

# Случайные процессы: семинары

Бутаков И. Д.

2023

## Содержание

<b>Предисловие</b>	<b>2</b>
Используемые обозначения . . . . .	2
<b>1 Основные сведения</b>	<b>3</b>
<b>2 Важные примеры случайных процессов</b>	<b>10</b>
2.1 Пуассоновский процесс . . . . .	10

# Предисловие

Перед вами сборник всех семинаров по случайным процессам за авторством Бутакова И. Д. Автор выражает благодарность Останину Павлу Антоновичу и Ширококову Максиму Геннадьевичу за предоставленные материалы.

## Используемые обозначения

$\overset{\Delta}{\Longleftrightarrow}$	«... по определению тогда и только тогда, когда ...»
$\overset{\Delta}{=}$	«... по определению равно ...»
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	вероятностное пространство ( $\Omega$ — множество исходов, $\mathcal{F}$ — $\sigma$ -алгебра, $\mathbb{P}$ — вероятностная мера).
$\mathcal{B}(A), \mathcal{B}_A$	Борелевская $\sigma$ -алгебра, определённая на множестве $A$ (если $A$ не указано, по умолчанию предполагается $A = \mathbb{R}$ ).
$\mathbb{I}_A$	индикаторная функция множества $A$ .
$\mathbb{E} X$	математическое ожидание случайной величины $X$ .
$\mathbb{D} X$	дисперсия случайной величины $X$ .
$\overset{\circ}{X}$	«центрированная» случайная величина: $\overset{\circ}{X} = X - \mathbb{E} X$ .
$\text{Be}(p)$	распределение Бернулли с параметром $p$ .
$\text{Bi}(n, p)$	биномиальное распределение с параметрами $n$ и $p$ .
$\text{Po}(\lambda)$	распределение Пуассона с интенсивностью $\lambda$ .
$\text{U}(A), \text{U}_A$	равномерное распределение на множестве $A$ .
$\text{Exp}(\lambda)$	показательное распределение с параметром $\lambda$ (интенсивность).
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	нормальное распределение со средним $\mu$ и дисперсией $\sigma^2$ .
$\overset{\text{с.к.}}{\longrightarrow}$	сходимость в среднем квадратичном.
$\overset{\text{п.н.}}{\longrightarrow}$	сходимость почти наверное.
$\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}$	сходимость по вероятности.
$\overset{d}{\longrightarrow}$	сходимость по распределению.
$\overset{\text{п.н.}}{=}$	равенство почти наверное.
$\overset{d}{=}$	равенство по распределению.

# 1 Основные сведения

Случайные процессы — математические объекты, построенные с использованием теории вероятностей для исследования и моделирования реальных явлений, растянутых во времени и имеющих стохастическую (случайную) природу.

**Определение 1.1.** Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и множество  $T \subseteq \mathbb{R}$ . Функция  $X: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$  называется **случайным процессом**, если  $\forall t \in T$  функция  $X(\cdot, t) \equiv X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  измерима (то есть является случайной величиной).

Случайный процесс можно трактовать как семейство случайных величин, параметризованное  $t \in T$ . Параметр  $t$  обычно интерпретируется как время. Если  $T$  состоит из одного элемента, случайный процесс является обычной случайной величиной, если  $T$  конечно — случайным вектором. Если  $T$  счётно, говорят о случайном процессе с дискретным временем. Параметр  $\omega$ , как и при описании случайных величин, часто опускается.

**Определение 1.2.** При фиксированном  $t_0 \in T$  случайная величина  $X_{t_0}$  называется **сечением случайного процесса**  $X$ .

**Определение 1.3.** При фиксированном  $\omega_0 \in \Omega$  функция  $X(\omega_0, \cdot)$  называется **реализацией (траекторией)** случайного процесса  $X$ .

Также случайный процесс можно считать особой случайной величиной, принимающей значения в пространстве функций; при такой интерпретации, однако, отдельных усилий стоит определить, что такое вероятностное распределение на функциях. В рамках семинаров данный вопрос освещаться со всей полнотой и строгостью не будет, поэтому приведём из этой области лишь основные факты и определения, требующиеся для работы со случайными процессами.

