Случайные процессы: семинары

Бутаков И. Д.

2023

Содержание

Предисловие

Перед вами сборник всех семинаров по случайным процессам за авторством Бутакова И. Д. Автор выражает благодарность Останину Павлу Антоновичу и Широбокову Максиму Геннадьевичу за предоставленные материалы.

Используемые обозначения

$\overset{\triangle}{\Longleftrightarrow}$	«... по определению тогда и только тогда, когда ...»
$\triangleq$	«... по определению равно ...»
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	вероятностное пространство (Ω — множество исходов, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, $\mathbb{P}$ — вероятностная мера).
$\mathcal{B}(A)$, $\mathcal{B}_A$	Борелевская σ-алгебра, определённая на множестве A (если A не указано, по умолчанию предполагается $A = \mathbb{R}$).
$\mathbb{I}_A$	индикаторная функция множества A.
$\mathbb{E}\,X$	математическое ожидание случайной величины X.
$\mathbb{D}\,X$	дисперсия случайной величины X.
$\mathring{X}$	«центрированная» случайная величина: $\mathring{X} = X - \mathbb{E}\,X$.
$\mathrm{Be}(p)$	распределение Бернулли с параметром p.
$\mathrm{Bi}(n, p)$	биномиальное распределение с параметрами n и p.
$\mathrm{Po}(\lambda)$	распределение Пуассона с интенсивностью λ.
$\mathrm{U}(A)$, U_A	равномерное распределение на множестве A.
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	показательное распределение с параметром λ (интенсивность).
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2.
l.i.m.	предел в среднем квадратичном (англ. *limit in means*).
$\xrightarrow{\text{с.к.}}$	сходимость в среднем квадратичном.
$\xrightarrow{\text{п.н.}}$	сходимость почти наверное.
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$	сходимость по вероятности.
$\xrightarrow{d}$	сходимость по распределению.
$\overset{\text{п.н.}}{=}$	равенство почти наверное.
$\overset{d}{=}$	равенство по распределению.

1 Основные сведения

Случайные процессы — математические объекты, построенные с использованием теории вероятностей для исследования и моделирования реальных явлений, растянутых во времени и имеющих стохастическую (случайную) природу.

Определение 1.1. *Пусть задано вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *и множество* $T \subseteq \mathbb{R}$. *Функция* $X\colon \Omega \times T \to \mathbb{R}$ *называется* **случайным процессом**, *если* $\forall t \in T$ *функция* $X(\,\cdot\,, t) \equiv X_t\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *измерима (то есть является случайной величиной).*

Случайный процесс можно трактовать как семейство случайных величин, параметризованное $t \in T$. Параметр t обычно интерпретируется как время. Если T состоит из одного элемента, случайный процесс является обычной случайной величиной, если T конечно — случайным вектором. Если T счётно, говорят о случайном процессе с дискретным временем. Параметр ω, как и при описании случайных величин, часто опускается.

Определение 1.2. *При фиксированном* $t_0 \in T$ *случайная величина* X_{t_0} *называется* **сечением случайного процесса** X.

Определение 1.3. *При фиксированном* $\omega_0 \in \Omega$ *функция* $X(\omega_0, \,\cdot\,)$ *называется* **реализацией (траекторией) случайного процесса** X.

Также случайный процесс можно считать особой случайной величиной, принимающей значения в пространстве функций; при такой интерпретации, однако, отдельных усилий стоит определить, что такое вероятностное распределение на функциях. В рамках семинаров данный вопрос освещаться со всей полнотой и строгостью не будет, поэтому приведём из этой области лишь основные факты и определения, требующиеся для работы со случайными процессами.

Рассмотрим произвольный случайный процесс X. В силу единства вероятностного пространства, любой вектор вида $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ (где $t_i \in T$) является случайным вектором.

Определение 1.4. *Вероятностное распределение вектора вида* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *называется* **конечномерным распределением случайного процесса** X. *Его функция распределения обозначается как* $F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$.

Функции распределений векторов, составленных из сечений случайного процесса, обладают всеми известными вам свойствами функций распределений случайных векторов, а также ещё двумя дополнительными свойствами:

Утверждение 1.5. *Функции конечномерных распределений случайного процесса* X *обладают следующими свойствами:*

1. **(условие симметрии)** *Для любой перестановки* k_i *выполнено равенство*
$$F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F_X(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}; t_{k_1}, \ldots, t_{k_n})$$
2. **(условие согласованности)** *Для любого индекса* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *выполнено*
$$\lim_{x_k \to +\infty} F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n; t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_n)$$

Теорема 1.6 (Колмогорова)**.** *Пусть имеется семейство распределений случайных векторов, удовлетворяющее всем свойствам из утверждения 1.5. Тогда существует вероятностное пространство и заданный на нём случайный процесс, семейство конечномерных распределений которого совпадает с данным.*

Таким образом, случайный процесс можно задавать семейством его конечномерных распределений. На данном этапе читателю должно стать понятно, как можно задавать вероятностное распределение на множестве функций (ответ — при помощи специальных семейств конечномерных распределений).

Задача 1.7. Пусть η — случайная величина с функцией распределения F_η. Найти все конечномерные распределения случайного процесса $X_t = \eta + t$.

Решение задачи 1.7. Одномерная функция распределения:

$$F_X(x;t) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X_t < x\} = \mathbb{P}\{\eta < x - t\} = F_\eta(x - t)$$

Конечномерная функция распределения:

$$F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \mathbb{P}\bigcap_{i=1}^{n}\{X_{t_i} < x_i\} = \mathbb{P}\bigcap_{i=1}^{n}\{\eta < x_i - t_i\} = \\ = \mathbb{P}\left\{\eta < \min_i\{x_i - t_i\}\right\} = F_\eta\left(\min_i\{x_i - t_i\}\right)$$

Задача 1.8. Пусть дана случайная величина $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$. Определим случайный процесс $X_t = \mathbb{I}_{(-\infty;\eta]}(t)$. Найдите вид реализаций процесса, его одномерные и двумерные распределения.

Решение задачи 1.8. Реализация процесса — функция, равная единице при $t \leqslant \eta$ и нулю при $t > \eta$, см. рис. 1.1. Одномерная функция распределения:

$$F_X(x;t) = \mathbb{P}\{X_t < x\} = \mathbb{P}\{\mathbb{I}_{(-\infty;\eta]}(t) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \mathbb{P}\{\eta < t\}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases},$$

$$\text{где} \quad \mathbb{P}\{\eta < t\} = F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ t, & 0 < t \leqslant 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

Двумерная функция распределения:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}\left(\{X_{t_1} < x_1\} \cap \{X_{t_2} < x_2\}\right)$$

Аналогично одномерной функции распределения,

1. Если $x_1 \leqslant 0$ или $x_2 \leqslant 0$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = 0$.
2. Если $x_1 > 1$ и $x_2 > 1$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = 1$.
3. Если $0 < x_1 \leqslant 1$ и $x_2 > 1$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_X(x_1; t_1)$. Аналогично симметричный случай.
4. Если $0 < x_1, x_2 \leqslant 1$,

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}\left(\{\eta < t_1\} \cap \{\eta < t_2\}\right) = \mathbb{P}\left\{\eta < \min\{t_1, t_2\}\right\} = F_\eta\left(\min\{t_1, t_2\}\right)$$

Через семейства конечномерных распределений также вводится понятие ***независимости*** процессов.

Определение 1.9. *Стохастические процессы X и Y, определённые на одних и тех же Ω и T, называются* **независимыми** *в случае, если $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall \{t_i\}_{i=1}^n \subseteq T$ векторы $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ и $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ независимы.*

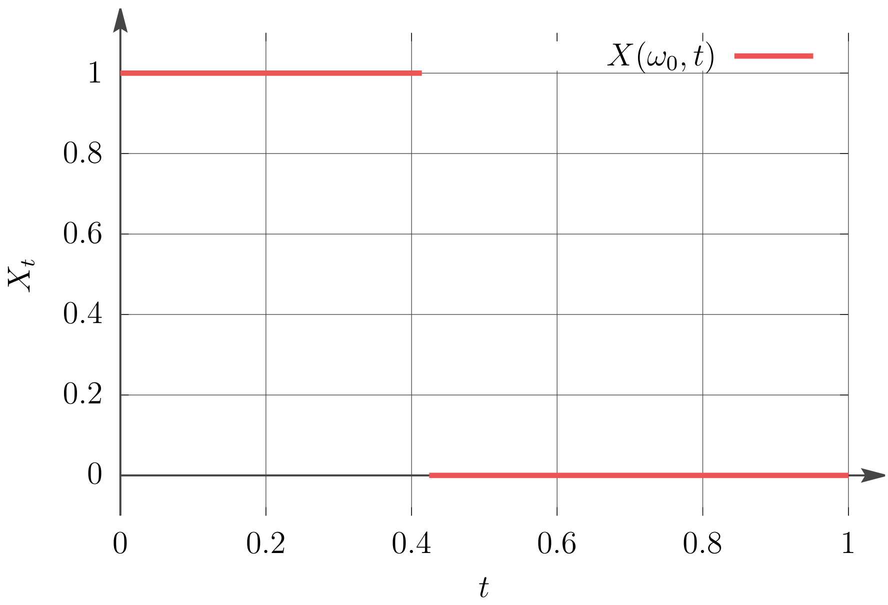

Рис. 1.1: График одной из реализаций случайного процесса из задачи 1.8.

Замечание 1.10. *Определение 1.9 не изменится (не станет строго сильнее), если потребовать независимости любых векторов из сечений соответствующих процессов.*

Доказательство. Рассмотрим $t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_m \in T$. Если векторы

$$(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}, X_{s_1}, \ldots, X_{s_m}) \quad \text{и} \quad (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}, Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_m})$$

независимы, то независимы и векторы $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ и $(Y_{s_1}, \ldots, Y_{s_m})$. $\square$

Задавать процессы на вероятностных пространствах удобно также при помощи ***выборочного (вторичного) пространства***.

Определение 1.11. *Рассмотрим определённый на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *случайный процесс* $X\colon \Omega \times T \to \mathbb{R}$. *Пусть* $\mathcal{X}$ *— пространство функций, содержащее в себе все траектории* $X(\omega, \cdot)$ *(но не обязательно только их). Рассмотрим* σ*-алгебру, порождённую* **цилиндрическими множествами***:*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T = \sigma\left(\{x \in \mathcal{X} \mid x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n\}_{n \in \mathbb{N}, \{t_k\}_{k=1}^n \subseteq T, \{B_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathcal{B}}\right)$$

Отображение $X(\omega, \cdot)$ *определяет измеримое отображение* $(\Omega, \mathcal{F})$ *в* $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T)$*:*

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T \quad \{\omega \in \Omega \mid X(\omega, \cdot) \in B\} \in \mathcal{F}$$

На пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T)$ *вероятностную меру можно определить следующим образом:*

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T \quad \mathbb{P}_X B = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega, \cdot) \in B\}$$

Вероятностное пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^T, \mathbb{P}_X)$ *называется* **выборочным (вторичным) пространством***.*

Задача 1.12. Рассмотрим вероятностное пространство $\left(\{0,1,2,3\}, 2^{\{0,1,2,3\}}, \mathbb{P}\right)$, где $\mathbb{P}$: $\mathbb{P}\{0\} = \ldots = \mathbb{P}\{3\} = \frac{1}{4}$, и случайный процесс $X(\omega, t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\omega\right)$, $t \in T = [0; 2\pi]$. Построить вторичное (выборочное) вероятностное пространство.

