

Случайные процессы: семинары

Бутаков И. Д.

2023

Содержание

Предисловие	2
Используемые обозначения	2
1 Основные сведения	3
2 Важные примеры случайных процессов	9
2.1 Пуассоновский процесс	9

Предисловие

Перед вами сборник всех семинаров по случайным процессам за авторством Бутакова И. Д. Автор выражает благодарность Останину Павлу Антоновичу и Ширококову Максиму Геннадьевичу за предоставленные материалы.

Используемые обозначения

\Leftrightarrow	«... по определению тогда и только тогда, когда ...»
\triangleq	«... по определению равно ...»
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	вероятностное пространство (Ω — множество исходов, \mathcal{F} — σ -алгебра, \mathbb{P} — вероятностная мера).
\mathbb{I}_A	индикаторная функция множества A .
$\mathbb{E} X$	математическое ожидание случайной величины X .
$\mathbb{D} X$	дисперсия случайной величины X .
\mathring{X}	«центрированная» случайная величина: $\mathring{X} = X - \mathbb{E} X$.
$\text{Be}(p)$	распределение Бернулли с параметром p .
$\text{Bi}(n, p)$	биномиальное распределение с параметрами n и p .
$\text{Po}(\lambda)$	распределение Пуассона с интенсивностью λ .
$\text{U}(A), \text{U}_A$	равномерное распределение на множестве A .
$\text{Exp}(\lambda)$	показательное распределение с параметром λ (интенсивность).
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2 .
$\xrightarrow{\text{с.к.}}$	сходимость в среднем квадратичном.
$\xrightarrow{\text{п.н.}}$	сходимость почти наверное.
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$	сходимость по вероятности.
\xrightarrow{d}	сходимость по распределению.
$\stackrel{\text{п.н.}}{=}$	равенство почти наверное.
$\stackrel{d}{=}$	равенство по распределению.

1 Основные сведения

Случайные процессы — математические объекты, построенные с использованием теории вероятностей для исследования и моделирования реальных явлений, растянутых во времени и имеющих стохастическую (случайную) природу.

Определение 1.1. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и множество $T \subseteq \mathbb{R}$. Функция $X: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ называется **случайным процессом**, если $\forall t \in T$ функция $X(\cdot, t) \equiv X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ измерима (то есть является случайной величиной).

Случайный процесс можно трактовать как семейство случайных величин, параметризованное $t \in T$. Параметр t обычно интерпретируется как время. Если T состоит из одного элемента, случайный процесс является обычной случайной величиной, если T конечно — случайным вектором. Параметр ω , как и при описании случайных величин, часто опускается.

Определение 1.2. При фиксированном $t_0 \in T$ случайная величина X_{t_0} называется **сечением случайного процесса** X .

Определение 1.3. При фиксированном $\omega_0 \in \Omega$ функция $X(\omega_0, \cdot)$ называется **реализацией случайного процесса** X .

Также случайный процесс можно считать особой случайной величиной, принимающей значения в пространстве функций; при такой интерпретации, однако, отдельных усилий стоит определить, что такое вероятностное распределение на функциях. В рамках семинаров данный вопрос освещаться со всей полнотой и строгостью не будет, поэтому приведём из этой области лишь основные факты и определения, требующиеся для работы со случайными процессами.

Рассмотрим произвольный случайный процесс X . В силу единства вероятностного пространства, любой вектор вида $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ (где $t_i \in T$) является случайным вектором.

Определение 1.4. Вероятностное распределение вектора вида $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ называется **конечномерным распределением случайного процесса** X . Его функция распределения обозначается как $F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$.

Функции распределений векторов, составленных из сечений случайного процесса, обладают всеми известными вам свойствами функций распределений случайных векторов, а также ещё двумя дополнительными свойствами:

Утверждение 1.5. Функции конечномерных распределений случайного процесса X обладают следующими свойствами:

1. **(условие симметрии)** Для любой перестановки k_i выполнено равенство

$$F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F_X(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}; t_{k_1}, \dots, t_{k_n})$$

2. **(условие согласованности)** Для любого индекса $k \in \{1, \dots, n\}$ выполнено

$$\lim_{x_k \rightarrow +\infty} F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n; t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n)$$

Теорема 1.6 (Колмогорова). Пусть имеется семейство распределений случайных векторов, удовлетворяющее всем свойствам из утверждения 1.5. Тогда существует вероятностное пространство и заданный на нём случайный процесс, семейство конечномерных распределений которого совпадает с данным.

