Случайные процессы: семинары

Бутаков И. Д.

2023

Содержание

Предисловие

Перед вами сборник всех семинаров по случайным процессам за авторством Бутакова И. Д. Автор выражает благодарность Останину Павлу Антоновичу и Широбокову Максиму Геннадьевичу за предоставленные материалы.

Используемые обозначения

$\overset{\triangle}{\iff}$	«... по определению тогда и только тогда, когда ...»
$\triangleq$	«... по определению равно ...»
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	вероятностное пространство (Ω — множество исходов, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, $\mathbb{P}$ — вероятностная мера).
$\mathcal{B}(A)$, $\mathcal{B}_A$	Борелевская σ-алгебра, определённая на множестве A (если A не указано, по умолчанию предполагается $A = \mathbb{R}$).
$\mathbb{I}_A$	индикаторная функция множества A.
$\mathbb{E}\, X$	математическое ожидание случайной величины X.
$\mathbb{D}\, X$	дисперсия случайной величины X.
$\mathring{X}$	«центрированная» случайная величина: $\mathring{X} = X - \mathbb{E}\, X$.
$\mathrm{Be}(p)$	распределение Бернулли с параметром p.
$\mathrm{Bi}(n, p)$	биномиальное распределение с параметрами n и p.
$\mathrm{Po}(\lambda)$	распределение Пуассона с интенсивностью λ.
$\mathrm{U}(A)$, U_A	равномерное распределение на множестве A.
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	показательное распределение с параметром λ (интенсивность).
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2.
$\xrightarrow{\text{с.к.}}$	сходимость в среднем квадратичном.
$\xrightarrow{\text{п.н.}}$	сходимость почти наверное.
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$	сходимость по вероятности.
$\xrightarrow{d}$	сходимость по распределению.
$\overset{\text{п.н.}}{=}$	равенство почти наверное.
$\overset{d}{=}$	равенство по распределению.

1 Основные сведения

Случайные процессы — математические объекты, построенные с использованием теории вероятностей для исследования и моделирования реальных явлений, растянутых во времени и имеющих стохастическую (случайную) природу.

Определение 1.1. *Пусть задано вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *и множество* $T \subseteq \mathbb{R}$. *Функция* $X\colon \Omega \times T \to \mathbb{R}$ *называется* **случайным процессом**, *если* $\forall t \in T$ *функция* $X(\,\cdot\,, t) \equiv X_t\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *измерима (то есть является случайной величиной).*

Случайный процесс можно трактовать как семейство случайных величин, параметризованное $t \in T$. Параметр t обычно интерпретируется как время. Если T состоит из одного элемента, случайный процесс является обычной случайной величиной, если T конечно — случайным вектором. Если T счётно, говорят о случайном процессе с дискретным временем. Параметр ω, как и при описании случайных величин, часто опускается.

Определение 1.2. *При фиксированном* $t_0 \in T$ *случайная величина* X_{t_0} *называется* **сечением случайного процесса** X.

Определение 1.3. *При фиксированном* $\omega_0 \in \Omega$ *функция* $X(\omega_0, \,\cdot\,)$ *называется* **реализацией (траекторией) случайного процесса** X.

Также случайный процесс можно считать особой случайной величиной, принимающей значения в пространстве функций; при такой интерпретации, однако, отдельных усилий стоит определить, что такое вероятностное распределение на функциях. В рамках семинаров данный вопрос освещаться со всей полнотой и строгостью не будет, поэтому приведём из этой области лишь основные факты и определения, требующиеся для работы со случайными процессами.

Рассмотрим произвольный случайный процесс X. В силу единства вероятностного пространства, любой вектор вида $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ (где $t_i \in T$) является случайным вектором.

Определение 1.4. *Вероятностное распределение вектора вида* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *называется* **конечномерным распределением случайного процесса** X. *Его функция распределения обозначается как* $F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$.

Функции распределений векторов, составленных из сечений случайного процесса, обладают всеми известными вам свойствами функций распределений случайных векторов, а также ещё двумя дополнительными свойствами:

Утверждение 1.5. *Функции конечномерных распределений случайного процесса* X *обладают следующими свойствами:*

1. **(условие симметрии)** *Для любой перестановки* k_i *выполнено равенство*
$$F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F_X(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}; t_{k_1}, \ldots, t_{k_n})$$
2. **(условие согласованности)** *Для любого индекса* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *выполнено*
$$\lim_{x_k \to +\infty} F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n; t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_n)$$

Теорема 1.6 (Колмогорова)**.** *Пусть имеется семейство распределений случайных векторов, удовлетворяющее всем свойствам из утверждения 1.5. Тогда существует вероятностное пространство и заданный на нём случайный процесс, семейство конечномерных распределений которого совпадает с данным.*

Таким образом, случайный процесс можно задавать семейством его конечномерных распределений. На данном этапе читателю должно стать понятно, как можно задавать вероятностное распределение на множестве функций (ответ — при помощи специальных семейств конечномерных распределений).

Задача 1.7. Пусть η — случайная величина с функцией распределения F_η. Найти все конечномерные распределения случайного процесса $X_t = \eta + t$.

Решение задачи 1.7. Одномерная функция распределения:

$$F_X(x;t) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X_t < x\} = \mathbb{P}\{\eta < x - t\} = F_\eta(x-t)$$

Конечномерная функция распределения:

$$F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \mathbb{P}\bigcap_{i=1}^{n}\{X_{t_i} < x_i\} = \mathbb{P}\bigcap_{i=1}^{n}\{\eta < x_i - t_i\} =$$
$$= \mathbb{P}\left\{\eta < \min_i\{x_i - t_i\}\right\} = F_\eta\left(\min_i\{x_i - t_i\}\right)$$

Задача 1.8. Пусть дана случайная величина $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$. Определим случайный процесс $X_t = \mathbb{I}_{(-\infty;\eta]}(t)$. Найдите вид реализаций процесса, его одномерные и двумерные распределения.

Решение задачи 1.8. Реализация процесса — функция, равная единице при $t \leqslant \eta$ и нулю при $t > \eta$, см. рис. 1.1. Одномерная функция распределения:

$$F_X(x;t) = \mathbb{P}\{X_t < x\} = \mathbb{P}\{\mathbb{I}_{(-\infty;\eta]}(t) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \mathbb{P}\{\eta < t\}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases},$$

$$\text{где} \quad \mathbb{P}\{\eta < t\} = F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ t, & 0 < t \leqslant 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

Двумерная функция распределения:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}\left(\{X_{t_1} < x_1\} \cap \{X_{t_2} < x_2\}\right)$$

Аналогично одномерной функции распределения,

1. Если $x_1 \leqslant 0$ или $x_2 \leqslant 0$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = 0$.
2. Если $x_1 > 1$ и $x_2 > 1$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = 1$.
3. Если $0 < x_1 \leqslant 1$ и $x_2 > 1$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_X(x_1; t_1)$. Аналогично симметричный случай.
4. Если $0 < x_1, x_2 \leqslant 1$,

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}\left(\{\eta < t_1\} \cap \{\eta < t_2\}\right) = \mathbb{P}\left\{\eta < \min\{t_1, t_2\}\right\} = F_\eta\left(\min\{t_1, t_2\}\right)$$

Через семейства конечномерных распределений также вводится понятие ***независимости*** процессов.