Решение задачи 1.12. Возьмём в качестве пространства функций $\mathcal{X} = \left\{\sin(t), \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(t + \pi\right)\right.$ Тогда $\mathcal{B}^T_{\mathcal{X}} = 2^{\mathcal{X}}$, так как для любого подмножества $\mathcal{X}$ можно подобрать цилиндрическое множество, с которым оно совпадает. Наконец,

$$\mathbb{P}_X : \quad \mathbb{P}_X \left\{\sin(t)\right\} = \ldots = \mathbb{P}_X \left\{\sin\left(t + 3\pi/2\right)\right\} = \frac{1}{4}$$

Существование различных случайных процессов с одними и теми же вероятностными свойствами приводит к желанию (а иногда и необходимости) в некотором смысле отождествлять процессы, у которых конечномерные распределения совпадают.

Определение 1.13. *Пусть X и Y — два случайных процесса, определённые на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и множестве T. Данные процессы называются* **стохастически эквивалентными** *в случае равенства почти наверное их реализаций в любой выбранный момент, то есть*

$$\forall t \in T \quad \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega, t) = Y(\omega, t)\} = 1$$

В этом случае Y называют **модификацией** *процесса Y (и наоборот).*

Утверждение 1.14. *Стохастически эквивалентные случайные процессы имеют одинаковое семейство конечномерных распределений.*

Например, такое отождествление полезно для осмысленного определения непрерывного случайного процесса:

Определение 1.15. *Случайный процесс называется* **непрерывным** *в случае, если существует его модификация с непрерывными реализациями.*

Задача 1.16. Пусть $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$. Определим случайный процесс $X_t = \mathbb{I}_{\{\eta\}}(t)$ (то есть $X_t = 1$ в том и только в том случае, когда $\eta = t$, и равен 0 иначе). Является ли X_t непрерывным процессом?

Решение задачи 1.16. Да, является. Процесс $Y_t \equiv 0$ является его модификацией.

При исследовании случайных процессов также бывает полезно рассматривать их моменты, дающие некоторое представление об усреднённом поведении процесса. В отличие от моментов случайных величин, любые моменты случайного процесса также зависят от времени.

Определение 1.17. *Если $\forall t \in T$ существует и конечно $\mathbb{E}\, X_t$, то функция $m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t$ определена и называется* **функцией среднего**.

Аналогично вводятся функции любых других моментов случайной величины X_t. При работе со случайными процессами нас также будут интересовать моменты, «разнесённые во времени».

Определение 1.18. *Если $\forall t_1, t_2 \in T$ существует и конечно $\mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2}$, то функции $K_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2}$ и $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\, \mathring{X}_{t_1} \mathring{X}_{t_2}$ определены и называются, соответственно,* **ковариационной** *и* **корреляционной функциями**.[1]

Утверждение 1.19. *Функции $K_X(t_1, t_2)$ и $R_X(t_1, t_2)$ одновременно либо определены, либо не определены, причём в первом случае функция $m_X(t)$ определена и $R_X(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) - m_X(t_1) m_X(t_2)$.*

Доказательство. Следует из свойств моментов. □

Определение 1.20. *Процесс, у которого существует ковариационная/корреляционная функция, называется* **$\mathbb{L}_2$-процессом**, *или* **процессом второго порядка**.

[1] Данные обозначения не являются общепринятыми, а также несколько контринтуитивны; при чтении сторонних источников будьте внимательны.

Задача 1.21. Найти корреляционную функцию случайного процесса из задачи 1.8.

Решение задачи 1.21. Для любого t_0 случайная величина X_{t_0} может принимать только два значения — 0 или 1; это бернуллиевская случайная величина. Найдём параметр её распределения:

$$\mathbb{P}\{X_t = 1\} = \mathbb{P}\{t \leqslant \eta\} = 1 - F_\eta(t)$$

Следовательно, $m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = 1 - F_\eta(t)$. Далее,

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2} = 1 \cdot \mathbb{P}\left(\{X_{t_1} = 1\} \cap \{X_{t_2} = 1\}\right) = \\ = \mathbb{P}\left(\{t_1 \leqslant \eta\} \cap \{t_2 \leqslant \eta\}\right) = 1 - F_\eta\left(\max\{t_1, t_2\}\right) \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) = 1 - F_\eta\left(\max\{t_1, t_2\}\right) - (1 - F_\eta(t_1)) \cdot (1 - F_\eta(t_2)) = \\ = F_\eta(t_1) + F_\eta(t_2) - F_\eta(t_1) \cdot F_\eta(t_2) - F_\eta(\max\{t_1, t_2\}) \end{aligned}$$

В частности, если $t_1, t_2 \in [0; 1]$,

$$R_X(t_1, t_2) = t_1 + t_2 - t_1 t_2 - \max\{t_1, t_2\} = \min\{t_1, t_2\} - t_1 t_2$$

Задача 1.22. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $\eta \sim U_{[-\pi;\pi]}$ — независимые случайные величины. Определим случайный процесс X следующим образом: $X_t = \xi \cdot \cos(t + \eta)$, где $t \in \mathbb{R}$. Найдите функцию среднего и корреляционную функцию процесса.

Решение задачи 1.22. Поскольку ξ и η независимы,

$$m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = \mathbb{E}\, \xi \cdot \mathbb{E} \cos(t + \eta) = 0 \cdot \ldots = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) - 0 = \mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2} = \mathbb{E}\, \xi^2 \cdot \mathbb{E}\left(\cos(t_1 + \eta) \cdot \cos(t_2 + \eta)\right) = \\ = 1 \cdot \frac{1}{2}\, \mathbb{E}\left(\cos(t_1 - t_2) + \cos(t_1 + t_2 + 2\eta)\right) = \frac{1}{2} \cos(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

Задача 1.23. Пусть U, V и W — независимые в совокупности случайные величины. Известно, что U и V обладают нулевым матожиданием и дисперсией D, а W распределена с плотностью

$$\rho_W(w) = \frac{2\lambda}{\pi} \cdot \frac{\mathbb{I}_{[0;+\infty)}(w)}{\lambda^2 + w^2}, \quad \lambda > 0$$

Определим случайный процесс $X_t = U \cos(Wt) + V \sin(Wt)$. Вычислите функцию среднего и корреляционную функцию.

Решение задачи 1.23. Поскольку U, V и W независимы в совокупности,

$$m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = \mathbb{E}\, U \cdot \mathbb{E} \cos(Wt) + \mathbb{E}\, V \cdot \mathbb{E} \sin(Wt) = 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots = 0$$

Корреляционную функцию удобно искать с помощью формулы полной вероятности в непрерывном случае:

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2} \mid W = w)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2} \mid W = w)}_{\triangleq R_X(t_1, t_2 | w)} \cdot \rho_W(w)\, dw$$

В силу нулевого матожидания,

$$\begin{aligned} &R_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}\left((U\cos(wt_1) + V\sin(wt_1))\cdot(U\cos(wt_2) + V\sin(wt_2))\right) = \\ &= \mathbb{E}(U^2)\cdot\cos(wt_1)\cos(wt_2) + 2\cdot\underbrace{\mathbb{E}\,U\,\mathbb{E}\,V}_{0}\cdot\ldots + \mathbb{E}(V^2)\cdot\sin(wt_1)\sin(wt_2) = D\cos(w(t_1-t_2))\end{aligned}$$

Наконец,

$$R_X(t_1,t_2) = \int\limits_0^{+\infty} D\cos(w(t_1-t_2))\cdot\frac{2\lambda}{\pi}\frac{1}{\lambda^2+w^2}\,dw = De^{-\lambda|t_1-t_2|}$$

Здесь использовалось значение интеграла Лапласа:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$$

Определение 1.24. Функцией коэффициента корреляции *называют функцию*

$$r_X(t_1,t_2) = \frac{R_X(t_1,t_2)}{\sqrt{R_X(t_1,t_1)\cdot R_X(t_2,t_2)}} = \frac{\operatorname{cov}(X_{t_1},X_{t_2})}{\sqrt{\mathbb{D}\,X_{t_1}\,\mathbb{D}\,X_{t_2}}}$$

Данная функция, если определена, принимает значения от -1 до 1 и имеет смысл степени линейной связи сечений процесса, соответствующих выбранным моментам времени.

Задача 1.25. Найти функции коэффициента корреляции для процессов из задач 1.22 и 1.23.

Решение задачи 1.25.

- Задача 1.22: $r_X(t_1,t_2) = \dfrac{\frac{1}{2}\cos(t_1-t_2)}{\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} = \cos(t_1-t_2)$.

  Если взять два произвольных момента времени и начать сдвигать их друг к другу или друг от друга, будет наблюдаться периодическая корреляция и декорреляция соответствующих сечений.

- Задача 1.23: $r_X(t_1,t_2) = \dfrac{De^{-\lambda|t_1-t_2|}}{\sqrt{De^{-\lambda\cdot 0}\cdot De^{-\lambda\cdot 0}}} = e^{-\lambda|t_1-t_2|}$.

  Несмотря на схожесть процессов, в данном случае наблюдается корреляция, затухающая экспоненциально с ростом разницы между моментами времени, в которых взяты сечения.

  Дело в том, что в первом процессе случайным был фазовый сдвиг, а потому реализации процесса «не расползались». Во втором же случае случайной является ещё и частота, и линейная связь между разными моментами времени быстро теряется (реализации «декогерируют»).

Из курса теории вероятностей вы должны помнить, что случайные величины удобно исследовать при помощи характеристической функции. Аналогичный объект можно ввести и для случайного процесса.

Определение 1.26. Характеристической функцией случайного процесса X *называется функция* $\varphi_X(t,s) = \varphi_{X_t}(s) \overset{\triangle}{=} \mathbb{E}\exp(is\cdot X_t)$*, где* $i^2=-1$.

2 Важные примеры случайных процессов

В этом разделе речь пойдёт о нескольких процессах особого вида, наиболее часто встречающихся при исследовании реальных явлений. Зачастую такие процессы именные. На их примере мы продолжим практиковаться в решении задач, а также введём несколько новых теоретических понятий.

