

# Случайные процессы: семинары

Бутаков И. Д.

2023

## Содержание

<b>Предисловие</b>	<b>2</b>
Используемые обозначения . . . . .	2
<b>1 Основные сведения</b>	<b>3</b>
<b>2 Важные примеры случайных процессов</b>	<b>9</b>
2.1 Пуассоновский процесс . . . . .	9
2.2 Гауссовские процессы . . . . .	13
2.2.1 Винеровский процесс . . . . .	15

# Предисловие

Перед вами сборник всех семинаров по случайным процессам за авторством Бутакова И. Д. Автор выражает благодарность Останину Павлу Антоновичу и Ширококову Максиму Геннадьевичу за предоставленные материалы.

## Используемые обозначения

$\stackrel{\Delta}{\Longleftrightarrow}$	«... по определению тогда и только тогда, когда ...»
$\stackrel{\Delta}{=}$	«... по определению равно ...»
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	вероятностное пространство ( $\Omega$ — множество исходов, $\mathcal{F}$ — $\sigma$ -алгебра, $\mathbb{P}$ — вероятностная мера).
$\mathcal{B}(A), \mathcal{B}_A$	Борелевская $\sigma$ -алгебра, определённая на множестве $A$ (если $A$ не указано, по умолчанию предполагается $A = \mathbb{R}$ ).
$\mathbb{I}_A$	индикаторная функция множества $A$ .
$\mathbb{E} X$	математическое ожидание случайной величины $X$ .
$\mathbb{D} X$	дисперсия случайной величины $X$ .
$\overset{\circ}{X}$	«центрированная» случайная величина: $\overset{\circ}{X} = X - \mathbb{E} X$ .
$\text{Be}(p)$	распределение Бернулли с параметром $p$ .
$\text{Bi}(n, p)$	биномиальное распределение с параметрами $n$ и $p$ .
$\text{Po}(\lambda)$	распределение Пуассона с интенсивностью $\lambda$ .
$\text{U}(A), \text{U}_A$	равномерное распределение на множестве $A$ .
$\text{Exp}(\lambda)$	показательное распределение с параметром $\lambda$ (интенсивность).
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	нормальное распределение со средним $\mu$ и дисперсией $\sigma^2$ .
$\xrightarrow{\text{с.к.}}$	сходимость в среднем квадратичном.
$\xrightarrow{\text{п.н.}}$	сходимость почти наверное.
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$	сходимость по вероятности.
$\xrightarrow{d}$	сходимость по распределению.
$\stackrel{\text{п.н.}}{=}$	равенство почти наверное.
$\stackrel{d}{=}$	равенство по распределению.

# 1 Основные сведения

Случайные процессы — математические объекты, построенные с использованием теории вероятностей для исследования и моделирования реальных явлений, растянутых во времени и имеющих стохастическую (случайную) природу.

**Определение 1.1.** Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и множество  $T \subseteq \mathbb{R}$ . Функция  $X: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$  называется **случайным процессом**, если  $\forall t \in T$  функция  $X(\cdot, t) \equiv X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  измерима (то есть является случайной величиной).

Случайный процесс можно трактовать как семейство случайных величин, параметризованное  $t \in T$ . Параметр  $t$  обычно интерпретируется как время. Если  $T$  состоит из одного элемента, случайный процесс является обычной случайной величиной, если  $T$  конечно — случайным вектором. Если  $T$  счётно, говорят о случайном процессе с дискретным временем. Параметр  $\omega$ , как и при описании случайных величин, часто опускается.

**Определение 1.2.** При фиксированном  $t_0 \in T$  случайная величина  $X_{t_0}$  называется **сечением случайного процесса**  $X$ .

**Определение 1.3.** При фиксированном  $\omega_0 \in \Omega$  функция  $X(\omega_0, \cdot)$  называется **реализацией (траекторией)** случайного процесса  $X$ .

Также случайный процесс можно считать особой случайной величиной, принимающей значения в пространстве функций; при такой интерпретации, однако, отдельных усилий стоит определить, что такое вероятностное распределение на функциях. В рамках семинаров данный вопрос освещаться со всей полнотой и строгостью не будет, поэтому приведём из этой области лишь основные факты и определения, требующиеся для работы со случайными процессами.

Рассмотрим произвольный случайный процесс  $X$ . В силу единства вероятностного пространства, любой вектор вида  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  (где  $t_i \in T$ ) является случайным вектором.

**Определение 1.4.** Вероятностное распределение вектора вида  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  называется **конечномерным распределением случайного процесса**  $X$ . Его функция распределения обозначается как  $F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ .

Функции распределений векторов, составленных из сечений случайного процесса, обладают всеми известными вам свойствами функций распределений случайных векторов, а также ещё двумя дополнительными свойствами:

**Утверждение 1.5.** Функции конечномерных распределений случайного процесса  $X$  обладают следующими свойствами:

1. (**условие симметрии**) Для любой перестановки  $k_i$  выполнено равенство

$$F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F_X(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}; t_{k_1}, \dots, t_{k_n})$$

2. (**условие согласованности**) Для любого индекса  $k \in \{1, \dots, n\}$  выполнено

$$\lim_{x_k \rightarrow +\infty} F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n; t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n)$$

**Теорема 1.6** (Колмогорова). Пусть имеется семейство распределений случайных векторов, удовлетворяющее всем свойствам из утверждения 1.5. Тогда существует вероятностное пространство и заданный на нём случайный процесс, семейство конечномерных распределений которого совпадает с данным.

Таким образом, случайный процесс можно задавать семейством его конечномерных распределений. На данном этапе читателю должно стать понятно, как можно задавать вероятностное распределение на множестве функций (ответ — при помощи специальных семейств конечномерных распределений).

**Задача 1.7.** Пусть  $\eta$  — случайная величина с функцией распределения  $F_\eta$ . Найти все конечномерные распределения случайного процесса  $X_t = \eta + t$ .

**Решение задачи 1.7.** Одномерная функция распределения:

$$F_X(x; t) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X_t < x\} = \mathbb{P}\{\eta < x - t\} = F_\eta(x - t)$$

Конечномерная функция распределения:

$$\begin{aligned} F_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) &= \mathbb{P} \bigcap_{i=1}^n \{X_{t_i} < x_i\} = \mathbb{P} \bigcap_{i=1}^n \{\eta < x_i - t_i\} = \\ &= \mathbb{P} \left\{ \eta < \min_i \{x_i - t_i\} \right\} = F_\eta \left( \min_i \{x_i - t_i\} \right) \end{aligned}$$

**Задача 1.8.** Пусть дана случайная величина  $\eta \sim U_{[0;1]}$ . Определим случайный процесс  $X_t = \mathbb{I}_{(-\infty; \eta]}(t)$ . Найдите вид реализаций процесса, его одномерные и двумерные распределения.

