределена с плотностью

$$\rho_W(w) = \frac{2\lambda}{\pi} \cdot \frac{\mathbb{I}_{[0;+\infty)}(w)}{\lambda^2 + w^2}, \quad \lambda > 0$$

Определим случайный процесс $X_t = U\cos(Wt) + V\sin(Wt)$. Вычислите функцию среднего и корреляционную функцию.

**Решение задачи 1.23.** Поскольку $U$, $V$ и $W$ независимы в совокупности,

$$m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = \mathbb{E}\, U \cdot \mathbb{E}\cos(Wt) + \mathbb{E}\, V \cdot \mathbb{E}\sin(Wt) = 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots = 0$$

Корреляционную функцию удобно искать с помощью формулы полной вероятности в непрерывном случае:

$$R_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2} \mid W = w)\right) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2} \mid W = w)}_{\triangleq R_X(t_1,t_2|w)} \cdot \rho_W(w)\, dw$$

В силу нулевого матожидания,

$$
\begin{aligned}
&R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left((U\cos(wt_1) + V\sin(wt_1)) \cdot (U\cos(wt_2) + V\sin(wt_2))\right) = \\
&= \mathbb{E}(U^2) \cdot \cos(wt_1)\cos(wt_2) + 2 \cdot \underbrace{\mathbb{E}\,U\,\mathbb{E}\,V}_{0} \cdot \ldots + \mathbb{E}(V^2) \cdot \sin(wt_1)\sin(wt_2) = D\cos(w(t_1 - t_2))
\end{aligned}
$$

Наконец,

$$
R_X(t_1, t_2) = \int\limits_0^{+\infty} D\cos(w(t_1 - t_2)) \cdot \frac{2\lambda}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + w^2}\, dw = De^{-\lambda|t_1 - t_2|}
$$

Здесь использовалось значение интеграла Лапласа:

$$
\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}
$$

**Определение 1.24. Функцией коэффициента корреляции** *называют функцию*

$$
r_X(t_1, t_2) = \frac{R_X(t_1, t_2)}{\sqrt{R_X(t_1, t_1) \cdot R_X(t_2, t_2)}} = \frac{\operatorname{cov}(X_{t_1}, X_{t_2})}{\sqrt{\mathbb{D}\,X_{t_1}\,\mathbb{D}\,X_{t_2}}}
$$

Данная функция, если определена, принимает значения от $-1$ до $1$ и имеет смысл степени линейной связи сечений процесса, соответствующих выбранным моментам времени.

**Задача 1.25.** Найти функции коэффициента корреляции для процессов из задач 1.22 и 1.23.

**Решение задачи 1.25.**

- Задача 1.22: $r_X(t_1, t_2) = \dfrac{\frac{1}{2}\cos(t_1 - t_2)}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = \cos(t_1 - t_2)$.

  Если взять два произвольных момента времени и начать сдвигать их друг к другу или друг от друга, будет наблюдаться периодическая корреляция и декорреляция соответствующих сечений.

- Задача 1.23: $r_X(t_1, t_2) = \dfrac{De^{-\lambda|t_1 - t_2|}}{\sqrt{De^{-\lambda \cdot 0} \cdot De^{-\lambda \cdot 0}}} = e^{-\lambda|t_1 - t_2|}$.

  Несмотря на схожесть процессов, в данном случае наблюдается корреляция, затухающая экспоненциально с ростом разницы между моментами времени, в которых взяты сечения.

  Дело в том, что в первом процессе случайным был фазовый сдвиг, а потому реализации процесса «не расползались». Во втором же случае случайной является ещё и частота, и линейная связь между разными моментами времени быстро теряется (реализации «декогерируют»).

Из курса теории вероятностей вы должны помнить, что случайные величины удобно исследовать при помощи характеристической функции. Аналогичный объект можно ввести и для случайного процесса.

**Определение 1.26. Характеристической функцией случайного процесса** $X$ *называется функция* $\varphi_X(t, s) = \varphi_{X_t}(s) \overset{\triangle}{=} \mathbb{E}\exp(is \cdot X_t)$*, где* $i^2 = -1$.

# 2 Важные примеры случайных процессов

В этом разделе речь пойдёт о нескольких процессах особого вида, наиболее часто встречающихся при исследовании реальных явлений. Зачастую такие процессы именные. На их примере мы продолжим практиковаться в решении задач, а также введём несколько новых теоретических понятий.

## 2.1 Пуассоновский процесс

Данный процесс встречается в реальной жизни довольно часто; он описывает поток случайных событий, которые регистрируются с некоторой постоянной «интенсивностью». Например, речь может идти о регистрации космических частиц, о кликах по ссылке, о запросах к серверу, о проезжающих по магистрали автомобилях.

Пуассоновский процесс можно неформально определить следующим образом: пусть ось времени разбита на бесконечно малые промежутки $\Delta t$. Тогда пуассоновский процесс ведёт себя следующим образом: в самом начале он равен нулю, и на каждом последующем шаге по времени может претерпеть скачок на $+1$ с вероятностью $\lambda \Delta t$. Параметр $\lambda$ называется интенсивностью процесса и характеризует «скорость» потока событий. Дадим формальное определение:

**Определение 2.1** (Явная конструкция пуассоновского процесса)**.** *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ *и независимы в совокупности,* $\tau_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$*. Тогда процесс* $K_t = \sup\{n \mid \tau_n \leqslant t\}$ *называется* **пуассоновским процессом с интенсивностью** $\lambda$.

Процесс $K_t$, построенный способом, указанным выше, называется ***процессом восстановления, построенным по величинам*** $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, и отвечает следующей модели: в нулевой момент включается прибор, который работает время $\xi_1$, после чего ломается. Одновременно с поломкой включается следующий прибор, который работает случайное время $\xi_2$, и так далее. Величина $K_t$ отражает количество приборов, введённых в эксплуатацию к моменту $t$.

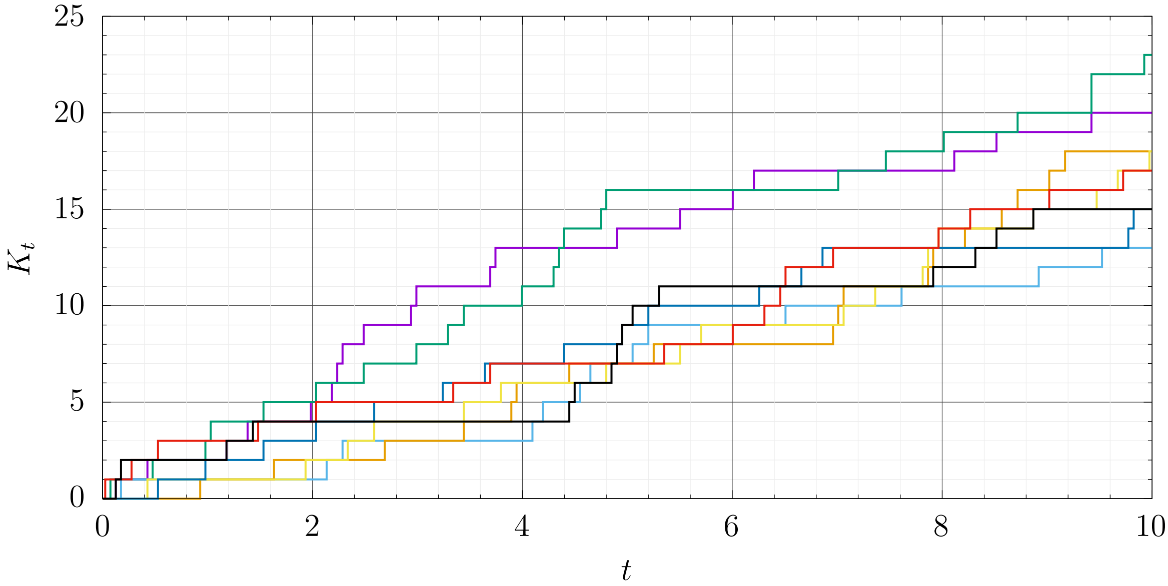


Рис. 2.1: Пример пучка реализаций пуассоновского процесса с интенсивностью $\lambda = 2$.

Приведённая явная конструкция возвращает нас к неформальному определению, использующему дискретное время с шагом $\Delta t$. Можно заметить, что экспоненциальное распределение получается как предел вероятностного распределения случайной величины —

времени между соседними скачками — при $\Delta t \to +0$:

$$\mathbb{P}\{\xi_i \in [t; t+h)\} = \lim_{\Delta t \to +0} (1 - \lambda \Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} \cdot \left(\lambda \Delta t \cdot \frac{h}{\Delta t} + o(h)\right) = \lambda e^{-\lambda t}(h + o(h))$$

Пуассоновский процесс можно определить и иначе. Для этого введём понятие процесса с независимыми приращениями.

**Определение 2.2.** *Случайный процесс $X$ называется* **процессом с независимыми приращениями**, *если $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall \{t_i\}_{i=1}^n \subseteq T$ случайные величины $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1}$ независимы в совокупности.*

**Определение 2.3. Пуассоновским процессом с интенсивностью** $\lambda > 0$ *называется случайный процесс $K \colon \Omega \times [0; +\infty) \to \mathbb{N}$ такой, что*

1. $K_0 \overset{\text{п.н.}}{=} 0$.
2. *$K$ — процесс с независимыми приращениями.*
3. $K_t - K_s \sim \mathrm{Po}\,(\lambda \cdot (t - s))$ *(при $t > s \geqslant 0$).*

**Теорема 2.4.** *Определения 2.1 и 2.3 эквивалентны.*

**Утверждение 2.5.** *Пуассоновский процесс обладает следующими свойствами:*

1. *Реализации пуассоновского процесса — кусочно-постоянные неубывающие функции со значениями в $\mathbb{N}$.*
2. *С вероятностью $1$ все скачки пуассоновского процесса равны единице.*
3. *Время, когда произошёл $n$-ый скачок (обозначим его $\tau_n$) имеет $\Gamma(n, 1/\lambda)$-распределение:*

$$\rho_{\tau_n}(t) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \cdot \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(t)$$

4. *Случайные величины $\{\tau_n - \tau_{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ распределены экспоненциально с параметром $\lambda$ и независимы.*
5. *Число событий за конечный период времени конечно с вероятностью $1$.*
6. *Число событий $K_{t+h} - K_t$ на промежутке $(t; t+h]$ зависит лишь от длины промежутка $h$: $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t = k\} = p(h, k)$*
7. *Вероятность более чем одного скачка на полуинтервале $(t; t+h]$ есть $o(h)$, то есть $\lim\limits_{h \to +0} \mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 1\}/h = 0$.*
8. *Для коротких полуинтервалов $(t; t+h]$ вероятность того, что на них произойдёт хотя бы один скачок, убывает линейно с уменьшением $h$: $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 0\} = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$ при $h \to 0$.*
9. *Из определения распределения Пуассона:*

$$\mathbb{P}\{K_t = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Наконец, приведём ещё одно из альтернативных определений пуассоновского процесса:

**Утверждение 2.6.** *Случайный процесс $K \colon \Omega \times T \to \mathbb{N}$ является пуассоновским тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим свойствам:*

1. **(стационарность приращений)** $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t = k\} = p(h,k)$
2. **(отсутствие последействия)** *Приращения процесса независимы.*
3. **(ординарность)** $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 1\} \in o(h)$

**Утверждение 2.7.** *Пусть $K$ — пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda$. Тогда $m_K(t) = \lambda t$, $R_K(t,s) = \lambda \cdot \min\{t,s\}$.*

*Доказательство.* Так как $K_t \overset{\text{п.н.}}{=} K_t - K_0 \sim \mathrm{Po}(\lambda t)$, $m_K(t) = \mathbb{E}\, K_t = \lambda t$. Далее, в силу независимости приращений, при $t \geqslant s$ имеем $\mathrm{cov}\,(K_t, K_s) = \mathrm{cov}\,(K_t - K_s + K_s, K_s) = 0 + \mathrm{cov}\,(K_s, K_s) = \lambda t$. Поэтому $R_k(t,s) = \lambda \cdot \min\{t,s\}$. □

**Задача 2.8.** Поток прибывающих на железнодорожную станцию пассажиров моделируется пуассоновским процессом $K$ с интенсивностью $\lambda$. В момент $t = 0$ пассажиров нет, в момент $t = t_0$ прибывает первый поезд. Пусть $\eta$ — суммарное время ожидания прибытия поезда всеми пассажирами на станции. Найти $\mathbb{E}\,\eta$.