2.1 Пуассоновский процесс

Данный процесс встречается в реальной жизни довольно часто; он описывает поток случайных событий, которые регистрируются с некоторой постоянной «интенсивностью». Например, речь может идти о регистрации космических частиц, о кликах по ссылке, о запросах к серверу, о проезжающих по магистрали автомобилях.

Пуассоновский процесс можно неформально определить следующим образом: пусть ось времени разбита на бесконечно малые промежутки Δt. Тогда пуассоновский процесс ведёт себя следующим образом: в самом начале он равен нулю, и на каждом последующем шаге по времени может претерпеть скачок на $+1$ с вероятностью $\lambda \Delta t$. Параметр λ называется интенсивностью процесса и характеризует «скорость» потока событий. Дадим формальное определение:

Определение 2.1 (Явная конструкция пуассоновского процесса)**.** *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ *и независимы в совокупности,* $\tau_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$*. Тогда процесс* $K_t = \sup\{n \mid \tau_n \leqslant t\}$ *называется* **пуассоновским процессом с интенсивностью** λ.

Процесс K_t, построенный способом, указанным выше, называется ***процессом восстановления, построенным по величинам*** $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, и отвечает следующей модели: в нулевой момент включается прибор, который работает время ξ_1, после чего ломается. Одновременно с поломкой включается следующий прибор, который работает случайное время ξ_2, и так далее. Величина K_t отражает количество приборов, введённых в эксплуатацию к моменту t.

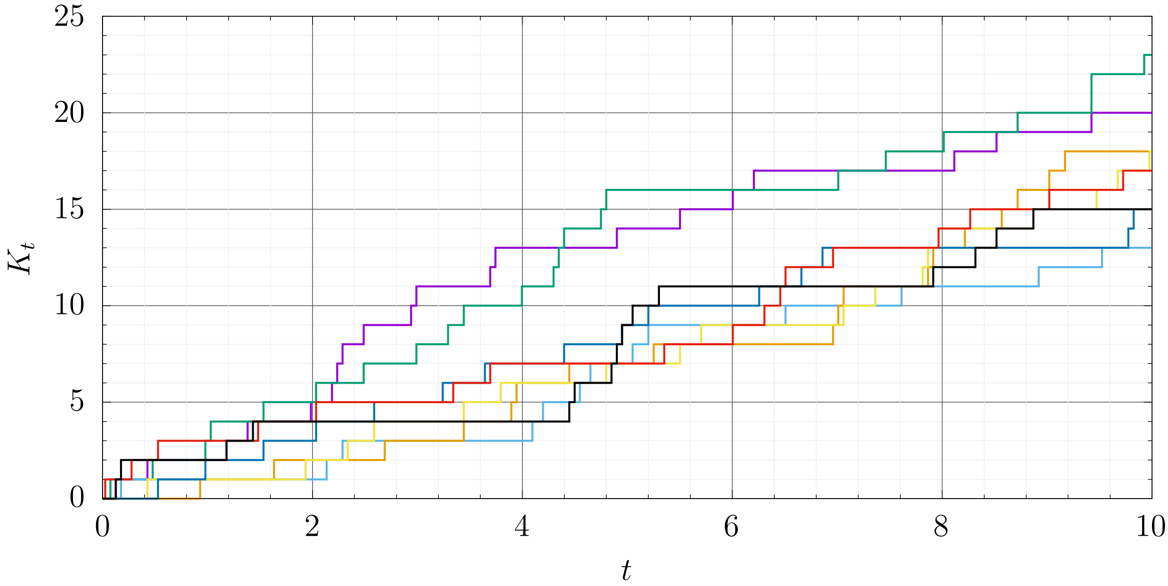

Рис. 2.1: Пример пучка реализаций пуассоновского процесса с интенсивностью $\lambda = 2$.

Приведённая явная конструкция возвращает нас к неформальному определению, использующему дискретное время с шагом Δt. Можно заметить, что экспоненциальное распределение получается как предел вероятностного распределения случайной величины —

времени между соседними скачками — при $\Delta t \to +0$:

$$\mathbb{P}\{\xi_i \in [t; t+h)\} = \lim_{\Delta t \to +0} (1 - \lambda \Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} \cdot \left(\lambda \Delta t \cdot \frac{h}{\Delta t} + o(h)\right) = \lambda e^{-\lambda t}(h + o(h))$$

Пуассоновский процесс можно определить и иначе. Для этого введём понятие процесса с независимыми приращениями.

Определение 2.2. *Случайный процесс X называется* **процессом с независимыми приращениями**, *если $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall \{t_i\}_{i=1}^{n} \subseteq T$ случайные величины $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1}$ независимы в совокупности.*

Определение 2.3. Пуассоновским процессом с интенсивностью $\lambda > 0$ *называется случайный процесс $K \colon \Omega \times [0; +\infty) \to \mathbb{N}$ такой, что*

1. $K_0 \overset{\text{п.н.}}{=} 0$.
2. *K — процесс с независимыми приращениями.*
3. *$K_t - K_s \sim \mathrm{Po}\,(\lambda \cdot (t - s))$ (при $t > s \geqslant 0$).*

Теорема 2.4. *Определения 2.1 и 2.3 эквивалентны.*

Утверждение 2.5. *Пуассоновский процесс обладает следующими свойствами:*

1. *Реализации пуассоновского процесса — кусочно-постоянные неубывающие функции со значениями в $\mathbb{N}$.*
2. *С вероятностью 1 все скачки пуассоновского процесса равны единице.*
3. *Время, когда произошёл n-ый скачок (обозначим его τ_n) имеет $\Gamma(n, 1/\lambda)$-распределение:*

$$\rho_{\tau_n}(t) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \cdot \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(t)$$

4. *Случайные величины $\{\tau_n - \tau_{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ распределены экспоненциально с параметром λ и независимы.*
5. *Число событий за конечный период времени конечно с вероятностью 1.*
6. *Число событий $K_{t+h} - K_t$ на промежутке $(t; t+h]$ зависит лишь от длины промежутка h: $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t = k\} = p(h, k)$*
7. *Вероятность более чем одного скачка на полуинтервале $(t; t+h]$ есть $o(h)$, то есть $\lim\limits_{h \to +0} \mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 1\}/h = 0$.*
8. *Для коротких полуинтервалов $(t; t+h]$ вероятность того, что на них произойдёт хотя бы один скачок, убывает линейно с уменьшением h: $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 0\} = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$ при $h \to 0$.*
9. *Из определения распределения Пуассона:*

$$\mathbb{P}\{K_t = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Наконец, приведём ещё одно из альтернативных определений пуассоновского процесса:

Утверждение 2.6. *Случайный процесс $K \colon \Omega \times T \to \mathbb{N}$ является пуассоновским тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим свойствам:*

1. **(стационарность приращений)** $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t = k\} = p(h, k)$
2. **(отсутствие последействия)** *Приращения процесса независимы.*
3. **(ординарность)** $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 1\} \in o(h)$

Утверждение 2.7. *Пусть K — пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Тогда $m_K(t) = \lambda t$, $R_K(t, s) = \lambda \cdot \min\{t, s\}$.*

Доказательство. Так как $K_t \overset{\text{п.н.}}{=} K_t - K_0 \sim \mathrm{Po}(\lambda t)$, $m_K(t) = \mathbb{E}\, K_t = \lambda t$. Далее, в силу независимости приращений, при $t \geqslant s$ имеем $\operatorname{cov}(K_t, K_s) = \operatorname{cov}(K_t - K_s + K_s, K_s) = 0 + \operatorname{cov}(K_s, K_s) = \lambda t$. Поэтому $R_k(t, s) = \lambda \cdot \min\{t, s\}$. □

Задача 2.8. Поток прибывающих на железнодорожную станцию пассажиров моделируется пуассоновским процессом K с интенсивностью λ. В момент $t = 0$ пассажиров нет, в момент $t = t_0$ прибывает первый поезд. Пусть η — суммарное время ожидания прибытия поезда всеми пассажирами на станции. Найти $\mathbb{E}\, \eta$.

Решение задачи 2.8.

$$\eta = \int_0^{t_0} K_t\, dt, \qquad \mathbb{E}\, \eta = \int_\Omega d\mathbb{P} \int_0^{t_0} K_t\, dt = \int_0^{t_0} dt \int_\Omega K_t\, d\mathbb{P} = \int_0^{t_0} m_K(t)\, dt = \int_0^{t_0} \lambda t\, dt = \frac{\lambda t_0^2}{2}$$

Задача 2.9. Пусть K_t — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, а τ_1 — момент первого скачка. Найдите $\mathbb{P}\{\tau_1 \leqslant s \mid K_t = 1\}$ при $0 < s < t$.

Решение задачи 2.9. Событие $\{\tau_1 \leqslant s\}$ означает, что первый скачок процесса произошёл не позже момента s. Если при этом $K_t = 1$, то это означает, что $K_s = 1$. Тогда

$$\mathbb{P}\{\tau_1 \leqslant s \mid K_t = 1\} = \mathbb{P}\{K_s = 1 \mid K_t = 1\} = \frac{\mathbb{P}\left(\{K_s = 1\} \cap \{K_t = 1\}\right)}{\mathbb{P}\{K_t = 1\}} =$$
$$= \frac{\mathbb{P}\left(\{K_s = 1\} \cap \{K_t - K_s = 0\}\right)}{\mathbb{P}\{K_t = 1\}} = \frac{\frac{\lambda s}{1!} e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^0}{0!} e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{\lambda t}{1!} e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

Задача 2.10. Пусть K — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, τ_3 — время третьего скачка процесса. Найти $\mathbb{P}\{\tau_3 \leqslant 2\}$.

Решение задачи 2.10.

$$\mathbb{P}\{\tau_3 \leqslant 2\} = \mathbb{P}\{K_2 \geqslant 3\} = 1 - \mathbb{P}\{K_2 < 3\} = 1 - e^{-2\lambda} - \frac{2\lambda}{1!} e^{-2\lambda} - \frac{(2\lambda)^2}{2!} e^{-2\lambda}$$

Задача 2.11. Пусть $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$, K — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, и η не зависит от K. Найти $\mathbb{P}\{K_\eta = K_{\eta+1}\}$.

Решение задачи 2.11. По формуле полной вероятности,

$$\mathbb{P}\{K_\eta = K_{\eta+1}\} = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{\underbrace{K_{t+1} - K_t}_{\sim \mathrm{Po}(1\cdot\lambda)} = 0 \mid \eta = t\} \cdot \rho_\eta(t)\, dt = \int\limits_0^1 e^{-1\cdot\lambda}\, dt = e^{-\lambda}$$

Пуассоновский процесс моделирует лишь поток некоторых событий. Иногда сами события также имеют сложную и/или случайную природу. Тогда требуется построить более продвинутую модель, наследующую от пуассоновского процесса только характер возникновения событий с течением времени. В качестве примера такой модели можно привести ***сложный (составной) пуассоновский процесс***. Данный процесс может возникнуть, например, при моделировании покупок в магазине: каждый покупатель будет появляться на кассе согласно пуассоновскому процессу, при этом закупаясь на некоторое случайное количество денег.