Определение 1.9. *Стохастические процессы X и Y, определённые на одних и тех же Ω и T, называются* **независимыми** *в случае, если $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall \{t_i\}_{i=1}^n \subseteq T$ векторы $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ и $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ независимы.*

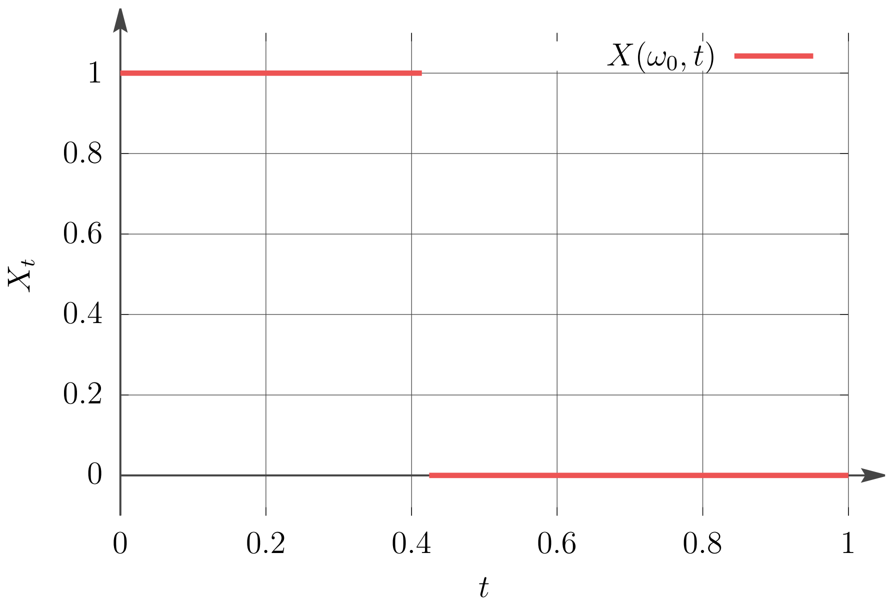

Рис. 1.1: График одной из реализаций случайного процесса из задачи 1.8.

Замечание 1.10. *Определение 1.9 не изменится (не станет строго сильнее), если потребоавть независимости любых векторов из сечений соответствующих процессов.*

Доказательство. Рассмотрим $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_m \in T$. Если векторы

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, X_{s_1}, \dots, X_{s_m}) \quad \text{и} \quad (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}, Y_{s_1}, \dots, Y_{s_m})$$

независимы, то независимы и векторы $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ и $(Y_{s_1}, \dots, Y_{s_m})$. □

Задавать процессы на вероятностных пространствах удобно также при помощи ***выборочного (вторичного) пространства***.

Определение 1.11. *Рассмотрим определённый на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ случайный процесс $X\colon \Omega \times T \to \mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{X}$ — пространство функций, содержащее в себе все траектории $X(\omega, \cdot)$ (но не обязательно только их). Рассмотрим σ-алгебру, порождённую* **цилиндрическими множествами***:*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T = \sigma\left(\{x \in \mathcal{X} \mid x(t_1) \in B_1, \dots, x(t_n) \in B_n\}_{n \in \mathbb{N}, \{t_k\}_{k=1}^n \subseteq T, \{B_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathcal{B}}\right)$$

Отображение $X(\omega, \cdot)$ определяет измеримое отображение $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T)$:

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T \quad \{\omega \in \Omega \mid X(\omega, \cdot) \in B\} \in \mathcal{F}$$

На пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T)$ вероятностную меру можно определить следующим образом:

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T \quad \mathbb{P}_X B = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega, \cdot) \in B\}$$

Вероятностное пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T, \mathbb{P}_X)$ называется **выборочным (вторичным) пространством***.*

Задача 1.12. Рассмотрим вероятностное пространство $\left(\{0,1,2,3\}, 2^{\{0,1,2,3\}}, \mathbb{P}\right)$, где $\mathbb{P}$: $\mathbb{P}\{0\} = \ldots = \mathbb{P}\{3\} = \frac{1}{4}$, и случайный процесс $X(\omega, t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\omega\right)$, $t \in T = [0; 2\pi]$. Построить вторичное (выборочное) вероятностное пространство.

Решение задачи 1.12. Возьмём в качестве пространства функций $\mathcal{X} = \left\{\sin(t), \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(t + \pi\right)\right.$ Тогда $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{T} = 2^{\mathcal{X}}$, так как для любого подмножества $\mathcal{X}$ можно подобрать цилиндрическое множество, с которым оно совпадает. Наконец,

$$\mathbb{P}_X : \quad \mathbb{P}_X\left\{\sin(t)\right\} = \ldots = \mathbb{P}_X\left\{\sin\left(t + 3\pi/2\right)\right\} = \frac{1}{4}$$

Существование различных случайных процессов с одними и теми же вероятностными свойствами приводит к желанию (а иногда и необходимости) в некотором смысле отождествлять процессы, у которых конечномерные распределения совпадают.

Определение 1.13. *Пусть X и Y — два случайных процесса, определённые на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и множестве T. Данные процессы называются* **стохастически эквивалентными** *в случае равенства почти наверное их реализаций в любой выбранный момент, то есть*

$$\forall t \in T \quad \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega, t) = Y(\omega, t)\} = 1$$

В этом случае Y называют **модификацией** *процесса Y (и наоборот).*

Утверждение 1.14. *Стохастически эквивалентные случайные процессы имеют одинаковое семейство конечномерных распределений.*

Например, такое отождествление полезно для осмысленного определения непрерывного случайного процесса:

Определение 1.15. *Случайный процесс называется* **непрерывным** *в случае, если существует его модификацией с непрерывными реализациями.*

Задача 1.16. Пусть $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$. Определим случайный процесс $X_t = \mathbb{I}_{\{\eta\}}(t)$ (то есть $X_t = 1$ в том и только в том случае, когда $\eta = t$, и равен 0 иначе). Является ли X_t непрерывным процессом?

Решение задачи 1.16. Да, является. Процесс $Y_t \equiv 0$ является его модификацией.

При исследовании случайных процессов также бывает полезно рассматривать их моменты, дающие некоторое представление об усреднённом поведении процесса. В отличие от моментов случайных величин, любые моменты случайного процесса также зависят от времени.

Определение 1.17. *Если $\forall t \in T$ существует и конечно $\mathbb{E}\, X_t$, то функция $m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t$ определена и называется* **функцией среднего**.

Аналогично вводятся функции любых других моментов случайной величины X_t. При работе со случайными процессами нас также будут интересовать моменты, «разнесённые во времени».

Определение 1.18. *Если $\forall t_1, t_2 \in T$ существует и конечно $\mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2}$, то функции $K_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2}$ и $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\, \mathring{X}_{t_1} \mathring{X}_{t_2}$ определены и называются, соответственно,* **ковариационной** *и* **корреляционной функциями**.[1]

Утверждение 1.19. *Функции $K_X(t_1, t_2)$ и $R_X(t_1, t_2)$ одновременно либо определены, либо не определены, причём в первом случае функция $m_X(t)$ определена и $R_X(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) - m_X(t_1) m_X(t_2)$.*

Доказательство. Следует из свойств моментов. □

Определение 1.20. *Процесс, у которого существует ковариационная/корреляционная функция, называется* **$\mathbb{L}_2$-процессом**.

[1] Данные обозначения не являются общепринятыми, а также несколько контринтуитивны; при чтении сторонних источников будьте внимательны.

Задача 1.21. Найти корреляционную функцию случайного процесса из задачи 1.8.