Таким образом, случайный процесс можно задавать семейством его конечномерных распределений. На данном этапе читателю должно стать понятно, как можно задавать вероятностное распределение на множестве функций (ответ — при помощи специальных семейств конечномерных распределений).

Задача 1

Пусть η — случайная величина с функцией распределения F_η . Найти все конечномерные распределения случайного процесса $X_t = \eta + t$.

Решение задачи 1

Одномерная функция распределения:

$$F_X(x; t) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X_t < x\} = \mathbb{P}\{\eta < x - t\} = F_\eta(x - t)$$

Конечномерная функция распределения:

$$\begin{aligned} F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) &= \mathbb{P} \bigcap_{i=1}^n \{X_{t_i} < x_i\} = \mathbb{P} \bigcap_{i=1}^n \{\eta < x_i - t_i\} = \\ &= \mathbb{P} \left\{ \eta < \min_i \{x_i - t_i\} \right\} = F_\eta \left(\min_i \{x_i - t_i\} \right) \end{aligned}$$

Задача 2

Пусть дана случайная величина $\eta \sim U_{[0;1]}$. Определим случайный процесс $X_t = \mathbb{I}_{(-\infty; \eta]}(t)$. Найдите вид реализаций процесса, его одномерные и двумерные распределения.

Решение задачи 2

Реализация процесса — функция, равная единице при $t \leq \eta$ и нулю при $t > \eta$, см. рис. 1.1. Одномерная функция распределения:

$$F_X(x; t) = \mathbb{P}\{X_t < x\} = \mathbb{P}\{\mathbb{I}_{(-\infty; \eta]}(t) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \mathbb{P}\{\eta < t\}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{где } \mathbb{P}\{\eta < t\} = F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & 0 < t \leq 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

Двумерная функция распределения:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}(\{X_{t_1} < x_1\} \cap \{X_{t_2} < x_2\})$$

Аналогично одномерной функции распределения,

1. Если $x_1 \leq 0$ или $x_2 \leq 0$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = 0$.
2. Если $x_1 > 1$ и $x_2 > 1$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = 1$.
3. Если $0 < x_1 \leq 1$ и $x_2 > 1$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_X(x_1; t_1)$. Аналогично симметричный случай.
4. Если $0 < x_1, x_2 \leq 1$,

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}(\{\eta < t_1\} \cap \{\eta < t_2\}) = \mathbb{P}\{\eta < \min\{t_1, t_2\}\} = F_\eta(\min\{t_1, t_2\})$$

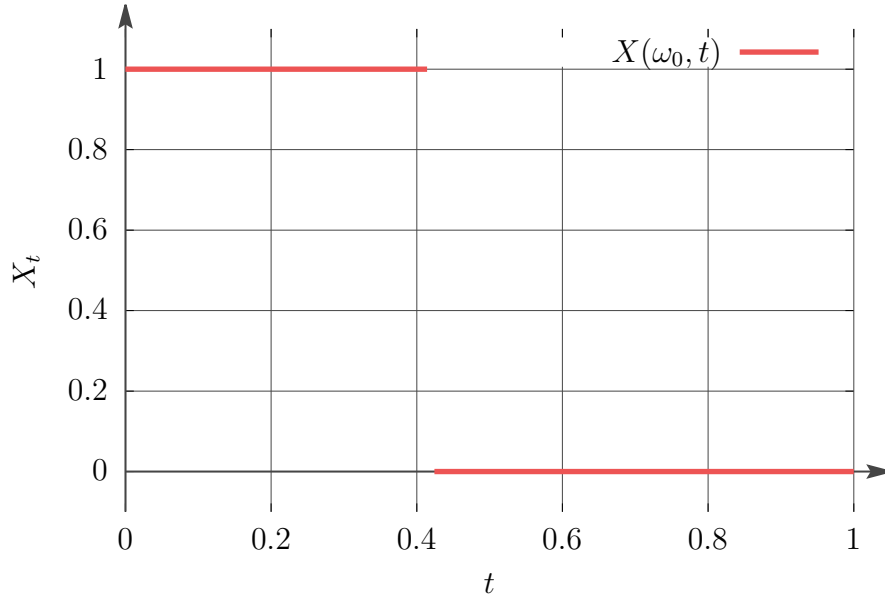


Рис. 1.1: График одной из реализаций случайного процесса из задачи 2.

