Случайные процессы: семинары

Бутаков И. Д.

2023

Содержание

Предисловие

Перед вами сборник всех семинаров по случайным процессам за авторством Бутакова И. Д. Автор выражает благодарность Останину Павлу Антоновичу и Широбокову Максиму Геннадьевичу за предоставленные материалы.

Используемые обозначения

$\overset{\triangle}{\iff}$	«…по определению тогда и только тогда, когда …»
$\triangleq$	«…по определению равно …»
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	вероятностное пространство (Ω — множество исходов, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, $\mathbb{P}$ — вероятностная мера).
$\mathbb{I}_A$	индикаторная функция множества A.
$\mathbb{E}\,X$	математическое ожидание случайной величины X.
$\mathbb{D}\,X$	дисперсия случайной величины X.
$\mathring{X}$	«центрированная» случайная величина: $\mathring{X} = X - \mathbb{E}\,X$.
$\mathrm{Be}(p)$	распределение Бернулли с параметром p.
$\mathrm{Bi}(n, p)$	биномиальное распределение с параметрами n и p.
$\mathrm{Po}(\lambda)$	распределение Пуассона с интенсивностью λ.
$\mathrm{U}(A)$, U_A	равномерное распределение на множестве A.
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	показательное распределение с параметром λ (интенсивность).
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2.
$\xrightarrow{\text{с.к.}}$	сходимость в среднем квадратичном.
$\xrightarrow{\text{п.н.}}$	сходимость почти наверное.
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$	сходимость по вероятности.
$\xrightarrow{d}$	сходимость по распределению.
$\overset{\text{п.н.}}{=}$	равенство почти наверное.
$\overset{d}{=}$	равенство по распределению.

1 Основные сведения

Случайные процессы — математические объекты, построенные с использованием теории вероятностей для исследования и моделирования реальных явлений, растянутых во времени и имеющих стохастическую (случайную) природу.

Определение 1.1. *Пусть задано вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *и множество* $T \subseteq \mathbb{R}$. *Функция* $X\colon \Omega \times T \to \mathbb{R}$ *называется* **случайным процессом**, *если* $\forall t \in T$ *функция* $X(\cdot, t) \equiv X_t\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *измерима (то есть является случайной величиной).*

Случайный процесс можно трактовать как семейство случайных величин, параметризованное $t \in T$. Параметр t обычно интерпретируется как время. Если T состоит из одного элемента, случайный процесс является обычной случайной величиной, если T конечно — случайным вектором. Параметр ω, как и при описании случайных величин, часто опускается.

Определение 1.2. *При фиксированном* $t_0 \in T$ *случайная величина* X_{t_0} *называется* **сечением случайного процесса** X.

Определение 1.3. *При фиксированном* $\omega_0 \in \Omega$ *функция* $X(\omega_0, \cdot)$ *называется* **реализацией случайного процесса** X.

Также случайный процесс можно считать особой случайной величиной, принимающей значения в пространстве функций; при такой интерпретации, однако, отдельных усилий стоит определить, что такое вероятностное распределение на функциях. В рамках семинаров данный вопрос освещаться со всей полнотой и строгостью не будет, поэтому приведём из этой области лишь основные факты и определения, требующиеся для работы со случайными процессами.

Рассмотрим произвольный случайный процесс X. В силу единства вероятностного пространства, любой вектор вида $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ (где $t_i \in T$) является случайным вектором.

Определение 1.4. *Вероятностное распределение вектора вида* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *называется* **конечномерным распределением случайного процесса** X. *Его функция распределения обозначается как* $F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$.

Функции распределений векторов, составленных из сечений случайного процесса, обладают всеми известными вам свойствами функций распределений случайных векторов, а также ещё двумя дополнительными свойствами:

Утверждение 1.5. *Функции конечномерных распределений случайного процесса* X *обладают следующими свойствами:*

1. **(условие симметрии)** *Для любой перестановки* k_i *выполнено равенство*

$$F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F_X(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}; t_{k_1}, \ldots, t_{k_n})$$

2. **(условие согласованности)** *Для любого индекса* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *выполнено*

$$\lim_{x_k \to +\infty} F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n; t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_n)$$

Теорема 1.6 (Колмогорова)**.** *Пусть имеется семейство распределений случайных векторов, удовлетворяющее всем свойствам из утверждения 1.5. Тогда существует вероятностное пространство и заданный на нём случайный процесс, семейство конечномерных распределений которого совпадает с данным.*

Таким образом, случайный процесс можно задавать семейством его конечномерных распределений. На данном этапе читателю должно стать понятно, как можно задавать вероятностное распределение на множестве функций (ответ — при помощи специальных семейств конечномерных распределений).