**Решение задачи 2.8.**

$$\eta = \int\limits_0^{t_0} K_t\,dt, \qquad \mathbb{E}\,\eta = \int\limits_\Omega d\mathbb{P} \int\limits_0^{t_0} K_t\,dt = \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_\Omega K_t\,d\mathbb{P} = \int\limits_0^{t_0} m_K(t)\,dt = \int\limits_0^{t_0} \lambda t\,dt = \frac{\lambda t_0^2}{2}$$

**Задача 2.9.** Пусть $K_t$ — пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda$, а $\tau_1$ — момент первого скачка. Найдите $\mathbb{P}\{\tau_1 \leqslant s \mid K_t = 1\}$ при $0 < s < t$.

**Решение задачи 2.9.** Событие $\{\tau_1 \leqslant s\}$ означает, что первый скачок процесса произошёл не позже момента $s$. Если при этом $K_t = 1$, то это означает, что $K_s = 1$. Тогда

$$\mathbb{P}\{\tau_1 \leqslant s \mid K_t = 1\} = \mathbb{P}\{K_s = 1 \mid K_t = 1\} = \frac{\mathbb{P}\left(\{K_s = 1\} \cap \{K_t = 1\}\right)}{\mathbb{P}\{K_t = 1\}} =$$
$$= \frac{\mathbb{P}\left(\{K_s = 1\} \cap \{K_t - K_s = 0\}\right)}{\mathbb{P}\{K_t = 1\}} = \frac{\frac{\lambda s}{1!}e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^0}{0!}e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{\lambda t}{1!}e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

**Задача 2.10.** Пусть $K$ — пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda$, $\tau_3$ — время третьего скачка процесса. Найти $\mathbb{P}\{\tau_3 \leqslant 2\}$.

**Решение задачи 2.10.**

$$\mathbb{P}\{\tau_3 \leqslant 2\} = \mathbb{P}\{K_2 \geqslant 3\} = 1 - \mathbb{P}\{K_2 < 3\} = 1 - e^{-2\lambda} - \frac{2\lambda}{1!}e^{-2\lambda} - \frac{(2\lambda)^2}{2!}e^{-2\lambda}$$

**Задача 2.11.** Пусть $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$, $K$ — пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda$, и $\eta$ не зависит от $K$. Найти $\mathbb{P}\{K_\eta = K_{\eta+1}\}$.

**Решение задачи 2.11.** По формуле полной вероятности,

$$\mathbb{P}\{K_\eta = K_{\eta+1}\} = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{\underbrace{K_{t+1} - K_t}_{\sim \mathrm{Po}(1\cdot\lambda)} = 0 \mid \eta = t\} \cdot \rho_\eta(t)\, dt = \int\limits_0^1 e^{-1\cdot\lambda}\, dt = e^{-\lambda}$$

Пуассоновский процесс моделирует лишь поток некоторых событий. Иногда сами события также имеют сложную и/или случайную природу. Тогда требуется построить более продвинутую модель, наследующую от пуассоновского процесса только характер возникновения событий с течением времени. В качестве примера такой модели можно привести ***сложный (составной) пуассоновский процесс***. Данный процесс может возникнуть, например, при моделировании покупок в магазине: каждый покупатель будет появляться на кассе согласно пуассоновскому процессу, при этом закупаясь на некоторое случайное количество денег.

**Определение 2.12.** *Рассмотрим пуассоновский процесс $K$ и набор независимых (в совокупности с $K$) одинаково распределённых случайных величин $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.* **Сложным пуассоновским процессом** *называется процесс $Q_t = \sum\limits_{j=1}^{K_t} V_j$.*

Это означает следующее: $Q_0 \overset{\text{п.н.}}{=} 0$, и в каждый момент, когда $K$ испытывает скачок, к $Q$ добавляется $V_j$.

**Утверждение 2.13.** *Сложный пуассоновский процесс является процессом с независимыми приращениями.*

*Доказательство.* Следует из независимости приращений $K$ и независимости $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ в совокупности с $K_t$. □

**Утверждение 2.14.** *Рассмотрим сложный пуассоновский процесс $Q$ с интенсивностью $\lambda$, определённый по случайным величинам $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Пусть $\varphi_V(s)$ — характеристическая функция случайных величин $V_j$. Тогда характеристичекая функция процесса $Q$ задаётся формулой*

$$\varphi_{Q_t}(s) = e^{(\varphi_V(s)-1)\cdot\lambda t}$$

*Доказательство.*

$$\varphi_{Q_t}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{is\cdot Q_t} \mid K_t = k\right) \mathbb{P}\{K_t = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{is\cdot(V_1+\ldots+V_k)}\right) \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_V(s))^k \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{\varphi_V(s)\cdot\lambda t} \cdot e^{-\lambda t}$$

□

**Следствие 2.15.** *Функция среднего и корреляционная функция сложного пуассоновского процесса имеют вид, соответственно,*

$$m_Q(t) = \lambda t \cdot \mathbb{E}\, V, \qquad R_Q(t,s) = \lambda \min\{t,s\} \cdot \mathbb{E}(V^2)$$

*Доказательство.* По свойству характеристической функции,

$$m_Q(t) = \mathbb{E}\, Q_t = -i\frac{\partial \varphi_{Q_t}(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0} = -i\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{(\varphi_V(s)-1)\cdot\lambda t}\right)\bigg|_{s=0} =$$

$$= \lambda t \cdot \underbrace{\left(-i\frac{\partial \varphi_V(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0}\right)}_{\mathbb{E}\, V} \cdot \underbrace{e^{(\varphi_V(0)-1)\cdot\lambda t}}_{e^0} = \lambda t \cdot \mathbb{E}\, V$$

Пользуясь независимостью приращений и полагая $t \leqslant s$,

$$R_Q(t,s) = \mathbb{E}\, Q_t Q_s - m_Q(t) m_Q(s) = \mathbb{E}\,(Q_t(Q_s - Q_t)) + \mathbb{E}\, Q_t^2 - \lambda^2 ts \cdot (\mathbb{E}\, V)^2$$

$$\mathbb{E}\,(Q_t(Q_s - Q_t)) = \mathbb{E}\, Q_t \cdot \mathbb{E}(Q_s - Q_t) = \lambda t \cdot \mathbb{E}\, V \cdot \lambda(s-t) \cdot \mathbb{E}\, V = \lambda^2 t(s-t) \cdot (\mathbb{E}\, V)^2$$

$$\mathbb{E}(Q_t)^2 = (-i)^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(e^{(\varphi_V(s)-1)\cdot\lambda t}\right)\bigg|_{s=0} = (\lambda t)^2 (\mathbb{E}\, V)^2 + \lambda t \cdot \mathbb{E}(V^2)$$

Собирая всё вместе, получаем

$$R_Q(t,s) = \lambda^2 [\underbrace{t(s-t) + t^2 - ts}_{0}] \cdot (\mathbb{E}\, V)^2 + \lambda t \cdot \mathbb{E}(V^2) = \lambda t \cdot \mathbb{E}(V^2)$$

В общем же случае $R_Q(t,s) = \lambda \min\{t,s\} \cdot \mathbb{E}(V^2)$. □

**Задача 2.16** (Прореживание пуассоновского процесса)**.** Пусть $K_t$ — пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda$, а случайные величины $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ независимы и имеют распределение Бернулли с параметром $p$. Покажите, что $Q_t$ — также пуассоновский процесс с интенсивностью $p\lambda$.

**Решение задачи 2.16.** Пуассоновский процесс также является сложным пуассоновским процессом с $V_j \equiv 1$. Тогда характеристическая функция пуассоновского процесса:

$$\varphi_{K_t}(s) = e^{\left(e^{is}-1\right)\cdot\lambda t}$$

Характеристическая функция «прореженного» процесса $Q$:

$$\varphi_{Q_t}(s) = e^{\left(p\, e^{is} + (1-p) - 1\right)\cdot\lambda t} = e^{\left(e^{is}-1\right)\cdot p\lambda t}$$

Имеем характеристическую функцию пуассоновского процесса с интенсивностью $p\lambda$. В общем случае этого недостаточно для того, чтобы утверждать, что процесс пуассоновский; нужно равенство характеристических функций всех конечномерных распределений. Но мы имеем дело с процессом с независимыми и стационарными приращениями, поэтому характеристической функции сечения нам достаточно (это утверждение мы оставим без доказательства).

## 2.2 Гауссовские процессы

Гауссовские процессы могут возникать при исследовании броуновского движения, динамики цен акций, эволюции квантово-механических систем и стохастических космологических моделей. Также гауссовские процессы часто используется как «шумовая составляющая» других случайных процессов.

**Определение 2.17.** *Случайный процесс, все векторы сечений которого являются гауссовскими, называется* **гауссовским случайным процессом**.

Напомним, что гауссовские векторы обладают рядом полезных свойств: распределение гауссовского вектора полностью задаётся вектором среднего и матрицей ковариации, а нескоррелированность компонент полностью эквивалентна независимости. Аналогичные свойства можно доказать и для гауссовских процессов. Однако для этого требуется ввести следующее определение:

**Определение 2.18.** *Функция $g(x, y)\colon X \times X \to \mathbb{C}$ называется* **симметричной неотрицательно определённой**, *если $\forall x, y \in X$ $g(x, y) = g(y, x)$ и $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n \subseteq X$ матрица $(g(x_i, y_j))_{i,j=1}^n = G_{\{x_i\},\{y_j\}}$ неотрицательна определена как оператор над $\mathbb{C}^n$, то есть $\forall z \in \mathbb{C}^n$ $\left(z, G_{\{x_i\},\{y_j\}}\, z\right) \geqslant 0$.*

**Замечание 2.19.** *Если $g(x, y)$ принимает только вещественные значения, в определении 2.18 можно рассматривать только $z \in \mathbb{R}^n$.*

**Утверждение 2.20.** *Корреляционная функция произвольного случайного процесса является симметричной неотрицательно определённой.*

**Утверждение 2.21.** *Пусть $m\colon T \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, а $R\colon T \times T \to \mathbb{R}$ — симметричная и неотрицательно определённая функция. Тогда существует гауссовский процесс $X$ такой, что $\mathbb{E}\, X_t = m(t)$, $\mathbb{E}\, \mathring{X}_s \mathring{X}_t = R(s, t)$.*

В курсе теории вероятностей вы уже встречались с неотрицательно определёнными функциями. В частности, все характеристические функции случайных величин неотрицательно определены.