Решение задачи 1.21. Для любого t_0 случайная величина X_{t_0} может принимать только два значения — 0 или 1; это бернуллиевская случайная величина. Найдём параметр её распределения:

$$\mathbb{P}\{X_t = 1\} = \mathbb{P}\{t \leqslant \eta\} = 1 - F_\eta(t)$$

Следовательно, $m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = 1 - F_\eta(t)$. Далее,

$$\begin{aligned} K_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}\, X_{t_1}X_{t_2} = 1 \cdot \mathbb{P}\left(\{X_{t_1} = 1\} \cap \{X_{t_2} = 1\}\right) = \\ = \mathbb{P}\left(\{t_1 \leqslant \eta\} \cap \{t_2 \leqslant \eta\}\right) = 1 - F_\eta\left(\max\{t_1,t_2\}\right) \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} R_X(t_1,t_2) = 1 - F_\eta\left(\max\{t_1,t_2\}\right) - (1 - F_\eta(t_1)) \cdot (1 - F_\eta(t_2)) = \\ = F_\eta(t_1) + F_\eta(t_2) - F_\eta(t_1)\cdot F_\eta(t_2) - F_\eta(\max\{t_1,t_2\}) \end{aligned}$$

В частности, если $t_1, t_2 \in [0;1]$,

$$R_X(t_1,t_2) = t_1 + t_2 - t_1t_2 - \max\{t_1,t_2\} = \min\{t_1,t_2\} - t_1t_2$$

Задача 1.22. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ и $\eta \sim U_{[-\pi;\pi]}$ — независимые случайные величины. Определим случайный процесс X следующим образом: $X_t = \xi \cdot \cos(t+\eta)$, где $t \in \mathbb{R}$. Найдите функцию среднего и корреляционную функцию процесса.

Решение задачи 1.22. Поскольку ξ и η независимы,

$$m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = \mathbb{E}\,\xi \cdot \mathbb{E}\cos(t+\eta) = 0 \cdot \ldots = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1,t_2) = K_X(t_1,t_2) - 0 = \mathbb{E}\, X_{t_1}X_{t_2} = \mathbb{E}\,\xi^2 \cdot \mathbb{E}\left(\cos(t_1+\eta)\cdot\cos(t_2+\eta)\right) = \\ = 1 \cdot \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left(\cos(t_1-t_2) + \cos(t_1+t_2+2\eta)\right) = \frac{1}{2}\cos(t_1-t_2) \end{aligned}$$

Задача 1.23. Пусть U, V и W — независимые в совокупности случайные величины. Известно, что U и V обладают нулевым матожиданием и дисперсией D, а W распределена с плотностью

$$\rho_W(w) = \frac{2\lambda}{\pi} \cdot \frac{\mathbb{I}_{[0;+\infty)}(w)}{\lambda^2 + w^2}, \quad \lambda > 0$$

Определим случайный процесс $X_t = U\cos(Wt) + V\sin(Wt)$. Вычислите функцию среднего и корреляционную функцию.

Решение задачи 1.23. Поскольку U, V и W независимы в совокупоности,

$$m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = \mathbb{E}\, U \cdot \mathbb{E}\cos(Wt) + \mathbb{E}\, V \cdot \mathbb{E}\sin(Wt) = 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots = 0$$

Корреляционную функцию удобно искать с помощью формулы полной вероятности в непрерывном случае:

$$R_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_{t_1}X_{t_2} \mid W = w)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{E}(X_{t_1}X_{t_2} \mid W = w)}_{\triangleq R_X(t_1,t_2|w)} \cdot \rho_W(w)\, dw$$

В силу нулевого матожидания,

$$
\begin{aligned}
&R_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}\left((U\cos(wt_1) + V\sin(wt_1))\cdot(U\cos(wt_2) + V\sin(wt_2))\right) = \\
&= \mathbb{E}(U^2)\cdot\cos(wt_1)\cos(wt_2) + 2\cdot\underbrace{\mathbb{E}\,U\,\mathbb{E}\,V}_{0}\cdot\ldots + \mathbb{E}(V^2)\cdot\sin(wt_1)\sin(wt_2) = D\cos(w(t_1-t_2))
\end{aligned}
$$

Наконец,

$$
R_X(t_1,t_2) = \int\limits_0^{+\infty} D\cos(w(t_1-t_2))\cdot\frac{2\lambda}{\pi}\frac{1}{\lambda^2+w^2}\,dw = De^{-\lambda|t_1-t_2|}
$$

Здесь использовалось значение интеграла Лапласа:

$$
\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}
$$

Определение 1.24. Функцией коэффициента корреляции *называют функцию*

$$
r_X(t_1,t_2) = \frac{R_X(t_1,t_2)}{\sqrt{R_X(t_1,t_1)\cdot R_X(t_2,t_2)}} = \frac{\operatorname{cov}(X_{t_1},X_{t_2})}{\sqrt{\mathbb{D}\,X_{t_1}\,\mathbb{D}\,X_{t_2}}}
$$

Данная функция, если определена, принимает значения от -1 до 1 и имеет смысл степени линейной связи сечений процесса, соответствующих выбранным моментам времени.

Задача 1.25. Найти функции коэффициента корреляции для процессов из задач 1.22 и 1.23.

Решение задачи 1.25.

- Задача 1.22: $r_X(t_1,t_2) = \dfrac{\frac{1}{2}\cos(t_1-t_2)}{\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} = \cos(t_1-t_2)$.

  Если взять два произвольных момента времени и начать сдвигать их друг к другу или друг от друга, будет наблюдаться периодическая корреляция и декорреляция соответствующих сечений.

- Задача 1.23: $r_X(t_1,t_2) = \dfrac{De^{-\lambda|t_1-t_2|}}{\sqrt{De^{-\lambda\cdot 0}\cdot De^{-\lambda\cdot 0}}} = e^{-\lambda|t_1-t_2|}$.

  Несмотря на схожесть процессов, в данном случае наблюдается корреляция, затухающая экспоненциально с ростом разницы между моментами времени, в которых взяты сечения.

  Дело в том, что в первом процессе случайным был фазовый сдвиг, а потому реализации процесса «не расползались». Во втором же случае случайной является ещё и частота, и линейная связь между разными моментами времени быстро теряется (реализации «декогерируют»).

Из курса теории вероятностей вы должны помнить, что случайные величины удобно исследовать при помощи характеристической функции. Аналогичный объект можно ввести и для случайного процесса.

Определение 1.26. Характеристической функцией случайного процесса X *называется функция* $\varphi_X(t,s) = \varphi_{X_t}(s) \overset{\triangle}{=} \mathbb{E}\exp(is\cdot X_t)$, *где* $i^2=-1$.

2 Важные примеры случайных процессов

В этом разделе речь пойдёт о нескольких процессах особого вида, наиболее часто встречающихся при исследовании реальных явлений. Зачастую такие процессы именные. На их примере мы продолжим практиковаться в решении задач, а также введём несколько новых теоретических понятий.

2.1 Пуассоновский процесс

Данный процесс встречается в реальной жизни довольно часто; он описывает поток случайных событий, которые регистрируются с некоторой постоянной «интенсивностью». Например, речь может идти о регистрации космических частиц, о кликах по ссылке, о запросах к серверу, о проезжающих по магистрали автомобилях.

Пуассоновский процесс можно неформально определить следующим образом: пусть ось времени разбита на бесконечно малые промежутки Δt. Тогда пуассоновский процесс ведёт себя следующим образом: в самом начале он равен нулю, и на каждом последующем шаге по времени может претерпеть скачок на $+1$ с вероятностью $\lambda \Delta t$. Параметр λ называется интенсивностью процесса и характеризует «скорость» потока событий. Дадим формальное определение:

Определение 2.1 (Явная конструкция пуассоновского процесса)**.** *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ *и независимы в совокупности,* $\tau_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$*. Тогда процесс* $K_t = \sup\{n \mid \tau_n \leqslant t\}$ *называется* **пуассоновским процессом с интенсивностью** λ.