Задача 1

Пусть η — случайная величина с функцией распределения F_η. Найти все конечномерные распределения случайного процесса $X_t = \eta + t$.

Решение задачи 1

Одномерная функция распределения:

$$F_X(x;t) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X_t < x\} = \mathbb{P}\{\eta < x - t\} = F_\eta(x - t)$$

Конечномерная функция распределения:

$$\begin{aligned} F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \mathbb{P}\bigcap_{i=1}^{n}\{X_{t_i} < x_i\} = \mathbb{P}\bigcap_{i=1}^{n}\{\eta < x_i - t_i\} = \\ = \mathbb{P}\left\{\eta < \min_i\{x_i - t_i\}\right\} = F_\eta\left(\min_i\{x_i - t_i\}\right) \end{aligned}$$

Задача 2

Пусть дана случайная величина $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$. Определим случайный процесс $X_t = \mathbb{I}_{(-\infty;\eta]}(t)$. Найдите вид реализаций процесса, его одномерные и двумерные распределения.

Решение задачи 2

Реализация процесса — функция, равная единице при $t \leqslant \eta$ и нулю при $t > \eta$, см. рис. 1.1. Одномерная функция распределения:

$$F_X(x;t) = \mathbb{P}\{X_t < x\} = \mathbb{P}\{\mathbb{I}_{(-\infty;\eta]}(t) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \mathbb{P}\{\eta < t\}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases},$$

$$\text{где} \quad \mathbb{P}\{\eta < t\} = F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ t, & 0 < t \leqslant 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

Двумерная функция распределения:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}\left(\{X_{t_1} < x_1\} \cap \{X_{t_2} < x_2\}\right)$$

Аналогично одномерной функции распределения,

1. Если $x_1 \leqslant 0$ или $x_2 \leqslant 0$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = 0$.
2. Если $x_1 > 1$ и $x_2 > 1$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = 1$.
3. Если $0 < x_1 \leqslant 1$ и $x_2 > 1$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_X(x_1; t_1)$. Аналогично симметричный случай.
4. Если $0 < x_1, x_2 \leqslant 1$,

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}\left(\{\eta < t_1\} \cap \{\eta < t_2\}\right) = \mathbb{P}\left\{\eta < \min\{t_1, t_2\}\right\} = F_\eta\left(\min\{t_1, t_2\}\right)$$

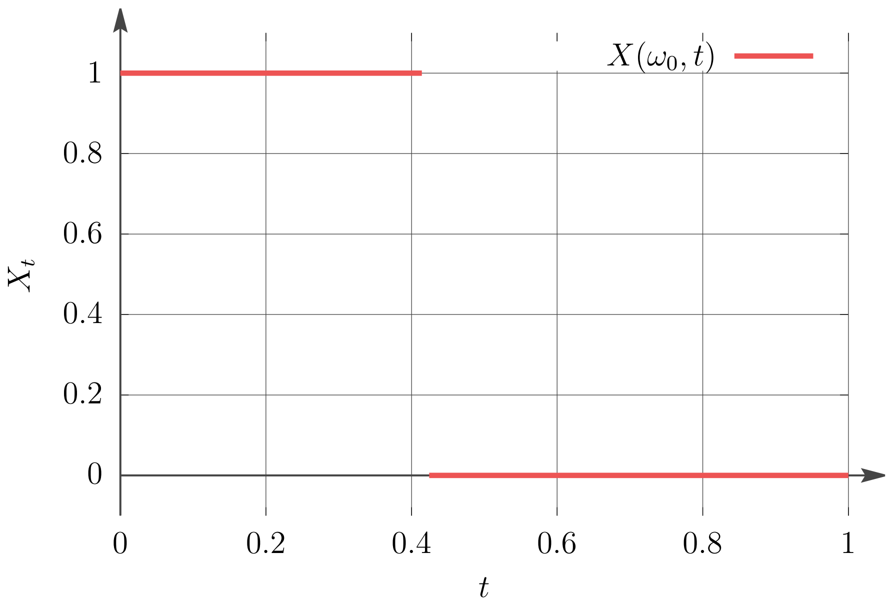

Рис. 1.1: График одной из реализаций случайного процесса из задачи 2.