**Утверждение 2.22.** *Пусть $\varphi_\xi(s)$ — характеристическая функция некоторой случайной величины $\xi$. Тогда функция $g(s, t) = \varphi_\xi(t - s)$ — симметричная и неотрицательно определённая.*

**Задача 2.23.** Существует ли гауссовский процесс с корреляционной функцией $R(s, t) = e^{-|s-t|}$?

**Решение задачи 2.23.** Да, существует. Мы знаем, что $e^{-|t|}$ есть характеристическая функция распределения Коши. Поэтому это неотрицательно определённая функция. Значит $R(s, t) = e^{-|s-t|}$ неотрицательно определена и симметрична.
*Пример реализаций процесса можно видеть на рис. 2.2.*

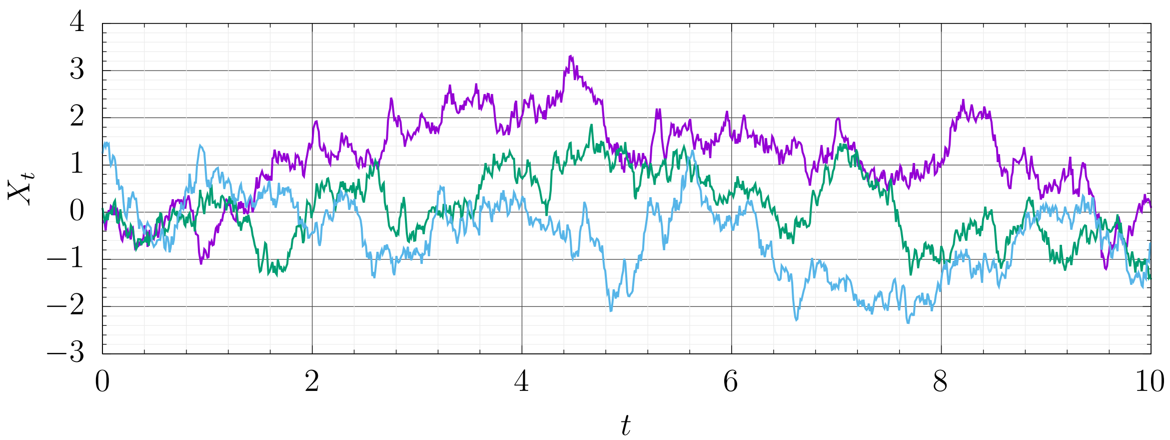


Рис. 2.2: Пример пучка реализаций гауссовского процесса из задачи 2.23 (среднее взято за ноль).

Напомним также несколько фактов касательно гауссовских векторов, которые пригодятся при исследовании гауссовских процессов.

**Утверждение 2.24.** *Пусть* $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, R)$ *— гауссовский вектор размерности* $n \in \mathbb{N}$. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ *— произвольные вещественные матрица и вектор. Тогда* $(A\xi + b) \sim \mathcal{N}(A\mu + b, ARA^T)$ *— также гауссовский вектор.*

**Теорема 2.25** (Формула Вика)**.** *Пусть дан гауссовский вектор* $(\xi_1, \dots, \xi_n) \sim \mathcal{N}(0, R)$ *с корреляционной матрицей* $R = (R_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Тогда*

1. *Если* $n$ *нечётно,* $\mathbb{E}\,\xi_1 \dots \xi_n = 0$.
2. *Если* $n$ *чётно,*

$$\mathbb{E}\,\xi_1 \dots \xi_n = \sum R_{i_1,j_1} \dots R_{i_n,j_n},$$

*где сумма берется по всем неупорядоченным разбиениям множества* $\{1, \dots, n\}$ *на* $n/2$ *неупорядоченных пар.*

**Пример 2.26.** *Пусть* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \sim \mathcal{N}(0, R)$. *Тогда, согласно свойству гауссовского вектора и формуле Вика,*

$$\mathbb{E}\,\xi_1\xi_2\xi_3 = 0, \qquad \mathbb{E}\,\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = R_{12}R_{34} + R_{13}R_{24} + R_{14}R_{23}$$

### 2.2.1 Винеровский процесс

Винеровский процесс описывает симметричное случайное блуждание, непрерывное во времени, и также имеет множество важных приложений. Данный процесс часто возникает в стохастических дифференциальных уравнениях, а также при построении других гауссовских процессов.

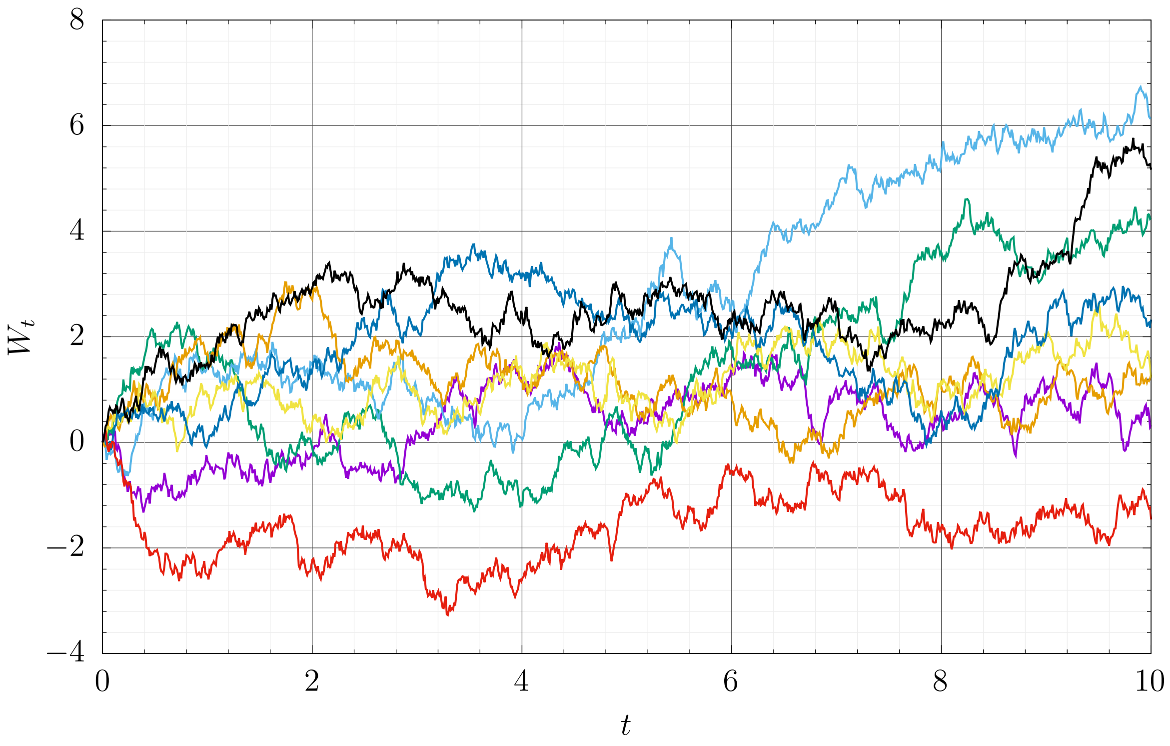


Рис. 2.3: Пример пучка реализаций винеровского процесса.

Неформально винеровский процесс можно определить, введя мелкую сетку дискретного времени с шагом $\Delta t$. Пусть процесс стартует из нуля и на каждом очередном шаге по времени делает скачок на некоторую случайную величину; математическое ожидание скачка пусть будет равно нулю, а дисперсия — $\Delta t$ (это сделано для того, чтобы дисперсия сечения процесса была равна прошедшему времени и, таким образом, не зависела от выбора $\Delta t$). Полученные случайные блуждания при $\Delta t \to +0$ и описываются винеровским процессом. Дадим формальное определение.

**Определение 2.27.** **Винеровским процессом** *называется случайный процесс* $W\colon \Omega \times [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ *такой, что*

1. $W_0 \overset{\text{п.н.}}{=} 0$.
2. $W$ *— процесс с независимыми приращениями.*
3. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, |t-s|)$.

Данное определение напоминает определение пуассоновского процесса; мы лишь изменили распределение приращений. Из определения следует, что винеровский процесс — гауссовский процесс. Как было упомянуто ранее, любой гауссовский процесс можно задать его функцией среднего и ковариационной функцией. Из этого следует второе, эквивалентное определение винеровского процесса:

**Определение 2.28.** **Винеровским процессом** *называется гауссовский случайный процесс* $W\colon \Omega \times [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ *такой, что* $m_W(t) = 0$, $R_W(t, s) = \min\{t, s\}$.

Наконец, дадим третье эквивалентное определение:

**Определение 2.29.** **Винеровским процессом** *называется гауссовский случайный процесс* $W\colon \Omega \times [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ *такой, что*

1. $W_0 \overset{\text{п.н.}}{=} 0$.
2. $\mathbb{E}\, W_t = 0$.
3. $\mathbb{E}(W_t - W_s)^2 = |t - s|$.

**Теорема 2.30.** *Определения 2.27, 2.28 и 2.29 эквивалентны.*

*Доказательство.*

2.27 $\to$ 2.28: Из независимости приращений и их нормального распределения следует, что процесс гауссовский (любой вектор сечений получается линейным преобразованием из вектора приращений, который является гауссовским). Далее, при $t > s$ имеем $\mathbb{E}\, W_t = \mathbb{E}(W_t - W_0) = 0$, $\operatorname{cov}(W_t, W_s) = \operatorname{cov}(W_s + W_t - W_s, W_s) = \mathbb{D}\, W_s = s = \min\{t, s\}$.

2.28 $\to$ 2.29: $\mathbb{E}(W_t - W_s)^2 = \mathbb{E}\, W_t^2 - 2\,\mathbb{E}\, W_t W_s + \mathbb{E}\, W_s^2 = t - 2\min\{t, s\} + s = |t - s|$.

2.29 $\to$ 2.27: Поскольку процесс гауссовский, из пунктов 2 и 3 определения 2.29 следует, что $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$. Прочитав доказательство в предыдущем пункте «в обратную сторону», получаем $\mathbb{E}\, \mathring{W}_t \mathring{W}_s = \min\{t, s\}$. Осталось показать независимость приращений.

Рассмотрим два произвольных последовательных приращения: $W_{t_4} - W_{t_3}$ и $W_{t_2} - W_{t_1}$ ($t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4$). Они образуют двумерный гауссовский вектор (т.к. получены линейным преобразованием из вектора сечений). Приращения нескоррелированны:

$$\operatorname{cov}(W_{t_4} - W_{t_3}, W_{t_2} - W_{t_1}) = \min\{t_4, t_2\} - \min\{t_3, t_2\} - \min\{t_4, t_1\} + \min\{t_3, t_1\} = \\ = t_2 - t_2 - t_1 + t_1 = 0$$

Поскольку любой вектор приращений процесса $W$ гауссовский (см. рассуждение выше про линейное преобразование вектора сечений), а его матрица ковариации диагональная (т.к. любые попарные ковариации нулевые), из свойств гауссовского вектора получаем независимость.