**Решение задачи 1.8.** Реализация процесса — функция, равная единице при  $t \leq \eta$  и нулю при  $t > \eta$ , см. рис. 1.1. Одномерная функция распределения:

$$F_X(x; t) = \mathbb{P}\{X_t < x\} = \mathbb{P}\{\mathbb{I}_{(-\infty; \eta]}(t) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \mathbb{P}\{\eta < t\}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{где } \mathbb{P}\{\eta < t\} = F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & 0 < t \leq 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

Двумерная функция распределения:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}(\{X_{t_1} < x_1\} \cap \{X_{t_2} < x_2\})$$

Аналогично одномерной функции распределения,

1. Если  $x_1 \leq 0$  или  $x_2 \leq 0$ ,  $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = 0$ .
2. Если  $x_1 > 1$  и  $x_2 > 1$ ,  $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = 1$ .
3. Если  $0 < x_1 \leq 1$  и  $x_2 > 1$ ,  $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_X(x_1; t_1)$ . Аналогично симметричный случай.
4. Если  $0 < x_1, x_2 \leq 1$ ,

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}(\{\eta < t_1\} \cap \{\eta < t_2\}) = \mathbb{P}\{\eta < \min\{t_1, t_2\}\} = F_\eta(\min\{t_1, t_2\})$$

Через семейства конечномерных распределений также вводится понятие **независимости** процессов.

**Определение 1.9.** Стохастические процессы  $X$  и  $Y$ , определённые на одних и тех же  $\Omega$  и  $T$ , называются **независимыми** в случае, если  $\forall n \in \mathbb{N}$  и  $\forall \{t_i\}_{i=1}^n \subseteq T$  векторы  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  и  $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$  независимы.

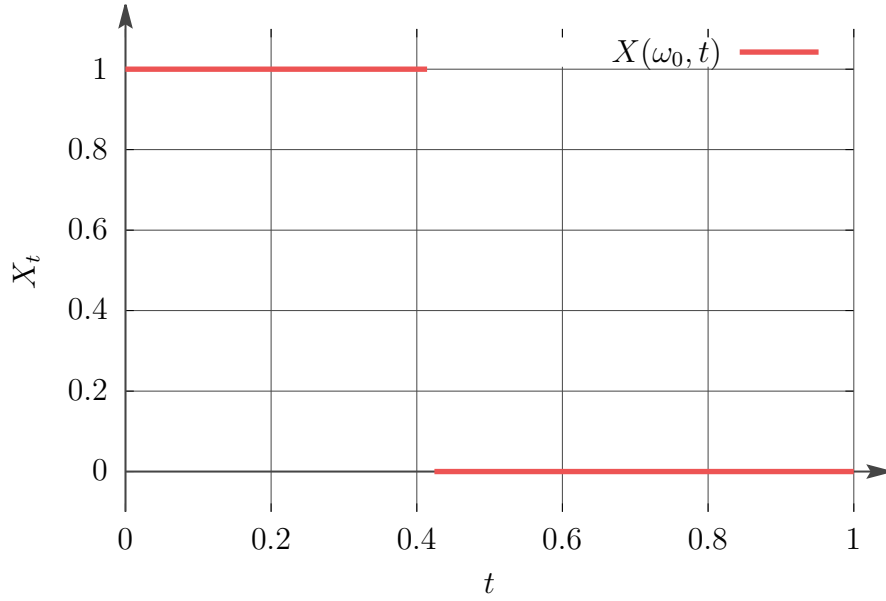


Рис. 1.1: График одной из реализаций случайного процесса из задачи 1.8.

**Замечание 1.10.** Определение 1.9 не изменится (не станет строго сильнее), если потребовать независимости любых векторов из сечений соответствующих процессов.

*Доказательство.* Рассмотрим  $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_m \in T$ . Если векторы

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, X_{s_1}, \dots, X_{s_m}) \quad \text{и} \quad (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}, Y_{s_1}, \dots, Y_{s_m})$$

независимы, то независимы и векторы  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  и  $(Y_{s_1}, \dots, Y_{s_m})$ .  $\square$

Задавать процессы на вероятностных пространствах удобно также при помощи **выборочного (вторичного) пространства**.

**Определение 1.11.** Рассмотрим определённый на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  случайный процесс  $X: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть  $\mathcal{X}$  — пространство функций, содержащее в себе все траектории  $X(\omega, \cdot)$  (но не обязательно только их). Рассмотрим  $\sigma$ -алгебру, порождённую **цилиндрическими множествами**:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T = \sigma \left( \left\{ x \in \mathcal{X} \mid x(t_1) \in B_1, \dots, x(t_n) \in B_n \right\}_{n \in \mathbb{N}, \{t_k\}_{k=1}^n \subseteq T, \{B_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathcal{B}} \right)$$

Отображение  $X(\omega, \cdot)$  определяет измеримое отображение  $(\Omega, \mathcal{F})$  в  $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T)$ :

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T \quad \{\omega \in \Omega \mid X(\omega, \cdot) \in B\} \in \mathcal{F}$$

На пространстве  $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T)$  вероятностную меру можно определить следующим образом:

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T \quad \mathbb{P}_X B = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega, \cdot) \in B\}$$

Вероятностное пространство  $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T, \mathbb{P}_X)$  называется **выборочным (вторичным) пространством**.

**Задача 1.12.** Рассмотрим вероятностное пространство  $(\{0, 1, 2, 3\}, 2^{\{0, 1, 2, 3\}}, \mathbb{P})$ , где  $\mathbb{P}\{0\} = \dots = \mathbb{P}\{3\} = \frac{1}{4}$ , и случайный процесс  $X(\omega, t) = \sin(t + \frac{\pi}{2}\omega)$ ,  $t \in T = [0; 2\pi]$ . Построить вторичное (выборочное) вероятностное пространство.

**Решение задачи 1.12.** Возьмём в качестве пространства функций  $\mathcal{X} = \{\sin(t), \sin(t + \frac{\pi}{2}), \sin(t + \pi)\}$ . Тогда  $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T = 2^{\mathcal{X}}$ , так как для любого подмножества  $\mathcal{X}$  можно подобрать цилиндрическое множество, с которым оно совпадает. Наконец,

$$\mathbb{P}_X : \quad \mathbb{P}_X \{\sin(t)\} = \dots = \mathbb{P}_X \{\sin(t + 3\pi/2)\} = \frac{1}{4}$$

Существование различных случайных процессов с одними и теми же вероятностными свойствами приводит к желанию (а иногда и необходимости) в некотором смысле отождествлять процессы, у которых конечномерные распределения совпадают.

**Определение 1.13.** Пусть  $X$  и  $Y$  — два случайных процесса, определённые на одном и том же вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и множестве  $T$ . Данные процессы называются **стохастически эквивалентными** в случае равенства почти наверное их реализаций в любой выбранный момент, то есть

$$\forall t \in T \quad \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega, t) = Y(\omega, t)\} = 1$$

В этом случае  $Y$  называют **модификацией** процесса  $X$  (и наоборот).

**Утверждение 1.14.** Стохастически эквивалентные случайные процессы имеют одинаковое семейство конечномерных распределений.

Например, такое отождествление полезно для осмысленного определения непрерывного случайного процесса:

**Определение 1.15.** Случайный процесс называется **непрерывным** в случае, если существует его модификация с непрерывными реализациями.