Процесс K_t, построенный способом, указанным выше, называется ***процессом восстановления, построенным по величинам*** $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, и отвечает следующей модели: в нулевой момент включается прибор, который работает время ξ_1, после чего ломается. Одновременно с поломкой включается следующий прибор, который работает случайное время ξ_2, и так далее. Величина K_t отражает количество приборов, введённых в эксплуатацию к моменту t.

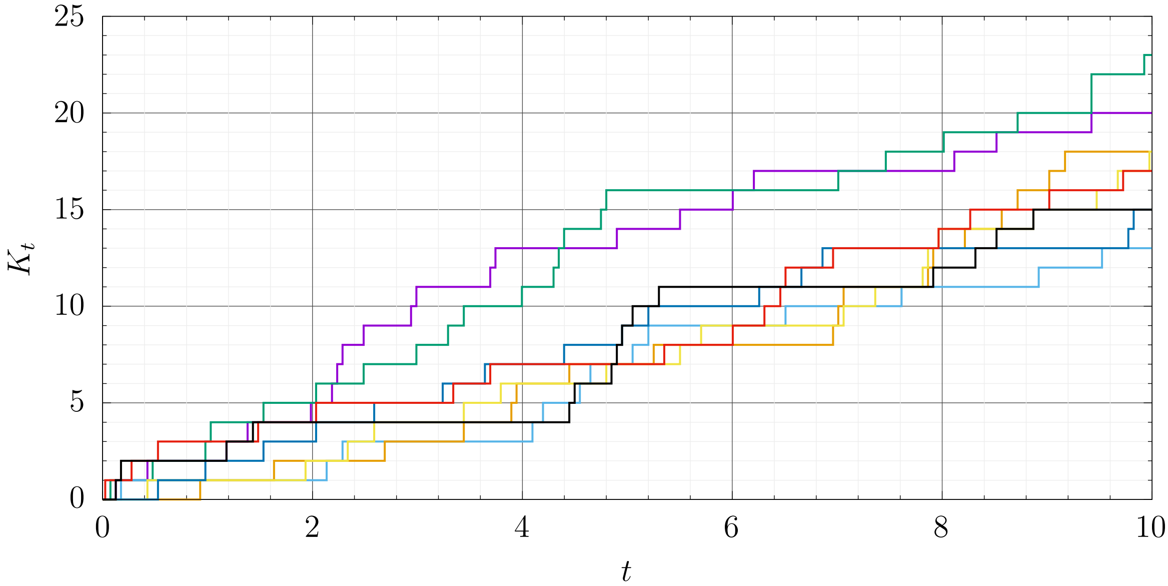

Рис. 2.1: Пример пучка реализаций пуассоновского процесса с интенсивностью $\lambda = 2$.

Приведённая явная конструкция возвращает нас к неформальному определению, использующему дискретное время с шагом Δt. Можно заметить, что экспоненциальное распределение получается как предел вероятностного распределения случайной величины —

времени между соседними скачками — при $\Delta t \to +0$:

$$\mathbb{P}\{\xi_i \in [t; t+h)\} = \lim_{\Delta t \to +0} (1 - \lambda \Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} \cdot \left(\lambda \Delta t \cdot \frac{h}{\Delta t} + o(h) \right) = \lambda e^{-\lambda t}(h + o(h))$$

Пуассоновский процесс можно определить и иначе. Для этого введём понятие процесса с независимыми приращениями.

Определение 2.2. *Случайный процесс X называется* **процессом с независимыми приращениями**, *если $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall \{t_i\}_{i=1}^n \subseteq T$ случайные величины $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1}$ независимы в совокупности.*

Определение 2.3. Пуассоновским процессом с интенсивностью $\lambda > 0$ *называется случайный процесс $K \colon \Omega \times [0; +\infty) \to \mathbb{N}$ такой, что*

1. $K_0 \overset{\text{п.н.}}{=} 0$.
2. *K — процесс с независимыми приращениями.*
3. $K_t - K_s \sim \operatorname{Po}(\lambda \cdot (t - s))$ *(при $t > s \geqslant 0$).*

Теорема 2.4. *Определения 2.1 и 2.3 эквивалентны.*

Утверждение 2.5. *Пуассоновский процесс обладает следующими свойствами:*

1. *Реализации пуассоновского процесса — кусочно-постоянные неубывающие функции со значениями в $\mathbb{N}$.*
2. *С вероятностью 1 все скачки пуассоновского процесса равны единице.*
3. *Время, когда произошёл n-ый скачёк (обозначим его τ_n) имеет $\Gamma(n, 1/\lambda)$-распределение:*

$$\rho_{\tau_n}(t) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \cdot \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(t)$$

4. *Случайные величины $\{\tau_n - \tau_{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ распределены экспоненциально с параметром λ и независимы.*
5. *Число событий за конечный период времени конечно с вероятностью 1.*
6. *Число событий $K_{t+h} - K_t$ на промежутке $(t; t+h]$ зависит лишь от длины промежутка h: $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t = k\} = p(h, k)$*
7. *Вероятность более чем одного скачка на полуинтервале $(t; t+h]$ есть $o(h)$, то есть $\lim\limits_{h \to +0} \mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 1\}/h = 0$.*
8. *Для коротких полуинтервалов $(t; t+h]$ вероятность того, что на них произойдёт хотя бы один скачок, убывает линейно с уменьшением h: $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 0\} = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$ при $h \to 0$.*
9. *Из определения распределения Пуассона:*

$$\mathbb{P}\{K_t = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Наконец, приведём ещё одно из альтернативных определений пуассоновского процесса:

Утверждение 2.6. *Случайный процесс $K \colon \Omega \times T \to \mathbb{N}$ является пуассоновским тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим свойствам:*

1. **(стационарность приращений)** $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t = k\} = p(h, k)$
2. **(отсутствие последействия)** *Приращения процесса независимы.*
3. **(ординарность)** $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 1\} \in o(h)$

Утверждение 2.7. *Пусть K — пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Тогда $m_K(t) = \lambda t$, $R_K(t,s) = \lambda \cdot \min\{t, s\}$.*

Доказательство. Так как $K_t \overset{\text{п.н.}}{=} K_t - K_0 \sim \mathrm{Po}(\lambda t)$, $m_K(t) = \mathbb{E}\, K_t = \lambda t$. Далее, в силу независимости приращений, при $t \geqslant s$ имеем $\mathrm{cov}(K_t, K_s) = \mathrm{cov}(K_t - K_s + K_s, K_s) = 0 + \mathrm{cov}(K_s, K_s) = \lambda t$. Поэтому $R_k(t,s) = \lambda \cdot \min\{t, s\}$. □

Задача 2.8. Поток прибывающих на железнодорожную станцию пассажиров моделируется пуассоновским процессом K с интенсивностью λ. В момент $t = 0$ пассажиров нет, в момент $t = t_0$ прибывает первый поезд. Пусть η — суммарное время ожидания прибытия поезда всеми пассажирами на станции. Найти $\mathbb{E}\,\eta$.

Решение задачи 2.8.

$$\eta = \int\limits_0^{t_0} K_t\, dt, \qquad \mathbb{E}\,\eta = \int\limits_\Omega d\mathbb{P} \int\limits_0^{t_0} K_t\, dt = \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_\Omega K_t\, d\mathbb{P} = \int\limits_0^{t_0} m_K(t)\, dt = \int\limits_0^{t_0} \lambda t\, dt = \frac{\lambda t_0^2}{2}$$

Задача 2.9. Пусть K_t — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, а τ_1 — момент первого скачка. Найдите $\mathbb{P}\{\tau_1 \leqslant s \mid K_t = 1\}$ при $0 < s < t$.