Определение 2.12. *Рассмотрим пуассоновский процесс K и набор независимых (в совокупности с K) одинаково распределённых случайных величин $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.* **Сложным пуассоновским процессом** *называется процесс $Q_t = \sum\limits_{j=1}^{K_t} V_j$.*

Это означает следующее: $Q_0 \overset{\text{п.н.}}{=} 0$, и в каждый момент, когда K испытывает скачок, к Q добавляется V_j.

Утверждение 2.13. *Сложный пуассоновский процесс является процессом с независимыми приращениями.*

Доказательство. Следует из независимости приращений K и независимости $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ в совокупности с K_t. □

Утверждение 2.14. *Рассмотрим сложный пуассоновский процесс Q с интенсивностью λ, определённый по случайным величинам $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Пусть $\varphi_V(s)$ — характеристическая функция случайных величин V_j. Тогда характеристичекая функция процесса Q задаётся формулой*

$$\varphi_{Q_t}(s) = e^{(\varphi_V(s)-1)\cdot\lambda t}$$

Доказательство.

$$\varphi_{Q_t}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{is\cdot Q_t} \mid K_t = k\right) \mathbb{P}\{K_t = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{is\cdot(V_1+\ldots+V_k)}\right) \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_V(s))^k \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{\varphi_V(s)\cdot\lambda t} \cdot e^{-\lambda t}$$

□

Следствие 2.15. *Функция среднего и корреляционная функция сложного пуассоновского процесса имеют вид, соответственно,*

$$m_Q(t) = \lambda t \cdot \mathbb{E}\, V, \qquad R_Q(t,s) = \lambda \min\{t,s\} \cdot \mathbb{E}(V^2)$$

Доказательство. По свойству характеристической функции,

$$m_Q(t) = \mathbb{E}\, Q_t = -i\frac{\partial \varphi_{Q_t}(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0} = -i\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{(\varphi_V(s)-1)\cdot\lambda t}\right)\bigg|_{s=0} =$$

$$= \lambda t \cdot \underbrace{\left(-i\frac{\partial \varphi_V(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0}\right)}_{\mathbb{E}\, V} \cdot \underbrace{e^{(\varphi_V(0)-1)\cdot\lambda t}}_{e^0} = \lambda t \cdot \mathbb{E}\, V$$

Пользуясь независимостью приращений и полагая $t \leqslant s$,

$$R_Q(t,s) = \mathbb{E}\, Q_t Q_s - m_Q(t)m_Q(s) = \mathbb{E}\,(Q_t(Q_s - Q_t)) + \mathbb{E}\, Q_t^2 - \lambda^2 ts \cdot (\mathbb{E}\, V)^2$$

$$\mathbb{E}\,(Q_t(Q_s - Q_t)) = \mathbb{E}\, Q_t \cdot \mathbb{E}(Q_s - Q_t) = \lambda t \cdot \mathbb{E}\, V \cdot \lambda(s-t)\cdot \mathbb{E}\, V = \lambda^2 t(s-t)\cdot(\mathbb{E}\, V)^2$$

$$\mathbb{E}(Q_t)^2 = (-i)^2\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(e^{(\varphi_V(s)-1)\cdot\lambda t}\right)\bigg|_{s=0} = (\lambda t)^2(\mathbb{E}\, V)^2 + \lambda t\cdot\mathbb{E}(V^2)$$

Собирая всё вместе, получаем

$$R_Q(t,s) = \lambda^2[\underbrace{t(s-t)+t^2-ts}_{0}]\cdot(\mathbb{E}\, V)^2 + \lambda t\cdot\mathbb{E}(V^2) = \lambda t\cdot\mathbb{E}(V^2)$$

В общем же случае $R_Q(t,s) = \lambda\min\{t,s\}\cdot\mathbb{E}(V^2)$. □

Задача 2.16 (Прореживание пуассоновского процесса)**.** Пусть K_t — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, а случайные величины $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ независимы и имеют распределение Бернулли с параметром p. Покажите, что Q_t — также пуассоновский процесс с интенсивностью $p\lambda$.

Решение задачи 2.16. Пуассоновский процесс также является сложным пуассоновским процессом с $V_j \equiv 1$. Тогда характеристическая функция пуассоновского процесса:

$$\varphi_{K_t}(s) = e^{\left(e^{is}-1\right)\cdot\lambda t}$$

Характеристическая функция «прореженного» процесса Q:

$$\varphi_{Q_t}(s) = e^{\left(p\,e^{is}+(1-p)-1\right)\cdot\lambda t} = e^{\left(e^{is}-1\right)\cdot p\lambda t}$$

Имеем характеристическую функцию пуассоновского процесса с интенсивностью $p\lambda$. В общем случае этого недостаточно для того, чтобы утверждать, что процесс пуассоновский; нужно равенство характеристических функций всех конечномерных распределений. Но мы имеем дело с процессом с независимыми и стационарными приращениями, поэтому характеристической функции сечения нам достаточно (это утверждение мы оставим без доказательства).

2.2 Гауссовские процессы

Гауссовские процессы могут возникать при исследовании броуновского движения, динамики цен акций, эволюции квантово-механических систем и стохастических космологических моделей. Также гауссовские процессы часто используется как «шумовая составляющая» других случайных процессов.

Определение 2.17. *Случайный процесс, все векторы сечений которого являются гауссовскими, называется* **гауссовским случайным процессом**.

Напомним, что гауссовские векторы обладают рядом полезных свойств: распределение гауссовского вектора полностью задаётся вектором среднего и матрицей ковариации, а нескоррелированность компонент полностью эквивалентна независимости. Аналогичные свойства можно доказать и для гауссовских процессов. Однако для этого требуется ввести следующее определение:

Определение 2.18. *Функция $g(x, y)\colon X \times X \to \mathbb{C}$ называется* **симметричной неотрицательно определённой**, *если $\forall x, y \in X$ $g(x, y) = g(y, x)$ и $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^n \subseteq X$ матрица $(g(x_i, y_j))_{i,j=1}^n = G_{\{x_i\},\{y_j\}}$ неотрицательна определена как оператор над $\mathbb{C}^n$, то есть $\forall z \in \mathbb{C}^n$ $\left(z, G_{\{x_i\},\{y_j\}}\, z\right) \geqslant 0$.*

Замечание 2.19. *Если $g(x, y)$ принимает только вещественные значения, в определении 2.18 можно рассматривать только $z \in \mathbb{R}^n$.*

Утверждение 2.20. *Пусть $m\colon T \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, а $R\colon T \times T \to \mathbb{R}$ — симметричная и неотрицательно определённая функция. Тогда существует гауссовский процесс X такой, что $\mathbb{E}\, X_t = m(t)$, $\mathbb{E}\, \mathring{X}_s \mathring{X}_t = R(s, t)$.*

В курсе теории вероятностей вы уже встречались с неотрицательно определёнными функциями. В частности, все характеристические функции случайных величин неотрицательно определены.

Утверждение 2.21. *Пусть $\varphi_\xi(s)$ — характеристическая функция некоторой случайной величины ξ. Тогда функция $g(s, t) = \varphi_\xi(t - s)$ — симметричная и неотрицательно определённая.*

Задача 2.22. Существует ли гауссовский процесс с корреляционной функцией $R(s, t) = e^{-|s-t|}$?

Решение задачи 2.22. Да, существует. Мы знаем, что $e^{-|t|}$ есть характеристическая функция распределения Коши. Поэтому это неотрицательно определённая функция. Значит $R(s, t) = e^{-|s-t|}$ неотрицательно определена и симметрична.
Пример реализаций процесса можно видеть на рис. 2.2.

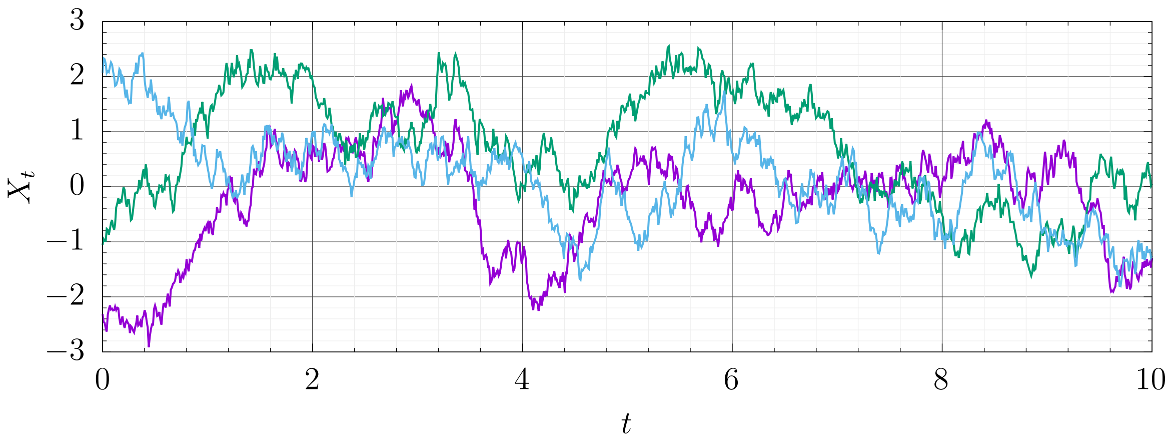

Рис. 2.2: Пример пучка реализаций гауссовского процесса из задачи 2.22 (среднее взято за ноль).

Напомним также несколько фактов касательно гауссовских векторов, которые пригодятся при исследовании гауссовских процессов.

Утверждение 2.23. *Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, R)$ — гауссовский вектор размерности $n \in \mathbb{N}$. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ — произвольные вещественные матрица и вектор. Тогда $(A\xi + b) \sim \mathcal{N}(A\mu + b, ARA^T)$ — также гауссовский вектор.*

Теорема 2.24 (Формула Вика)**.** *Пусть дан гауссовский вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \sim \mathcal{N}(0, R)$ с корреляционной матрицей $R = (R_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Тогда*

1. *Если n нечётно, $\mathbb{E}\,\xi_1 \ldots \xi_n = 0$.*
2. *Если n чётно,*
$$\mathbb{E}\,\xi_1 \ldots \xi_n = \sum R_{i_1,j_1} \ldots R_{i_n,j_n},$$
где сумма берется по всем неупорядоченным разбиениям множества $\{1, \ldots, n\}$ на $n/2$ неупорядоченных пар.