**Задача 1.16.** Пусть  $\eta \sim U_{[0,1]}$ . Определим случайный процесс  $X_t = \mathbb{I}_{\{\eta\}}(t)$  (то есть  $X_t = 1$  в том и только в том случае, когда  $\eta = t$ , и равен 0 иначе). Является ли  $X_t$  непрерывным процессом?

**Решение задачи 1.16.** Да, является. Процесс  $Y_t \equiv 0$  является его модификацией.

При исследовании случайных процессов также бывает полезно рассматривать их моменты, дающие некоторое представление об усреднённом поведении процесса. В отличие от моментов случайных величин, любые моменты случайного процесса также зависят от времени.

**Определение 1.17.** Если  $\forall t \in T$  существует и конечно  $\mathbb{E} X_t$ , то функция  $m_X(t) = \mathbb{E} X_t$  определена и называется **функцией среднего**.

Аналогично вводятся функции любых других моментов случайной величины  $X_t$ . При работе со случайными процессами нас также будут интересовать моменты, «разнесённые во времени».

**Определение 1.18.** Если  $\forall t_1, t_2 \in T$  существует и конечно  $\mathbb{E} X_{t_1} X_{t_2}$ , то функции  $K_X(t_1, t_2) = \mathbb{E} X_{t_1} X_{t_2}$  и  $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E} \dot{X}_{t_1} \dot{X}_{t_2}$  определены и называются, соответственно, **ковариационной** и **корреляционной функциями**.<sup>1</sup>

**Утверждение 1.19.** Функции  $K_X(t_1, t_2)$  и  $R_X(t_1, t_2)$  одновременно либо определены, либо не определены, причём в первом случае функция  $m_X(t)$  определена и  $R_X(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2)$ .

*Доказательство.* Следует из свойств моментов. □

**Определение 1.20.** Процесс, у которого существует ковариационная/корреляционная функция, называется  **$\mathbb{L}_2$ -процессом**.

---

<sup>1</sup>Данные обозначения не являются общепринятыми, а также несколько контринтуитивны; при чтении сторонних источников будьте внимательны.

**Задача 1.21.** Найти корреляционную функцию случайного процесса из задачи 1.8.

**Решение задачи 1.21.** Для любого  $t_0$  случайная величина  $X_{t_0}$  может принимать только два значения — 0 или 1; это бернуллиевская случайная величина. Найдём параметр её распределения:

$$\mathbb{P}\{X_t = 1\} = \mathbb{P}\{t \leq \eta\} = 1 - F_\eta(t)$$

Следовательно,  $m_X(t) = \mathbb{E} X_t = 1 - F_\eta(t)$ . Далее,

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E} X_{t_1} X_{t_2} = 1 \cdot \mathbb{P}(\{X_{t_1} = 1\} \cap \{X_{t_2} = 1\}) = \\ &= \mathbb{P}(\{t_1 \leq \eta\} \cap \{t_2 \leq \eta\}) = 1 - F_\eta(\max\{t_1, t_2\}) \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= 1 - F_\eta(\max\{t_1, t_2\}) - (1 - F_\eta(t_1)) \cdot (1 - F_\eta(t_2)) = \\ &= F_\eta(t_1) + F_\eta(t_2) - F_\eta(t_1) \cdot F_\eta(t_2) - F_\eta(\max\{t_1, t_2\}) \end{aligned}$$

В частности, если  $t_1, t_2 \in [0; 1]$ ,

$$R_X(t_1, t_2) = t_1 + t_2 - t_1 t_2 - \max\{t_1, t_2\} = \min\{t_1, t_2\} - t_1 t_2$$

**Задача 1.22.** Пусть  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$  и  $\eta \sim U_{[-\pi; \pi]}$  — независимые случайные величины. Определим случайный процесс  $X$  следующим образом:  $X_t = \xi \cdot \cos(t + \eta)$ , где  $t \in \mathbb{R}$ . Найдите функцию среднего и корреляционную функцию процесса.

**Решение задачи 1.22.** Поскольку  $\xi$  и  $\eta$  независимы,

$$m_X(t) = \mathbb{E} X_t = \mathbb{E} \xi \cdot \mathbb{E} \cos(t + \eta) = 0 \cdot \dots = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= K_X(t_1, t_2) - 0 = \mathbb{E} X_{t_1} X_{t_2} = \mathbb{E} \xi^2 \cdot \mathbb{E} (\cos(t_1 + \eta) \cdot \cos(t_2 + \eta)) = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} \mathbb{E} (\cos(t_1 - t_2) + \cos(t_1 + t_2 + 2\eta)) = \frac{1}{2} \cos(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

**Задача 1.23.** Пусть  $U$ ,  $V$  и  $W$  — независимые в совокупности случайные величины. Известно, что  $U$  и  $V$  обладают нулевым матожиданием и дисперсией  $D$ , а  $W$  распределена с плотностью

$$\rho_W(w) = \frac{2\lambda}{\pi} \cdot \frac{\mathbb{I}_{[0; +\infty)}(w)}{\lambda^2 + w^2}, \quad \lambda > 0$$

Определим случайный процесс  $X_t = U \cos(Wt) + V \sin(Wt)$ . Вычислите функцию среднего и корреляционную функцию.

**Решение задачи 1.23.** Поскольку  $U$ ,  $V$  и  $W$  независимы в совокупности,

$$m_X(t) = \mathbb{E} X_t = \mathbb{E} U \cdot \mathbb{E} \cos(Wt) + \mathbb{E} V \cdot \mathbb{E} \sin(Wt) = 0 \cdot \dots + 0 \cdot \dots = 0$$

Корреляционную функцию удобно искать с помощью формулы полной вероятности в непрерывном случае:

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E} (\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2} \mid W = w)) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2} \mid W = w)}_{\triangleq R_X(t_1, t_2 \mid w)} \cdot \rho_W(w) dw$$

В силу нулевого матожидания,

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E}((U \cos(wt_1) + V \sin(wt_1)) \cdot (U \cos(wt_2) + V \sin(wt_2))) = \\ &= \mathbb{E}(U^2) \cdot \cos(wt_1) \cos(wt_2) + 2 \cdot \underbrace{\mathbb{E} U \mathbb{E} V}_0 \cdot \dots + \mathbb{E}(V^2) \cdot \sin(wt_1) \sin(wt_2) = D \cos(w(t_1 - t_2)) \end{aligned}$$

Наконец,

$$R_X(t_1, t_2) = \int_0^{+\infty} D \cos(w(t_1 - t_2)) \cdot \frac{2\lambda}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + w^2} dw = D e^{-\lambda|t_1 - t_2|}$$

Здесь использовалось значение интеграла Лапласа:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$$

**Определение 1.24.** *Функцией коэффициента корреляции называют функцию*

$$r_X(t_1, t_2) = \frac{R_X(t_1, t_2)}{\sqrt{R_X(t_1, t_1) \cdot R_X(t_2, t_2)}} = \frac{\text{cov}(X_{t_1}, X_{t_2})}{\sqrt{\mathbb{D} X_{t_1} \mathbb{D} X_{t_2}}}$$

Данная функция, если определена, принимает значения от  $-1$  до  $1$  и имеет смысл степени линейной связи сечений процесса, соответствующих выбранным моментам времени.