Рассмотрим произвольный случайный процесс  $X$ . В силу единства вероятностного пространства, любой вектор вида  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  (где  $t_i \in T$ ) является случайным вектором.

**Определение 1.4.** Вероятностное распределение вектора вида  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  называется **конечномерным распределением случайного процесса**  $X$ . Его функция распределения обозначается как  $F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ .

Функции распределений векторов, составленных из сечений случайного процесса, обладают всеми известными вам свойствами функций распределений случайных векторов, а также ещё двумя дополнительными свойствами:

**Утверждение 1.5.** Функции конечномерных распределений случайного процесса  $X$  обладают следующими свойствами:

1. (условие симметрии) Для любой перестановки  $k_i$  выполнено равенство

$$F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F_X(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}; t_{k_1}, \dots, t_{k_n})$$

2. (условие согласованности) Для любого индекса  $k \in \{1, \dots, n\}$  выполнено

$$\lim_{x_k \rightarrow +\infty} F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n; t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n)$$

**Теорема 1.6** (Колмогорова). Пусть имеется семейство распределений случайных векторов, удовлетворяющее всем свойствам из утверждения 1.5. Тогда существует вероятностное пространство и заданный на нём случайный процесс, семейство конечномерных распределений которого совпадает с данным.

Таким образом, случайный процесс можно задавать семейством его конечномерных распределений. На данном этапе читателю должно стать понятно, как можно задавать вероятностное распределение на множестве функций (ответ — при помощи специальных семейств конечномерных распределений).

### Задача 1

Пусть  $\eta$  — случайная величина с функцией распределения  $F_\eta$ . Найти все конечномерные распределения случайного процесса  $X_t = \eta + t$ .

#### Решение задачи 1

Одномерная функция распределения:

$$F_X(x; t) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X_t < x\} = \mathbb{P}\{\eta < x - t\} = F_\eta(x - t)$$

Конечномерная функция распределения:

$$\begin{aligned} F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) &= \mathbb{P} \bigcap_{i=1}^n \{X_{t_i} < x_i\} = \mathbb{P} \bigcap_{i=1}^n \{\eta < x_i - t_i\} = \\ &= \mathbb{P} \left\{ \eta < \min_i \{x_i - t_i\} \right\} = F_\eta \left( \min_i \{x_i - t_i\} \right) \end{aligned}$$

### Задача 2

Пусть дана случайная величина  $\eta \sim U_{[0;1]}$ . Определим случайный процесс  $X_t = \mathbb{I}_{(-\infty; \eta]}(t)$ . Найдите вид реализаций процесса, его одномерные и двумерные распределения.

#### Решение задачи 2

Реализация процесса — функция, равная единице при  $t \leq \eta$  и нулю при  $t > \eta$ , см. рис. 1.1. Одномерная функция распределения:

$$F_X(x; t) = \mathbb{P}\{X_t < x\} = \mathbb{P}\{\mathbb{I}_{(-\infty; \eta]}(t) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \mathbb{P}\{\eta < t\}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{где } \mathbb{P}\{\eta < t\} = F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & 0 < t \leq 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

Двумерная функция распределения:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}(\{X_{t_1} < x_1\} \cap \{X_{t_2} < x_2\})$$

Аналогично одномерной функции распределения,

1. Если  $x_1 \leq 0$  или  $x_2 \leq 0$ ,  $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = 0$ .
2. Если  $x_1 > 1$  и  $x_2 > 1$ ,  $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = 1$ .
3. Если  $0 < x_1 \leq 1$  и  $x_2 > 1$ ,  $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_X(x_1; t_1)$ . Аналогично симметричный случай.
4. Если  $0 < x_1, x_2 \leq 1$ ,

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}(\{\eta < t_1\} \cap \{\eta < t_2\}) = \mathbb{P}\{\eta < \min\{t_1, t_2\}\} = F_\eta(\min\{t_1, t_2\})$$