Пример 2.25. *Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \sim \mathcal{N}(0, R)$. Тогда, согласно свойству гауссовского вектора и формуле Вика,*

$$\mathbb{E}\,\xi_1\xi_2\xi_3 = 0, \qquad \mathbb{E}\,\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = R_{12}R_{34} + R_{13}R_{24} + R_{14}R_{23}$$

2.2.1 Винеровский процесс

Винеровский процесс описывает симметричное случайное блуждание, непрерывное во времени, и также имеет множество важных приложений. Данный процесс часто возникает в стохастических дифференциальных уравнениях, а также при построении других гауссовских процессов.

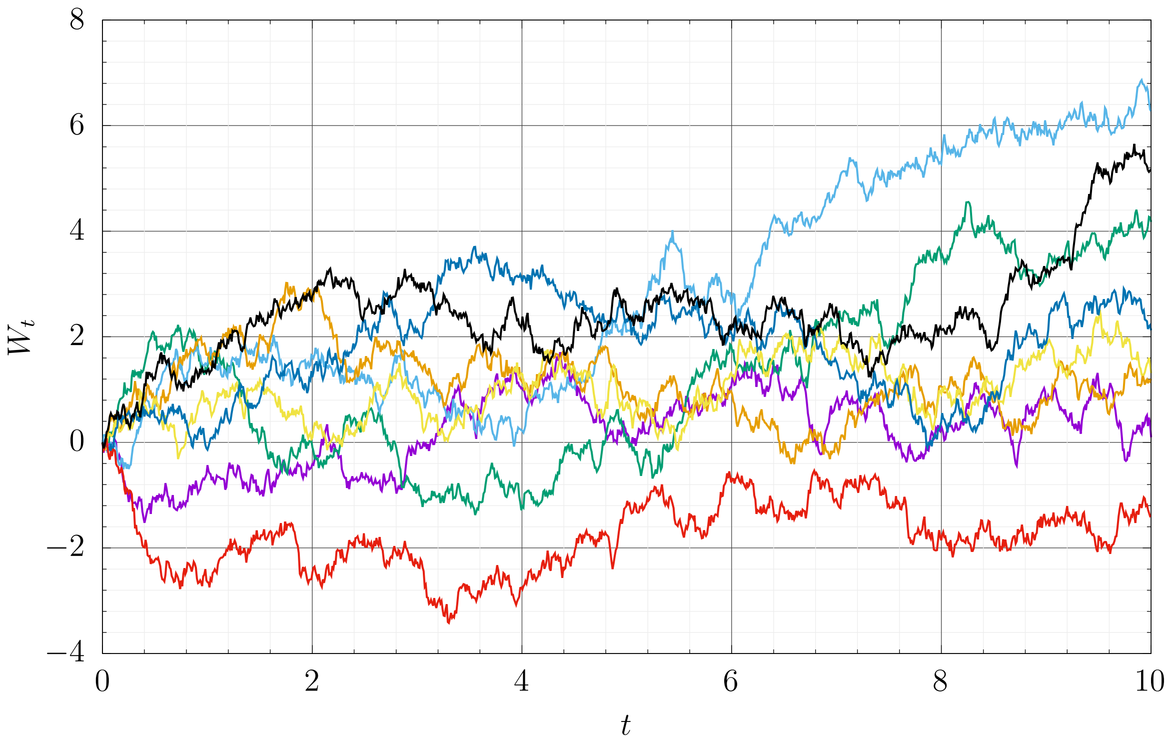

Рис. 2.3: Пример пучка реализаций винеровского процесса.

Неформально винеровский процесс можно определить, введя мелкую сетку дискретного времени с шагом Δt. Пусть процесс стартует из нуля и на каждом очередном шаге по времени делает скачок на некоторую случайную величину; математическое ожидание скачка пусть будет равно нулю, а дисперсия — Δt (это сделано для того, чтобы дисперсия сечения процесса была равна прошедшему времени и, таким образом, не зависела от выбора Δt). Полученные случайные блуждания при $\Delta t \to +0$ и описываются винеровским процессом. Дадим формальное определение.

Определение 2.26. **Винеровским процессом** *называется случайный процесс* $W\colon \Omega \times [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ *такой, что*

1. $W_0 \overset{\text{п.н.}}{=} 0$.
2. W *— процесс с независимыми приращениями.*
3. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$.

Данное определение напоминает определение пуассоновского процесса; мы лишь изменили распределение приращений. Из определения следует, что винеровский процесс — гауссовский процесс. Как было упомянуто ранее, любой гауссовский процесс можно задать его функцией среднего и ковариационной функцией. Из этого следует второе, эквивалентное определение винеровского процесса:

Определение 2.27. **Винеровским процессом** *называется гауссовский случайный процесс* $W\colon \Omega \times [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ *такой, что* $m_W(t) = 0$, $R_W(t, s) = \min\{t, s\}$.

Наконец, дадим третье эквивалентное определение:

Определение 2.28. **Винеровским процессом** *называется гауссовский случайный процесс* $W\colon \Omega \times [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ *такой, что*

1. $W_0 \overset{\text{п.н.}}{=} 0$.
2. $\mathbb{E}\, W_t = 0$.
3. $\mathbb{E}(W_t - W_s)^2 = |t - s|$.

Теорема 2.29. *Определения 2.26, 2.27 и 2.28 эквивалентны.*

Доказательство.

2.26 $\to$ 2.27: Из независимости приращений и их нормального распределения следует, что процесс гауссовский (любой вектор сечений получается линейным преобразованием из вектора приращений, который является гауссовским). Далее, при $t > s$ имеем $\mathbb{E}\, W_t = \mathbb{E}(W_t - W_0) = 0$, $\operatorname{cov}(W_t, W_s) = \operatorname{cov}(W_s + W_t - W_s, W_s) = \mathbb{D}\, W_s = s = \min\{t, s\}$.

2.27 $\to$ 2.28: $\mathbb{E}(W_t - W_s)^2 = \mathbb{E}\, W_t^2 - 2\,\mathbb{E}\, W_t W_s + \mathbb{E}\, W_s^2 = t - 2\min\{t, s\} + s = |t - s|$.

2.28 $\to$ 2.26: Поскольку процесс гауссовский, из пунктов 2 и 3 определения 2.28 следует, что $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$. Прочитав доказательство в предыдущем пункте «в обратную сторону», получаем $\mathbb{E}\, \mathring{W}_t \mathring{W}_s = \min\{t, s\}$. Осталось показать независимость приращений.

Рассмотрим два произвольных последовательных приращения: $W_{t_4} - W_{t_3}$ и $W_{t_2} - W_{t_1}$ ($t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant t_4$). Они образуют двумерный гауссовский вектор (т.к. получены линейным преобразованием из вектора сечений). Приращения нескоррелированны:

$$\operatorname{cov}(W_{t_4} - W_{t_3}, W_{t_2} - W_{t_1}) = \min\{t_4, t_2\} - \min\{t_3, t_2\} - \min\{t_4, t_1\} + \min\{t_3, t_1\} = \\ = t_2 - t_2 - t_1 + t_1 = 0$$

Поскольку любой вектор приращений процесса W гауссовский (см. рассуждение выше про линейное преобразование вектора сечений), а его матрица ковариации диагональная (т.к. любые попарные ковариации нулевые), из свойств гауссовского вектора получаем независимость.

$\square$

Приведём без доказательства несколько полезных свойств винеровского процесса:

Утверждение 2.30.

1. *Винеровский процесс имеет* **стационарные приращения** *(конкретно,* $Y_t = W_{t_0+t} - W_{t_0}$ *также винеровский для любого* $t_0 \geqslant 0$*).*
2. *Винеровский процесс является непрерывным процессом.*
3. *Траектории винеровского процесса* **возвратны***: множество* $\{t \mid W_t = 0\}$ *с вероятностью* 1 *является неограниченным.*
4. *Выполнен закон повторного логарифма Леви:* $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} \dfrac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}} \overset{\text{п.н.}}{=} 1$.

В качестве упражнения приведём доказательства для следующих двух утверждений:

Утверждение 2.31. *Винеровский процесс* **самоподобен с коэффициентом** $1/2$*, то есть* $Y_t = W_{ct}/\sqrt{c}$ *— также винеровский процесс для любой константы* $c > 0$*.*

Доказательство. Процесс Y_t является гауссовским, так как получен из гауссовского процесса линейным (относительно W_t) масштабированием по оси времени и оси значений. При этом

$$\mathbb{E}\,Y_t = \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot 0 = 0, \qquad \mathbb{E}\,Y_tY_s = \frac{1}{\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}}\min\{ct, cs\} = \min\{t, s\},$$

что по определению означает, что Y_t — винеровский. □

Утверждение 2.32. *Винеровский процесс допускает* **«инверсию времени»***:* $Y_t = t \cdot W_{1/t}$ *— также винеровский процесс.*

Доказательство. Процесс Y_t является гауссовским, так как получен из гауссовского процесса линейным (относительно W_t) масштабированием по оси времени и оси значений. При этом

$$\mathbb{E}\,Y_t = t\cdot 0 = 0, \qquad \mathbb{E}\,Y_tY_s = ts\cdot\min\{1/t, 1/s\} = \min\{t, s\},$$

что по определению означает, что Y_t — винеровский. □

Задача 2.33. Найдите корреляционную функцию процесса $X_t = W_t^2$.

Решение задачи 2.33. Пусть, без ограничения общности, $t > s$. Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left(W_t^2, W_s^2\right) &= \operatorname{cov}\left((W_t - W_s)^2 - 2W_tW_s - W_s^2, W_s^2\right) = \\ &= \operatorname{cov}\left((W_t - W_s)^2 + 2(W_t - W_s)W_s + W_s^2, W_s^2\right) = 0 + \operatorname{cov}\left((W_t - W_s)W_s, W_s^2\right) + \mathbb{D}\,W_s^2\end{aligned}$$

Поскольку $W_t - W_s$ и W_s независимы, $\mathbb{E}(W_t - W_s)W_s = 0$. Отсюда

$$\operatorname{cov}\left((W_t - W_s)W_s, W_s^2\right) = \mathbb{E}(W_t - W_s)\underbrace{W_s(W_s^2 - \mathbb{E}\,W_s^2)}_{p(W_s)} = \mathbb{E}(W_t - W_s)\cdot\mathbb{E}\,p(W_s) = 0\cdot\ldots = 0$$

Наконец,

$$\operatorname{cov}\left(W_t^2, W_s^2\right) = \mathbb{D}\,W_s^2 = \mathbb{E}\,W_s^4 - (\mathbb{E}\,W_s^2)^2 \underset{\text{распр.}}{\overset{\text{св. норм.}}{=}} 3s^2 - s^2 = 2s^2 = 2\min\{t^2, s^2\}$$

Альтернативно, можно было применить формулу Вика:

$$\mathbb{E}\,W_tW_tW_sW_s = t\cdot s + \min\{t, s\}\cdot\min\{t, s\} + \min\{t, s\}\cdot\min\{t, s\} = ts + 2\min\{t^2, s^2\}$$

$$\mathbb{E}\,W_t^2 = t, \qquad \mathbb{E}\,W_s^2 = s$$

$$R_{W^2}(t, s) = K_{W^2}(t, s) - m_{W^2}(t)m_{W^2}(s) = ts + 2\min\{t^2, s^2\} - ts = 2\min\{t^2, s^2\}$$

Задача 2.34. Для винеровского процесса W и разбиения $\mathcal{T} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = b\}$ отрезка $[a; b]$ введём случайную величину $Z(\mathcal{T}) = \sum_{k=0}^{n}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2$. Найдите предел в $\mathbb{L}_2$ (в среднем квадратичном) случайных величин $Z(\mathcal{T})$ при устремлении мелкости разбиения $d(\mathcal{T})$ к нулю.