**Задача 1.25.** Найти функции коэффициента корреляции для процессов из задач 1.22 и 1.23.

**Решение задачи 1.25.**

- Задача 1.22:  $r_X(t_1, t_2) = \frac{\frac{1}{2} \cos(t_1 - t_2)}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = \cos(t_1 - t_2).$

Если взять два произвольных момента времени и начать сдвигать их друг к другу или друг от друга, будет наблюдаться периодическая корреляция и декорреляция соответствующих сечений.

- Задача 1.23:  $r_X(t_1, t_2) = \frac{D e^{-\lambda|t_1 - t_2|}}{\sqrt{D e^{-\lambda \cdot 0} \cdot D e^{-\lambda \cdot 0}}} = e^{-\lambda|t_1 - t_2|}.$

Несмотря на схожесть процессов, в данном случае наблюдается корреляция, затухающая экспоненциально с ростом разницы между моментами времени, в которых взяты сечения.

Дело в том, что в первом процессе случайным был фазовый сдвиг, а потому реализации процесса «не расползались». Во втором же случае случайной является ещё и частота, и линейная связь между разными моментами времени быстро теряется (реализации «декогерируют»).

Из курса теории вероятностей вы должны помнить, что случайные величины удобно исследовать при помощи характеристической функции. Аналогичный объект можно ввести и для случайного процесса.

**Определение 1.26.** *Характеристической функцией случайного процесса  $X$  называется функция  $\varphi_X(t, s) = \varphi_{X_t}(s) \triangleq \mathbb{E} \exp(i s \cdot X_t)$ , где  $i^2 = -1$ .*



## 2 Важные примеры случайных процессов

В этом разделе речь пойдёт о нескольких процессах особого вида, наиболее часто встречающихся при исследовании реальных явлений. Зачастую такие процессы именованные. На их примере мы продолжим практиковаться в решении задач, а также введём несколько новых теоретических понятий.

### 2.1 Пуассоновский процесс

Данный процесс встречается в реальной жизни довольно часто; он описывает поток случайных событий, которые регистрируются с некоторой постоянной «интенсивностью». Например, речь может идти о регистрации космических частиц, о кликах по ссылке, о запросах к серверу, о проезжающих по магистрали автомобилях.

Пуассоновский процесс можно неформально определить следующим образом: пусть ось времени разбита на бесконечно малые промежутки  $\Delta t$ . Тогда пуассоновский процесс ведёт себя следующим образом: в самом начале он равен нулю, и на каждом последующем шаге по времени может претерпеть скачок на  $+1$  с вероятностью  $\lambda \Delta t$ . Параметр  $\lambda$  называется интенсивностью процесса и характеризует «скорость» потока событий. Дадим формальное определение:

**Определение 2.1** (Явная конструкция пуассоновского процесса). Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_k, \dots \sim \text{Exp}(\lambda)$  и независимы в совокупности,  $\tau_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ . Тогда процесс  $K_t = \sup\{n \mid \tau_n \leq t\}$  называется **пуассоновским процессом с интенсивностью  $\lambda$** .

Процесс  $K_t$ , построенный способом, указанным выше, называется **процессом восстановления, построенным по величинам  $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$** , и отвечает следующей модели: в нулевой момент включается прибор, который работает время  $\xi_1$ , после чего ломается. Одновременно с поломкой включается следующий прибор, который работает случайное время  $\xi_2$ , и так далее. Величина  $K_t$  отражает количество приборов, введённых в эксплуатацию к моменту  $t$ .

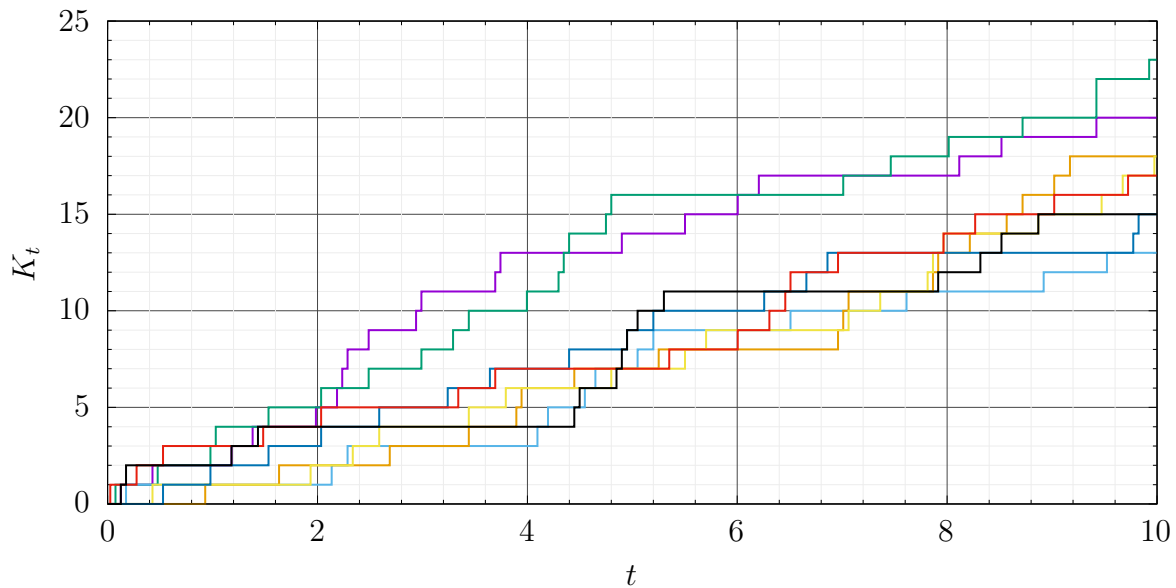


Рис. 2.1: Пример пучка реализаций пуассоновского процесса с интенсивностью  $\lambda = 2$ .

Приведённая явная конструкция возвращает нас к неформальному определению, использующему дискретное время с шагом  $\Delta t$ . Можно заметить, что экспоненциальное распределение получается как предел вероятностного распределения случайной величины —

времени между соседними скачками — при  $\Delta t \rightarrow +0$ :

$$\mathbb{P}\{\xi_i \in [t; t+h)\} = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} (1 - \lambda \Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} \cdot \left( \lambda \Delta t \cdot \frac{h}{\Delta t} + o(h) \right) = \lambda e^{-\lambda t} (h + o(h))$$

Пуассоновский процесс можно определить и иначе. Для этого введём понятие процесса с независимыми приращениями.

**Определение 2.2.** *Случайный процесс  $X$  называется процессом с независимыми приращениями, если  $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall \{t_i\}_{i=1}^n \subseteq T$  случайные величины  $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1}$  независимы в совокупности.*

**Определение 2.3.** *Пуассоновским процессом с интенсивностью  $\lambda > 0$  называется случайный процесс  $K: \Omega \times [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{N}$  такой, что*

1.  $K_0 \stackrel{\text{п.н.}}{=} 0$ .
2.  $K$  — процесс с независимыми приращениями.
3.  $K_t - K_s \sim \text{Po}(\lambda \cdot (t - s))$  (при  $t > s \geq 0$ ).

