Случайные процессы: семинары

Бутаков И. Д.

2023

Содержание

Предисловие

Перед вами сборник всех семинаров по случайным процессам за авторством Бутакова И. Д. Автор выражает благодарность Останину Павлу Антоновичу и Широбокову Максиму Геннадьевичу за предоставленные материалы.

Используемые обозначения

$\overset{\triangle}{\iff}$	«... по определению тогда и только тогда, когда ...»
$\triangleq$	«... по определению равно ...»
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	вероятностное пространство (Ω — множество исходов, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, $\mathbb{P}$ — вероятностная мера).
$\mathcal{B}(A)$, $\mathcal{B}_A$	Борелевская σ-алгебра, определённая на множестве A (если A не указано, по умолчанию предполагается $A = \mathbb{R}$).
$\mathbb{I}_A$	индикаторная функция множества A.
$\mathbb{E}\,X$	математическое ожидание случайной величины X.
$\mathbb{D}\,X$	дисперсия случайной величины X.
$\mathring{X}$	«центрированная» случайная величина: $\mathring{X} = X - \mathbb{E}\,X$.
$\mathrm{Be}(p)$	распределение Бернулли с параметром p.
$\mathrm{Bi}(n, p)$	биномиальное распределение с параметрами n и p.
$\mathrm{Po}(\lambda)$	распределение Пуассона с интенсивностью λ.
$\mathrm{U}(A)$, U_A	равномерное распределение на множестве A.
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	показательное распределение с параметром λ (интенсивность).
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2.
$\xrightarrow{\text{с.к.}}$	сходимость в среднем квадратичном.
$\xrightarrow{\text{п.н.}}$	сходимость почти наверное.
$\xrightarrow{\mathbb{P}}$	сходимость по вероятности.
$\xrightarrow{d}$	сходимость по распределению.
$\overset{\text{п.н.}}{=}$	равенство почти наверное.
$\overset{d}{=}$	равенство по распределению.

1 Основные сведения

Случайные процессы — математические объекты, построенные с использованием теории вероятностей для исследования и моделирования реальных явлений, растянутых во времени и имеющих стохастическую (случайную) природу.

Определение 1.1. *Пусть задано вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *и множество* $T \subseteq \mathbb{R}$. *Функция* $X\colon \Omega \times T \to \mathbb{R}$ *называется* **случайным процессом**, *если* $\forall t \in T$ *функция* $X(\,\cdot\,, t) \equiv X_t\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *измерима (то есть является случайной величиной).*

Случайный процесс можно трактовать как семейство случайных величин, параметризованное $t \in T$. Параметр t обычно интерпретируется как время. Если T состоит из одного элемента, случайный процесс является обычной случайной величиной, если T конечно — случайным вектором. Если T счётно, говорят о случайном процессе с дискретным временем. Параметр ω, как и при описании случайных величин, часто опускается.

Определение 1.2. *При фиксированном* $t_0 \in T$ *случайная величина* X_{t_0} *называется* **сечением случайного процесса** X.

Определение 1.3. *При фиксированном* $\omega_0 \in \Omega$ *функция* $X(\omega_0, \,\cdot\,)$ *называется* **реализацией (траекторией) случайного процесса** X.

Также случайный процесс можно считать особой случайной величиной, принимающей значения в пространстве функций; при такой интерпретации, однако, отдельных усилий стоит определить, что такое вероятностное распределение на функциях. В рамках семинаров данный вопрос освещаться со всей полнотой и строгостью не будет, поэтому приведём из этой области лишь основные факты и определения, требующиеся для работы со случайными процессами.

Рассмотрим произвольный случайный процесс X. В силу единства вероятностного пространства, любой вектор вида $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ (где $t_i \in T$) является случайным вектором.

Определение 1.4. *Вероятностное распределение вектора вида* $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *называется* **конечномерным распределением случайного процесса** X. *Его функция распределения обозначается как* $F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$.

