# Случайные процессы: домашние задания

2023

# Домашнее задание на первую неделю

**Задача 1.1 (каноническое задание).** Пусть случайный процесс $X(\omega, t) = \omega t$, $t \in [0; 1]$, определен на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F}$ — множество всех подмножеств множества $\Omega$, а мера $\mathbb{P}$ такова, что $\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = 1/3$. Построить вторичное (выборочное) вероятностное пространство процесса.

**Задача 1.2.** Случайный процесс $X$ задан формулой $X_t = t \cdot \eta$, где $\eta \sim \mathrm{U}_{(0;1)}$, $t \in (0; 1)$. Найдите $n$-мерные функции распределения этого процесса.

**Задача 1.3.** Найдите математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию процесса из предыдущей задачи.

**Задача 1.4.** Пусть дана случайная величина $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$. Определим случайный процесс $X_t = \mathbb{I}_{(-\infty;\eta]}(t)$. Найдите вероятность, что скачок с единицы до нуля произойдёт на интервале $[t_0; t_0 + \Delta t]$, если достоверно известно, что на $[0; t_0]$ скачка не было (параметр $\Delta t$ задан и строго меньше $1 - t_0$).

**Задача 1.5.** Пусть $\xi$ и $\eta$ — независимые случайные величины с функциями распределения $F_\xi(x)$ и $F_\eta(y)$. Пусть $X$ — случайный процесс, определённый формулой $X_t = \xi \cdot t + \eta$. Найдите семейство конечномерных распределений процесса.

**Задача 1.6.** Пусть $X_1$, $X_2$ — два независимых случайных процесса с корреляционными функциями $R_{X_1}(t, s)$ и $R_{X_2}(t, s)$ и функциями среднего $m_{X_1}(t)$ и $m_{X_2}(t)$. Найдите корреляционную функцию процесса $Y = X_1 \cdot X_2$.

# Домашнее задание на вторую неделю

**Задача 2.1 (каноническое задание).** Поток сделок в фирме моделируется с помощью пуассоновского процесса $K$ с интенсивностью $\lambda = 100$ сделок/час. Каждая сделка приносит доход $V_i \sim \mathrm{U}_{[a;b]}$, $a = 10$, $b = 100$ условных единиц денег. Считая, что $K$, $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — независимые в совокупности случайные величины, найдите математическое ожидание, дисперсию и характеристическую функцию выручки за время $t$. Докажите, что она имеет асимптотически нормальное распределение.

**Задача 2.2 (каноническое задание).** Случайный процесс $X$ представляет собой сумму $n$ независимых пуассоновских процессов с интенсивностями $\{\lambda_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$. Определить тип и параметры процесса $X$.

**Задача 2.3 (каноническое задание).** Пусть $K$ — пуассоновский случайный процесс интенсивности $\lambda$, а X — случайный процесс, полученный в результате удаления из $K$ всех событий, очередной номер которых не кратен $s$. Определить тип и параметры распределения интервала между соседними событиями в случайном процессе $X$.

**Задача 2.4.** Пусть $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ все независимы в совокупности и имеют одинаковое распределение $U_{[3;5]}$. Покажите, что процесс восстановления, построенный по этим случайным величинам (т. е. процесс вида $X_t = \sup\{n \mid \xi_1 + \ldots + \xi_n \leqslant t\}$) не является процессом с независимыми приращениями.

**Задача 2.5.** Пусть $K$ — пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$. Какие из следующих процессов имеют независимые приращения?

1. $X_t = K_t - K_0$, $t \geqslant 0$.
2. $X_t = K_t \mod 2$, $t \geqslant 0$.
3. $X_t = K_{t^2-t+1}$, $t \geqslant 0$.
4. $X_t = K_t^2$, $t \geqslant 0$.

**Задача 2.6.** Пусть $K$ — пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$. Найдите вероятность, что в момент времени $t$ число $K_t$ чётно.

**Задача 2.7.** Найдите предел при $t \to +\infty$ (почти наверное) величины $K_t/t$, где $K$ — пуассоновский процесс интенсивности $\lambda \geqslant 0$.