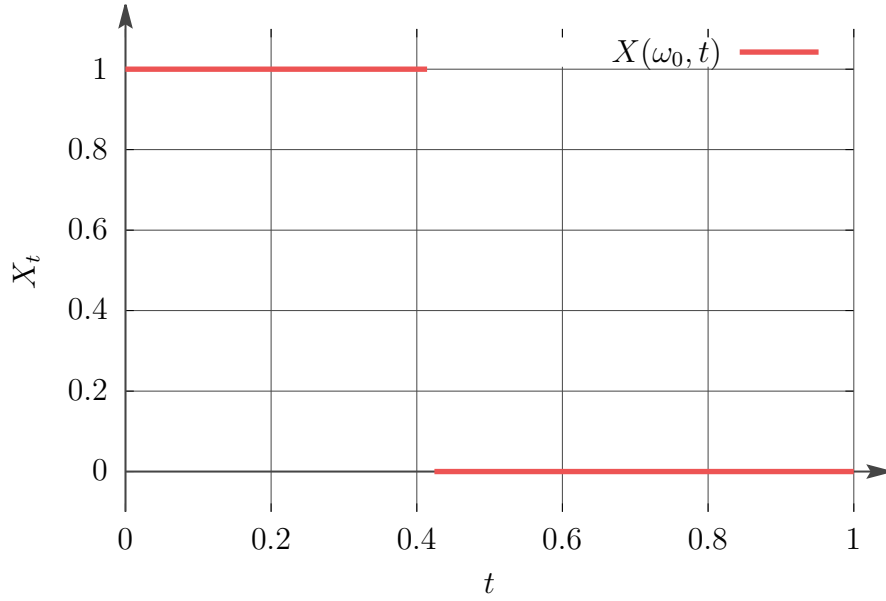


Рис. 1.1: График одной из реализаций случайного процесса из задачи 2.

Задавать процессы на вероятностных пространствах удобно также при помощи **выборочного (вторичного) пространства**.

**Определение 1.7.** Рассмотрим определённый на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  случайный процесс  $X: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть  $\mathcal{X}$  — пространство функций, содержащее в себе все траектории  $X(\omega, \cdot)$  (но не обязательно только их). Рассмотрим  $\sigma$ -алгебру, порождённую **цилиндрическими множествами**:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T = \sigma \left( \{x \in \mathcal{X} \mid x(t_1) \in B_1, \dots, x(t_n) \in B_n\}_{n \in \mathbb{N}, \{t_k\}_{k=1}^n \subseteq T, \{B_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathcal{B}} \right)$$

Отображение  $X(\omega, \cdot)$  определяет измеримое отображение  $(\Omega, \mathcal{F})$  в  $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T)$ :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T \quad \{\omega \in \Omega \mid X(\omega, \cdot) \in B\} \in \mathcal{F}$$

На пространстве  $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T)$  вероятностную меру можно определить следующим образом:

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T \quad \mathbb{P}_X B = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega, \cdot) \in B\}$$

Вероятностное пространство  $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T, \mathbb{P}_X)$  называется **выборочным (вторичным) пространством**.

### Задача 3

Рассмотрим вероятностное пространство  $(\{0, 1, 2, 3\}, 2^{\{0, 1, 2, 3\}}, \mathbb{P})$ , где  $\mathbb{P}: \mathbb{P}\{0\} = \dots = \mathbb{P}\{3\} = \frac{1}{4}$ , и случайный процесс  $X(\omega, t) = \sin(t + \frac{\pi}{2}\omega)$ ,  $t \in T = [0; 2\pi]$ . Построить вторичное (выборочное) вероятностное пространство.

### Решение задачи 3

Возьмём в качестве пространства функций  $\mathcal{X} = \{\sin(t), \sin(t + \frac{\pi}{2}), \sin(t + \pi), \sin(t + \frac{3\pi}{2})\}$ . Тогда  $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T = 2^{\mathcal{X}}$ , так как для любого подмножества  $\mathcal{X}$  можно подобрать цилиндрическое множество, с которым оно совпадает. Наконец,

$$\mathbb{P}_X: \quad \mathbb{P}_X \{\sin(t)\} = \dots = \mathbb{P}_X \{\sin(t + 3\pi/2)\} = \frac{1}{4}$$

Существование различных случайных процессов с одними и теми же вероятностными свойствами приводит к желанию (а иногда и необходимости) в некотором смысле отождествлять процессы, у которых конечномерные распределения совпадают.