Существование различных случайных процессов с одними и теми же вероятностными свойствами приводит к желанию (а иногда и необходимости) в некотором смысле отождествлять процессы, у которых конечномерные распределения совпадают.

Определение 1.7. Пусть X и Y — два случайных процесса, определённые на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и множестве T . Данные процессы называются **стохастически эквивалентными** в случае равенства почти наверное их реализаций в любой выбранный момент, то есть

$$\forall t \in T \quad \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega, t) = Y(\omega, t)\} = 1$$

В этом случае Y называют **модификацией** процесса X (и наоборот).

Утверждение 1.8. Стохастически эквивалентные случайные процессы имеют одинаковое семейство конечномерных распределений.

Например, такое отождествление полезно для осмысленного определения непрерывного случайного процесса:

Определение 1.9. Случайный процесс называется **непрерывным** в случае, если существует его модификация с непрерывными реализациями.

Задача 3

Пусть $\eta \sim U_{[0,1]}$. Определим случайный процесс $X_t = \mathbb{I}_{\{\eta\}}(t)$ (то есть $X_t = 1$ в том и только в том случае, когда $\eta = t$, и равен 0 иначе). Является ли X_t непрерывным процессом?

Решение задачи 3

Да, является. Процесс $Y_t \equiv 0$ является его модификацией.

При исследовании случайных процессов также бывает полезно рассматривать их моменты, дающие некоторое представление об усреднённом поведении процесса. В отличие от случайных величин, любые моменты случайного процесса также зависят от времени.

Определение 1.10. Если $\forall t \in T$ существует $\mathbb{E} X_t$, то функция $m_X(t) = \mathbb{E} X_t$ определена и называется **функцией среднего**.

Аналогично вводятся функции любых других моментов случайной величины X_t . При работе со случайными процессами нас также будут интересовать моменты, «разнесённые во времени».

Определение 1.11. Если $\forall t_1, t_2 \in T$ существует $\mathbb{E} X_{t_1} X_{t_2}$, то функции $K_X(t_1, t_2) = \mathbb{E} X_{t_1} X_{t_2}$ и $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E} \dot{X}_{t_1} \dot{X}_{t_2}$ определены и называются, соответственно, **ковариационной** и **корреляционной функциями**.¹

Утверждение 1.12. Функции $K_X(t_1, t_2)$ и $R_X(t_1, t_2)$ одновременно либо определены, либо не определены, причём в первом случае функция $m_X(t)$ определена и $R_X(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$.

Доказательство. Следует из свойств моментов. □

Задача 4

Найти корреляционную функцию случайного процесса из задачи 2.

Решение задачи 4

Для любого t_0 случайная величина X_{t_0} может принимать только два значения — 0 или 1; это бернуллиевская случайная величина. Найдём параметр её распределения:

$$\mathbb{P}\{X_t = 1\} = \mathbb{P}\{t < \eta\} = 1 - F_\eta(t)$$

Следовательно, $m_X(t) = \mathbb{E} X_t = 1 - F_\eta(t)$. Далее,

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E} X_{t_1} X_{t_2} = 1 \cdot \mathbb{P}(\{X_{t_1} = 1\} \cap \{X_{t_2} = 1\}) = \\ &= \mathbb{P}(\{t_1 < \eta\} \cap \{t_2 < \eta\}) = 1 - F_\eta(\max\{t_1, t_2\}) \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= 1 - F_\eta(\max\{t_1, t_2\}) - (1 - F_\eta(t_1)) \cdot (1 - F_\eta(t_2)) = \\ &= F_\eta(t_1) + F_\eta(t_2) - F_\eta(t_1) \cdot F_\eta(t_2) - F_\eta(\max\{t_1, t_2\}) \end{aligned}$$

В частности, если $t_1, t_2 \in [0; 1]$,

$$R_X(t_1, t_2) = t_1 + t_2 - t_1 t_2 - \max\{t_1, t_2\} = \min\{t_1, t_2\} - t_1 t_2$$

Задача 5

Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $\eta \sim U_{[-\pi; \pi]}$ — независимые случайные переменные. Определим случайный процесс X следующим образом: $X_t = \xi \cdot \cos(t + \eta)$, где $t \in \mathbb{R}$. Найдите функцию среднего и корреляционную функцию процесса.