□

Приведём без доказательства несколько полезных свойств винеровского процесса:

**Утверждение 2.31.**

1. *Винеровский процесс имеет* **стационарные приращения** *(конкретно, $Y_t = W_{t_0+t} - W_{t_0}$ также винеровский для любого $t_0 \geqslant 0$).*
2. *Винеровский процесс является непрерывным процессом.*
3. *Траектории винеровского процесса* **возвратны***: множество $\{t \mid W_t = 0\}$ с вероятностью 1 является неограниченным.*
4. *Выполнен закон повторного логарифма Леви: $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} \dfrac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \overset{\text{п.н.}}{=} 1$.*

В качестве упражнения приведём доказательства для следующих двух утверждений:

**Утверждение 2.32.** *Винеровский процесс* **самоподобен с коэффициентом** $1/2$*, то есть $Y_t = W_{ct}/\sqrt{c}$ — также винеровский процесс для любой константы $c > 0$.*

*Доказательство.* Процесс $Y_t$ является гауссовским, так как получен из гауссовского процесса линейным (относительно $W_t$) масштабированием по оси времени и оси значений. При этом

$$\mathbb{E}\, Y_t = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot 0 = 0, \qquad \mathbb{E}\, Y_t Y_s = \frac{1}{\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}} \min\{ct, cs\} = \min\{t, s\},$$

что по определению означает, что $Y_t$ — винеровский. □

**Утверждение 2.33.** *Винеровский процесс допускает* **«инверсию времени»***: $Y_t = t \cdot W_{1/t}$ — также винеровский процесс.*

*Доказательство.* Процесс $Y_t$ является гауссовским, так как получен из гауссовского процесса линейным (относительно $W_t$) масштабированием по оси времени и оси значений. При этом

$$\mathbb{E}\, Y_t = t \cdot 0 = 0, \qquad \mathbb{E}\, Y_t Y_s = ts \cdot \min\{1/t, 1/s\} = \min\{t, s\},$$

что по определению означает, что $Y_t$ — винеровский. □

**Задача 2.34.** Найдите корреляционную функцию процесса $X_t = W_t^2$.

**Решение задачи 2.34.** Пусть, без ограничения общности, $t > s$. Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left(W_t^2, W_s^2\right) &= \operatorname{cov}\left((W_t - W_s)^2 - 2W_tW_s - W_s^2, W_s^2\right) = \\ &= \operatorname{cov}\left((W_t - W_s)^2 + 2(W_t - W_s)W_s + W_s^2, W_s^2\right) = 0 + \operatorname{cov}\left((W_t - W_s)W_s, W_s^2\right) + \mathbb{D}\, W_s^2\end{aligned}$$

Поскольку $W_t - W_s$ и $W_s$ независимы, $\mathbb{E}(W_t - W_s)W_s = 0$. Отсюда

$$\operatorname{cov}\left((W_t - W_s)W_s, W_s^2\right) = \mathbb{E}(W_t - W_s)\underbrace{W_s(W_s^2 - \mathbb{E}\, W_s^2)}_{p(W_s)} = \mathbb{E}(W_t - W_s) \cdot \mathbb{E}\, p(W_s) = 0 \cdot \ldots = 0$$

Наконец,

$$\operatorname{cov}\left(W_t^2, W_s^2\right) = \mathbb{D}\, W_s^2 = \mathbb{E}\, W_s^4 - (\mathbb{E}\, W_s^2)^2 \underset{\text{распр.}}{\overset{\text{св. норм.}}{=}} 3s^2 - s^2 = 2s^2 = 2\min\{t^2, s^2\}$$

Альтернативно, можно было применить формулу Вика:

$$\mathbb{E}\, W_tW_tW_sW_s = t \cdot s + \min\{t, s\} \cdot \min\{t, s\} + \min\{t, s\} \cdot \min\{t, s\} = ts + 2\min\{t^2, s^2\}$$

$$\mathbb{E}\, W_t^2 = t, \qquad \mathbb{E}\, W_s^2 = s$$

$$R_{W^2}(t, s) = K_{W^2}(t, s) - m_{W^2}(t) m_{W^2}(s) = ts + 2\min\{t^2, s^2\} - ts = 2\min\{t^2, s^2\}$$

**Задача 2.35.** Для винеровского процесса $W$ и разбиения $\mathcal{T} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = b\}$ отрезка $[a; b]$ введём случайную величину $Z(\mathcal{T}) = \sum_{k=0}^{n}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2$. Найдите предел в $\mathbb{L}_2$ (в среднем квадратичном) случайных величин $Z(\mathcal{T})$ при устремлении мелкости разбиения $d(\mathcal{T})$ к нулю.

**Решение задачи 2.35.** Напомним, что случайная величина $\eta$ является пределом в среднем квадратичном последовательности случайных величин $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, если $\mathbb{E}\,|\xi_n - \eta|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. В нашем случае вместо $n \to \infty$ имеем $d(\mathcal{T}) \to 0$.

Покажем, что искомым пределом является константная случайная величина — $(b-a)$. Для этого заметим, что из независимости приращений и их распределения следует

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2\right) = \sum_{k=0}^{n}(t_{k+1} - t_k) = b - a$$

Таким образом, $(b-a)$ есть ни что иное, как $\mathbb{E}\,Z(\mathcal{T})$. Тогда

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - (b-a)\right)^2 = \mathbb{D}\left(\sum_{k=0}^{n}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2\right)$$

В очередной раз воспользовавшись независимостью и нормальностью приращений, получаем

$$\mathbb{D}\left(\sum_{k=0}^{n}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2\right) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{D}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 = \sum_{k=0}^{n}\left(3(t_{k+1}-t_k)^2 - (t_{k+1}-t_k)^2\right) =$$
$$= 2\sum_{k=0}^{n}(t_{k+1}-t_k)^2 \leqslant 2\cdot d(\mathcal{T})\cdot\sum_{k=0}^{n}(t_{k+1}-t_k) = 2\cdot d(\mathcal{T})\cdot(b-a) \underset{d(\mathcal{T})\to 0}{\longrightarrow} 0$$

**Теорема 2.36** (Башелье)**.** *Пусть $W$ — винеровский процесс, $t > 0$. Случайная величина $M_t = \sup_{s\in[0;t]} W_s$ имеет такое же распределение, как и $|W_t|$.*

**Задача 2.37.** Пусть $W$ — винеровский процесс, $y > 0$ и $\tau_y = \inf\{t \mid W_t = y\}$. Вычислить $\mathbb{E}\,\tau_y$.

**Решение задачи 2.37.** Воспользовавшись теоремой 2.36, найдём распределение $\tau_y$:

$$\mathbb{P}\{\tau_y \geqslant t\} = \mathbb{P}\{M_t < y\} = \mathbb{P}\{W_t \in [-y; y]\} = F_{\mathcal{N}(0,t)}(y) - F_{\mathcal{N}(0,t)}(-y) = 2(F_{\mathcal{N}(0,t)}(y) - 1/2)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}F_{\mathcal{N}(0,t)}(y) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{y}\frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\,dx = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{y/\sqrt{t}}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = -\frac{y}{2\sqrt{t^3}}\cdot\frac{e^{-y^2/2t}}{\sqrt{2\pi}}$$

Отсюда

$$\rho_{\tau_y}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}\{\tau_y < t\} = \frac{\partial}{\partial t}\left[1 - 2(F_{\mathcal{N}(0,t)}(y) - 1/2)\right] = \frac{y}{\sqrt{t^3}}\cdot\frac{e^{-y^2/2t}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\mathbb{E}\,\tau_y = \int_{0}^{+\infty} t\cdot\rho_{\tau_y}(t)\,dt = +\infty$$

**Задача 2.38.** Пусть $W$ — винеровский процесс. Вычислить математическое ожидание процесса $X_t = \exp(W_t - t/2) - 1$ и доказать, что он имеет ортогональные приращения, то есть для $0 < t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4$ справедливо $\mathbb{E}\left((X_{t_4} - X_{t_3})(X_{t_2} - X_{t_1})\right) = 0$.

**Решение задачи 2.38.** Величина $e^{W_t}$ распределена логнормально с параметрами $(\mu, \sigma^2) = (0, t)$, а потому $\mathbb{E}\, e^{W_t} = e^{0 - t/2}$. Тогда $\mathbb{E}\, X_t = e^{t/2 - t/2} - 1 = 0$. Пусть $0 < t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4$. В этом случае

$$\mathbb{E}\left(\left(e^{W_{t_4} - t_4/2} - e^{W_{t_3} - t_3/2}\right)\left(e^{W_{t_2} - t_2/2} - e^{W_{t_1} - t_1/2}\right)\right) =$$
$$= e^{-(t_2+t_4)/2}\,\mathbb{E}\left(e^{W_{t_2} + W_{t_4}}\right) - e^{-(t_1+t_4)/2}\,\mathbb{E}\left(e^{W_{t_1} + W_{t_4}}\right) - e^{-(t_2+t_3)/2}\,\mathbb{E}\left(e^{W_{t_2} + W_{t_3}}\right) + e^{-(t_1+t_3)/2}\,\mathbb{E}\left(e^{W_{t_1} + W_{t_3}}\right)$$

Рассмотрим произвольное слагаемое (например, первое). Пользуясь независимостью приращений,

$$\mathbb{E}\left(e^{W_{t_2} + W_{t_4}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{2W_{t_2} + W_{t_4} - W_{t_2}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{2W_{t_2}}\right)\mathbb{E}\left(e^{W_{t_4} - W_{t_2}}\right)$$

Аналогично, пользуясь свойством логнормального распределения, получаем

$$\mathbb{E}\left(e^{2W_{t_2}}\right)\mathbb{E}\left(e^{W_{t_4} - W_{t_2}}\right) = e^{4t_2/2} \cdot e^{(t_4 - t_2)/2} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-(t_2+t_4)/2}\,\mathbb{E}\left(e^{W_{t_2} + W_{t_4}}\right) = e^{t_2}$$

Отсюда

$$\mathbb{E}\left((X_{t_4} - X_{t_3})(X_{t_2} - X_{t_1})\right) = e^{t_2} - e^{t_1} - e^{t_2} + e^{t_1} = 0$$

# 3 Элементы стохастического анализа

Общая цель данного раздела — дать стохастические аналоги привычным определениям из математического анализа — пределу, производной и интегралу — для случайных процессов. Как мы помним, в теории вероятностей было несколько типов сходимости случайных величин, поэтому и для случайных процессов есть много вариантов определить вышеуказанное. Изучаемые в этом курсе варианты не претендуют на полноту охвата.

Начнём с некоторых вспомогательных утверждений, следующих напрямую из функционального анализа. Вспомним, что множество случайных величин на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с конечным вторым моментом образует гильбертово пространство $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ со скалярным произведением, определённым по формуле $(\xi, \eta) \overset{\triangle}{=} \mathbb{E}(\xi\eta) = \int_\Omega \xi(\omega)\eta(\omega)\, d\omega$. Пользуясь этим, приведём ряд свойств гильбертовых пространств, полезных для задач теории вероятностей.

- Неравенство Коши-Буняковского-Шварца: $(\xi, \eta)^2 \leqslant (\xi, \xi) \cdot (\eta, \eta)$. Отсюда, например, $(\mathbb{E}\,\xi)^2 \leqslant \mathbb{E}(\xi^2)$ (если взять $\eta \equiv 1$).
- Скалярное произведение — непрерывная функция обеих своих переменных в смысле топологии, порождённой нормой $\|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)}$.

  Так как пространство является нормированным, непрерывность также является секвенциальной непрерывностью: если $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} \eta$, то и $(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (\xi, \eta)$. В частности, $\mathbb{E}(\xi_n\eta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(\xi\eta)$.