Функции распределений векторов, составленных из сечений случайного процесса, обладают всеми известными вам свойствами функций распределений случайных векторов, а также ещё двумя дополнительными свойствами:

Утверждение 1.5. *Функции конечномерных распределений случайного процесса* X *обладают следующими свойствами:*

1. **(условие симметрии)** *Для любой перестановки* k_i *выполнено равенство*
$$F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F_X(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}; t_{k_1}, \ldots, t_{k_n})$$
2. **(условие согласованности)** *Для любого индекса* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *выполнено*
$$\lim_{x_k \to +\infty} F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n; t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_n)$$

Теорема 1.6 (Колмогорова)**.** *Пусть имеется семейство распределений случайных векторов, удовлетворяющее всем свойствам из утверждения 1.5. Тогда существует вероятностное пространство и заданный на нём случайный процесс, семейство конечномерных распределений которого совпадает с данным.*

Таким образом, случайный процесс можно задавать семейством его конечномерных распределений. На данном этапе читателю должно стать понятно, как можно задавать вероятностное распределение на множестве функций (ответ — при помощи специальных семейств конечномерных распределений).

Задача 1

Пусть η — случайная величина с функцией распределения F_η. Найти все конечномерные распределения случайного процесса $X_t = \eta + t$.

Решение задачи 1

Одномерная функция распределения:

$$F_X(x;t) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X_t < x\} = \mathbb{P}\{\eta < x - t\} = F_\eta(x - t)$$

Конечномерная функция распределения:

$$\begin{aligned} F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \mathbb{P}\bigcap_{i=1}^{n}\{X_{t_i} < x_i\} = \mathbb{P}\bigcap_{i=1}^{n}\{\eta < x_i - t_i\} = \\ = \mathbb{P}\left\{\eta < \min_i\{x_i - t_i\}\right\} = F_\eta\left(\min_i\{x_i - t_i\}\right) \end{aligned}$$

Задача 2

Пусть дана случайная величина $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$. Определим случайный процесс $X_t = \mathbb{I}_{(-\infty;\eta]}(t)$. Найдите вид реализаций процесса, его одномерные и двумерные распределения.

Решение задачи 2

Реализация процесса — функция, равная единице при $t \leqslant \eta$ и нулю при $t > \eta$, см. рис. 1.1. Одномерная функция распределения:

$$F_X(x;t) = \mathbb{P}\{X_t < x\} = \mathbb{P}\{\mathbb{I}_{(-\infty;\eta]}(t) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \mathbb{P}\{\eta < t\}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases},$$

$$\text{где} \quad \mathbb{P}\{\eta < t\} = F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ t, & 0 < t \leqslant 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

Двумерная функция распределения:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}\left(\{X_{t_1} < x_1\} \cap \{X_{t_2} < x_2\}\right)$$

Аналогично одномерной функции распределения,

1. Если $x_1 \leqslant 0$ или $x_2 \leqslant 0$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = 0$.
2. Если $x_1 > 1$ и $x_2 > 1$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = 1$.
3. Если $0 < x_1 \leqslant 1$ и $x_2 > 1$, $F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_X(x_1; t_1)$. Аналогично симметричный случай.
4. Если $0 < x_1, x_2 \leqslant 1$,

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}\left(\{\eta < t_1\} \cap \{\eta < t_2\}\right) = \mathbb{P}\left\{\eta < \min\{t_1, t_2\}\right\} = F_\eta\left(\min\{t_1, t_2\}\right)$$