**Теорема 2.4.** *Определения 2.1 и 2.3 эквивалентны.*

**Утверждение 2.5.** *Пуассоновский процесс обладает следующими свойствами:*

1. Реализации пуассоновского процесса — кусочно-постоянные неубывающие функции со значениями в  $\mathbb{N}$ .
2. С вероятностью 1 все скачки пуассоновского процесса равны единице.
3. Время, когда произошёл  $n$ -ый скачок (обозначим его  $\tau_n$ ) имеет  $\Gamma(n, 1/\lambda)$ -распределение:

$$\rho_{\tau_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \cdot \mathbb{I}_{[0; +\infty)}(t)$$

4. Случайные величины  $\{\tau_n - \tau_{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$  распределены экспоненциально с параметром  $\lambda$  и независимы.
5. Число событий за конечный период времени конечно с вероятностью 1.
6. Число событий  $K_{t+h} - K_t$  на промежутке  $(t; t+h]$  зависит лишь от длины промежутка  $h$ :  $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t = k\} = p(h, k)$
7. Вероятность более чем одного скачка на полуинтервале  $(t; t+h]$  есть  $o(h)$ , то есть  $\lim_{h \rightarrow +0} \mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 1\}/h = 0$ .
8. Для коротких полуинтервалов  $(t; t+h]$  вероятность того, что на них произойдёт хотя бы один скачок, убывает линейно с уменьшением  $h$ :  $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 0\} = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$  при  $h \rightarrow 0$ .
9. Из определения распределения Пуассона:

$$\mathbb{P}\{K_t = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Наконец, приведём ещё одно из альтернативных определений пуассоновского процесса:

**Утверждение 2.6.** *Случайный процесс  $K: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{N}$  является пуассоновским тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим свойствам:*

1. (стационарность приращений)  $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t = k\} = p(h, k)$
2. (отсутствие последствия) Приращения процесса независимы.
3. (ординарность)  $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 1\} \in o(h)$

**Утверждение 2.7.** Пусть  $K$  — пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$ . Тогда  $m_K(t) = \lambda t$ ,  $R_K(t, s) = \lambda \cdot \min\{t, s\}$ .

*Доказательство.* Так как  $K_t \stackrel{\text{н.н.}}{=} K_t - K_0 \sim \text{Po}(\lambda t)$ ,  $m_K(t) = \mathbb{E} K_t = \lambda t$ . Далее, в силу независимости приращений, при  $t \geq s$  имеем  $\text{cov}(K_t, K_s) = \text{cov}(K_t - K_s + K_s, K_s) = 0 + \text{cov}(K_s, K_s) = \lambda t$ . Поэтому  $R_K(t, s) = \lambda \cdot \min\{t, s\}$ .  $\square$

**Задача 2.8.** Поток прибывающих на железнодорожную станцию пассажиров моделируется пуассоновским процессом  $K$  с интенсивностью  $\lambda$ . В момент  $t = 0$  пассажиров нет, в момент  $t = t_0$  прибывает первый поезд. Пусть  $\eta$  — суммарное время ожидания прибытия поезда всеми пассажирами на станции. Найти  $\mathbb{E} \eta$ .

**Решение задачи 2.8.**

$$\eta = \int_0^{t_0} K_t dt, \quad \mathbb{E} \eta = \int_{\Omega} d\mathbb{P} \int_0^{t_0} K_t dt = \int_0^{t_0} dt \int_{\Omega} K_t d\mathbb{P} = \int_0^{t_0} m_K(t) dt = \int_0^{t_0} \lambda t dt = \frac{\lambda t_0^2}{2}$$

**Задача 2.9.** Пусть  $K_t$  — пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$ , а  $\tau_1$  — момент первого скачка. Найдите  $\mathbb{P}\{\tau_1 \leq s \mid K_t = 1\}$  при  $0 < s < t$ .

**Решение задачи 2.9.** Событие  $\{\tau_1 \leq s\}$  означает, что первый скачок процесса произошёл не позже момента  $s$ . Если при этом  $K_t = 1$ , то это означает, что  $K_s = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\tau_1 \leq s \mid K_t = 1\} &= \mathbb{P}\{K_s = 1 \mid K_t = 1\} = \frac{\mathbb{P}(\{K_s = 1\} \cap \{K_t = 1\})}{\mathbb{P}\{K_t = 1\}} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{K_s = 1\} \cap \{K_t - K_s = 0\})}{\mathbb{P}\{K_t = 1\}} = \frac{\frac{\lambda s}{1!} e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^0}{0!} e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{\lambda t}{1!} e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t} \end{aligned}$$

**Задача 2.10.** Пусть  $K$  — пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$ ,  $\tau_3$  — время третьего скачка процесса. Найти  $\mathbb{P}\{\tau_3 \leq 2\}$ .

**Решение задачи 2.10.**

$$\mathbb{P}\{\tau_3 \leq 2\} = \mathbb{P}\{K_2 \geq 3\} = 1 - \mathbb{P}\{K_2 < 3\} = 1 - e^{-2\lambda} - \frac{2\lambda}{1!} e^{-2\lambda} - \frac{(2\lambda)^2}{2!} e^{-2\lambda}$$

**Задача 2.11.** Пусть  $\eta \sim U_{[0;1]}$ ,  $K$  — пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$ , и  $\eta$  не зависит от  $K$ . Найти  $\mathbb{P}\{K_{\eta} = K_{\eta+1}\}$ .

**Решение задачи 2.11.** По формуле полной вероятности,

$$\mathbb{P}\{K_\eta = K_{\eta+1}\} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{\underbrace{K_{t+1} - K_t}_{\sim \text{Po}(1 \cdot \lambda)} = 0 \mid \eta = t\} \cdot \rho_\eta(t) dt = \int_0^1 e^{-1 \cdot \lambda} dt = e^{-\lambda}$$

Пуассоновский процесс моделирует лишь поток некоторых событий. Иногда сами события также имеют сложную и/или случайную природу. Тогда требуется построить более продвинутую модель, наследующую от пуассоновского процесса только характер возникновения событий с течением времени. В качестве примера такой модели можно привести **сложный (составной) пуассоновский процесс**. Данный процесс может возникнуть, например, при моделировании покупок в магазине: каждый покупатель будет появляться на кассе согласно пуассоновскому процессу, при этом закупааясь на некоторое случайное количество денег.

**Определение 2.12.** Рассмотрим пуассоновский процесс  $K$  и набор независимых (в совокупности с  $K$ ) одинаково распределённых случайных величин  $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ . **Сложным пуассоновским процессом** называется процесс  $Q_t = \sum_{j=1}^{K_t} V_j$ .

Это означает следующее:  $Q_0 \stackrel{\text{п.н.}}{=} 0$ , и в каждый момент, когда  $K$  испытывает скачок, к  $Q$  добавляется  $V_j$ .