  Отсюда следует возможность перестановки передела и математического ожидания:

  **Утверждение 3.1.** $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\,\xi_n = \mathbb{E}\,\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\xi_n$.

- Можно получить аналог критерия Коши:

  **Утверждение 3.2.** *Если для последовательности $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ случайных величин из $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ найдётся константа $C$ такая, что для всяких подпоследовательностей $\{\xi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{\xi_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ выполнено $(\xi_{n_k}, \xi_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} C$, то $\exists \xi\colon\ \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\xi_n = \xi$.*

  *Доказательство.*

  $$\|\xi_{n_k} - \xi_{m_k}\|^2 = (\xi_{n_k}, \xi_{n_k}) - 2\,(\xi_{n_k}, \xi_{m_k}) + (\xi_{m_k}, \xi_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} C - 2\cdot C + C = 0$$

  Отсюда по критерию Коши получаем существование предела. □

## 3.1 Непрерывность

Ранее мы уже приводили определение непрерывного случайного процесса, основанное на понятии модификации процесса (см. определение 1.15). Оно не является единственно возможным. На основе определения из математического анализа можно ввести целый класс опрежелений непрерывности случайного процесса в точке.

**Определение 3.3.** *Случайный процесс $X$ называется* **непрерывным «почти наверное» в точке** $t \in T$ *в случае* $X_{t+\Delta t} \xrightarrow[\Delta t\to 0]{\text{п.н.}} X_t$.

**Определение 3.4.** *Случайный процесс $X$ называется* **непрерывным в среднем квадратичном в точке** $t \in T$ *в случае* $X_{t+\Delta t} \xrightarrow[\Delta t\to 0]{\text{с.к.}} X_t$.

**Определение 3.5.** *Случайный процесс $X$ называется* **непрерывным по вероятности в точке** $t \in T$ *в случае* $X_{t+\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{\mathbb{P}} X_t$.

**Определение 3.6.** *Случайный процесс $X$ называется* **непрерывным по распределению в точке** $t \in T$ *в случае* $X_{t+\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{d} X_t$.

По аналогии с классическим математическим анализом далее можно ввести понятия непрерывности на множестве в смыслах всех типов сходимостей. Заметим, что непрерывность «почти наверное» на всём $T$ не эквивалентна непрерывности в смысле определения 1.15. В качестве контр-примера можно взять пуассоновский процесс (см. задачу 3.13).

В этом курсе мы будем в основном заниматься непрерывностью (а затем и дифференцируемостью и интегрируемостью) в среднем квадратичном. Для указанного типа непрерывности есть удобный критерий в терминах функций моментов:

**Теорема 3.7** (Критерий непрерывности в среднем квадратичном)**.** *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Случайный процесс второго порядка $X$ непрерывен в среднем квадратичном в точке $t$.*
2. *Ковариационная функция $K_X(t,s)$ непрерывна в точке $(t,t)$.*
3. *Корреляционная функция $R_X(t,s)$ непрерывна в точке $(t,t)$, функция среднего $m_X(t)$ непрерывна в точке $t$.*

**Задача 3.8.** Случайный процесс $X$ определён как $X_t = \xi \cdot \mathbb{I}_{(-\infty;r)}(t) + \eta \cdot \mathbb{I}_{[r;+\infty)}(t)$, где $t \in T = [0;1]$, $\xi$ и $\eta$ — независимые одинаково распределённые нормальные случайные величины, а $r$ — равномерно распределённая по $T$ случайная величина, не зависящая от $\xi$ и $\eta$. Исследовать процесс $X$ на непрерывность в среднем квадратичном.

**Решение задачи 3.8.** Заметим, что вероятность получить непрерывную реализацию процесса равна 0, поскольку это означало бы, что $\xi$ и $\eta$ совпали (таким образом, процесс не является непрерывным в смысле определения 1.15). Однако, процесс оказывается непрерывным в среднем квадратическом. Для доказательства этого воспользуемся теоремой выше.

Обозначим $\mathbb{E}\,\xi = \mathbb{E}\,\eta = m$, $\mathbb{D}\,\xi = \mathbb{D}\,\eta = D$. Функция среднего:

$$m_X(t) = \mathbb{E}\,X_t = \mathbb{E}(X_t \mid t < r)\mathbb{P}\{t < r\} + \mathbb{E}(X_t \mid t \geqslant r)\mathbb{P}\{t \geqslant r\} = \mathbb{E}\,\xi \cdot (1-t) + \mathbb{E}\,\eta \cdot t = m$$

Пусть, без ограничения общности, $s \leqslant t$. Тогда корреляционная функция:

$$R_X(t,s) = \mathbb{E}\left(\mathring{X}_t\mathring{X}_s\right) = \mathbb{E}\left(\mathring{X}_t\mathring{X}_s \;\middle|\; r < s\right)\mathbb{P}\{r < s\} + \mathbb{E}\left(\mathring{X}_t\mathring{X}_s \;\middle|\; s \leqslant r < t\right)\mathbb{P}\{s \leqslant r < t\} +$$
$$+ \mathbb{E}\left(\mathring{X}_t\mathring{X}_s \;\middle|\; t \leqslant r\right)\mathbb{P}\{t \leqslant r\} = \mathbb{E}(\mathring{\xi}\mathring{\xi}) \cdot s + \mathbb{E}(\mathring{\xi}\mathring{\eta}) \cdot (t-s) + \mathbb{E}(\mathring{\eta}\mathring{\eta}) \cdot (1-t) = D \cdot (1 + s - t)$$

$$R_X(t,s) = D \cdot (1 - |t-s|)$$

Функция среднего непрерывна, корреляционная функция непрерывна на диагонали $s = t$. Значит, $X$ непрерывен в среднем квадратичном.

## 3.2 Дифференцирование

**Определение 3.9. Производной в среднем квадратичном случайного процесса** $X$ **в точке** $t$ *называется предел*

$$X'_t = \underset{\Delta t \to 0}{\text{l.i.m.}} \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\Delta t}$$

*Если указанный предел существует, процесс* $X$ *называют* **дифференцируемым в среднем квадратичном в точке** $t$*.*

Абсолютно аналогично вводятся производные и в смысле других сходимостей. При этом можно получить следующее утверждение:

**Утверждение 3.10.** *В любом типе сходимости из дифференцируемости следует непрерывность.*

Как и в случае с непрерывностью в среднем квадратичном, есть удобный критерий, связывающий дифференцируемость в среднем квадратичном и функции моментов:

**Теорема 3.11** (Критерий дифференцируемости в среднем квадратичном)**.** *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Случайный процесс второго порядка* $X$ *дифференцируем в среднем квадратичном в точке* $t$*.*
2. *Существует следующий двойной предел:*

$$\lim_{\Delta t, \Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta t \Delta s} \left(K_X(t+\Delta t, t+\Delta s) - K_X(t+\Delta t, t) - K_X(t, t+\Delta s) + K(t,t)\right)$$

3. *Функция* $m_X(t)$ *дифференцируема в точке* $t$ *и существует следующий двойной предел:*

$$\lim_{\Delta t, \Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta t \Delta s} \left(R_X(t+\Delta t, t+\Delta s) - R_X(t+\Delta t, t) - R_X(t, t+\Delta s) + R(t,t)\right)$$

Заметим, что предел из утверждения теоремы не является смешанной производной. Смешанная производная выражается через повторный предел, мы же имеем дело с двойным пределом. Из существования данного передела следует существование смешанной производной; в обратную сторону это неверно.

**Задача 3.12.** Выразить функцию среднего и корреляционную функцию $X'_t$ через $m_X(t)$ и $R_X(t,s)$.

**Решение задачи 3.12.**

$$m_{X'}(t) = \mathbb{E}\,\underset{\Delta t \to 0}{\text{l.i.m.}} \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}(X_{t+\Delta t} - X_t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_X(t+\Delta t) - m_X(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} m_X(t)$$

$$R_{X'}(t,s) = \mathbb{E}\left[\underset{\Delta t \to 0}{\text{l.i.m.}} \frac{\mathring{X}_{t+\Delta t} - \mathring{X}_t}{\Delta t} \cdot \underset{\Delta s \to 0}{\text{l.i.m.}} \frac{\mathring{X}_{s+\Delta s} - \mathring{X}_s}{\Delta s}\right] =$$
$$= \lim_{\Delta t, \Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta t \Delta s} \Big(\mathbb{E}(\mathring{X}_{t+\Delta t}\mathring{X}_{s+\Delta s}) - \mathbb{E}(\mathring{X}_{t+\Delta t}\mathring{X}_s) - \mathbb{E}(\mathring{X}_t\mathring{X}_{s+\Delta s}) + \mathbb{E}(\mathring{X}_t\mathring{X}_s)\Big) =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial s} R_X(t,s)$$

Отметим, что центрирование случайной величины («$\mathring{X}'_t$») было сразу внесено внутрь предела и дроби. Проверьте сами корректность данного шага.

**Задача 3.13.** Исследовать пуассоновский процесс на непрерывность и дифференцируемость «почти наверное», в среднем квадратичном, по вероятности и по распределению.

**Решение задачи 3.13.** Докажем, что пуассоновский процесс дифференцируем «почти наверное» на всём $T = [0; +\infty)$. Для этого заметим, что вероятность скачка в каждый конкретный момент времени $t$ равна

$$\mathbb{P} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau_k = t\} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\tau_k = t\} = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0,$$

где $\tau_k \sim \Gamma(k, 1/\lambda)$ — время $k$-ого скачка (поскольку оно распределено абсолютно непрерывно, $\mathbb{P}\{\tau_k = t\} = 0$). Отсюда следует, что $(K_{t+\Delta t} - K_t)/\Delta t \xrightarrow[\Delta t \to 0]{\text{п.н.}} 0$, так как при фиксированном исходе $\omega \in \Omega$ предела нет только в том случае, если $t$ — момент, когда произошёл скачок.

Из дифференцируемости «почти наверное» автоматически следует дифференцируемость по вероятности и по распределению. Согласно 3.10, из всего этого следует непрерывность «почти наверное», по вероятности и по распределению. Заметим, однако, что непрерывности в смысле 1.15 нет: реализации пуассоновского процесса «почти наверное» являются ступенчатыми функциями, поэтому пуассоновский процесс не может быть модификацией некоторого процесса с непрерывными траекториями.

Непрерывность в среднем квадратичном также имеет место, поскольку $m_K(t) = \lambda t$ и $R_K(t, s) = \lambda \min\{t, s\}$ непрерывны (в том числе и $R_K$ — на диагонали), однако дифференцируемости в среднеквадратичном нет, поскольку $R_K$ не дифференцируема на диагонали.

**Задача 3.14.** Показать, что винеровский процесс ни в какой точке не является дифференцируемым даже по распределению.

**Решение задачи 3.14.** Рассмотрим $X_t(\Delta t) = (W_{t+\Delta t} - W_t)/\Delta t$. Из свойств винеровского процесса имеем $X_t(\Delta t) \sim \mathcal{N}(0, |\Delta t|/|\Delta t|^2) = \mathcal{N}(0, |\Delta t|^{-1})$. Из сходимости по распределению следует сходимость характеристических функций поточечно к характеристической функции предельного распределения. Характеристическая функция случайной величины $X_t(\Delta t)$ — $\varphi(s) = \exp(-s^2/|2\Delta t|)$. В точке $s = 0$ она равна единице, а в $s \neq 0$ сходится к нулю при $\Delta t \to 0$. Значит, $\varphi$ сходится поточечно к разрывной функции, которая не может быть характеристической функцией никакого распределения.

