

# Случайные процессы: домашние задания

2023

# Домашнее задание на первую неделю

## Задача 1 *(Задача из канонического задания)*

Пусть случайный процесс  $X(\omega, t) = \omega t$ ,  $t \in [0; 1]$ , определен на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , где  $\Omega = \{1, 2, 3\}$ ,  $\mathcal{F}$  — множество всех подмножеств множества  $\Omega$ , а мера  $\mathbb{P}$  такова, что  $\mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \mathbb{P}(\{3\}) = 1/3$ . Построить вторичное (выборочное) вероятностное пространство процесса.

## Задача 2

Случайный процесс  $X$  задан формулой  $X_t = t \cdot \eta$ , где  $\eta \sim U_{(0;1)}$ ,  $t \in (0; 1)$ . Найдите  $n$ -мерные функции распределения этого процесса.

## Задача 3

Найдите математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию процесса из предыдущей задачи.

## Задача 4

Пусть дана случайная величина  $\eta \sim U_{[0;1]}$ . Определим случайный процесс  $X_t = \mathbb{I}_{(-\infty; \eta]}(t)$ . Найдите вероятность, что скачок с единицы до нуля произойдёт на интервале  $[t_0; t_0 + \Delta t]$ , если достоверно известно, что на  $[0; t_0]$  скачка не было (параметр  $\Delta t$  задан и строго меньше  $1 - t_0$ ).

## Задача 5

Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — независимые случайные величины с функциями распределения  $F_\xi(x)$  и  $F_\eta(y)$ . Пусть  $X$  — случайный процесс, определённый формулой  $X_t = \xi \cdot t + \eta$ . Найдите семейство конечномерных распределений процесса.

## Задача 6

Пусть  $X_1, X_2$  — два независимых случайных процесса с корреляционными функциями  $R_{X_1}(t, s)$  и  $R_{X_2}(t, s)$  и функциями среднего  $m_{X_1}(t)$  и  $m_{X_2}(t)$ . Найдите корреляционную функцию процесса  $Y = X_1 \cdot X_2$ .

# Домашнее задание на вторую неделю

## Задача 1 (Задача из канонического задания)

Поток сделок в фирме моделируется с помощью пуассоновского процесса  $K$  с интенсивностью  $\lambda = 100$  сделок/час. Каждая сделка приносит доход  $V_i \sim U_{[a;b]}$ ,  $a = 10$ ,  $b = 100$  условных единиц денег. Считая, что  $K$ ,  $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  — независимые в совокупности случайные величины, найдите математическое ожидание, дисперсию и характеристическую функцию выручки за время  $t$ . Докажите, что она имеет асимптотически нормальное распределение.

## Задача 2 (Задача из канонического задания)

Случайный процесс  $X$  представляет собой сумму  $n$  независимых пуассоновских процессов с интенсивностями  $\{\lambda_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ . Определить тип и параметры процесса  $X$ .

## Задача 3 (Задача из канонического задания)

Пусть  $K$  — пуассоновский случайный процесс интенсивности  $\lambda$ , а  $X$  — случайный процесс, полученный в результате удаления из  $K$  всех событий, очередной номер которых не кратен  $s$ . Определить тип и параметры распределения интервала между соседними событиями в случайном процессе  $X$ .

## Задача 4

Пусть  $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  все независимы в совокупности и имеют одинаковое распределение  $U_{[3;5]}$ . Покажите, что процесс восстановления, построенный по этим случайным величинам (т. е. процесс вида  $X_t = \sup\{n \mid \xi_1 + \dots + \xi_n \leq t\}$ ) не является процессом с независимыми приращениями.

## Задача 5

Пусть  $K$  — пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda > 0$ . Какие из следующих процессов имеют независимые приращения?

1.  $X_t = K_t - K_0$ ,  $t \geq 0$ .
2.  $X_t = K_t \bmod 2$ ,  $t \geq 0$ .
3.  $X_t = K_{t^2-t+1}$ ,  $t \geq 0$ .

$$4. X_t = K_t^2, t \geq 0.$$

### Задача 6

Пусть  $K$  — пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda > 0$ . Найдите вероятность, что в момент времени  $t$  число  $K_t$  чётно.

### Задача 7

Найдите предел при  $t \rightarrow +\infty$  (почти наверное) величины  $K_t/t$ , где  $K$  — пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda \geq 0$ .

### Задача 8 *(Практическое задание)*

Вас приняли на должность системного администратора в известную IT-компанию «Рога и Копыта». Одной из ваших задач является стресс-тестирование сетевой инфраструктуры компании. Для моделирования потока данных от пользователей вы решили использовать сложный пуассоновский процесс с интенсивностью  $\lambda$ . Размер  $V_i$  каждого приходящего пакета распределён логнормально:

$$\rho_V(x) = \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x) \cdot \frac{\exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{x \cdot \sigma\sqrt{2\pi}}$$

Пользуясь результатами, полученными на семинаре, найдите функцию среднего и корреляционную функцию процесса (матожидание и дисперсию  $V$  можно взять из справочника). Найти вероятностное распределение времени между отправкой  $n$ -ого и  $(n+m)$ -ого пакета.

Пусть связь с одним из серверов осуществляется по  $N$  независимым каналам, на каждом из которых поток пакетов моделируется согласно процессу выше. Найдите вид и параметры процесса, соответствующего суммарному потоку данных на сервер.

По аналогии с кодом в репозитории курса напишите функцию, которая по параметрам процесса  $(\lambda, \mu, \sigma)$  моделирует заданное число реализаций. Постройте графики реализаций для некоторого набора параметров.

Зафиксируем  $\sigma^2 = \mu$ . Взяв в качестве максимальной пропускной способности  $Q_{\max} = \lambda \cdot e^{3\mu}$ , путём компьютерного моделирования оценить частоту выхода канала из строя при работе в течение времени  $100/\lambda$ .