**Определение 1.8.** Пусть  $X$  и  $Y$  — два случайных процесса, определённые на одном и том же вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и множестве  $T$ . Данные процессы называются **стохастически эквивалентными** в случае равенства почти наверное их реализаций в любой выбранный момент, то есть

$$\forall t \in T \quad \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega, t) = Y(\omega, t)\} = 1$$

В этом случае  $Y$  называют **модификацией** процесса  $X$  (и наоборот).

**Утверждение 1.9.** Стохастически эквивалентные случайные процессы имеют одинаковое семейство конечномерных распределений.

Например, такое отождествление полезно для осмысленного определения непрерывного случайного процесса:

**Определение 1.10.** Случайный процесс называется **непрерывным** в случае, если существует его модификация с непрерывными реализациями.

#### Задача 4

Пусть  $\eta \sim U_{[0,1]}$ . Определим случайный процесс  $X_t = \mathbb{I}_{\{\eta\}}(t)$  (то есть  $X_t = 1$  в том и только в том случае, когда  $\eta = t$ , и равен 0 иначе). Является ли  $X_t$  непрерывным процессом?

#### Решение задачи 4

Да, является. Процесс  $Y_t \equiv 0$  является его модификацией.

При исследовании случайных процессов также бывает полезно рассматривать их моменты, дающие некоторое представление об усреднённом поведении процесса. В отличие от моментов случайных величин, любые моменты случайного процесса также зависят от времени.

**Определение 1.11.** Если  $\forall t \in T$  существует  $\mathbb{E} X_t$ , то функция  $m_X(t) = \mathbb{E} X_t$  определена и называется **функцией среднего**.

Аналогично вводятся функции любых других моментов случайной величины  $X_t$ . При работе со случайными процессами нас также будут интересовать моменты, «разнесённые во времени».

**Определение 1.12.** Если  $\forall t_1, t_2 \in T$  существует  $\mathbb{E} X_{t_1} X_{t_2}$ , то функции  $K_X(t_1, t_2) = \mathbb{E} X_{t_1} X_{t_2}$  и  $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E} \overset{\circ}{X}_{t_1} \overset{\circ}{X}_{t_2}$  определены и называются, соответственно, **ковариационной** и **корреляционной функциями**.<sup>1</sup>

**Утверждение 1.13.** Функции  $K_X(t_1, t_2)$  и  $R_X(t_1, t_2)$  одновременно либо определены, либо не определены, причём в первом случае функция  $m_X(t)$  определена и  $R_X(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$ .

*Доказательство.* Следует из свойств моментов. □

---

<sup>1</sup>Данные обозначения не являются общепринятыми, а также несколько контринтуитивны; при чтении сторонних источников будьте внимательны.

### Задача 5

Найти корреляционную функцию случайного процесса из задачи 2.

#### Решение задачи 5

Для любого  $t_0$  случайная величина  $X_{t_0}$  может принимать только два значения — 0 или 1; это бернуллиевская случайная величина. Найдём параметр её распределения:

$$\mathbb{P}\{X_t = 1\} = \mathbb{P}\{t \leq \eta\} = 1 - F_\eta(t)$$

Следовательно,  $m_X(t) = \mathbb{E} X_t = 1 - F_\eta(t)$ . Далее,

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E} X_{t_1} X_{t_2} = 1 \cdot \mathbb{P}(\{X_{t_1} = 1\} \cap \{X_{t_2} = 1\}) = \\ &= \mathbb{P}(\{t_1 \leq \eta\} \cap \{t_2 \leq \eta\}) = 1 - F_\eta(\max\{t_1, t_2\}) \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= 1 - F_\eta(\max\{t_1, t_2\}) - (1 - F_\eta(t_1)) \cdot (1 - F_\eta(t_2)) = \\ &= F_\eta(t_1) + F_\eta(t_2) - F_\eta(t_1) \cdot F_\eta(t_2) - F_\eta(\max\{t_1, t_2\}) \end{aligned}$$

В частности, если  $t_1, t_2 \in [0; 1]$ ,

$$R_X(t_1, t_2) = t_1 + t_2 - t_1 t_2 - \max\{t_1, t_2\} = \min\{t_1, t_2\} - t_1 t_2$$

### Задача 6

Пусть  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$  и  $\eta \sim U_{[-\pi; \pi]}$  — независимые случайные величины. Определим случайный процесс  $X$  следующим образом:  $X_t = \xi \cdot \cos(t + \eta)$ , где  $t \in \mathbb{R}$ . Найдите функцию среднего и корреляционную функцию процесса.