Решение задачи 2.34. Напомним, что случайная величина η является пределом в среднем квадратичном последовательности случайных величин $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, если $\mathbb{E}\,|\xi_n - \eta|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. В нашем случае вместо $n \to \infty$ имеем $d(\mathcal{T}) \to 0$.

Покажем, что искомым пределом является константная случайная величина — $(b-a)$. Для этого заметим, что из независимости приращений и их распределения следует

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2\right) = \sum_{k=0}^{n}(t_{k+1} - t_k) = b - a$$

Таким образом, $(b-a)$ есть ни что иное, как $\mathbb{E}\,Z(\mathcal{T})$. Тогда

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - (b-a)\right)^2 = \mathbb{D}\left(\sum_{k=0}^{n}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2\right)$$

В очередной раз воспользовавшись независимостью и нормальностью приращений, получаем

$$\mathbb{D}\left(\sum_{k=0}^{n}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2\right) = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{D}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 = \sum_{k=0}^{n}\left(3(t_{k+1}-t_k)^2 - (t_{k+1}-t_k)^2\right) =$$
$$= 2\sum_{k=0}^{n}(t_{k+1}-t_k)^2 \leqslant 2\cdot d(\mathcal{T})\cdot\sum_{k=0}^{n}(t_{k+1}-t_k) = 2\cdot d(\mathcal{T})\cdot(b-a) \underset{d(\mathcal{T})\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Теорема 2.35 (Башелье)**.** *Пусть W — винеровский процесс, $t > 0$. Случайная величина $M_t = \sup_{s\in[0;t]} W_s$ имеет такое же распределение, как и $|W_t|$.*

Задача 2.36. Пусть W — винеровский процесс, $y > 0$ и $\tau_y = \inf\{t \mid W_t = y\}$. Вычислить $\mathbb{E}\,\tau_y$.

Решение задачи 2.36. Воспользовавшись теоремой 2.35, найдём распределение τ_y:

$$\mathbb{P}\{\tau_y \geqslant t\} = \mathbb{P}\{M_t < y\} = \mathbb{P}\{W_t \in [-y; y]\} = F_{\mathcal{N}(0,t)}(y) - F_{\mathcal{N}(0,t)}(-y) = 2(F_{\mathcal{N}(0,t)}(y) - 1/2)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}F_{\mathcal{N}(0,t)}(y) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}\,dx = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{y/\sqrt{t}}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = -\frac{y}{2\sqrt{t^3}}\cdot\frac{e^{-y^2/2t}}{\sqrt{2\pi}}$$

Отсюда

$$\rho_{\tau_y}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}\{\tau_y < t\} = \frac{\partial}{\partial t}\left[1 - 2(F_{\mathcal{N}(0,t)}(y) - 1/2)\right] = \frac{y}{\sqrt{t^3}}\cdot\frac{e^{-y^2/2t}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\mathbb{E}\,\tau_y = \int\limits_{0}^{+\infty} t\cdot\rho_{\tau_y}(t)\,dt = +\infty$$

Задача 2.37. Пусть W — винеровский процесс. Вычислить математическое ожидание процесса $X_t = \exp(W_t - t/2) - 1$ и доказать, что он имеет ортогональные приращения, то есть для $0 < t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4$ справедливо $\mathbb{E}\left((X_{t_4} - X_{t_3})(X_{t_2} - X_{t_1})\right) = 0$.

Решение задачи 2.37. Величина e^{W_t} распределена логнормально с параметрами $(\mu, \sigma^2) = (0, t)$, а потому $\mathbb{E}\, e^{W_t} = e^{0 - t/2}$. Тогда $\mathbb{E}\, X_t = e^{t/2 - t/2} - 1 = 0$. Пусть $0 < t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4$. В этом случае

$$\mathbb{E}\left(\left(e^{W_{t_4} - t_4/2} - e^{W_{t_3} - t_3/2}\right)\left(e^{W_{t_2} - t_2/2} - e^{W_{t_1} - t_1/2}\right)\right) =$$
$$= e^{-(t_2+t_4)/2}\,\mathbb{E}\left(e^{W_{t_2} + W_{t_4}}\right) - e^{-(t_1+t_4)/2}\,\mathbb{E}\left(e^{W_{t_1} + W_{t_4}}\right) - e^{-(t_2+t_3)/2}\,\mathbb{E}\left(e^{W_{t_2} + W_{t_3}}\right) + e^{-(t_1+t_3)/2}\,\mathbb{E}\left(e^{W_{t_1} + W_{t_3}}\right)$$

Рассмотрим произвольное слагаемое (например, первое). Пользуясь независимостью приращений,

$$\mathbb{E}\left(e^{W_{t_2} + W_{t_4}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{2W_{t_2} + W_{t_4} - W_{t_2}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{2W_{t_2}}\right)\mathbb{E}\left(e^{W_{t_4} - W_{t_2}}\right)$$

Аналогично, пользуясь свойством логнормального распределения, получаем

$$\mathbb{E}\left(e^{2W_{t_2}}\right)\mathbb{E}\left(e^{W_{t_4} - W_{t_2}}\right) = e^{4t_2/2} \cdot e^{(t_4 - t_2)/2} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-(t_2+t_4)/2}\,\mathbb{E}\left(e^{W_{t_2} + W_{t_4}}\right) = e^{t_2}$$

Отсюда

$$\mathbb{E}\left((X_{t_4} - X_{t_3})(X_{t_2} - X_{t_1})\right) = e^{t_2} - e^{t_1} - e^{t_2} + e^{t_1} = 0$$

3 Элементы стохастического анализа

Общая цель данного раздела — дать стохастические аналоги привычным определениям из математического анализа — пределу, производной и интегралу — для случайных процессов. Как мы помним, в теории вероятностей было несколько типов сходимости случайных величин, поэтому и для случайных процессов есть много вариантов определить вышеуказанное. Изучаемые в этом курсе варианты не претендуют на полноту охвата.

Начнём с некоторых вспомогательных утверждений, следующих напрямую из функционального анализа. Вспомним, что множество случайных величин на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с конечным вторым моментом образует гильбертово пространство $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ со скалярным произведением, определённым по формуле $(\xi, \eta) \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{E}(\xi\eta) = \int_\Omega \xi(\omega)\eta(\omega)\, d\omega$. Пользуясь этим, приведём ряд свойств гильбертовых пространств, полезных для задач теории вероятностей.

- Неравенство Коши-Буняковского-Шварца: $(\xi, \eta)^2 \leqslant (\xi, \xi) \cdot (\eta, \eta)$. Отсюда, например, $(\mathbb{E}\,\xi)^2 \leqslant \mathbb{E}(\xi^2)$ (если взять $\eta \equiv 1$).
- Скалярное произведение — непрерывная функция обеих своих переменных в смысле топологии, порождённой нормой $\|\xi\| = \sqrt{(\xi, \xi)}$.

  Так как пространство является нормированным, непрерывность также является секвенциальной непрерывностью: если $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} \xi$ и $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} \eta$, то и $(\xi_n, \eta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (\xi, \eta)$. В частности, $\mathbb{E}(\xi_n\eta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(\xi\eta)$.

  Отсюда следует возможность перестановки передела и математического ожидания:

  Утверждение 3.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\,\xi_n = \mathbb{E} \operatorname*{l.i.m.}\limits_{n\to\infty} \xi_n$.

- Можно получить аналог критерия Коши:

  Утверждение 3.2. *Если для последовательности $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ случайных величин из $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ найдётся константа C такая, что для всяких подпоследовательностей $\{\xi_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{\xi_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ выполнено $(\xi_{n_k}, \xi_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} C$, то $\exists \xi\colon \operatorname*{l.i.m.}\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi$.*

  Доказательство.

  $$\|\xi_{n_k} - \xi_{m_k}\|^2 = (\xi_{n_k}, \xi_{n_k}) - 2\,(\xi_{n_k}, \xi_{m_k}) + (\xi_{m_k}, \xi_{m_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} C - 2 \cdot C + C = 0$$

  Отсюда по критерию Коши получаем существование предела. □

3.1 Непрерывность

Ранее мы уже приводили определение непрерывного случайного процесса, основанное на понятии «почти всюду» (см. определение 1.15). Приведём аналогичные определения для других типов сходимости.

Определение 3.3. *Случайный процесс X называется* **непрерывным в среднем квадратичном в точке** $t \in T$ *в случае $X_{t+\Delta t} \xrightarrow[\Delta t\to 0]{\text{с.к.}} X_t$.*

Определение 3.4. *Случайный процесс X называется* **непрерывным по вероятности в точке** $t \in T$ *в случае $X_{t+\Delta t} \xrightarrow[\Delta t\to 0]{\mathbb{P}} X_t$.*

Определение 3.5. *Случайный процесс X называется* **непрерывным по распределению в точке** $t \in T$ *в случае* $X_{t+\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{d} X_t$.

По аналогии с классическим математическим анализом далее можно ввести понятия непрерывности на множестве.

В этом курсе мы будем в основном заниматься непрерывностью (а затем и дифференцируемостью и интегрируемостью) в среднем квадратичном. Для указанного типа непрерывности есть удобный критерий в терминах функций моментов:

Теорема 3.6 (Критерий непрерывности в среднем квадратичном)**.** *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Случайный процесс второго порядка X непрерывен в среднем квадратичном в точке t.*
2. *Ковариационная функция $K_X(t,s)$ непрерывна в точке (t,t).*
3. *Корреляционная функция $R_X(t,s)$ непрерывна в точке (t,t), функция среднего $m_X(t)$ непрерывна в точке t.*

Задача 3.7. Случайный процесс X определён как $X_t = \xi \cdot \mathbb{I}_{(-\infty;r)}(t) + \eta \cdot \mathbb{I}_{[r;+\infty)}(t)$, где $t \in T = [0;1]$, ξ и η — независимые одинаково распределённые нормальные случайные величины, а r — равномерно распределённая по T случайная величина, не зависящая от ξ и η. Исследовать процесс X на непрерывность в среднем квадратичном.