**Утверждение 2.13.** Сложный пуассоновский процесс является процессом с независимыми приращениями.

*Доказательство.* Следует из независимости приращений  $K$  и независимости  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  в совокупности с  $K_t$ .  $\square$

**Утверждение 2.14.** Рассмотрим сложный пуассоновский процесс  $Q$  с интенсивностью  $\lambda$ , определённый по случайным величинам  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ . Пусть  $\varphi_V(s)$  — характеристическая функция случайных величин  $V_j$ . Тогда характеристическая функция процесса  $Q$  задаётся формулой

$$\varphi_{Q_t}(s) = e^{(\varphi_V(s)-1) \cdot \lambda t}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \varphi_{Q_t}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{is \cdot Q_t} \mid K_t = k) \mathbb{P}\{K_t = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{is \cdot (V_1 + \dots + V_k)}) \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_V(s))^k \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{\varphi_V(s) \cdot \lambda t} \cdot e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

$\square$

**Следствие 2.15.** Функция среднего и корреляционная функция сложного пуассоновского процесса имеют вид, соответственно,

$$m_Q(t) = \lambda t \cdot \mathbb{E} V, \quad R_Q(t, s) = \lambda \min\{t, s\} \cdot \mathbb{E}(V^2)$$

*Доказательство.* По свойству характеристической функции,

$$\begin{aligned} m_Q(t) = \mathbb{E} Q_t &= -i \frac{\partial \varphi_{Q_t}(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} = -i \frac{\partial}{\partial s} (e^{(\varphi_V(s)-1) \cdot \lambda t}) \Big|_{s=0} = \\ &= \lambda t \cdot \underbrace{\left( -i \frac{\partial \varphi_V(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} \right)}_{\mathbb{E} V} \cdot \underbrace{e^{(\varphi_V(0)-1) \cdot \lambda t}}_{e^0} = \lambda t \cdot \mathbb{E} V \end{aligned}$$

Пользуясь независимостью приращений и полагая  $t \leq s$ ,

$$\begin{aligned} R_Q(t, s) &= \mathbb{E} Q_t Q_s - m_Q(t) m_Q(s) = \mathbb{E} (Q_t (Q_s - Q_t)) + \mathbb{E} Q_t^2 - \lambda^2 t s \cdot (\mathbb{E} V)^2 \\ \mathbb{E} (Q_t (Q_s - Q_t)) &= \mathbb{E} Q_t \cdot \mathbb{E} (Q_s - Q_t) = \lambda t \cdot \mathbb{E} V \cdot \lambda (s - t) \cdot \mathbb{E} V = \lambda^2 t (s - t) \cdot (\mathbb{E} V)^2 \\ \mathbb{E} (Q_t)^2 &= (-i)^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} (e^{(\varphi_V(s)-1) \cdot \lambda t}) \Big|_{s=0} = (\lambda t)^2 (\mathbb{E} V)^2 + \lambda t \cdot \mathbb{E} (V^2) \end{aligned}$$

Собирая всё вместе, получаем

$$R_Q(t, s) = \lambda^2 \underbrace{[t(s - t) + t^2 - ts]}_0 \cdot (\mathbb{E} V)^2 + \lambda t \cdot \mathbb{E} (V^2) = \lambda t \cdot \mathbb{E} (V^2)$$

В общем же случае  $R_Q(t, s) = \lambda \min\{t, s\} \cdot \mathbb{E} (V^2)$ . □

**Задача 2.16** (Прореживание пуассоновского процесса). Пусть  $K_t$  — пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$ , а случайные величины  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  независимы и имеют распределение Бернулли с параметром  $p$ . Покажите, что  $Q_t$  — также пуассоновский процесс с интенсивностью  $p\lambda$ .

**Решение задачи 2.16.** Пуассоновский процесс также является сложным пуассоновским процессом с  $V_j \equiv 1$ . Тогда характеристическая функция пуассоновского процесса:

$$\varphi_{K_t}(s) = e^{(e^{is}-1) \cdot \lambda t}$$

Характеристическая функция «прореженного» процесса  $Q$ :

$$\varphi_{Q_t}(s) = e^{(p e^{is} + (1-p) - 1) \cdot \lambda t} = e^{(e^{is}-1) \cdot p \lambda t}$$

Имеем характеристическую функцию пуассоновского процесса с интенсивностью  $p\lambda$ . В общем случае этого недостаточно для того, чтобы утверждать, что процесс пуассоновский; нужно равенство характеристических функций всех конечномерных распределений. Но мы имеем дело с процессом с независимыми приращениями, поэтому характеристической функции сечения нам достаточно (это утверждение мы оставим без доказательства).

## 2.2 Гауссовские процессы

Гауссовские процессы могут возникать при исследовании броуновского движения, динамики цен акций, эволюции квантово-механических систем и стохастических космологических моделей. Также гауссовские процессы часто используется как «шумовая составляющая» других случайных процессов.

**Определение 2.17.** Случайный процесс, все векторы сечений которого являются гауссовскими, называется **гауссовским случайным процессом**.

Напомним, что гауссовские векторы обладают рядом полезных свойств: распределение гауссовского вектора полностью задаётся вектором среднего и матрицей ковариации, а нескоррелированность компонент полностью эквивалентна независимости. Аналогичные свойства можно доказать и для гауссовских процессов. Однако для этого требуется ввести следующее определение:

**Определение 2.18.** Функция  $g(x, y): X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  называется **симметричной неотрицательно определённой**, если  $\forall x, y \in X \ g(x, y) = g(y, x)$  и  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n \subseteq X$  матрица  $(g(x_i, y_j))_{i,j=1}^n = G_{\{x_i\}, \{y_j\}}$  неотрицательно определена как оператор над  $\mathbb{C}^n$ , то есть  $\forall z \in \mathbb{C}^n \ (z, G_{\{x_i\}, \{y_j\}} z) \geq 0$ .

**Замечание 2.19.** Если  $g(x, y)$  принимает только вещественные значения, в определении 2.18 можно рассматривать только  $z \in \mathbb{R}^n$ .

**Утверждение 2.20.** Пусть  $m: T \rightarrow \mathbb{R}$  — произвольная функция, а  $R: T \times T \rightarrow \mathbb{R}$  — симметричная и неотрицательно определённая функция. Тогда существует гауссовский процесс  $X$  такой, что  $\mathbb{E} X_t = m(t)$ ,  $\mathbb{E} \dot{X}_s \dot{X}_t = R(s, t)$ .

В курсе теории вероятностей вы уже встречались с неотрицательно определёнными функциями. В частности, все характеристические функции случайных величин неотрицательно определены.

**Утверждение 2.21.** Пусть  $\varphi_\xi(s)$  — характеристическая функция некоторой случайной величины  $\xi$ . Тогда функция  $g(s, t) = \varphi_\xi(t - s)$  — симметричная и неотрицательно определённая.

**Задача 2.22.** Существует ли гауссовский процесс с корреляционной функцией  $R(s, t) = e^{-|s-t|}$ ?

**Решение задачи 2.22.** Да, существует. Мы знаем, что  $e^{-|t|}$  есть характеристическая функция распределения Коши. Поэтому это неотрицательно определённая функция. Значит,  $R(s, t) = e^{-|s-t|}$  неотрицательно определена и симметрична.

Пример реализаций процесса можно видеть на рис. 2.2.