## 3.3 Интегрирование по времени

**Определение 3.15.** *Пусть случайный процесс $X$ определён на отрезке $[a; b]$. Рассмотрим разбиение $\mathcal{T}$ этого отрезка $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, где на каждом полуинтервале $\Delta_k = [t_{k-1}; t_k)$ длины $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ взято по точке $\tau_k$.*

*Случайная величина $Z(\mathcal{T}) = \sum_{k=1}^{n} X_{\tau_k} \Delta t_k$ называется* **интегральной суммой Римана случайного процесса $X$, построенной по разбиению $\mathcal{T}$**.

*Величина $d(\mathcal{T}) = \max \Delta t_k$ называется* **мелкостью разбиения $\mathcal{T}$**.

**Определение 3.16. Интегралом Римана процесса $X$ на отрезке $[a; b]$ в смысле среднего квадратичного** *называется предел*

$$\underset{d(\mathcal{T}) \to 0}{\text{l.i.m.}}\, Z(\mathcal{T}) \triangleq \int_a^b X_t \, dt$$

*Если указанный предел существует, процесс $X$ называют* **интегрируемым в среднем квадратичном на отрезке $[a; b]$**.

Аналогично математическому анализу вводятся интегралы по бесконечным отрезкам: берётся предел в нужном смысле (в нашем случае — в среднем квадратичном) при стремлении одного из концов в бесконечность.

Как и в случае с непрерывностью и дифференцируемостью в среднем квадратичном, имеем удобный критерий интегрируемости:

**Теорема 3.17** (Критерий интегрируемости в среднем квадратичном)**.** *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Случайный процесс второго порядка $X$ интегрируем в среднем квадратичном на отрезке $[a; b]$.*
2. *Существует и конечен следующий двойной интеграл Римана:* $\int\limits_a^b \int\limits_a^b K_X(t,s)\,ds\,dt$.
3. *Существуют и конечны следующие интегралы Римана:* $\int\limits_a^b m_X(t)\,dt$ *и* $\int\limits_a^b \int\limits_a^b R_X(t,s)\,ds\,dt$.

**Утверждение 3.18.** *Из непрерывности в среднем квадратичном следует интегрируемость в среднем квадратичном.*

**Задача 3.19.** Рассмотрим $\mathbb{L}_2$-процесс $X$, дифференцируемый в среднем квадратичном на отрезке $[a; b] \subseteq T$. Пусть $J_t = \int\limits_a^t X_s\,ds$. Требуется найти взаимную корреляционную функцию процессов $X'$ и $J$, то есть $R_{X',J}(t,s) = \mathbb{E}(\mathring{X}'_t \cdot \mathring{J}_s)$.

**Решение задачи 3.19.**

$$R_{X',J}(t,s) = \mathbb{E}\left[\underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m.}} \frac{\mathring{X}_{t+\Delta t} - \mathring{X}_t}{\Delta t} \cdot \underset{d(\mathcal{T})\to 0}{\text{l.i.m.}} \sum_{k=1}^{n} \mathring{X}_{\tau_k} \Delta t_k\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t, d(\mathcal{T})\to 0} \frac{1}{\Delta t}\,\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} \left(\mathring{X}_{t+\Delta t}\mathring{X}_{\tau_k} - \mathring{X}_t\mathring{X}_{\tau_k}\right)\Delta t_k\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t, d(\mathcal{T})\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{R_X(t+\Delta t, \tau_k) - R_X(t,\tau_k)}{\Delta t}\Delta t_k = \int\limits_0^s \frac{\partial R_X(t,\tau)}{\partial t}\,d\tau$$

О связи интеграла Римана в среднем квадратичном и потраекторного интеграла говорит следующее замечание:

**Замечание 3.20.** *Если «почти все» реализации случайного процесса $X$ интегрируемы по Риману, то потраекторный интеграл (интеграл траектории $X(\omega,\cdot)$ по времени) есть случайная величина (то есть измеримая функция на $(\Omega, \mathcal{F})$). Если при этом $X$ интегрируем в среднем квадратичном, то потраекторный и среднеквадратичный интегралы совпадают с вероятностью 1.*

# 4 Стационарность

Ранее мы встречались с процессами со ***стационарными приращениями***, то есть с процессами, у которых распределение приращений не зависит от моментов времени, в которых они взяты, а зависит только от промежутка между сечениями, разность которых рассматривается в качестве приращения. Это, например, пуассоновский и винеровский процесс, где $K_{t+\Delta t} - K_t \sim \mathrm{Po}(\lambda \Delta t)$ и $W_{t+\Delta t} - W_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$, соответственно.

Можно ввести аналогичное определение для всего процесса в целом, которое будет отражать некоторую инвариантность процесса относительно сдвига по времени.

**Определение 4.1.** *Случайный процесс $X$ называется* **стационарным (в узком смысле)***, если его конечномерные распределения не зависят от одновременного сдвига моментов времени на одно и то же число $\Delta t$, то есть векторы $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ и $(X_{t_1+\Delta t}, \ldots, X_{t_n+\Delta t})$ имеют одинаковое распределение для любых $n \in \mathbb{N}$, $\{t_k\}_{k=1}^n \subseteq \{t \mid (t \in T) \wedge (t + \Delta t \in T)\}$.*

**Определение 4.2.** *Случайный процесс $X$ называется* **стационарным в широком смысле***, если $m_X(t) = const$, а $R_X(t,s)$ зависит только от разности $t - s$.*

**Замечание 4.3.** *Из стационарности следует стационарность в широком смысле.*

Для стационарного (в широком смысле) процесса корреляционную функцию чаще всего пишут в форме $R_X(\tau)$, подразумевая под $\tau$ разность $t-s$, поскольку фактически $R_X(s,t)$ однозначно определяется функцией одной переменной. В силу симметричности $R_X(s,t)$ эта новая функция $R_X(\tau)$ оказывается чётной.

Для стационарного в широком смысле процесса существенно упрощаются критерии непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости в среднеквадратичном. К примеру, такая непрерывность стационарного процесса равносильна непрерывности $R_X(\tau)$ в нуле, а дифференцируемость в среднеквадратичном сразу следует из непрерывности в нуле функции $R_X(\tau)$.

**Утверждение 4.4.** *Пусть стационарный в широком процесс $X$ дифференцируем в среднем квадратичном. Тогда $X'$ — также стационарный в широком смысле процесс.*

*Доказательство.* Вспомним, что $m_{X'}(t) = \dfrac{d}{dt} m_X(t)$ и $R_{X'}(t,s) = \dfrac{\partial^2 R_X(t,s)}{\partial t\, \partial s}$. Тогда, в силу стационарности в широком смысле,

$$m_{X'}(t) = \frac{d}{dt}\, const = 0, \qquad R_{X'}(t,s) = \frac{\partial^2 R_X(t-s)}{\partial t\, \partial s} = -\left.\frac{d^2 R_X(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau = t-s}$$

Отсюда видно, что $m_{X'}$ — константа, а $R_{X'}$ зависит только от $t - s$. □

**Замечание 4.5.** *Для гауссовских процессов стационарность в широком и узком смыслах эквивалентны.*

**Задача 4.6.** Показать, что винеровский процесс $W$ не стационарен ни в каком смысле, а процесс $Y_t = W_{t+\Delta t} - W_t$ $(t, \Delta t \geqslant 0)$ стационарен в обоих смыслах.

**Решение задачи 4.6.** Дисперсия винеровского процесса зависит от времени, поэтому $W$ сам по себе не стационарен. Рассмотрим теперь $Y$:

$$m_Y(t) = \mathbb{E}\, W_{t+\Delta t} - \mathbb{E}\, W_t = 0 - 0 = 0$$

$$\begin{aligned} R_Y(t,s) &= \operatorname{cov}\left(W_{t+\Delta t} - W_t, W_{s+\Delta t} - W_s\right) = \\ &= \min\{t+\Delta t, s+\Delta t\} - \min\{t+\Delta t, s\} - \min\{t, s+\Delta t\} + \min\{t,s\} \end{aligned}$$

Используя $2\min\{a,b\} = a+b-|a-b|$, получаем

$$R_Y(t,s) = -|t-s| + \frac{1}{2}\left(|t-s+\Delta t| + |t-s-\Delta t|\right) = f(t-s)$$

Согласно замечанию 4.5, имеем стационарность как в широком, так и в узком смыслах.

**Задача 4.7.** Дан случайный процесс $Z_t = A\cos(Bt+\varphi)$ $(t \geqslant 0)$, где $A$, $B$ и $\varphi$ — случайные величины, $\varphi \sim U_{[0;2\pi]}$ и не зависит от $(A,B)$. Исследовать процесс $Z$ на стационарность в обоих смыслах.

**Решение задачи 4.7.** Зафиксируем $(A,B) = (a,b)$, $\Delta t > 0$. Так как $\varphi$ не зависит от $(A,B)$, распределение данной случайной величины осталось тем же (равномерным на отрезке $[0;2\pi]$). Обозначим $\varphi' = \varphi + B\Delta t \mod 2\pi$. Распределение $\varphi'$ — равномерное на отрезке $[0;2\pi]$ независимо от $a$, $b$ и $\Delta t$. Значит, $\varphi' \sim U_{[0;2\pi]}$ также не зависит от $(A,B)$. В таком случае, если ввести $Y_t = Z_{t+\Delta t} = A\cos(Bt+\varphi')$, то вектор $(Z_{t_1+\Delta t},\ldots,Z_{t_n+\Delta t})$ равен вектору $(Y_{t_1},\ldots,Y_{t_n})$, который имеет то же распределение, что и $(Z_{t_1},\ldots,Z_{t_n})$, так как $(A,B,\varphi)$ и $(A,B,\varphi')$ распределены одинаково. Отсюда следует, что $Z$ стационарен по определению.

## 4.1 Спектральная теория стационарности

В рамках данного раздела мы разберём теорию, полезную для исследования стационарных случайных процессов. Для большей общности мы будем рассматривать комплекснозначные случайные процессы (то есть функции из $\Omega \times T$ в $\mathbb{C}$). Практически все определения для обычных случайных процессов переносятся на комплекснозначные без изменений. Необходимо, однако, внести небольшую корректировку в определение ковариацонной и корреляционной функции:

**Определение 4.8.** *Если $\forall t_1, t_2 \in T$ существует и конечно $\mathbb{E}\, X_{t_1}X^*_{t_2}$, то функции $K_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}\, X_{t_1}X^*_{t_2}$ и $R_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}\, \mathring{X}_{t_1}\mathring{X}^*_{t_2}$ определены и называются, соответственно,* **ковариационной** *и* **корреляционной функциями** *комплекснозначного случайного процесса $X$.*

С таким определением утверждение 2.20 остаётся в силе, только симметричность заменяется на эрмитовость: $K_X(t,s) = K^*_X(s,t)$, $R_X(t,s) = R^*_X(s,t)$. Если процесс также является стационарным, то по аналогии с вещественным случаем можно рассматривать $R_X(t,s)$ как функцию одного аргумента: $R_X(t-s) = R_X(\tau)$.

Свойства корреляционной функции стационарного процесса схожи со свойствами характеристической функции некоторой случайной величины. Впрочем, последняя всегда равномерно непрерывна, а корреляционная функция не обязана даже быть непрерывной.