Решение задачи 2.9. Событие $\{\tau_1 \leqslant s\}$ означает, что первый скачок процесса произошёл не позже момента s. Если при этом $K_t = 1$, то это означает, что $K_s = 1$. Тогда

$$\mathbb{P}\{\tau_1 \leqslant s \mid K_t = 1\} = \mathbb{P}\{K_s = 1 \mid K_t = 1\} = \frac{\mathbb{P}\left(\{K_s = 1\} \cap \{K_t = 1\}\right)}{\mathbb{P}\{K_t = 1\}} =$$
$$= \frac{\mathbb{P}\left(\{K_s = 1\} \cap \{K_t - K_s = 0\}\right)}{\mathbb{P}\{K_t = 1\}} = \frac{\frac{\lambda s}{1!} e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^0}{0!} e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{\lambda t}{1!} e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

Задача 2.10. Пусть K — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, τ_3 — время третьего скачка процесса. Найти $\mathbb{P}\{\tau_3 \leqslant 2\}$.

Решение задачи 2.10.

$$\mathbb{P}\{\tau_3 \leqslant 2\} = \mathbb{P}\{K_2 \geqslant 3\} = 1 - \mathbb{P}\{K_2 < 3\} = 1 - e^{-2\lambda} - \frac{2\lambda}{1!} e^{-2\lambda} - \frac{(2\lambda)^2}{2!} e^{-2\lambda}$$

Задача 2.11. Пусть $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$, K — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, и η не зависит от K. Найти $\mathbb{P}\{K_\eta = K_{\eta+1}\}$.

Решение задачи 2.11. По формуле полной вероятности,

$$\mathbb{P}\{K_\eta = K_{\eta+1}\} = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{\underbrace{K_{t+1} - K_t}_{\sim \mathrm{Po}(1\cdot\lambda)} = 0 \mid \eta = t\} \cdot \rho_\eta(t)\, dt = \int\limits_0^1 e^{-1\cdot\lambda}\, dt = e^{-\lambda}$$

Пуассоновский процесс моделирует лишь поток некоторых событий. Иногда сами события также имеют сложную и/или случайную природу. Тогда требуется построить более продвинутую модель, наследующую от пуассоновского процесса только характер возникновения событий с течением времени. В качестве примера такой модели можно привести ***сложный (составной) пуассоновский процесс***. Данный процесс может возникнуть, например, при моделировании покупок в магазине: каждый покупатель будет появляться на кассе согласно пуассоновскому процессу, при этом закупаясь на некоторое случайное количество денег.

Определение 2.12. *Рассмотрим пуассоновский процесс K и набор независимых (в совокупности с K) одинаково распределённых случайных величин $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.* **Сложным пуассоновским процессом** *называется процесс $Q_t = \sum\limits_{j=1}^{K_t} V_j$.*

Это означает следующее: $Q_0 \overset{\text{п.н.}}{=} 0$, и в каждый момент, когда K испытывает скачок, к Q добавляется V_j.

Утверждение 2.13. *Сложный пуассоновский процесс является процессом с независимыми приращениями.*

Доказательство. Следует из независимости приращений K и независимости $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ в совокупности с K_t. □

Утверждение 2.14. *Рассмотрим сложный пуассоновский процесс Q с интенсивностью λ, определённый по случайным величинам $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Пусть $\varphi_V(s)$ — характеристическая функция случайных величин V_j. Тогда характеристичекая функция процесса Q задаётся формулой*

$$\varphi_{Q_t}(s) = e^{(\varphi_V(s)-1)\cdot\lambda t}$$

Доказательство.

$$\varphi_{Q_t}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{is\cdot Q_t} \mid K_t = k\right)\mathbb{P}\{K_t = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{is\cdot(V_1+\ldots+V_k)}\right)\cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_V(s))^k \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{\varphi_V(s)\cdot\lambda t}\cdot e^{-\lambda t}$$

□

Следствие 2.15. *Функция среднего и корреляционная функция сложного пуассоновского процесса имеют вид, соответственно,*

$$m_Q(t) = \lambda t \cdot \mathbb{E}\, V, \qquad R_Q(t,s) = \lambda \min\{t,s\}\cdot \mathbb{E}(V^2)$$

Доказательство. По свойству характеристической функции,

$$m_Q(t) = \mathbb{E}\, Q_t = -i \frac{\partial \varphi_{Q_t}(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0} = -i \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{(\varphi_V(s)-1)\cdot\lambda t}\right)\bigg|_{s=0} =$$

$$= \lambda t \cdot \underbrace{\left(-i \frac{\partial \varphi_V(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0}\right)}_{\mathbb{E}\, V} \cdot \underbrace{e^{(\varphi_V(0)-1)\cdot\lambda t}}_{e^0} = \lambda t \cdot \mathbb{E}\, V$$

Пользуясь независимостью приращений и полагая $t \leqslant s$,

$$R_Q(t,s) = \mathbb{E}\, Q_t Q_s - m_Q(t) m_Q(s) = \mathbb{E}\left(Q_t(Q_s - Q_t)\right) + \mathbb{E}\, Q_t^2 - \lambda^2 ts \cdot (\mathbb{E}\, V)^2$$

$$\mathbb{E}\left(Q_t(Q_s - Q_t)\right) = \mathbb{E}\, Q_t \cdot \mathbb{E}(Q_s - Q_t) = \lambda t \cdot \mathbb{E}\, V \cdot \lambda(s-t) \cdot \mathbb{E}\, V = \lambda^2 t(s-t) \cdot (\mathbb{E}\, V)^2$$

$$\mathbb{E}(Q_t)^2 = (-i)^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(e^{(\varphi_V(s)-1)\cdot\lambda t}\right)\bigg|_{s=0} = (\lambda t)^2 (\mathbb{E}\, V)^2 + \lambda t \cdot \mathbb{E}(V^2)$$

Собирая всё вместе, получаем

$$R_Q(t,s) = \lambda^2 [\underbrace{t(s-t) + t^2 - ts}_{0}] \cdot (\mathbb{E}\, V)^2 + \lambda t \cdot \mathbb{E}(V^2) = \lambda t \cdot \mathbb{E}(V^2)$$

В общем же случае $R_Q(t,s) = \lambda \min\{t,s\} \cdot \mathbb{E}(V^2)$. □

Задача 2.16 (Прореживание пуассоновского процесса)**.** Пусть K_t — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, а случайные величины $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ независимы и имеют распределение Бернулли с параметром p. Покажите, что Q_t — также пуассоновский процесс с интенсивностью $p\lambda$.

Решение задачи 2.16. Пуассоновский процесс также является сложным пуассоновским процессом с $V_j \equiv 1$. Тогда характеристическая функция пуассоновского процесса:

$$\varphi_{K_t}(s) = e^{\left(e^{is}-1\right)\cdot\lambda t}$$

Характеристическая функция «прореженного» процесса Q:

$$\varphi_{Q_t}(s) = e^{\left(p\, e^{is} + (1-p) - 1\right)\cdot\lambda t} = e^{\left(e^{is}-1\right)\cdot p\lambda t}$$

Имеем характеристическую функцию пуассоновского процесса с интенсивностью $p\lambda$. В общем случае этого недостаточно для того, чтобы утверждать, что процесс пуассоновский; нужно равенство характеристических функций всех конечномерных распределений. Но мы имеем дело с процессом с независимыми приращениями, поэтому характеристической функции сечения нам достаточно (это утверждение мы оставим без доказательства).