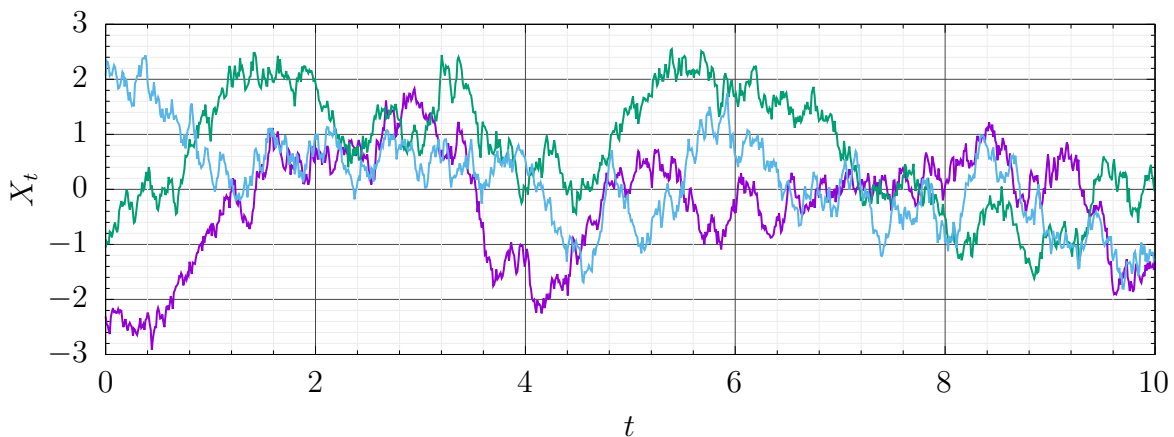


Рис. 2.2: Пример пучка реализаций гауссовского процесса из задачи 2.22 (среднее взято за ноль).

Напомним также несколько фатов касательно гауссовских векторов, которые пригодятся при исследовании гауссовских процессов.

**Утверждение 2.23.** Пусть  $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, R)$  — гауссовский вектор размерности  $n \in \mathbb{N}$ . Пусть  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  — произвольные вещественные матрица и вектор. Тогда  $(A\xi + b) \sim \mathcal{N}(A\mu + b, ARA^T)$  — также гауссовский вектор.

**Теорема 2.24** (Формула Вика). Пусть дан гауссовский вектор  $(\xi_1, \dots, \xi_n) \sim \mathcal{N}(0, R)$  с корреляционной матрицей  $R = (R_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Тогда

1. Если  $n$  нечётно,  $\mathbb{E} \xi_1 \dots \xi_n = 0$ .

2. Если  $n$  чётно,

$$\mathbb{E} \xi_1 \dots \xi_n = \sum R_{i_1, j_1} \dots R_{i_n, j_n},$$

где сумма берется по всем неупорядоченным разбиениям множества  $\{1, \dots, n\}$  на  $n/2$  неупорядоченных пар.

**Пример 2.25.** Пусть  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \sim \mathcal{N}(0, R)$ . Тогда, согласно свойству гауссовского вектора и формуле Вика,

$$\mathbb{E} \xi_1 \xi_2 \xi_3 = 0, \quad \mathbb{E} \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 = R_{12}R_{34} + R_{13}R_{24} + R_{14}R_{23}$$

### 2.2.1 Винеровский процесс

Винеровский процесс описывает симметричное случайное блуждание, непрерывное во времени, и также имеет множество важных приложений. Данный процесс часто возникает в стохастических дифференциальных уравнениях, а также при построении других гауссовских процессов.

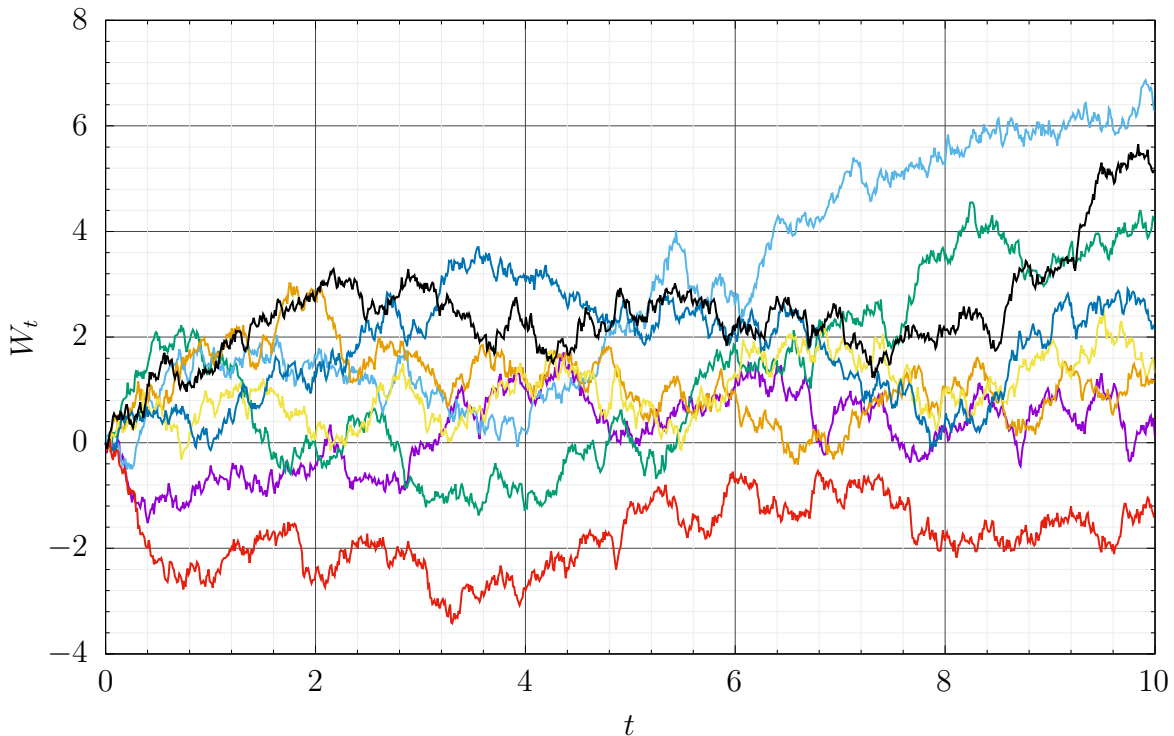


Рис. 2.3: Пример пучка реализаций винеровского процесса.

Неформально винеровский процесс можно определить, введя мелкую сетку дискретного времени с шагом  $\Delta t$ . Пусть процесс стартует из нуля и на каждом очередном шаге по времени делает скачок на некоторую случайную величину; математическое ожидание скачка пусть будет равно нулю, а дисперсия —  $\Delta t$  (это сделано для того, чтобы дисперсия

сечения процесса была равна прошедшему времени и, таким образом, не зависела от выбора  $\Delta t$ ). Полученные случайные блуждания при  $\Delta t \rightarrow +0$  и описываются винеровским процессом. Дадим формальное определение.

**Определение 2.26.** Винеровским процессом называется случайный процесс  $W: \Omega \times [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  такой, что

1.  $W_0 \stackrel{\text{н.н.}}{=} 0$ .
2.  $W$  — процесс с независимыми приращениями.
3.  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$ .