Существование различных случайных процессов с одними и теми же вероятностными свойствами приводит к желанию (а иногда и необходимости) в некотором смысле отождествлять процессы, у которых конечномерные распределения совпадают.

Определение 1.7. *Пусть X и Y — два случайных процесса, определённые на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и множестве T. Данные процессы называются* **стохастически эквивалентными** *в случае равенства почти наверное их реализаций в любой выбранный момент, то есть*

$$\forall t \in T \quad \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega, t) = Y(\omega, t)\} = 1$$

В этом случае Y называют **модификацией** *процесса Y (и наоборот).*

Утверждение 1.8. *Стохастически эквивалентные случайные процессы имеют одинаковое семейство конечномерных распределений.*

Например, такое отождествление полезно для осмысленного определения непрерывного случайного процесса:

Определение 1.9. *Случайный процесс называется* **непрерывным** *в случае, если существует его модификацией с непрерывными реализациями.*

Задача 3

Пусть $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$. Определим случайный процесс $X_t = \mathbb{I}_{\{\eta\}}(t)$ (то есть $X_t = 1$ в том и только в том случае, когда $\eta = t$, и равен 0 иначе). Является ли X_t непрерывным процессом?

Решение задачи 3

Да, является. Процесс $Y_t \equiv 0$ является его модификацией.

При исследовании случайных процессов также бывает полезно рассматривать их моменты, дающие некоторое представление об усреднённом поведении процесса. В отличие от случайных величин, любые моменты случайного процесса также зависят от времени.

Определение 1.10. *Если* $\forall t \in T$ *существует* $\mathbb{E}\, X_t$, *то функция* $m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t$ *определена и называется* **функцией среднего**.

Аналогично вводятся функции любых других моментов случайной величины X_t. При работе со случайными процессами нас также будут интересовать моменты, «разнесённые во времени».

Определение 1.11. *Если* $\forall t_1, t_2 \in T$ *существует* $\mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2}$, *то функции* $K_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2}$ *и* $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\, \overset{\circ}{X}_{t_1} \overset{\circ}{X}_{t_2}$ *определены и называются, соответственно,* **ковариационной** *и* **корреляционной функциями**.[1]

Утверждение 1.12. *Функции* $K_X(t_1, t_2)$ *и* $R_X(t_1, t_2)$ *одновременно либо определены, либо не определены, причём в первом случае функция* $m_X(t)$ *определена и* $R_X(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) - m_X(t_1) m_X(t_2)$.

Доказательство. Следует из свойств моментов. □

Задача 4

Найти корреляционную функцию случайного процесса из задачи 2.

Решение задачи 4

Для любого t_0 случайная величина X_{t_0} может принимать только два значения — 0 или 1; это бернуллиевская случайная величина. Найдём параметр её распределения:

$$\mathbb{P}\{X_t = 1\} = \mathbb{P}\{t < \eta\} = 1 - F_\eta(t)$$

Следовательно, $m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = 1 - F_\eta(t)$. Далее,

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2} = 1 \cdot \mathbb{P}\left(\{X_{t_1} = 1\} \cap \{X_{t_2} = 1\}\right) = \\ = \mathbb{P}\left(\{t_1 < \eta\} \cap \{t_2 < \eta\}\right) = 1 - F_\eta\left(\max\{t_1, t_2\}\right) \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) = 1 - F_\eta\left(\max\{t_1, t_2\}\right) - (1 - F_\eta(t_1)) \cdot (1 - F_\eta(t_2)) = \\ = F_\eta(t_1) + F_\eta(t_2) - F_\eta(t_1) \cdot F_\eta(t_2) - F_\eta(\max\{t_1, t_2\}) \end{aligned}$$

В частности, если $t_1, t_2 \in [0; 1]$,

$$R_X(t_1, t_2) = t_1 + t_2 - t_1 t_2 - \max\{t_1, t_2\} = \min\{t_1, t_2\} - t_1 t_2$$

Задача 5

Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $\eta \sim U_{[-\pi;\pi]}$ — независимые случайные переменные. Определим случайный процесс X следующим образом: $X_t = \xi \cdot \cos(t + \eta)$, где $t \in \mathbb{R}$. Найдите функцию среднего и корреляционную функцию процесса.