#### Решение задачи 6

Поскольку  $\xi$  и  $\eta$  независимы,

$$m_X(t) = \mathbb{E} X_t = \mathbb{E} \xi \cdot \mathbb{E} \cos(t + \eta) = 0 \cdot \dots = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= K_X(t_1, t_2) - 0 = \mathbb{E} X_{t_1} X_{t_2} = \mathbb{E} \xi^2 \cdot \mathbb{E} (\cos(t_1 + \eta) \cdot \cos(t_2 + \eta)) = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} \mathbb{E} (\cos(t_1 - t_2) + \cos(t_1 + t_2 + 2\eta)) = \frac{1}{2} \cos(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

### Задача 7

Пусть  $U$ ,  $V$  и  $W$  — независимые в совокупности случайные величины. Известно, что  $U$  и  $V$  обладают нулевым матожиданием и дисперсией  $D$ , а  $W$  распределена с плотностью

$$\rho_W(w) = \frac{2\lambda}{\pi} \cdot \frac{\mathbb{I}_{[0; +\infty)}(w)}{\lambda^2 + w^2}, \quad \lambda > 0$$

Определим случайный процесс  $X_t = U \cos(Wt) + V \sin(Wt)$ . Вычислите функцию среднего и корреляционную функцию.

## Решение задачи 7

Поскольку  $U$ ,  $V$  и  $W$  независимы в совокупности,

$$m_X(t) = \mathbb{E} X_t = \mathbb{E} U \cdot \mathbb{E} \cos(Wt) + \mathbb{E} V \cdot \mathbb{E} \sin(Wt) = 0 \cdot \dots + 0 \cdot \dots = 0$$

Корреляционную функцию удобно искать с помощью формулы полной вероятности в непрерывном случае:

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E} (\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2} \mid W = w)) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2} \mid W = w)}_{\triangleq R_X(t_1, t_2 | w)} \cdot \rho_W(w) dw$$

В силу нулевого матожидания,

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E} ((U \cos(wt_1) + V \sin(wt_1)) \cdot (U \cos(wt_2) + V \sin(wt_2))) = \\ &= \mathbb{E}(U^2) \cdot \cos(wt_1) \cos(wt_2) + 2 \cdot \underbrace{\mathbb{E} U \mathbb{E} V}_{0} \cdot \dots + \mathbb{E}(V^2) \cdot \sin(wt_1) \sin(wt_2) = D \cos(w(t_1 - t_2)) \end{aligned}$$

Наконец,

$$R_X(t_1, t_2) = \int_0^{+\infty} D \cos(w(t_1 - t_2)) \cdot \frac{2\lambda}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + w^2} dw = D e^{-\lambda|t_1 - t_2|}$$

Здесь использовалось значение интеграла Лапласа:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$$

**Определение 1.14.** Функцией коэффициента корреляции называют функцию

$$r_X(t_1, t_2) = \frac{R_X(t_1, t_2)}{\sqrt{R_X(t_1, t_1) \cdot R_X(t_2, t_2)}} = \frac{\text{cov}(X_{t_1}, X_{t_2})}{\sqrt{\mathbb{D} X_{t_1} \mathbb{D} X_{t_2}}}$$

Данная функция, если определена, принимает значения от  $-1$  до  $1$  и имеет смысл степени линейной связи сечений процесса, соответствующих выбранным моментам времени.

## Задача 8

Найти функции коэффициента корреляции для процессов из задач 6 и 7.

## Решение задачи 8

- Задача 6:  $r_X(t_1, t_2) = \frac{\frac{1}{2} \cos(t_1 - t_2)}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = \cos(t_1 - t_2).$

Если взять два произвольных момента времени и начать сдвигать их друг к другу или друг от друга, будет наблюдаться периодическая корреляция и декорреляция соответствующих сечений.