Данное определение напоминает определение пуассоновского процесса; мы лишь изменили распределение приращений. Из определения следует, что винеровский процесс — гауссовский процесс. Как было упомянуто ранее, любой гауссовский процесс можно задать его функцией среднего и ковариационной функцией. Из этого следует второе, эквивалентное определение винеровского процесса:

**Определение 2.27.** Винеровским процессом называется гауссовский случайный процесс  $W: \Omega \times [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  такой, что  $\mathbb{E} W_t = 0$ ,  $\mathbb{E} \dot{W}_t \dot{W}_s = \min\{t, s\}$ .

Наконец, дадим третье эквивалентное определение:

**Определение 2.28.** Винеровским процессом называется гауссовский случайный процесс  $W: \Omega \times [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  такой, что

1.  $W_0 \stackrel{\text{н.н.}}{=} 0$ .
2.  $\mathbb{E} W_t = 0$ .
3.  $\mathbb{E}(W_t - W_s)^2 = |t - s|$ .

**Теорема 2.29.** Определения 2.26, 2.27 и 2.28 эквивалентны.

*Доказательство.*

2.26  $\rightarrow$  2.27: Из независимости приращений и их нормального распределения следует, что процесс гауссовский (любой вектор сечений получается линейным преобразованием из вектора приращений, который является гауссовским). Далее, при  $t > s$  имеем  $\mathbb{E} W_t = \mathbb{E}(W_t - W_0) = 0$ ,  $\text{cov}(W_t, W_s) = \text{cov}(W_s + W_t - W_s, W_s) = \mathbb{D} W_s = s = \min\{t, s\}$ .

2.27  $\rightarrow$  2.28:  $\mathbb{E}(W_t - W_s)^2 = \mathbb{E} W_t^2 - 2\mathbb{E} W_t W_s + \mathbb{E} W_s^2 = t - 2\min\{t, s\} + s = |t - s|$ .

2.28  $\rightarrow$  2.26: Поскольку процесс гауссовский, из пунктов 2 и 3 определения 2.28 следует, что  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$ . Прочитав доказательство в предыдущем пункте «в обратную сторону», получаем  $\mathbb{E} \dot{W}_t \dot{W}_s = \min\{t, s\}$ . Осталось показать независимость приращений.

Рассмотрим два произвольных последовательных приращения:  $W_{t_4} - W_{t_3}$  и  $W_{t_2} - W_{t_1}$  ( $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ ). Они образуют двумерный гауссовский вектор (т.к. получены линейным преобразованием из вектора сечений). Приращения нескоррелированы:

$$\begin{aligned} \text{cov}(W_{t_4} - W_{t_3}, W_{t_2} - W_{t_1}) &= \min\{t_4, t_2\} - \min\{t_3, t_2\} - \min\{t_4, t_1\} + \min\{t_3, t_1\} = \\ &= t_2 - t_2 - t_1 + t_1 = 0 \end{aligned}$$

Поскольку любой вектор приращений процесса  $W$  гауссовский (см. рассуждение выше про линейное преобразование вектора сечений), а его матрица ковариации диагональная (т.к. любые попарные ковариации нулевые), из свойств гауссовского вектора получаем независимость.

□



Приведём без доказательства несколько полезных свойств винеровского процесса:

**Утверждение 2.30.**

1. Винеровский процесс имеет **стационарные приращения**, то есть процесс  $Y_t = W_{t_0+t} - W_{t_0}$  также винеровский для любого  $t_0 \geq 0$ .
2. Винеровский процесс является непрерывным процессом.
3. Траектории винеровского процесса **возвратны**: множество  $\{t \mid W_t = 0\}$  с вероятностью 1 является неограниченным.
4. Выполнен закон повторного логарифма Леви:  $\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \stackrel{\text{п.н.}}{=} 1$ .

В качестве упражнения приведём доказательства для следующих двух утверждений:

**Утверждение 2.31.** Винеровский процесс **самоподобен с коэффициентом**  $1/2$ , то есть  $Y_t = W_{ct}/\sqrt{c}$  — также винеровский процесс для любой константы  $c > 0$ .

*Доказательство.* Процесс  $Y_t$  является гауссовским, так как получен из гауссовского процесса линейным (относительно  $W_t$ ) масштабированием по оси времени и оси значений. При этом

$$\mathbb{E} Y_t = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot 0 = 0, \quad \mathbb{E} Y_t Y_s = \frac{1}{\sqrt{c} \cdot \sqrt{c}} \min\{ct, cs\} = \min\{t, s\},$$

что по определению означает, что  $Y_t$  — винеровский.  $\square$

**Утверждение 2.32.** Винеровский процесс допускает «инверсию времени»:  $Y_t = t \cdot W_{1/t}$  — также винеровский процесс.

*Доказательство.* Процесс  $Y_t$  является гауссовским, так как получен из гауссовского процесса линейным (относительно  $W_t$ ) масштабированием по оси времени и оси значений. При этом

$$\mathbb{E} Y_t = t \cdot 0 = 0, \quad \mathbb{E} Y_t Y_s = ts \cdot \min\{1/t, 1/s\} = \min\{t, s\},$$

что по определению означает, что  $Y_t$  — винеровский.  $\square$

**Задача 2.33.** Найдите корреляционную функцию процесса  $X_t = W_t^2$ .

**Решение задачи 2.33.** Пусть, без ограничения общности,  $t > s$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{cov}(W_t^2, W_s^2) &= \text{cov}((W_t - W_s)^2 - 2W_t W_s + W_s^2, W_s^2) = \\ &= \text{cov}((W_t - W_s)^2 + 2(W_t - W_s)W_s + W_s^2, W_s^2) = 0 + \text{cov}((W_t - W_s)W_s, W_s^2) + \mathbb{D} W_s^2 \end{aligned}$$

Поскольку  $W_t - W_s$  и  $W_s$  независимы,  $\mathbb{E}(W_t - W_s)W_s = 0$ . Отсюда

$$\text{cov}((W_t - W_s)W_s, W_s^2) = \mathbb{E}(W_t - W_s) \underbrace{\mathbb{E}(W_s(W_s^2 - \mathbb{E} W_s^2))}_{p(W_s)} = \mathbb{E}(W_t - W_s) \cdot \mathbb{E} p(W_s) = 0 \cdot \dots = 0$$

Наконец,

$$\text{cov}(W_t^2, W_s^2) = \mathbb{D} W_s^2 = \mathbb{E} W_s^4 - (\mathbb{E} W_s^2)^2 \stackrel{\text{св. норм. распр.}}{=} 3s^2 - s^2 = 2s^2 = 2 \min\{t^2, s^2\}$$

Альтернативно, можно было применить формулу Вика:

$$\mathbb{E} W_t W_t W_s W_s = t \cdot s + \min\{t, s\} \cdot \min\{t, s\} + \min\{t, s\} \cdot \min\{t, s\} = ts + 2 \min\{t^2, s^2\}$$

$$\mathbb{E} W_t^2 = t, \quad \mathbb{E} W_s^2 = s$$

$$\text{cov}((W_t - W_s)W_s, W_s^2) = ts + 2 \min\{t^2, s^2\} - ts = 2 \min\{t^2, s^2\}$$