---

[1] Данные обозначения не являются общепринятыми, а также несколько контринтуитивны; при чтении сторонних источников будьте внимательны.

Решение задачи 5

Поскольку ξ и η независимы,

$$m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = \mathbb{E}\,\xi \cdot \mathbb{E}\cos(t+\eta) = 0 \cdot \ldots = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2) - 0 = \mathbb{E}\, X_{t_1}X_{t_2} = \mathbb{E}\,\xi^2 \cdot \mathbb{E}\left(\cos(t_1+\eta)\cdot\cos(t_2+\eta)\right) = \\ = 1\cdot\frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left(\cos(t_1-t_2)+\cos(t_1+t_2+2\eta)\right) = \frac{1}{2}\cos(t_1-t_2) \end{aligned}$$

Задача 6

Пусть U, V и W — независимые в совокупности случайные величины. Известно, что U и V обладают нулевым матожиданием и дисперсией D, а W распределена с плотностью

$$\rho_W(w) = \frac{2\lambda}{\pi}\cdot\frac{\mathbb{I}_{[0;+\infty)}(w)}{\lambda^2+w^2}, \quad \lambda > 0$$

Определим случайный процесс $X_t = U\cos(Wt) + V\sin(Wt)$. Вычислите функцию среднего и корреляционную функцию.

Решение задачи 6

Поскольку U, V и W независимы в совокупоности,

$$m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = \mathbb{E}\, U\cdot\mathbb{E}\cos(Wt) + \mathbb{E}\, V\cdot\mathbb{E}\sin(Wt) = 0\cdot\ldots + 0\cdot\ldots = 0$$

Корреляционную функцию удобно искать с помощью формулы полной вероятности в непрерывном случае:

$$R_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_{t_1}X_{t_2} \mid W=w)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{E}(X_{t_1}X_{t_2}\mid W=w)}_{\triangleq R(t_1,t_2|w)} \cdot \rho_W(w)\,dw$$

В силу нулевого матожидания,

$$\begin{aligned} R_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}\left((U\cos(wt_1)+V\sin(wt_1))\cdot(U\cos(wt_2)+V\sin(wt_2))\right) = \\ = \mathbb{E}(U^2)\cdot\cos(wt_1) + 2\cdot\underbrace{\mathbb{E}\,U\,\mathbb{E}\,V}_{0}\cdot\ldots + \mathbb{E}(V^2)\cdot\sin(wt_1)\sin(wt_2) = D\cos(w(t_1-t_2)) \end{aligned}$$

Наконец,

$$R_X(t_1,t_2) = \int\limits_0^{+\infty} D\cos(w(t_1-t_2))\cdot\frac{2\lambda}{\pi}\frac{1}{\lambda^2+w^2}\,dw = De^{-\lambda|t_1-t_2|}$$

Здесь использовалось значение интеграла Лапласа:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$$

Определение 1.13. **Функцией коэффициента корреляции** *называют функцию*

$$r_X(t_1,t_2) = \frac{R_X(t_1,t_2)}{\sqrt{R_X(t_1,t_1)\cdot R_X(t_2,t_2)}} = \frac{\operatorname{cov}(X_{t_1},X_{t_2})}{\sqrt{\mathbb{D}\,X_{t_1}\,\mathbb{D}\,X_{t_2}}}$$

Данная функция, если определена, принимает значения от -1 до 1 и имеет смысл степени линейной связи сечений процесса, соответствующих выбранным моментам времени.

Задача 7

Найти функции коэффициента корреляции для процессов из задач 5 и 6.

Решение задачи 7

- Задача 5: $r_X(t_1, t_2) = \dfrac{\frac{1}{2}\cos(t_1 - t_2)}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = \cos(t_1 - t_2)$.

  Если взять два произвольных момента времени и начать сдвигать их друг к другу или друг от друга, будет наблюдаться периодическая корреляция и декорреляция соответствующих сечений.

- Задача 6: $r_X(t_1, t_2) = \dfrac{De^{-\lambda|t_1 - t_2|}}{\sqrt{De^{-\lambda \cdot 0} \cdot De^{-\lambda \cdot 0}}} = e^{-\lambda|t_1 - t_2|}$.