**Задача 2.8 (практическое задание).** Вас приняли на должность системного администратора в известную IT-компанию «Рога и Копыта». Одной из ваших задач является стресс-тестирование сетевой инфраструктуры компании. Для моделирования потока данных от пользователей вы решили использовать сложный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda$. Размер $V_i$ каждого приходящего пакета распределён логнормально:

$$\rho_V(x) = \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x) \cdot \frac{\exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{x \cdot \sigma\sqrt{2\pi}}$$

Пользуясь результатами, полученными на семинаре, найдите функцию среднего и корреляционную функцию процесса (матожидание и дисперсию $V$ можно взять из справочника). Найти вероятностное распределение времени между отправкой $n$-ого и $(n+m)$-ого пакета.

Пусть связь с одним из серверов осуществляется по $N$ независимым каналам, на каждом из которых поток пакетов моделируется согласно процессу выше. Найдите вид и параметры процесса, соответствующего суммарному потоку данных на сервер.

По аналогии с кодом в репозитории курса напишите функцию, которая по параметрам процесса ($\lambda$, $\mu$, $\sigma$) моделирует заданное число реализаций. Постройте графики реализаций для некоторого набора параметров.

Зафиксируем $\sigma^2 = \mu$. Взяв в качестве максимальной пропускной способности $Q_{\max} = \lambda \cdot e^{3\mu}$, путём компьютерного моделирования оценить частоту выхода канала из строя при работе в течение времени $100/\lambda$.

# Домашнее задание на третью неделю

**Задача 3.1 (каноническое задание).** Пусть имеется случайный вектор $\xi \sim \mathcal{N}(0, R)$ с матрицей ковариаций

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Вычислить $\mathbb{E}(\xi_1^2 \xi_2^2)$, $\mathbb{E}(\xi_1 \xi_2^3 \xi_3)$, $\mathbb{E}(\xi_1 \xi_2 \xi_3^2)$.

**Задача 3.2 (каноническое задание).** Пусть $X$ — нормальный (гауссовский) случайный процесс с математическим ожиданием и корреляционной функцией, соответственно,

$$m_X(t) = m = const, \qquad R_X(t, s) = be^{-a|t-s|}, \quad a > 0,\ b > 0$$

Найти вероятность $\mathbb{P}\{X_t > c \mid X_s = x\}$ для $t > s$.

**Задача 3.3** (*«броуновский мост»*)**.** Рассмотрим два случайных процесса. Первый — гауссовский с нулевым математическим ожиданием и $R(s, t) = \min\{s, t\} - st$. Второй определяется через процесс Винера по закону $Y_t = W_t - tW_1$. Докажите, что эти гауссовские процессы совпадают.

**Задача 3.4** (*процесс Орнштейна-Уленбека*)**.** Рассмотрим два случайных процесса. Первый — гауссовский с нулевым математическим ожиданием и $R(s, t) = e^{-|t-s|/2}$. Второй определяется через процесс Винера по закону $Y_t = e^{-t/2} W_{e^t}$. Докажите, что эти гауссовские процессы совпадают.

**Задача 3.5.** Найдите корреляционную функцию процесса $X_t = W_t^2 - W_t$, $t \geqslant 0$.

**Задача 3.6.** Для винеровского процесса $W_t$ вычислите условное математическое ожидание $\mathbb{E}(W_t \mid W_s = x)$ и дисперсию $\mathbb{D}(W_t \mid W_s = x)$ для произвольных $t \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$.

# Домашнее задание на четвёртую неделю

**Задача 4.1 (каноническое задание).** Исследовать винеровский процесс $W$ на непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость во всех смыслах (в среднем квадратичном, «почти наверное», по вероятности, по распределению).

**Задача 4.2 (каноническое задание).** Исследовать пуассоновский процесс $K$, на непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость во всех смыслах (в среднем квадратичном, «почти наверное», по вероятности, по распределению).