¹Данные обозначения не являются общепринятыми, а также несколько контринтуитивны; при чтении сторонних источников будьте внимательны.

Решение задачи 5

Поскольку ξ и η независимы,

$$m_X(t) = \mathbb{E} X_t = \mathbb{E} \xi \cdot \mathbb{E} \cos(t + \eta) = 0 \cdot \dots = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= K_X(t_1, t_2) - 0 = \mathbb{E} X_{t_1} X_{t_2} = \mathbb{E} \xi^2 \cdot \mathbb{E} (\cos(t_1 + \eta) \cdot \cos(t_2 + \eta)) = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} \mathbb{E} (\cos(t_1 - t_2) + \cos(t_1 + t_2 + 2\eta)) = \frac{1}{2} \cos(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

Задача 6

Пусть U , V и W — независимые в совокупности случайные величины. Известно, что U и V обладают нулевым матожиданием и дисперсией D , а W распределена с плотностью

$$\rho_W(w) = \frac{2\lambda}{\pi} \cdot \frac{\mathbb{I}_{[0;+\infty)}(w)}{\lambda^2 + w^2}, \quad \lambda > 0$$

Определим случайный процесс $X_t = U \cos(Wt) + V \sin(Wt)$. Вычислите функцию среднего и корреляционную функцию.

Решение задачи 6

Поскольку U , V и W независимы в совокупности,

$$m_X(t) = \mathbb{E} X_t = \mathbb{E} U \cdot \mathbb{E} \cos(Wt) + \mathbb{E} V \cdot \mathbb{E} \sin(Wt) = 0 \cdot \dots + 0 \cdot \dots = 0$$

Корреляционную функцию удобно искать с помощью формулы полной вероятности в непрерывном случае:

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E} (\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2} \mid W = w)) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2} \mid W = w)}_{\triangleq R(t_1, t_2 | w)} \cdot \rho_W(w) dw$$

В силу нулевого матожидания,

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E} ((U \cos(wt_1) + V \sin(wt_1)) \cdot (U \cos(wt_2) + V \sin(wt_2))) = \\ &= \mathbb{E}(U^2) \cdot \cos(wt_1) \cos(wt_2) + 2 \cdot \underbrace{\mathbb{E} U \mathbb{E} V}_0 \cdot \dots + \mathbb{E}(V^2) \cdot \sin(wt_1) \sin(wt_2) = D \cos(w(t_1 - t_2)) \end{aligned}$$

Наконец,

$$R_X(t_1, t_2) = \int_0^{+\infty} D \cos(w(t_1 - t_2)) \cdot \frac{2\lambda}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + w^2} dw = D e^{-\lambda|t_1 - t_2|}$$

Здесь использовалось значение интеграла Лапласа:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$$

Определение 1.13. Функцией коэффициента корреляции называют функцию

$$r_X(t_1, t_2) = \frac{R_X(t_1, t_2)}{\sqrt{R_X(t_1, t_1) \cdot R_X(t_2, t_2)}} = \frac{\text{cov}(X_{t_1}, X_{t_2})}{\sqrt{\mathbb{D} X_{t_1} \mathbb{D} X_{t_2}}}$$

Данная функция, если определена, принимает значения от -1 до 1 и имеет смысл степени линейной связи сечений процесса, соответствующих выбранным моментам времени.

Задача 7

Найти функции коэффициента корреляции для процессов из задач 5 и 6.

Решение задачи 7

- Задача 5: $r_X(t_1, t_2) = \frac{\frac{1}{2} \cos(t_1 - t_2)}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = \cos(t_1 - t_2).$

Если взять два произвольных момента времени и начать сдвигать их друг к другу или друг от друга, будет наблюдаться периодическая корреляция и декорреляция соответствующих сечений.