2.2 Гауссовские процессы

Гауссовские процессы могут возникать при исследовании броуновского движения, динамики цен акций, эволюции квантово-механических систем и стохастических космологических моделей. Также гауссовские процессы часто используется как «шумовая составляющая» других случайных процессов.

Определение 2.17. *Случайный процесс, все векторы сечений которого являются гауссовскими, называется* **гауссовским случайным процессом***.*

Напомним, что гауссовские векторы обладают рядом полезных свойств: распределение гауссовского вектора полностью задаётся вектором среднего и матрицей ковариации, а нескоррелированность компонент полностью эквивалентна независимости. Аналогичные свойства можно доказать и для гауссовских процессов. Однако для этого требуется ввести следующее определение:

Определение 2.18. *Функция $g(x, y)\colon X \times X \to \mathbb{C}$ называется* **симметричной неотрицательно определённой**, *если $\forall x, y \in X$ $g(x, y) = g(y, x)$ и $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n \subseteq X$ матрица $(g(x_i, y_j))_{i,j=1}^n = G_{\{x_i\},\{y_j\}}$ неотрицательна определена как оператор над $\mathbb{C}^n$, то есть $\forall z \in \mathbb{C}^n$ $\left(z, G_{\{x_i\},\{y_j\}}\, z\right) \geqslant 0$.*

Замечание 2.19. *Если $g(x, y)$ принимает только вещественные значения, в определении 2.18 можно рассматривать только $z \in \mathbb{R}^n$.*

Утверждение 2.20. *Пусть $m\colon T \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, а $R\colon T \times T \to \mathbb{R}$ — симметричная и неотрицательно определённая функция. Тогда существует гауссовский процесс X такой, что $\mathbb{E}\, X_t = m(t)$, $\mathbb{E}\, \mathring{X}_s \mathring{X}_t = R(s, t)$.*

В курсе теории вероятностей вы уже встречались с неотрицательно определёнными функциями. В частности, все характеристические функции случайных величин неотрицательно определены.

Утверждение 2.21. *Пусть $\varphi_\xi(s)$ — характеристическая функция некоторой случайной величины ξ. Тогда функция $g(s, t) = \varphi_\xi(t - s)$ — симметричная и неотрицательно определённая.*

Задача 2.22. Существует ли гауссовский процесс с корреляционной функцией $R(s, t) = e^{-|s-t|}$?

Решение задачи 2.22. Да, существует. Мы знаем, что $e^{-|t|}$ есть характеристическая функция распределения Коши. Поэтому это неотрицательно определённая функция. Значит, $R(s, t) = e^{-|s-t|}$ неотрицательно определена и симметрична.
Пример реализаций процесса можно видеть на рис. 2.2.

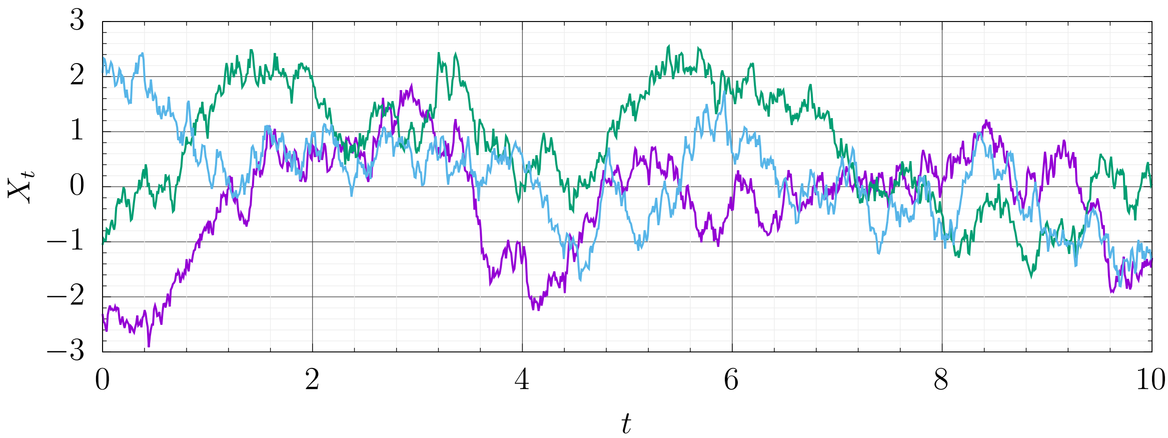

Рис. 2.2: Пример пучка реализаций гауссовского процесса из задачи 2.22 (среднее взято за ноль).

Напомним также несколько фатов касательно гауссовских векторов, которые пригодятся при исследовании гауссовских процессов.

Утверждение 2.23. *Пусть* $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, R)$ *— гауссовский вектор размерности* $n \in \mathbb{N}$. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ *— произвольные вещественные матрица и вектор. Тогда* $(A\xi + b) \sim \mathcal{N}(A\mu + b, ARA^T)$ *— также гауссовский вектор.*

Теорема 2.24 (Формула Вика)**.** *Пусть дан гауссовский вектор* $(\xi_1, \dots, \xi_n) \sim \mathcal{N}(0, R)$ *с корреляционной матрицей* $R = (R_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Тогда*

1. *Если* n *нечётно,* $\mathbb{E}\,\xi_1 \dots \xi_n = 0$.
2. *Если* n *чётно,*

$$\mathbb{E}\,\xi_1 \dots \xi_n = \sum R_{i_1,j_1} \dots R_{i_n,j_n},$$

где сумма берется по всем неупорядоченным разбиениям множества $\{1, \dots, n\}$ *на* $n/2$ *неупорядоченных пар.*

Пример 2.25. *Пусть* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \sim \mathcal{N}(0, R)$. *Тогда, согласно свойству гауссовского вектора и формуле Вика,*

$$\mathbb{E}\,\xi_1\xi_2\xi_3 = 0, \qquad \mathbb{E}\,\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = R_{12}R_{34} + R_{13}R_{24} + R_{14}R_{23}$$

2.2.1 Винеровский процесс

Винеровский процесс описывает симметричное случайное блуждание, непрерывное во времени, и также имеет множество важных приложений. Данный процесс часто возникает в стохастических дифференциальных уравнениях, а также при построении других гауссовских процессов.