  Несмотря на схожесть процессов, в данном случае наблюдается корреляция, затухающая экспоненциально с ростом разницы между моментами времени, в которых взяты сечения.

  Дело в том, что в первом процессе случайным был фазовый сдвиг, а потому реализации процесса «не расползались». Во втором же случае случайной является ещё и частота, и линейная связь между разными моментами времени быстро теряется (реализации «декогерируют»).

2 Важные примеры случайных процессов

В этом разделе речь пойдёт о нескольких процессах особого вида, наиболее часто встречающихся при исследовании реальных явлений. Зачастую такие процессы именные. На их примере мы продолжим практиковаться в решении задач, а также введём несколько новых теоретических понятий.

2.1 Пуассоновский процесс

Данный процесс встречается в реальной жизни довольно часто; он описывает поток случайных событий, которые регистрируются с некоторой постоянной «интенсивностью». Например, речь может идти о регистрации космических частиц, о кликах по ссылке, о запросах к серверу, о проезжающих по магистрали автомобилях. Дадим формальное определение.

Определение 2.1. *Случайный процесс X называется* **процессом с независимыми приращениями**, *если $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall \{t_i\}_{i=1}^n \subseteq T$ случайные величины $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1}$ независимы в совокупности.*

Определение 2.2. Пуассоновским процессом с интенсивностью $\lambda > 0$ *называется случайный процесс $K \colon \Omega \times [0; +\infty) \to \mathbb{N}$ такой, что*

1. $K_0 \overset{\text{п.н.}}{=} 0$.
2. *K — процесс с независимыми приращениями.*
3. *$K_t - K_s \sim \mathrm{Po}\left(\lambda \cdot (t - s)\right)$ (при $t > s \geqslant 0$).*

Это одно из эквивалентных определений, пуассоновский процесс можно определить и иначе:

Теорема 2.3 (Явная конструкция пуассоновского процесса)**.** *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ и независимы в совокупности, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда процесс $X_t = \sup\{n \mid S_n \leqslant t\}$ есть пуассоновский процесс с интенсивностью λ.*

Процесс X_t, построенный по случайным величинам ξ_k способом, указанным в теореме, называется ***процессом восстановления*** и отвечает следующей модели: в нулевой момент включается прибор, который работает время ξ_1, после чего ломается. Одновременно с поломкой включается следующий прибор, который работает случайное время ξ_2, и так далее. Величина X_t отражает количество приборов, введённых в эксплуатацию к моменту t.

Утверждение 2.4. *Пуассоновский процесс обладает следующими свойствами:*

1. *Реализации пуассоновского процесса — кусочно-постоянные неубывающие функции со значениями в $\mathbb{N}$.*
2. *С вероятностью 1 все скачки пуассоновского процесса равны единице.*
3. *Время, когда произошёл n-ый скачёк (обозначим его τ_n) имеет $\Gamma(n, 1/\lambda)$-распределение:*
$$\rho_{\tau_n}(t) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \cdot \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(t)$$
4. *Случайные величины $\{\tau_n - \tau_{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ распределены экспоненциально с параметром λ и независимы.*

5. *Число событий за конечный период времени конечно с вероятностью* 1.
6. *Число событий* $K_{t+h} - K_t$ *на промежутке* $(t; t+h]$ *зависит лишь от длины промежутка* h*:* $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t = k\} = p(h, k)$
7. *Вероятность более чем одного скачка на полуинтервале* $(t; t+h]$ *есть* $o(h)$*, то есть* $\lim\limits_{h \to +0} \mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 1\} = 0$.
8. *Для коротких полуинтервалов* $(t; t+h]$ *вероятность того, что на них произойдёт хотя бы один скачок, убывает линейно с уменьшением* h*:* $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 0\} = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$ *при* $h \to 0$.
9. *Из определения распределения Пуассона:*

$$\mathbb{P}\{K_t = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Наконец, приведём ещё одно из альтернативных определений пуассоновского процесса:

Утверждение 2.5. *Случайный процесс* $K \colon \Omega \times T \to \mathbb{N}$ *является пуассоновским тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим свойствам:*

1. **(стационарность приращений)** $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t = k\} = p(h, k)$
2. **(отсутствие последействия)** *Приращения процесса независимы.*
3. **(ординарность)** $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 1\} \in o(h)$