**Теорема 4.9** (Бохнер-Хи́нчин)**.** *Непрерывная функция $R_X(\tau)$ является корреляционной для некоторого стационарного и непрерывного в среднем квадратичном процесса тогда и только тогда, когда она представляется в виде интеграла Лебега-Стилтьеса*

$$R_X(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\tau}\, dS_X(\lambda), \tag{4.1}$$

*где функция $S_X(\lambda)$ неотрицательная, монотонно неубывающая, ограниченная и непрерывная слева, то есть равная $R_X(0)\cdot F(\lambda)$, где $F$ — функция распределения <u>некоторой</u> случайной величины.*

**Определение 4.10.** *Функция $S_X(\lambda)$ в (4.1) теоремы 4.9 называется* **спектральной функцией стационарного процесса** $X$*. Если $S_X(\lambda)$ абсолютно непрерывна, то есть*

$$\exists s_X(a): \quad S_X(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} s_X(a)\,da,$$

*то функция $s_X(\lambda)$ называется* **спектральной плотностью**.

**Замечание 4.11.** *В случае, когда есть спектральная плотность, корреляционная функция есть её преобразование Фурье:*

$$R_X(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\tau} s(\lambda)\,d\lambda$$

**Следствие 4.12.** *Если $R_X(\tau) \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$, то спектральная функция $S_X$ обладает спектральной плотностью*

$$s_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda\tau} R_X(\tau)\,d\tau$$

*Доказательство.* Это прямое следствие из 4.11 и теоремы о существовании преобразования Фурье для $\mathbb{L}_1$-функций. □

**Задача 4.13.** Является ли $R(\tau) = \cos(\tau)$ неотрицательно определённой функцией?

**Решение задачи 4.13.** Эрмитовость функции $R(\tau)$ очевидна. Проверять неотрицательную определённость напрямую неудобно. Воспользуемся теоремой Бохнера-Хинчина: $R$ непрерывна, поэтому если она является корреляционной функцией, то она имеет вид (4.1). Достаточно подобрать подходящую $S(\lambda)$. Несложно заметить, что подходит ступенчатая функция с двумя скачками $1/2$ в точках $\pm 1$. Тогда интеграл (4.1) будет равен $(e^{i\tau}+e^{-i\tau})/2$, то есть $\cos(\tau)$. Значит, $R$ является корреляционной функцией некоторого стационарного случайного процесса, а потому неотрицательно определена.

В чём смысл спектральной функции/спектральной плотности? Стационарный процесс можно представить в виде совокупности множества нескоррелированных стационарных процессов с гармоническими корреляционными функциями ($e^{i\lambda\tau}$ или просто $\cos(\lambda\tau)$). Спектральная плотность обозначает «вес» (в смысле $\mathbb{L}_2$) той или иной «гармоники» в общем «сигнале». Если формализовать это интуитивное понимание, можно прийти к следующей теореме:

**Теорема 4.14** (Крамер)**.** *Любому стационарному в широком смысле процессу $X$ соответствует процесс с ортогональными приращениями $V_X(\lambda)$ такой, что с вероятностью 1 выполнено*

$$X_t = m_X + \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}\,dV_X(\lambda),$$

*где $m_X = \mathbb{E}\,X_t = const$. Процесс $V_X$ определён по $X$ однозначно с точностью до аддитивной случайной величины.*

Оказывается, что спектральная функция $S_X(\lambda)$ в (4.1) связана с процессом $V_X(\lambda)$. Выражение $\nu([a,b]) = \mathbb{E}\,|V_X(b) - V_X(a)|^2$ можно рассматривать как меру. Оказывается, это та же самая мера, по которой ведётся интегрирование в интеграле Стилтьеса (по $dS_X(\lambda)$). Это обстоятельство кратко записывают в виде $\mathbb{E}\,|dV_X(\lambda)|^2 = dS_X(\lambda)$.

**Пример 4.15.** *Если в качестве $V_X$ взять винеровский процесс $W$, то $\nu([a,b]) = b - a$.*

Приведём полезные теоремы о внесении функций и производных под знак интеграла по случайному процессу с ортогональными приращениями:

**Теорема 4.16.** *Пусть $X$ — стационарный процесс со спектральной функцией $S_X(\lambda)$ и спектральным разложением*

$$X_t = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}\, dV_X(\lambda)$$

*Пусть $\Phi(\lambda)$ — неслучайная комплексная функция такая, что $\int_{\mathbb{R}} |\Phi(\lambda)|^2\, dS_X(\lambda) < +\infty$. Пусть, наконец, процесс $Y$ раскладывается в интеграл по тому же процессу $V_X$ следующим образом:*

$$Y_t = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}\Phi(\lambda)\, dV_X(\lambda)$$

*Тогда спектральная функция $S_Y$ связана с $S_X$ соотношением $dS_Y(\lambda) = |\Phi(\lambda)|^2 \cdot dS_X(\lambda)$ (в случае спектральных плотностей имеем $s_Y(\lambda) = |\Phi(\lambda)|^2 \cdot s_X(\lambda)$).*

**Теорема 4.17.** *Если для некоторого $k \geqslant 0$ стационарный процесс $X$ является $k$ раз дифференцируемым в смысле среднего квадратичного, и существует конечный интеграл $\int_{\mathbb{R}} \lambda^{2k}\, dS_X(\lambda)$, то*

$$X_t^{(k)} = \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial^k}{\partial t^k} e^{i\lambda t} \right) dV_X(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} (i\lambda)^k\, dV_X(\lambda)$$

**Задача 4.18.** Дана линейная система $a_1 X_t' + a_0 X_t = Y_t$. В предположении о существовании стационарного решения уравнения вычислить спектральную плотность $s_X(\lambda)$, если известна спектральная плотность $s_Y(\lambda)$, а также что $\mathbb{E}\, Y_t = 0$.

**Решение задачи 4.18.** Предполагая выполнение условий теорем 4.16 и 4.17,

$$X_t = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}\, dV_X(\lambda), \quad Y_t = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}\, dV_Y(\lambda) \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}(a_1 i\lambda + a_0)\, dV_X(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}\, dV_Y(\lambda)$$

Отсюда получаем, что $s_Y(\lambda) = |a_1 i\lambda + a_0|^2 \cdot s_X(\lambda)$, то есть $s_X(\lambda) = \frac{s_Y(\lambda)}{a_1^2\lambda^2 + a_0^2}$.

# 5 Эргодичность

При работе со стохастическими моделями иногда попадаются такие случайные процессы, для которых усреднение по вероятностному пространству в некотором смысле эквивалентно усреднению по времени. Это свойство позволяет получить некоторые характеристики процесса просто путём длительного наблюдения за одной из траекторий. Это довольно удобно в случаях, когда получить несколько реализаций процесса невозможно или дорого. Процессы с упомянутым свойством называются ***эргодическими***.

**Определение 5.1.** *Процесс $X$ второго порядка называется* **эргодическим по математическому ожиданию** *в случае $T = [0; +\infty)$, $\mathbb{E}\, X_t = m = const$ и $\underset{\tau\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau X_t\, dt \triangleq \underset{\tau\to+\infty}{\text{l.i.m.}} \langle X \rangle_\tau = m$.*

Для эргодического случайного процесса можно оценивать математическое ожидание, взяв достаточно длинную реализацию процесса $X$ и вычислив по ней $\langle X \rangle_\tau$.

**Определение 5.2.** *Процесс $X$ второго порядка называется* **эргодическим по дисперсии**, *если процесс $Y_t = \mathbb{D}\, X_t$ эргодичен по математическому ожиданию.*

**Определение 5.3.** *Процесс $X$ второго порядка называется* **эргодическим по корреляционной функции**, *если для любого $\Delta t \geqslant 0$ процесс $Y_t = \operatorname{cov}(X_t, X_{t+\Delta t})$ эргодичен по математическому ожиданию.*

**Теорема 5.4** (Критерий эргодичности)**.** *Процесс второго порядка $X$ с постоянным математическим ожиданием эргодичен по математическому ожиданию тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{\tau^2} \int\limits_0^\tau \int\limits_0^\tau R_X(t,s)\, dt\, ds = 0$$

**Теорема 5.5** (Достаточное условие эргодичности)**.** *Процесс второго порядка $X$ с постоянным математическим ожиданием эргодичен по математическому ожиданию, если $\lim\limits_{|t-s|\to+\infty} R_X(t,s) = 0$.*

**Задача 5.6.** Пусть $K_t$ — пуассоновский процесс. Исследовать процесс $X_t = K_{t+1} - K_t$ на эргодичность по математическому ожиданию и по дисперсии.

**Решение задачи 5.6.** Это процесс второго порядка, так как он получен из другого процесса второго порядка (пуассоновского) линейной комбинацией сечений. $\mathbb{E}\, X_t = \lambda(t+1) - \lambda t = \lambda = const$. Заметим, что при $|t-s| > 1$ верно $R_X(t,s) = \operatorname{cov}(K_{t+1} - K_t, K_{s+1} - K_s) = 0$ в силу независимости приращений пуассоновского процесса. В таком случае выполнено достаточное условие эргодичности 5.5.

**Задача 5.7.** Дан случайный процесс $S_t = A\exp(at + \sigma W_t)$, $t \geqslant 1$, где $A$, $a$, $\sigma$ — неслучайные константы. Воспользовавшись понятием эргодичности, оценить величину $a$.

**Решение задачи 5.7.** Рассмотрим процесс

$$X_t = \frac{1}{t}\ln\frac{S_t}{A} = a + \sigma\frac{W_t}{t}, \qquad t \geqslant 1$$

Для него $\mathbb{E}\, X_t = a$,

$$R_X(t,s) = \operatorname{cov}(a + \sigma W_t/t, a + \sigma W_s/s) = \frac{\sigma}{ts}\operatorname{cov}(W_t, W_s) = \sigma\frac{min\{t,s\}}{ts} < +\infty$$

То есть мы имеем дело с процессом второго порядка с константной функцией среднего. Корреляционная функция данного процесса непрерывна на любом квадрате $[1;\tau]^2$, а потому интегрируема. Пользуясь критерием эргодичности,

$$\frac{1}{\tau^2}\int\limits_1^\tau\int\limits_1^\tau R_X(t,s)\,dt\,ds = \frac{\sigma}{\tau^2}\int\limits_1^\tau\int\limits_1^\tau \frac{\min\{t,s\}}{ts}\,dt\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sigma}{\tau^2}\int\limits_1^\tau\int\limits_1^\tau \frac{t}{ts}\,dt\,ds = \frac{\sigma}{\tau^2}\int\limits_1^\tau \frac{\tau-1}{s}ds = \frac{\sigma(\tau-1)\ln\tau}{\tau^2} \underset{\tau\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

# 6 Марковские процессы

В этом разделе мы приступаем к изучению еще одного важного класса процессов, который является обобщением динамических систем, то есть систем, будущие состояния которых определяются лишь текущим состоянием. Это ***марковские процессы***, и им будет посвящена вся оставшаяся часть учебного пособия.

**Определение 6.1.** *Случайный процесс $X$ называется* **марковским** *в случае, когда*

$$\forall B \in \mathcal{F},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall \{t_k\}_{k=1}^{n+1} \subseteq T,\ \forall \{x_k\}_{k=1}^{n} \subseteq \mathbb{R}$$
$$\mathbb{P}\left\{X_{t_{n+1}} \in B \;\middle|\; X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \ldots, X_{t_1} = x_1\right\} = \mathbb{P}\left\{X_{t_{n+1}} \in B \;\middle|\; X_{t_n} = x_n\right\}$$

Обратите внимание, что в определении выше важно, что в условии стоят события вида $X_{t_k} = x_k$, а не, например, $X_{t_k} \in B_k$ для $B_k \in \mathcal{F}$, так как иначе определение было бы неэквивалентным и неверным. Под марковостью процесса следует понимать именно то, что написано в определении.