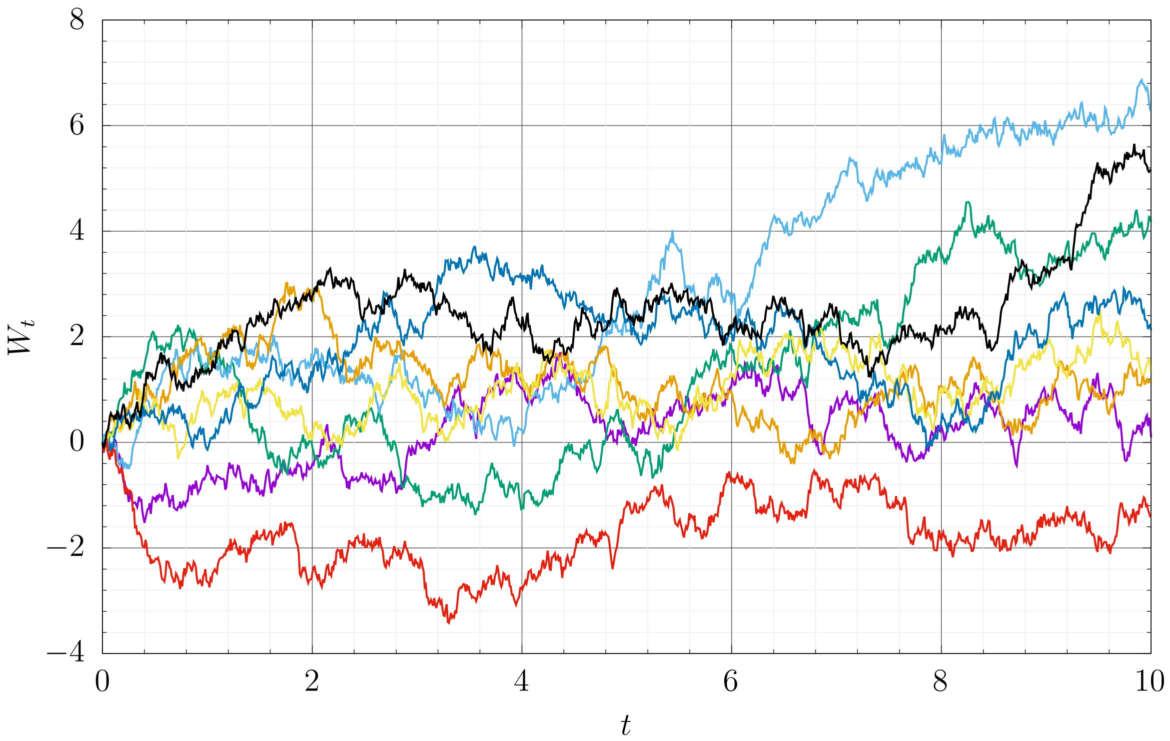

Рис. 2.3: Пример пучка реализаций винеровского процесса.

Неформально винеровский процесс можно определить, введя мелкую сетку дискретного времени с шагом Δt. Пусть процесс стартует из нуля и на каждом очередном шаге по времени делает скачок на некоторую случайную величину; математическое ожидание скачка пусть будет равно нулю, а дисперсия — Δt (это сделано для того, чтобы дисперсия сечения процесса была равна прошедшему времени и, таким образом, не зависила от выбора Δt). Полученные случайные блуждания при $\Delta t \to +0$ и описываются винеровским процессом. Дадим формальное определение.

Определение 2.26. Винеровским процессом *называется случайный процесс* $W\colon \Omega \times [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ *такой, что*

1. $W_0 \overset{\text{п.н.}}{=} 0$.
2. W *— процесс с независимыми приращениями.*
3. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$.

Данное определение напомниает определение пуассоновского процесса; мы лишь изменили распределение приращений. Из определения следует, что винеровский процесс — гауссовский процесс. Как было упомянуто ранее, любой гауссовский процесс можно задать его функцией среднего и ковариационной функцией. Из этого следует второе, эквивалентное определение винеровского процесса:

Определение 2.27. Винеровским процессом *называется гауссовский случайный процесс* $W\colon \Omega \times [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ *такой, что* $\mathbb{E}\, W_t = 0$, $\mathbb{E}\, \mathring{W}_t \mathring{W}_s = \min\{t, s\}$.

Наконец, дадим третье эквивалентное определение:

Определение 2.28. Винеровским процессом *называется гауссовский случайный процесс* $W\colon \Omega \times [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ *такой, что*

1. $W_0 \overset{\text{п.н.}}{=} 0$.
2. $\mathbb{E}\, W_t = 0$.
3. $\mathbb{E}(W_t - W_s)^2 = |t - s|$.

Теорема 2.29. *Определения 2.26, 2.27 и 2.28 эквивалентны.*

Доказательство.

$2.26 \to 2.27$: Из независимости приращений и их нормального распределения следует, что процесс гауссовский (любой вектор сечений получается линейным преобразованием из вектора приращений, который является гауссовским). Далее, при $t > s$ имеем $\mathbb{E}\, W_t = \mathbb{E}(W_t - W_0) = 0$, $\operatorname{cov}(W_t, W_s) = \operatorname{cov}(W_s + W_t - W_s, W_s) = \mathbb{D}\, W_s = s = \min\{t, s\}$.

$2.27 \to 2.28$: $\mathbb{E}(W_t - W_s)^2 = \mathbb{E}\, W_t^2 - 2\,\mathbb{E}\, W_t W_s + \mathbb{E}\, W_s^2 = t - 2\min\{t, s\} + s = |t - s|$.

$2.28 \to 2.26$: Поскольку процесс гауссовский, из пунктов 2 и 3 определения 2.28 следует, что $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$. Прочитав доказательство в предыдущем пункте «в обратную сторону», получаем $\mathbb{E}\, \mathring{W}_t \mathring{W}_s = \min\{t, s\}$. Осталось показать независимость приращений.

Рассмотрим два произвольных последовательных приращения: $W_{t_4} - W_{t_3}$ и $W_{t_2} - W_{t_1}$ ($t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4$). Они образуют двумерный гауссовский вектор (т.к. получены линейным преобразованием из вектора сечений). Приращения нескоррелированны:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(W_{t_4} - W_{t_3}, W_{t_2} - W_{t_1}) = \min\{t_4, t_2\} - \min\{t_3, t_2\} - \min\{t_4, t_1\} + \min\{t_3, t_1\} = \\ = t_2 - t_2 - t_1 + t_1 = 0\end{aligned}$$

Поскольку любой вектор приращений процесса W гауссовский (см. рассуждение выше про линейное преобразование вектора сечений), а его матрица ковариации диагональная (т.к. любые попарные ковариации нулевые), из свойств гауссовского вектора получаем независимость.

$\square$

Приведём без доказательства несколько полезных свойств винеровского процесса:

Утверждение 2.30.

1. *Винеровский процесс имеет* **стационарные приращения***, то есть процесс* $Y_t = W_{t_0+t} - W_{t_0}$ *также винеровский для любого* $t_0 \geqslant 0$.
2. *Винеровский процесс является непрерывным процессом.*
3. *Траектории винеровского процесса* **возвратны***: множество* $\{t \mid W_t = 0\}$ *с вероятностью* 1 *является неограниченным.*
4. *Выполнен закон повторного логарифма Леви:* $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \dfrac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \overset{\text{п.н.}}{=} 1.$

В качестве упражнения приведём доказательства для следующих двух утверждений:

Утверждение 2.31. *Винеровский процесс* **самоподобен с коэффициентом** $1/2$*, то есть* $Y_t = W_{ct}/\sqrt{c}$ *— также винеровский процесс для любой константы* $c > 0$.

Доказательство. Процесс Y_t является гауссовским, так как получен из гауссовского процесса линейным (относительно W_t) масштабированием по оси времени и оси значений. При этом

$$\mathbb{E}\, Y_t = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot 0 = 0, \qquad \mathbb{E}\, Y_t Y_s = \frac{1}{\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}} \min\{ct, cs\} = \min\{t, s\},$$

что по определению означает, что Y_t — винеровский. □

Утверждение 2.32. *Винеровский процесс допускает* **«инверсию времени»***:* $Y_t = t \cdot W_{1/t}$ *— также винеровский процесс.*

Доказательство. Процесс Y_t является гауссовским, так как получен из гауссовского процесса линейным (относительно W_t) масштабированием по оси времени и оси значений. При этом

$$\mathbb{E}\, Y_t = t \cdot 0 = 0, \qquad \mathbb{E}\, Y_t Y_s = ts \cdot \min\{1/t, 1/s\} = \min\{t, s\},$$

что по определению означает, что Y_t — винеровский. □

Задача 2.33. Найдите корреляционную функцию процесса $X_t = W_t^2$.