Решение задачи 3.7. Заметим, что вероятность получить непрерывную реализацию процесса равна 0, поскольку это означало бы, что ξ и η совпали (таким образом, процесс не является непрерывным в смысле определения 1.15). Однако, процесс оказывается непрерывным в среднем квадратическом. Для доказательства этого воспользуемся теоремой выше.

Обозначим $\mathbb{E}\,\xi = \mathbb{E}\,\eta = m$, $\mathbb{D}\,\xi = \mathbb{D}\,\eta = D$. Функция среднего:

$$m_X(t) = \mathbb{E}\,X_t = \mathbb{E}(X_t \mid t < r)\mathbb{P}\{t < r\} + \mathbb{E}(X_t \mid t \geqslant r)\mathbb{P}\{t \geqslant r\} = \mathbb{E}\,\xi \cdot (1-t) + \mathbb{E}\,\eta \cdot t = m$$

Пусть, без ограничения общности, $s \leqslant t$. Тогда корреляционная функция:

$$R_X(t,s) = \mathbb{E}\left(\mathring{X}_t \mathring{X}_s\right) = \mathbb{E}\left(\mathring{X}_t \mathring{X}_s \,\middle|\, r < s\right)\mathbb{P}\{r < s\} + \mathbb{E}\left(\mathring{X}_t \mathring{X}_s \,\middle|\, s \leqslant r < t\right)\mathbb{P}\{s \leqslant r < t\} +$$
$$+ \mathbb{E}\left(\mathring{X}_t \mathring{X}_s \,\middle|\, t \leqslant r\right)\mathbb{P}\{t \leqslant r\} = \mathbb{E}(\mathring{\xi}\mathring{\xi}) \cdot s + \mathbb{E}(\mathring{\xi}\mathring{\eta}) \cdot (t-s) + \mathbb{E}(\mathring{\eta}\mathring{\eta}) \cdot (1-t) = D \cdot (1 + s - t)$$

$$R_X(t,s) = D \cdot (1 - |t-s|)$$

Функция среднего непрерывна, корреляционная функция непрерывна на диагонали $s = t$. Значит, X непрерывен в среднем квадратичном.

3.2 Дифференцирование

Определение 3.8. **Производной в среднем квадратичном случайного процесса X в точке** t *называется предел*

$$X'_t = \underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\Delta t}$$

Если указанный предел существует, процесс X называют **дифференцируемым в среднем квадратичном в точке** t.

Абсолютно аналогично вводятся производные и в смысле других сходимостей. При этом можно получить следующее утверждение:

Утверждение 3.9. *В любом типе сходимости из дифференцируемости следует непрерывность.*

Как и в случае с непрерывностью в среднем квадратичном, есть удобный критерий, связывающий дифференцируемость в среднем квадратичном и функции моментов:

Теорема 3.10 (Критерий дифференцируемости в среднем квадратичном)**.** *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Случайный процесс второго порядка X дифференцируем в среднем квадратичном в точке t.*
2. *Существует следующий двойной предел:*

$$\lim_{\Delta t, \Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta t \Delta s} \left(K_X(t + \Delta t, t + \Delta s) - K_X(t + \Delta t, t) - K_X(t, t + \Delta s) + K(t, t) \right)$$

3. *Функция $m_X(t)$ дифференцируема в точке t и существует следующий двойной предел:*

$$\lim_{\Delta t, \Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta t \Delta s} \left(R_X(t + \Delta t, t + \Delta s) - R_X(t + \Delta t, t) - R_X(t, t + \Delta s) + R(t, t) \right)$$

Заметим, что предел из утверждения теоремы не является смешанной производной. Смешанная производная выражается через повторный предел, мы же имеем дело с двойным пределом. Из существования данного передела следует существование смешанной производной; в обратную сторону это неверно.

Задача 3.11. Выразить функцию среднего и корреляционную функцию X_t' через $m_X(t)$ и $R_X(t, s)$.

Решение задачи 3.11.

$$m_{X'}(t) = \mathbb{E} \operatorname*{l.i.m.}_{\Delta t \to 0} \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}(X_{t+\Delta t} - X_t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_X(t + \Delta t) - m_X(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} m_X(t)$$

$$\begin{aligned} R_{X'}(t, s) = \mathbb{E} \left[\operatorname*{l.i.m.}_{\Delta t \to 0} \frac{\mathring{X}_{t+\Delta t} - \mathring{X}_t}{\Delta t} \cdot \operatorname*{l.i.m.}_{\Delta s \to 0} \frac{\mathring{X}_{s+\Delta s} - \mathring{X}_s}{\Delta s} \right] = \\ = \lim_{\Delta t, \Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta t \Delta s} \Big(\mathbb{E}(\mathring{X}_{t+\Delta t} \mathring{X}_{s+\Delta s}) - \mathbb{E}(\mathring{X}_{t+\Delta t} \mathring{X}_s) - \mathbb{E}(\mathring{X}_t \mathring{X}_{s+\Delta s}) + \mathbb{E}(\mathring{X}_t \mathring{X}_s) \Big) = \\ = \frac{\partial^2}{\partial t \, \partial s} R_X(t, s) \end{aligned}$$

Отметим, что центрирование случайной величины («$\mathring{X}_t'$») было сразу внесено внутрь предела и дроби. Проверьте сами корректность данного шага.

Задача 3.12. Исследовать пуассоновский процесс на непрерывность и дифференцируемость «почти наверное», в среднем квадратичном, по вероятности и по распределению.

Решение задачи 3.12. Непрерывности «почти наверное», очевидно, нет (с вероятностью 1 траектории разрывны), а потому нет и дифференцируемости (см. утверждение 3.9).

Непрерывность в среднем квадратичном имеет место, поскольку $m_K(t) = \lambda t$ и $R_K(t,s) = \lambda \min\{t,s\}$ непрерывны (в том числе и R_K — на диагонали), а дифференцируемости в среднеквадратичном нет, поскольку R_K не дифференцируема на диагонали. Уже отсюда следует непрерывность по вероятности и распределению (вспомните диаграмму следования одного типа сходимости из другого).

Покажем дифференцируемость по вероятности. Из неё последует непрерывность по вероятности, а также дифференцируемость и непрерывность по распределению. Для этого надо выбрать кандидата для производной. Попробуем взять тождественно нулевой случайный процесс X. Нужно проверить, что

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \mathbb{P}\left\{\left|\frac{K_{t+\Delta t} - K_t}{\Delta t} - X\right| > \varepsilon\right\} = 0$$

Действительно,

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{K_{t+\Delta t} - K_t}{\Delta t} - 0\right| > \varepsilon\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{\frac{K_{t+\Delta t} - K_t}{\Delta t} \leqslant \varepsilon\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{\frac{K_{\Delta t} - K_0}{\Delta t} \leqslant \varepsilon\right\} =$$
$$= 1 - \mathbb{P}\{K_{\Delta t} < \Delta t \cdot \varepsilon\} \leqslant 1 - \mathbb{P}\{K_{\Delta t} = 0\} = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Задача 3.13. Показать, что винеровский процесс ни в какой точке не является дифференцируемым даже по распределению.

Решение задачи 3.13. Рассмотрим $X_t(\Delta t) = (W_{t+\Delta t} - W_t)/\Delta t$. Из свойств винеровского процесса имеем $X_t(\Delta t) \sim \mathcal{N}(0, |\Delta t|/|\Delta t|^2) = \mathcal{N}(0, |\Delta t|^{-1})$. Из сходимости по распределению следует сходимость характеристических функций поточечно к характеристической функции предельного распределения. Характеристическая функция случайной величины $X_t(\Delta t)$ — $\varphi(s) = \exp(-s^2/|2\Delta t|)$. В точке $s = 0$ она равна единице, а в $s \neq 0$ сходится к нулю при $\Delta t \to 0$. Значит, φ сходится поточечно к разрывной функции, которая не может быть характеристической функцией никакого распределения.

3.3 Интегрирование по времени

Определение 3.14. *Пусть случайный процесс X определён на отрезке $[a;b]$. Рассмотрим разбиение $\mathcal{T}$ этого отрезка $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, где на каждом полуинтервале $\Delta_k = [t_{k-1}; t_k)$ длины $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ взято по точке τ_k.*

Случайная величина $Z(\mathcal{T}) = \sum_{k=1}^{n} X_{\tau_k} \Delta t_k$ называется **интегральной суммой Римана случайного процесса X, построенной по разбиению $\mathcal{T}$**.

Величина $d(\mathcal{T}) = \max \Delta t_k$ называется **мелкостью разбиения** $\mathcal{T}$.

Определение 3.15. Интегралом Римана процесса X на отрезке $[a;b]$ в смысле среднего квадратичного *называется предел*

$$\underset{d(\mathcal{T}) \to 0}{\text{l.i.m.}}\, Z(\mathcal{T}) \triangleq \int\limits_a^b X_t \, dt$$

Если указанный предел существует, процесс X называют **интегрируемым в среднем квадратичном на отрезке $[a;b]$**.

Аналогично математическому анализу вводятся интегралы по бесконечным отрезкам: берётся предел в нужном смысле (в нашем случае — в среднем квадратичном) при стремлении одного из концов в бесконечность.

Как и в случае с непрерывностью и дифференцируемостью в среднем квадратичном, имеем удобный критерий интегрируемости:

Теорема 3.16 (Критерий интегрируемости в среднем квадратичном). *Следующие условия эквивалентны:*

1. *Случайный процесс второго порядка X интегрируем в среднем квадратичном на отрезке $[a;b]$.*
2. *Существует и конечен следующий двойной интеграл Римана:* $\int\limits_a^b \int\limits_a^b K_X(t,s)\,ds\,dt$.
3. *Существуют и конечны следующие интегралы Римана:* $\int\limits_a^b m_X(t)\,dt$ *и* $\int\limits_a^b \int\limits_a^b R_X(t,s)\,ds\,dt$.

Утверждение 3.17. *Из непрерывности в среднем квадратичном следует интегрируемость в среднем квадратичном.*

Задача 3.18. Рассмотрим $\mathbb{L}_2$-процесс X, дифференцируемый в среднем квадратичном на отрезке $[a;b] \subseteq T$. Пусть $J_t = \int\limits_a^t X_s\,ds$. Требуется найти взаимную корреляционную функцию процессов X' и J, то есть $R_{X',J}(t,s) = \mathbb{E}(\mathring{X}'_t \cdot \mathring{J}_s)$.