**Задача 4.3.** Рассмотрим гауссовский процесс $X$, заданный тождественно нулевой функцией среднего и корреляционной функцией $R_X(t,s) = b \cdot e^{-a|t-s|}$. Проверить существование $X'$ в среднем квадратичном.

**Задача 4.4.** Проанализируйте доказательство критерия дифференцируемости случайного процесса в смысле среднего квадратичного и докажите, что если ковариационная функция процесса $K_X(t,s)$ непрерывно дифференцируема на диагонали $t = s$, то она непрерывно дифференцируема всюду на $T \times T$.

**Задача 4.5.** Пусть $X$ — дифференцируемый в среднеквадратичном процесс второго порядка с известными функцией среднего $m_X(t)$ и корреляционной функцией $R_X(s,t)$. Выразите через эти функции следующие величины ($[a;b]$, $[c;d] \subseteq T$):

**а)** $\operatorname{cov}(X_t, X'_s)$; **б)** $\mathbb{E}\int_a^b X_t\,dt$; **в)** $\operatorname{cov}\left(X_t, \int_a^b X_s\,ds\right)$;

**г)** $\operatorname{cov}\left(\int_a^b X_t\,dt, \int_c^d X_t\,dt\right)$,

**Задача 4.6.** Докажите, что процесс $U_t = W_t - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t e^{-(t-s)/2} W_s\,ds$ есть процесс Орнштейна-Уленбека (см. предыдущее Д/З).

# Домашнее задание на пятую неделю

**Задача 5.1 (каноническое задание).** Пусть $A$, $B$, $\varphi$ — случайные величины такие, что $\varphi$ не зависит от $A$ и $X$, причем $\varphi$ равномерно распределена на отрезке $[0; 2\pi]$, $A$ и $B$ имеют совместное распределение с функцией плотности распределения $f(a, b)$. Исследовать процесс $Z_t = A\cos(Bt + \varphi)$ $(t \geqslant 0)$ на стационарность в широком и узком смыслах.

**Задача 5.2 (каноническое задание).** Пусть $K$ — пуассоновский случайный процесс интенсивности $\lambda$. Исследовать процесс $X_t = K_{t+1} - K_t$ на стационарность в широком смысле.

**Задача 5.3 (каноническое задание).** Доказать, что сумма независимых стационарных случайных процессов является стационарным случайным процессом. (Доказать это утверждение как для стационарности в широком смысле, так и узком смысле).

**Задача 5.4 (каноническое задание).** Пусть $K$ — пуассоновский случайный процесс интенсивности $\lambda$. Исследовать процесс $X_t = K_t/t$ $(t \geqslant 1)$ на эргодичность по математическому ожиданию.

**Задача 5.5 (каноническое задание).** В модели Блэка-Шоулса-Мертона эволюция цены акции описывается геометрическим броуновским движением $S_t = A\exp(at + \sigma W_t)$, $t \geqslant 1$, где $A$, $a$ и $\sigma > 0$ — неслучайные постоянные величины, $W$ — винеровский процесс. Воспользовавшись понятием эргодичности случайных процессов, оценить неизвестную величину $a$.

**Задача 5.6.** Стационарный дифференцируемый в среднем квадратичном случайный процесс $X$ имеет функцию среднего $m_X(t)$ и корреляционную функцию $R_X(s, t)$. Вычислите функцию среднего и корреляционную функцию для процесса $Y_t = t^2 X'_{t+2} + tX_{t-1}$.

**Задача 5.7.** Будет ли процесс $W_t/\sqrt{t}$ эргодичен по дисперсии?

**Задача 5.8.** Пусть $\tau \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ и $A \sim \mathrm{Be}(1/2)$ — независимые случайные величины. Будет ли случайный процесс $X_t = (2A - 1) \cdot (2\,\mathbb{I}_{[0;\tau)}(t) - 1)$ эргодичным по математическому ожиданию?

**Задача 5.9.** Показать, что для эргодичности по математическому ожиданию стационарного случайного процесса $X_t$ с корреляционной функцией $R_X(\tau)$ достаточно стремления к нулю $R_X(\tau)$ при $\tau \to +\infty$.