Неформально говоря, случайный процесс называется марковским, если вероятностные характеристики его «будущего» (в момент $t_{n+1}$) зависят лишь от значения процесса, которое он принял в «настоящем» (в момент $t_n$), и не зависят от значений, которые процесс принимал в «прошлом» (в моменты $t_{n-1}, \ldots, t_1$). Этим свойством обладают обычные, неслучайные детерминированные процессы, когда текущее состояние системы однозначно определяет будущие состояния. В марковских же процессах однозначно определены вероятностные характеристики процесса в будущем, если известно состояние системы в настоящем.

Область применения марковских процессов необъятна, они широко используются для описания явлений в физике (особенно в термодинамике и процессах диффузии), химии, экономике, финансовой математике, теории обработки сигналов, навигации, теории информации, теории распознавания речи, в IT-технологиях, являются базовой моделью в теории машинного обучения с подкреплением (см. *марковский процесс принятия решений*).

Заметим, что винеровский, пуассоновский, а также процессы случайных блужданий являются марковскими:

**Утверждение 6.2.** *Всякий процесс с независимыми приращениями является марковским процессом.*

Если процесс является марковским, то отсюда, вообще говоря, не следует, что он является процессом с независимыми приращениями.

**Пример 6.3.** *Пусть $\eta \sim U_{[-1;1]}$, $T = [0; +\infty)$. Процесс $X_t = \eta \cdot t$ является марковским (т.к. $X_{t_{n+1}} = X_{t_n} \cdot \frac{t_{n+1}}{t_n}$, если $t_n > 0$). но не является процессом с независимыми приращениями. Например, $\mathbb{P}\{X_2 - X_1 \in [0;1] \mid X_1 = -1\} = 0$, хотя $\mathbb{P}\{X_2 - X_1 \in [0;1]\} = 1/2$.*

<table>
<tr><th></th><th>$T$ дискретно</th><th>$T$ непрерывно</th></tr>
<tr><td>$S$ дискретно</td><td>Дискретная цепь Маркова<br>(напр., подбрасывание монетки)</td><td>Непрерывная цепь Маркова<br>(напр., $K$)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$S$ непрерывно</td><td colspan="2">Непрерывный процесс Маркова</td></tr>
<tr><td>(напр., $X_t = \sum_{k<t} \xi_k$,<br>$\xi_k \sim \mathcal{N}(0,1)$ — н.о.р.с.в.)</td><td>(напр., $W$)</td></tr>
</table>

Таблица 6.1: Классификация марковских процессов по множествам $S$ и $T$.

Марковские процессы классифицируются по множеству значений, которые они могут принимать (то есть по ***множеству состояний***, обозначим его $S$), и множеству времён $T$. Классификация и релевантные примеры указаны в таблице 6.

## 6.1 Дискретные марковские цепи

Начнём изучение марковских процессов с наиболее простых представителей данного класса — ***дискретных марковских цепей***. Поскольку $S$ дискретно (т.е. не более, чем счётно), можно пронумеровать все состояния. Без ограничения общности будем отождествлять состояние $s_i \in S$ и его номер $i$. Аналогично отождествим $t_k \in T$ и $k$.

**Определение 6.4.** *Пусть $X$ — дискретная марковская цепь. Числа $p_{ij}(k,n) = \mathbb{P}\{X_n = j \mid X_k = i\}$ называются* **переходными вероятностями** *(из состояния $i$ в состояние $j$ с шага $k$ на шаг $n$) Матрица $P(k,n) = (p_{ij}(k,n))_{i,j\in S}$ называется* **матрицей переходных вероятностей**.

**Замечание 6.5.** *Все элементы матрицы $P(k,n)$ лежат на отрезке $[0;1]$, сумма всех элементов в каждой строке матрицы $P(k,n)$ равна единице.*

**Утверждение 6.6.** *Уравнения Колмогорова-Чеппмена Для всех $k < m < n$ верно $P(k,n) = P(k,m) \cdot P(m,n)$.*

*Доказательство.* Это эквивалентно $p_{ij}(k,n) = \sum_{\alpha\in S} p_{i\alpha}(k,m)p_{\alpha j}(m,n)$, что является формулой полной вероятности для $p_{ij}(k,n)$ с учётом марковости процесса. □

**Определение 6.7.** *Распределение сечения дискретной марковской цепи на $k$-ом шаге $X_k$ можно задавать* **вектором вероятностей состояний на $k$-ом шаге** $\pi(k) = (\mathbb{P}\{X_k = i\})_{i\in S}$. *Вектор $\pi(0)$ называется* **начальным распределением** $X$.

**Утверждение 6.8.** *Для любых $k < n$ выполнено $\pi(n) = P^T(k,n)\pi(k)$.*

Из всех приведённых определений и утверждений следует, что динамика дискретной марковской цепи полностью описывается в терминах $P$ и $\pi$.

### 6.1.1 Однородные дискретные марковские цепи

Часто переходные вероятности не зависят от того, какие именно моменты времени рассматриваются, а зависят только от промежутка между этими моментами. В таком случае марковская цепь называется ***однородной***.

**Определение 6.9.** *Дискретная марковская цепь называется однородной в случае, когда $P(k,n)$ зависит только от $n-k$.*

Далее «однородную дискретную марковскую цепь» будем сокращать до «ОДМЦ».

**Следствие 6.10.** *В случае ОДМЦ верно $P(k,n) = P^{n-k}$, $\pi(n) = (P^n)^T\pi(0)$, где $P \triangleq P(0,1)$ — матрица вероятностей перехода за один шаг.*

*Доказательство.* Следует из утверждений 6.6, 6.8 и определения 6.9. □

**Задача 6.11.** Пусть $\eta_n$ — число выпавших очков при $n$-ом независимом подбрасывании кубика, а $\xi_n = \max\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$. Выписать матрицу переходных вероятностей этой марковской цепи.

**Решение задачи 6.11.** Если уже набрано $k$ очков, то при очередном броске счёт не может уменьшиться. С вероятностью $k/6$ он останется тем же (выпало $\leqslant k$), с вероятностями $1/6$ — увеличится на $1, \dots, 6-k$.

$$P = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/6 \end{bmatrix}$$

**Задача 6.12.** Дана однородная марковская цепь с множеством состояний — $S = \{0, 1\}$. Матрица переходов — $P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$, где $p, q \in (0; 1)$. Найдите $\mathbb{P}\{X_n = 0 \mid X_0 = 0\}$.

**Решение задачи 6.12.** Собственные значения матрицы вероятностей переходов — $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 - p - q \neq 1$. Пользуясь общей формулой возведения матрицы $2 \times 2$ в степень,[2]

$$P(n) = P^n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2}(P - \lambda_2 I) - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}(P - \lambda_1 I) = \frac{1}{p+q}\left((1 - \lambda_2^n)P + (\lambda_2^n - \lambda_2)I\right)$$

Левый верхний элемент матрицы равен

$$\frac{1}{p+q}\left((1 - \lambda_2^n)(1-p) + (\lambda_2^n - \lambda_2)\right) = \frac{1}{p+q}(q + p(1-p-q)^n)$$

Поскольку в случае ОДМЦ имеем $\pi(n) = (P^n)^T \pi(0)$, возникает вопрос, будет ли любое начальное распределение стремиться к некоторому «стационарному» в связи с возникшей матричной степенью. Подойдём к ответу издалека, изучив спектральные свойства матрицы переходных вероятностей.

**Определение 6.13.** *Распределение* $\pi^*$ *называется* **стационарным для матрицы переходных вероятностей** $P$ *в случае* $\pi^* = P^T \pi^*$.

Стационарное распределение — это левый вектор матрицы $P^T$, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$, причём обязательно являющийся распределением вероятностей (произвольный собственный вектор в общем случае не является стационарным распределением).

Матрица $P$ с неотрицательными элементами такими, что сумма элементов любой строки равна 1, называется стохастической. Очевидно, что у стохастической матрицы $\lambda = 1$ — собственное число, поскольку вектор $(1, 1, \ldots, 1)^T$ — собственный. А стационарное распределение — левый собственный вектор, то есть правый собственный вектор сопряжённой матрицы. Но из наличия точки 1 в спектре этой матрицы, конечно, ещё не следует, что существует собственный вектор — распределение.

**Задача 6.14.** Для марковской цепи из задачи 6.11 найти стационарное распределение.

**Решение задачи 6.14.** Матрица треугольная, поэтому все собственные значения находятся на диагонали. Так как на диагонали только одно число «1», геометрическая кратность данного собственного числа равна единице. Отсюда следует, что существует только одно стационарное распределение. Нетрудно проверить, что оно — $\pi^* = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$.

**Определение 6.15. Предельное распределение** *стохастической матрицы* $P$ *— распределение* $\pi = \{\pi_j, j \in S\}$ *такое, что во всякой ОДМЦ с матрицей переходных вероятностей* $P$ *и произвольным начальным распределением выполнено* $\pi = \lim_{n\to\infty} \pi(n)$*, то есть* $\mathbb{P}\{X_n = j\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi_j$.

**Утверждение 6.16.** *Если предельное распределение существует, то оно единственно и стационарно.*

Соотношения между стационарными и предельными распределениями иллюстрируют следующие примеры:

[2] `https://people.math.carleton.ca/~williams/papers/pdf/175.pdf`

**Пример 6.17.** *В цепи с $P = I$ любое распределение стационарное, но предельного распределения нет.*

**Пример 6.18.** *В цепи с $|S| = 2$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ только распределение $\pi^* = (1/2, 1/2)^T$ является стационарным, предельного распределения нет.*

**Пример 6.19.** *Рассмотрим цепь с $S = \mathbb{N}$, $p_{ij} = \delta_{j,i+1}$ (то есть из каждого состояния с вероятностью 1 осуществляется переход в следующее за ним). В таком случае матрица $P$ бесконечна и содержит нули везде, кроме верхней побочной диагонали (там стоят единицы). Уравнение $\pi = P^T\pi$ имеет единственное решение $\pi = 0$. Это даже не распределение.*

**Утверждение 6.20.** *Пусть $P$ — матрица вероятностей переходов некоторой ОДМЦ. Пусть $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что все элементы $P^{n_0}$ положительны. Тогда в такой марковской цепи существует предельное распределение.*

**Определение 6.21.** *Марковская цепь называется* **эргодической**, *если у неё существует предельное распределение с положительными вероятностями всех состояний.*

**Пример 6.22.** *Приведём два примера: эргодической цепи и неэргодической с предельным распределением.*

1. *В цепи с $|S| = 2$ и $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ есть предельное распределение $\pi = (0, 1)^T$, но цепь не эргодична.*
2. *В цепи с $|S| = 2$ и $P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ есть предельное эргодическое распределение, поскольку $P^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2-p}\begin{bmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{bmatrix}$ (видно, что умножение $P^T$ на любой вектор-распределение даёт $\left(\frac{1}{2-p}, \frac{1-p}{2-p}\right)^T$).*

Позже мы дадим критерий эргодичности марковской цепи.