Решение задачи 3.18.

$$\begin{aligned}
R_{X',J}(t,s) &= \mathbb{E}\left[\underset{\Delta t\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{\mathring{X}_{t+\Delta t}-\mathring{X}_t}{\Delta t}\cdot \underset{d(\mathcal{T})\to 0}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=1}^{n}\mathring{X}_{\tau_k}\Delta t_k\right] = \\
&= \lim_{\Delta t, d(\mathcal{T})\to 0}\frac{1}{\Delta t}\,\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\mathring{X}_{t+\Delta t}\mathring{X}_{\tau_k}-\mathring{X}_t\mathring{X}_{\tau_k}\right)\Delta t_k\right] = \\
&= \lim_{\Delta t, d(\mathcal{T})\to 0}\sum_{k=1}^{n}\frac{R_X(t+\Delta t,\tau_k)-R_X(t,\tau_k)}{\Delta t}\Delta t_k = \int\limits_0^s \frac{\partial R_X(t,\tau)}{\partial t}\,d\tau
\end{aligned}$$

О связи интеграла Римана в среднем квадратичном и потраекторного интеграла говорит следующее замечание:

Замечание 3.19. *Если почти все реализации случайного процесса X интегрируемы по Риману, то потраекторный интеграл (интеграл траектории $X(\omega,\cdot)$ по времени) есть случайная величина (то есть измеримая функция на $(\Omega,\mathcal{F})$). Если при этом X интегрируем в среднем квадратичном, то потраекторный и среднеквадратичный интегралы совпадают с вероятностью 1.*

4 Стационарность

Ранее мы встречались с процессами со ***стационарными приращениями***, то есть с процессами, у которых распределение приращений не зависит от моментов времени, в которых они взяты, а зависит только от промежутка между сечениями, разность которых рассматривается в качестве приращения. Это, например, пуассоновский и винеровский процесс, где $K_{t+\Delta t} - K_t \sim \mathrm{Po}(\lambda \Delta t)$ и $W_{t+\Delta t} - W_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$, соответственно.

Можно ввести аналогичное определение для всего процесса в целом, которое будет отражать некоторую инвариантность процесса относительно сдвига по времени.

Определение 4.1. *Случайный процесс X называется* **стационарным (в узком смысле)***, если его конечномерные распределения не зависят от одновременного сдвига моментов времени на одно и то же число Δt, то есть векторы $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ и $(X_{t_1+\Delta t}, \ldots, X_{t_n+\Delta t})$ имеют одинаковое распределение для любых $n \in \mathbb{N}$, $\{t_k\}_{k=1}^n \subseteq \{t \mid (t \in T) \wedge (t + \Delta t \in T)\}$.*

Определение 4.2. *Случайный процесс X называется* **стационарным в широком смысле***, если $m_X(t) = const$, а $R_X(t, s)$ зависит только от разности $t - s$.*

Замечание 4.3. *Из стационарности следует стационарность в широком смысле.*

Для стационарного (в широком смысле) процесса корреляционную функцию чаще всего пишут в форме $R_X(\tau)$, подразумевая под τ разность $t-s$, поскольку фактически $R_X(s,t)$ однозначно определяется функцией одной переменной. В силу симметричности $R_X(s,t)$ эта новая функция $R_X(\tau)$ оказывается чётной.

Для стационарного в широком смысле процесса существенно упрощаются критерии непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости в среднеквадратичном. К примеру, такая непрерывность стационарного процесса равносильна непрерывности $R_X(\tau)$ в нуле, а дифференцируемость в среднеквадратичном сразу следует из непрерывности в нуле функции $R_X(\tau)$.

Утверждение 4.4. *Пусть стационарный в широком процесс X дифференцируем в среднем квадратичном. Тогда X' — также стационарный в широком смысле процесс.*

Доказательство. Вспомним, что $m_{X'}(t) = \dfrac{d}{dt} m_X(t)$ и $R_{X'}(t, s) = \dfrac{\partial^2 R_X(t, s)}{\partial t \, \partial s}$. Тогда, в силу стационарности в широком смысле,

$$m_{X'}(t) = \frac{d}{dt} const = 0, \qquad R_{X'}(t, s) = \frac{\partial^2 R_X(t-s)}{\partial t \, \partial s} = - \left. \frac{d^2 R_X(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau = t-s}$$

Отсюда видно, что $m_{X'}$ — константа, а $R_{X'}$ зависит только от $t - s$. □

Замечание 4.5. *Для гауссовских процессов стационарность в широком и узком смыслах эквивалентны.*

Задача 4.6. Показать, что винеровский процесс W не стационарен ни в каком смысле, а процесс $Y_t = W_{t+\Delta t} - W_t$ $(t, \Delta t \geqslant 0)$ стационарен в обоих смыслах.

Решение задачи 4.6. Дисперсия винеровского процесса зависит от времени, поэтому W сам по себе не стационарен. Рассмотрим теперь Y:

$$m_Y(t) = \mathbb{E}\, W_{t+\Delta t} - \mathbb{E}\, W_t = 0 - 0 = 0$$

$$\begin{aligned} R_Y(t, s) &= \operatorname{cov}\left(W_{t+\Delta t} - W_t, W_{s+\Delta t} - W_s\right) = \\ &= \min\{t + \Delta t, s + \Delta t\} - \min\{t + \Delta t, s\} - \min\{t, s + \Delta t\} + \min\{t, s\} \end{aligned}$$

Используя $2\min\{a,b\} = a + b - |a-b|$, получаем

$$R_Y(t,s) = -|t-s| + \frac{1}{2}\left(|t-s+\Delta t| + |t-s-\Delta t|\right) = f(t-s)$$

Согласно замечанию 4.5, имеем стационарность как в широком, так и в узком смыслах.

Задача 4.7. Дан случайный процесс $Z_t = A\cos(Bt+\varphi)$ $(t \geqslant 0)$, где A, B и φ — случайные величины, $\varphi \sim U_{[0;2\pi]}$ и не зависит от (A,B). Исследовать процесс Z на стационарность в обоих смыслах.

Решение задачи 4.7. Зафиксируем $(A,B) = (a,b)$, $\Delta t > 0$. Так как φ не зависит от (A,B), распределение данной случайной величины осталось тем же (равномерным на отрезке $[0;2\pi]$). Обозначим $\varphi' = \varphi + B\Delta t \mod 2\pi$. Распределение φ' — равномерное на отрезке $[0;2\pi]$ независимо от a, b и Δt. Значит, $\varphi' \sim U_{[0;2\pi]}$ также не зависит от (A,B). В таком случае, если ввести $Y_t = Z_{t+\Delta t} = A\cos(Bt+\varphi')$, то вектор $(Z_{t_1+\Delta t}, \ldots, Z_{t_n+\Delta t})$ равен вектору $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$, который имеет то же распределение, что и $(Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n})$, так как (A,B,φ) и (A,B,φ') распределены одинаково. Отсюда следует, что Z стационарен по определению.

5 Эргодичность

При работе со стохастическими моделями иногда попадаются такие случайные процессы, для которых усреднение по вероятностному пространству в некотором смысле эквивалентно усреднению по времени. Это свойство позволяет получить некоторые характеристики процесса просто путём длительного наблюдения за одной из траекторий. Это довольно удобно в случаях, когда получить несколько реализаций процесса невозможно или дорого. Процессы с упомянутым свойством называются ***эргодическими***.

Определение 5.1. *Процесс X второго порядка называется* **эргодическим по математическому ожиданию** *в случае $T = [0; +\infty)$, $\mathbb{E}\, X_t = m = const$ и $\underset{\tau\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau X_t\, dt \triangleq \underset{\tau\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \langle X\rangle_\tau = m$.*

Для эргодического случайного процесса можно оценивать математическое ожидание, взяв достаточно длинную реализацию процесса X и вычислив по ней $\langle X\rangle_\tau$.

Определение 5.2. *Процесс X второго порядка называется* **эргодическим по дисперсии**, *если процесс $Y_t = \mathbb{D}\, X_t$ эргодичен по математическому ожиданию.*

Определение 5.3. *Процесс X второго порядка называется* **эргодическим по корреляционной функции**, *если для любого $\Delta t \geqslant 0$ процесс $Y_t = \operatorname{cov}(X_t, X_{t+\Delta t})$ эргодичен по математическому ожиданию.*

Теорема 5.4 (Критерий эргодичности)**.** *Процесс второго порядка X с постоянным математическим ожиданием эргодичен по математическому ожиданию тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{1}{\tau^2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^\tau R_X(t,s)\, dt\, ds = 0$$

Теорема 5.5 (Достаточное условие эргодичности)**.** *Процесс второго порядка X с постоянным математическим ожиданием эргодичен по математическому ожиданию, если $\lim\limits_{|t-s|\to+\infty} R_X(t,s) = 0$.*

Задача 5.6. Пусть K_t — пуассоновский процесс. Исследовать процесс $X_t = K_{t+1} - K_t$ на эргодичность по математическому ожиданию и по дисперсии.

Решение задачи 5.6. Это процесс второго порядка, так как он получен из другого процесса второго порядка (пуассоновского) линейной комбинацией сечений. $\mathbb{E}\, X_t = \lambda(t+1) - \lambda t = \lambda = const$. Заметим, что при $|t-s| > 1$ верно $R_X(t,s) = \operatorname{cov}(K_{t+1} - K_t, K_{s+1} - K_s) = 0$ в силу независимости приращений пуассоновского процесса. В таком случае выполнено достаточное условие эргодичности 5.5.

Задача 5.7. Дан случайный процесс $S_t = A\exp(at + \sigma W_t)$, $t \geqslant 1$, где A, a, σ — неслучайные константы. Воспользовавшись понятием эргодичности, оценить величину a.

Решение задачи 5.7. Рассмотрим процесс

$$X_t = \frac{1}{t}\ln\frac{S_t}{A} = a + \frac{W_t}{t}, \qquad t \geqslant 1$$

Для него $\mathbb{E}\, X_t = a$,

$$R_X(t,s) = \operatorname{cov}(a + W_t/t, a + W_s/s) = \frac{1}{ts}\operatorname{cov}(W_t, W_s) = \frac{min\{t,s\}}{ts} < +\infty$$

То есть мы имеем дело с процессом второго порядка с константной функцией среднего. Корреляционная функция данного процесса непрерывна на любом квадрате $[1;\tau]^2$, а потому интегрируема. Пользуясь критерием эргодичности,

$$\frac{1}{\tau^2}\int\limits_1^\tau\int\limits_1^\tau R_X(t,s)\,dt\,ds = \frac{1}{\tau^2}\int\limits_1^\tau\int\limits_1^\tau \frac{\min\{t,s\}}{ts}\,dt\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\tau^2}\int\limits_1^\tau\int\limits_1^\tau \frac{t}{ts}\,dt\,ds = \frac{1}{\tau^2}\int\limits_1^\tau \frac{\tau-1}{s}ds = \frac{(\tau-1)\ln\tau}{\tau^2} \underset{\tau\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$