Решение задачи 2.33. Пусть, без ограничения общности, $t > s$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cov}(W_t^2, W_s^2) = \operatorname{cov}((W_t - W_s)^2 - 2W_tW_s - W_s^2, W_s^2) = \\
&\qquad = \operatorname{cov}((W_t - W_s)^2 + 2(W_t - W_s)W_s + W_s^2, W_s^2) = 0 + \operatorname{cov}((W_t - W_s)W_s, W_s^2) + \mathbb{D}\, W_s^2
\end{aligned}$$

Поскольку $W_t - W_s$ и W_s независимы, $\mathbb{E}(W_t - W_s)W_s = 0$. Отсюда

$$\operatorname{cov}((W_t - W_s)W_s, W_s^2) = \mathbb{E}(W_t - W_s) \underbrace{W_s(W_s^2 - \mathbb{E}\, W_s^2)}_{p(W_s)} = \mathbb{E}(W_t - W_s) \cdot \mathbb{E}\, p(W_s) = 0 \cdot \ldots = 0$$

Наконец,

$$\operatorname{cov}(W_t^2, W_s^2) = \mathbb{D}\, W_s^2 = \mathbb{E}\, W_s^4 - (\mathbb{E}\, W_s^2)^2 \underset{\text{распр.}}{\overset{\text{св. норм.}}{=}} 3s^2 - s^2 = 2s^2 = 2\min\{t^2, s^2\}$$

Альтернативно, можно было применить формулу Вика:

$$\mathbb{E}\, W_tW_tW_sW_s = t \cdot s + \min\{t, s\} \cdot \min\{t, s\} + \min\{t, s\} \cdot \min\{t, s\} = ts + 2\min\{t^2, s^2\}$$

$$\mathbb{E}\, W_t^2 = t, \qquad \mathbb{E}\, W_s^2 = s$$

$$\operatorname{cov}((W_t - W_s)W_s, W_s^2) = ts + 2\min\{t^2, s^2\} - ts = 2\min\{t^2, s^2\}$$

Задача 2.34. Для винеровского процесса W и разбиения $T = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = b\}$ отрезка $[a; b]$ введём случайную величину $Z(T) = \sum_{k=0}^{n}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2$. Найдите предел в $\mathbb{L}_2$ (в среднем квадратичном) случайных величин $Z(T)$ при устремлении мелкости разбиения $d(T)$ к нулю.

Решение задачи 2.34. Напмним, что случайная величина η является пределом в среднем квадратичном последовательности случайных величин $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, если $\mathbb{E}\,|\xi_n - \eta|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. В нашем случае вместо $n \to \infty$ имеем $d(T) \to 0$.

Покажем, что искомым пределом является константная случайная величина — $(b-a)$. Для этого заметим, что из независимости приращений и их распределения следует

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2\right) = \sum_{k=0}^{n}(t_{k+1} - t_k) = b - a$$

Таким образом, $(b-a)$ есть ни что иное, как $\mathbb{E}\,Z(T)$. Тогда

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - (b-a)\right)^2 = \mathbb{D}\left(\sum_{k=0}^{n}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2\right)$$

В очередной раз воспользовавшись независимостью и нормальностью приращений, получаем

$$\mathbb{D}\left(\sum_{k=0}^{n}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2\right) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{D}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 = \sum_{k=0}^{n}\left(3(t_{k+1} - t_k)^2 - (t_{k+1} - t_k)^2\right) =$$
$$= 2\sum_{k=0}^{n}(t_{k+1} - t_k)^2 \leqslant 2 \cdot d(T) \cdot \sum_{k=0}^{n}(t_{k+1} - t_k) = 2 \cdot d(T) \cdot (b-a) \underset{d(T)\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Теорема 2.35 (Башелье)**.** *Пусть W — винеровский процесс, $t > 0$. Случайная величина $M_t = \sup_{s\in[0;t]} W_s$ имеет такое же распределение, как и $|W_t|$.*

Задача 2.36. Пусть W — винеровский процесс, $y > 0$ и $\tau_y = \inf\{t \mid W_t = y\}$. Вычислить $\mathbb{E}\,\tau_y$.

Решение задачи 2.36. Воспользовавшись теоремой 2.35, найдём распределение τ_y:

$$\mathbb{P}\{\tau_y \geqslant t\} = \mathbb{P}\{M_t < y\} = \mathbb{P}\{W_t \in [-y; y]\} = F_{\mathcal{N}(0,t)}(y) - F_{\mathcal{N}(0,t)}(-y) = 2(F_{\mathcal{N}(0,t)}(y) - 1/2)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}F_{\mathcal{N}(0,t)}(y) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\,dx = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{y/\sqrt{t}}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = -\frac{y}{2\sqrt{t^3}} \cdot \frac{e^{-y^2/2t}}{\sqrt{2\pi}}$$

Отсюда

$$\rho_{\tau_y}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}\{\tau_y < t\} = \frac{\partial}{\partial t}\left[1 - 2(F_{\mathcal{N}(0,t)}(y) - 1/2)\right] = \frac{y}{\sqrt{t^3}} \cdot \frac{e^{-y^2/2t}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\mathbb{E}\,\tau_y = \int\limits_{0}^{+\infty} t \cdot \rho_{\tau_y}(t)\,dt = +\infty$$

Задача 2.37. Пусть W — винеровский процесс. Вычислить математическое ожидание процесса $X_t = \exp(W_t - t/2) - 1$ и доказать, что он имеет ортогональные приращения, то есть для $0 < t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4$ справедливо $\mathbb{E}\left((X_{t_4} - X_{t_3})(X_{t_2} - X_{t_1})\right) = 0$.

Решение задачи 2.37. Величина e^{W_t} распределена логнормально с параметрами $(\mu, \sigma) = (0, t)$, а потому $\mathbb{E}\, e^{W_t} = e^{0-t/2}$. Тогда $\mathbb{E}\, X_t = e^{t/2-t/2} - 1 = 0$. Пусть $0 < t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4$. В этом случае

$$\mathbb{E}\left(\left(e^{W_{t_4}-t_4/2} - e^{W_{t_3}-t_3/2}\right)\left(e^{W_{t_2}-t_2/2} - e^{W_{t_1}-t_1/2}\right)\right) =$$
$$= e^{-(t_2+t_4)/2}\,\mathbb{E}\left(e^{W_{t_2}+W_{t_4}}\right) - e^{-(t_1+t_4)/2}\,\mathbb{E}\left(e^{W_{t_1}+W_{t_4}}\right) - e^{-(t_2+t_3)/2}\,\mathbb{E}\left(e^{W_{t_2}+W_{t_3}}\right) + e^{-(t_1+t_3)/2}\,\mathbb{E}\left(e^{W_{t_1}+W_{t_3}}\right)$$

Рассмотрим произвольное слагаемое (например, первое). Пользуясь независимостью приращений,

$$\mathbb{E}\left(e^{W_{t_2}+W_{t_4}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{2W_{t_2}+W_{t_4}-W_{t_2}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{2W_{t_2}}\right)\mathbb{E}\left(e^{W_{t_4}-W_{t_2}}\right)$$

Аналогично, пользуясь свойством логнормального распределения, получаем

$$\mathbb{E}\left(e^{2W_{t_2}}\right)\mathbb{E}\left(e^{W_{t_4}-W_{t_2}}\right) = e^{4t_2/2} \cdot e^{(t_4-t_2)/2} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-(t_2+t_4)/2}\,\mathbb{E}\left(e^{W_{t_2}+W_{t_4}}\right) = e^{t_2}$$

Отсюда

$$\mathbb{E}\left((X_{t_4} - X_{t_3})(X_{t_2} - X_{t_1})\right) = e^{t_2} - e^{t_1} - e^{t_2} + e^{t_1} = 0$$