- Задача 7:  $r_X(t_1, t_2) = \frac{D e^{-\lambda|t_1 - t_2|}}{\sqrt{D e^{-\lambda \cdot 0} \cdot D e^{-\lambda \cdot 0}}} = e^{-\lambda|t_1 - t_2|}.$

Несмотря на схожесть процессов, в данном случае наблюдается корреляция, затухающая экспоненциально с ростом разницы между моментами времени, в которых взяты сечения.



Дело в том, что в первом процессе случайным был фазовый сдвиг, а потому реализации процесса «не расползались». Во втором же случае случайной является ещё и частота, и линейная связь между разными моментами времени быстро теряется (реализации «декогерируют»).

## 2 Важные примеры случайных процессов

В этом разделе речь пойдёт о нескольких процессах особого вида, наиболее часто встречающихся при исследовании реальных явлений. Зачастую такие процессы именные. На их примере мы продолжим практиковаться в решении задач, а также введём несколько новых теоретических понятий.

### 2.1 Пуассоновский процесс

Данный процесс встречается в реальной жизни довольно часто; он описывает поток случайных событий, которые регистрируются с некоторой постоянной «интенсивностью». Например, речь может идти о регистрации космических частиц, о кликах по ссылке, о запросах к серверу, о проезжающих по магистрали автомобилях. Дадим формальное определение.

**Определение 2.1.** Случайный процесс  $X$  называется **процессом с независимыми приращениями**, если  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \{t_i\}_{i=1}^n \subseteq T$  случайные величины  $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1}$  независимы в совокупности.

**Определение 2.2.** Пуассоновским процессом с интенсивностью  $\lambda > 0$  называется случайный процесс  $K: \Omega \times [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{N}$  такой, что

1.  $K_0 \stackrel{\text{п.п.}}{=} 0$ .
2.  $K$  — процесс с независимыми приращениями.
3.  $K_t - K_s \sim \text{Po}(\lambda \cdot (t - s))$  (при  $t > s \geq 0$ ).

Это одно из эквивалентных определений, пуассоновский процесс можно определить и иначе:

**Теорема 2.3** (Явная конструкция пуассоновского процесса). Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_k, \dots \sim \text{Exp}(\lambda)$  и независимы в совокупности,  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Тогда процесс  $X_t = \sup\{n \mid S_n \leq t\}$  есть пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$ .

Процесс  $X_t$ , построенный по случайным величинам  $\xi_k$  способом, указанным в теореме, называется **процессом восстановления** и отвечает следующей модели: в нулевой момент включается прибор, который работает время  $\xi_1$ , после чего ломается. Одновременно с поломкой включается следующий прибор, который работает случайное время  $\xi_2$ , и так далее. Величина  $X_t$  отражает количество приборов, введённых в эксплуатацию к моменту  $t$ .

**Утверждение 2.4.** Пуассоновский процесс обладает следующими свойствами:

1. Реализации пуассоновского процесса — кусочно-постоянные неубывающие функции со значениями в  $\mathbb{N}$ .
2. С вероятностью 1 все скачки пуассоновского процесса равны единице.
3. Время, когда произошёл  $n$ -ый скачок (обозначим его  $\tau_n$ ) имеет  $\Gamma(n, 1/\lambda)$ -распределение:

$$\rho_{\tau_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \cdot \mathbb{I}_{[0; +\infty)}(t)$$

4. Случайные величины  $\{\tau_n - \tau_{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$  распределены экспоненциально с параметром  $\lambda$  и независимы.

5. Число событий за конечный период времени конечно с вероятностью 1.
6. Число событий  $K_{t+h} - K_t$  на промежутке  $(t; t+h]$  зависит лишь от длины промежутка  $h$ :  $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t = k\} = p(h, k)$
7. Вероятность более чем одного скачка на полуинтервале  $(t; t+h]$  есть  $o(h)$ , то есть  $\lim_{h \rightarrow +0} \mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 1\} = 0$ .
8. Для коротких полуинтервалов  $(t; t+h]$  вероятность того, что на них произойдёт хотя бы один скачок, убывает линейно с уменьшением  $h$ :  $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 0\} = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$  при  $h \rightarrow 0$ .
9. Из определения распределения Пуассона:

$$\mathbb{P}\{K_t = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Наконец, приведём ещё одно из альтернативных определений пуассоновского процесса:

**Утверждение 2.5.** Случайный процесс  $K: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{N}$  является пуассоновским тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим свойствам:

1. (стационарность приращений)  $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t = k\} = p(h, k)$
2. (отсутствие последействия) Приращения процесса независимы.
3. (ординарность)  $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 1\} \in o(h)$

**Утверждение 2.6.** Пусть  $K$  — пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$ . Тогда  $m_K(t) = \lambda t$ ,  $R_K(t, s) = \lambda \cdot \min\{t, s\}$ .