- Задача 6: $r_X(t_1, t_2) = \frac{De^{-\lambda|t_1-t_2|}}{\sqrt{De^{-\lambda \cdot 0} \cdot De^{-\lambda \cdot 0}}} = e^{-\lambda|t_1-t_2|}.$

Несмотря на схожесть процессов, в данном случае наблюдается корреляция, затухающая экспоненциально с ростом разницы между моментами времени, в которых взяты сечения.

Дело в том, что в первом процессе случайным был фазовый сдвиг, а потому реализации процесса «не расползались». Во втором же случае случайной является ещё и частота, и линейная связь между разными моментами времени быстро теряется (реализации «декогерируют»).

2 Важные примеры случайных процессов

В этом разделе речь пойдёт о нескольких процессах особого вида, наиболее часто встречающихся при исследовании реальных явлений. Зачастую такие процессы именные. На их примере мы продолжим практиковаться в решении задач, а также введём несколько новых теоретических понятий.

2.1 Пуассоновский процесс

Данный процесс встречается в реальной жизни довольно часто; он описывает поток случайных событий, которые регистрируются с некоторой постоянной «интенсивностью». Например, речь может идти о регистрации космических частиц, о кликах по ссылке, о запросах к серверу, о проезжающих по магистрали автомобилях. Дадим формальное определение.

Определение 2.1. Случайный процесс X называется **процессом с независимыми приращениями**, если $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \{t_i\}_{i=1}^n \subseteq T$ случайные величины $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1}$ независимы в совокупности.

Определение 2.2. Пуассоновским процессом с интенсивностью $\lambda > 0$ называется случайный процесс $K: \Omega \times [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{N}$ такой, что

1. $K_0 \stackrel{\text{п.п.}}{=} 0$.
2. K — процесс с независимыми приращениями.
3. $K_t - K_s \sim \text{Po}(\lambda \cdot (t - s))$ (при $t > s \geq 0$).

Это одно из эквивалентных определений, пуассоновский процесс можно определить и иначе:

Теорема 2.3 (Явная конструкция пуассоновского процесса). Пусть $\xi_1, \dots, \xi_k, \dots \sim \text{Exp}(\lambda)$ и независимы в совокупности, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда процесс $X_t = \sup\{n \mid S_n \leq t\}$ есть пуассоновский процесс с интенсивностью λ .

Процесс X_t , построенный по случайным величинам ξ_k способом, указанным в теореме, называется **процессом восстановления** и отвечает следующей модели: в нулевой момент включается прибор, который работает время ξ_1 , после чего ломается. Одновременно с поломкой включается следующий прибор, который работает случайное время ξ_2 , и так далее. Величина X_t отражает количество приборов, введённых в эксплуатацию к моменту t .

Утверждение 2.4. Пуассоновский процесс обладает следующими свойствами:

1. Реализации пуассоновского процесса — кусочно-постоянные неубывающие функции со значениями в \mathbb{N} .
2. С вероятностью 1 все скачки пуассоновского процесса равны единице.
3. Время, когда произошёл n -ый скачок (обозначим его τ_n) имеет $\Gamma(n, 1/\lambda)$ -распределение:

$$\rho_{\tau_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \cdot \mathbb{I}_{[0; +\infty)}(t)$$

4. Случайные величины $\{\tau_n - \tau_{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ распределены экспоненциально с параметром λ и независимы.

5. Число событий за конечный период времени конечно с вероятностью 1.
6. Число событий $K_{t+h} - K_t$ на промежутке $(t; t+h]$ зависит лишь от длины промежутка h : $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t = k\} = p(h, k)$
7. Вероятность более чем одного скачка на полуинтервале $(t; t+h]$ есть $o(h)$, то есть $\lim_{h \rightarrow +0} \mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 1\} = 0$.
8. Для коротких полуинтервалов $(t; t+h]$ вероятность того, что на них произойдёт хотя бы один скачок, убывает линейно с уменьшением h : $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 0\} = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$ при $h \rightarrow 0$.
9. Из определения распределения Пуассона:

$$\mathbb{P}\{K_t = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Наконец, приведём ещё одно из альтернативных определений пуассоновского процесса:

Утверждение 2.5. Случайный процесс $K: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{N}$ является пуассоновским тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим свойствам:

1. (стационарность приращений) $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t = k\} = p(h, k)$
2. (отсутствие последействия) Приращения процесса независимы.
3. (ординарность) $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 1\} \in o(h)$

Утверждение 2.6. Пусть K — пуассоновский процесс с интенсивностью λ . Тогда $m_K(t) = \lambda t$, $R_K(t, s) = \lambda \cdot \min\{t, s\}$.

Доказательство. Так как $K_t \stackrel{\text{н.н.}}{=} K_t - K_0 \sim \text{Po}(\lambda t)$, $m_K(t) = \mathbb{E} K_t = \lambda t$. Далее, в силу независимости приращений, при $t \geq s$ имеем $\text{cov}(K_t, K_s) = \text{cov}(K_t - K_s + K_s, K_s) = 0 + \text{cov}(K_s, K_s) = \lambda t$. Поэтому $R_K(t, s) = \lambda \cdot \min\{t, s\}$. \square

Задача 8

Поток прибывающих на железнодорожную станцию пассажиров моделируется пуассоновским процессом K с интенсивностью λ . В момент $t = 0$ пассажиров нет, в момент $t = t_0$ прибывает первый поезд. Пусть η — суммарное время ожидания прибытия поезда всеми пассажирами на станции. Найти $\mathbb{E} \eta$.

Решение задачи 8

$$\eta = \int_0^{t_0} K_t dt, \quad \mathbb{E} \eta = \int_{\Omega} d\mathbb{P} \int_0^{t_0} K_t dt = \int_0^{t_0} dt \int_{\Omega} K_t d\mathbb{P} = \int_0^{t_0} m_K(t) dt = \int_0^{t_0} \lambda t dt = \frac{\lambda t_0^2}{2}$$

Задача 9

Пусть K_t — пуассоновский процесс с интенсивностью λ , а τ_1 — момент первого скачка. Найдите $\mathbb{P}\{\tau_1 \leq s \mid K_t = 1\}$ при $0 < s < t$.

Решение задачи 9

Событие $\{\tau_1 \leq s\}$ означает, что первый скачок процесса произошёл не позже момента s . Если при этом $K_t = 1$, то это означает, что $K_s = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\tau_1 \leq s \mid K_t = 1\} &= \mathbb{P}\{K_s = 1 \mid K_t = 1\} = \frac{\mathbb{P}(\{K_s = 1\} \cap \{K_t = 1\})}{\mathbb{P}\{K_t = 1\}} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{K_s = 1\} \cap \{K_t - K_s = 0\})}{\mathbb{P}\{K_t = 1\}} = \frac{\frac{\lambda s}{1!} e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^0}{0!} e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{\lambda t}{1!} e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}\end{aligned}$$

Задача 10

Пусть K — пуассоновский процесс с интенсивностью λ , τ_3 — время третьего скачка процесса. Найти $\mathbb{P}\{\tau_3 \leq 2\}$.

Решение задачи 10

$$\mathbb{P}\{\tau_3 \leq 2\} = \mathbb{P}\{K_2 \geq 3\} = 1 - \mathbb{P}\{K_2 < 3\} = 1 - e^{-2\lambda} - \frac{2\lambda}{1!} e^{-2\lambda} - \frac{(2\lambda)^2}{2!} e^{-2\lambda}$$

Задача 11

Пусть $\eta \sim U_{[0;1]}$, K — пуассоновский процесс с интенсивностью λ , и η не зависит от K . Найти $\mathbb{P}\{K_\eta = K_{\eta+1}\}$.

Решение задачи 11

По формуле полной вероятности,

$$\mathbb{P}\{K_\eta = K_{\eta+1}\} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{\underbrace{K_{t+1} - K_t}_{\sim \text{Po}(1 \cdot \lambda)} = 0 \mid \eta = t\} \cdot \rho_\eta(t) dt = \int_0^1 e^{-1 \cdot \lambda} dt = e^{-\lambda}$$