*Доказательство.* Так как  $K_t \stackrel{\text{н.н.}}{=} K_t - K_0 \sim \text{Po}(\lambda t)$ ,  $m_K(t) = \mathbb{E} K_t = \lambda t$ . Далее, в силу независимости приращений, при  $t \geq s$  имеем  $\text{cov}(K_t, K_s) = \text{cov}(K_t - K_s + K_s, K_s) = 0 + \text{cov}(K_s, K_s) = \lambda t$ . Поэтому  $R_K(t, s) = \lambda \cdot \min\{t, s\}$ .  $\square$

### Задача 9

Поток прибывающих на железнодорожную станцию пассажиров моделируется пуассоновским процессом  $K$  с интенсивностью  $\lambda$ . В момент  $t = 0$  пассажиров нет, в момент  $t = t_0$  прибывает первый поезд. Пусть  $\eta$  — суммарное время ожидания прибытия поезда всеми пассажирами на станции. Найти  $\mathbb{E} \eta$ .

#### Решение задачи 9

$$\eta = \int_0^{t_0} K_t dt, \quad \mathbb{E} \eta = \int_{\Omega} d\mathbb{P} \int_0^{t_0} K_t dt = \int_0^{t_0} dt \int_{\Omega} K_t d\mathbb{P} = \int_0^{t_0} m_K(t) dt = \int_0^{t_0} \lambda t dt = \frac{\lambda t_0^2}{2}$$

### Задача 10

Пусть  $K_t$  — пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$ , а  $\tau_1$  — момент первого скачка. Найдите  $\mathbb{P}\{\tau_1 \leq s \mid K_t = 1\}$  при  $0 < s < t$ .

### Решение задачи 10

Событие  $\{\tau_1 \leq s\}$  означает, что первый скачок процесса произошёл не позже момента  $s$ . Если при этом  $K_t = 1$ , то это означает, что  $K_s = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\tau_1 \leq s \mid K_t = 1\} &= \mathbb{P}\{K_s = 1 \mid K_t = 1\} = \frac{\mathbb{P}(\{K_s = 1\} \cap \{K_t = 1\})}{\mathbb{P}\{K_t = 1\}} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{K_s = 1\} \cap \{K_t - K_s = 0\})}{\mathbb{P}\{K_t = 1\}} = \frac{\frac{\lambda s}{1!} e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^0}{0!} e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{\lambda t}{1!} e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}\end{aligned}$$

### Задача 11

Пусть  $K$  — пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$ ,  $\tau_3$  — время третьего скачка процесса. Найти  $\mathbb{P}\{\tau_3 \leq 2\}$ .

### Решение задачи 11

$$\mathbb{P}\{\tau_3 \leq 2\} = \mathbb{P}\{K_2 \geq 3\} = 1 - \mathbb{P}\{K_2 < 3\} = 1 - e^{-2\lambda} - \frac{2\lambda}{1!} e^{-2\lambda} - \frac{(2\lambda)^2}{2!} e^{-2\lambda}$$

### Задача 12

Пусть  $\eta \sim U_{[0;1]}$ ,  $K$  — пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$ , и  $\eta$  не зависит от  $K$ . Найти  $\mathbb{P}\{K_\eta = K_{\eta+1}\}$ .

### Решение задачи 12

По формуле полной вероятности,

$$\mathbb{P}\{K_\eta = K_{\eta+1}\} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{\underbrace{K_{t+1} - K_t}_{\sim \text{Po}(1 \cdot \lambda)} = 0 \mid \eta = t\} \cdot \rho_\eta(t) dt = \int_0^1 e^{-1 \cdot \lambda} dt = e^{-\lambda}$$