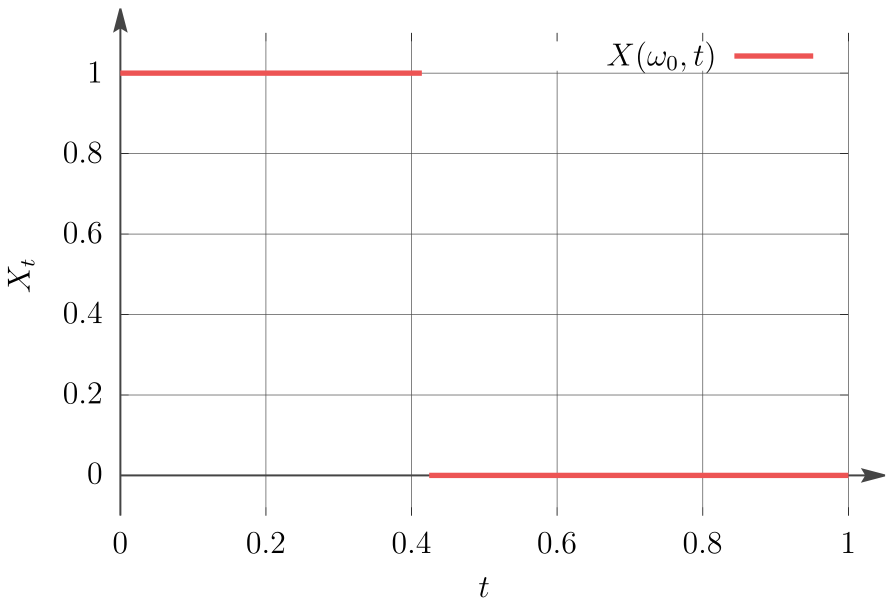

Рис. 1.1: График одной из реализаций случайного процесса из задачи 2.

Задавать процессы на вероятностных пространствах удобно также при помощи ***выборочного (вторичного) пространства***.

Определение 1.7. *Рассмотрим определённый на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ случайный процесс $X\colon \Omega \times T \to \mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{X}$ — пространство функций, содержащее в себе все траектории $X(\omega, \cdot\,)$ (но не обязательно только их). Рассмотрим σ-алгебру, порождённую* **цилиндрическими множествами***:*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{T} = \sigma\left(\{x \in \mathcal{X} \mid x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n\}_{n\in\mathbb{N}, \{t_k\}_{k=1}^{n} \subseteq T, \{B_k\}_{k=1}^{n} \subseteq \mathcal{B}}\right)$$

Отображение $X(\omega, \cdot\,)$ определяет измеримое отображение $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{T})$:

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{T} \quad \{\omega \in \Omega \mid X(\omega, \cdot\,) \in B\} \in \mathcal{F}$$

На пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{T})$ вероятностную меру можно определить следующим образом:

$$\forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{T} \quad \mathbb{P}_X B = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega, \cdot\,) \in B\}$$

Вероятностное пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{T}, \mathbb{P}_X)$ называется **выборочным (вторичным) пространством***.*

Задача 3

Рассмотрим вероятностное пространство $\left(\{0,1,2,3\}, 2^{\{0,1,2,3\}}, \mathbb{P}\right)$, где $\mathbb{P} : \mathbb{P}\{0\} = \ldots = \mathbb{P}\{3\} = \frac{1}{4}$, и случайный процесс $X(\omega, t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\omega\right)$, $t \in T = [0; 2\pi]$. Построить вторичное (выборочное) вероятностное пространство.

Решение задачи 3

Возьмём в качестве пространства функций $\mathcal{X} = \left\{\sin(t), \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(t + \pi\right), \sin\left(t + \frac{3\pi}{2}\right)\right\}$. Тогда $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}^{T} = 2^{\mathcal{X}}$, так как для любого подмножества $\mathcal{X}$ можно подобрать цилиндрическое множество, с которым оно совпадает. Наконец,

$$\mathbb{P}_X : \quad \mathbb{P}_X\left\{\sin(t)\right\} = \ldots = \mathbb{P}_X\left\{\sin\left(t + 3\pi/2\right)\right\} = \frac{1}{4}$$

Существование различных случайных процессов с одними и теми же вероятностными свойствами приводит к желанию (а иногда и необходимости) в некотором смысле отождествлять процессы, у которых конечномерные распределения совпадают.

Определение 1.8. *Пусть X и Y — два случайных процесса, определённые на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и множестве T. Данные процессы называются* **стохастически эквивалентными** *в случае равенства почти наверное их реализаций в любой выбранный момент, то есть*

$$\forall t \in T \quad \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega, t) = Y(\omega, t)\} = 1$$

В этом случае Y называют **модификацией** *процесса Y (и наоборот).*

Утверждение 1.9. *Стохастически эквивалентные случайные процессы имеют одинаковое семейство конечномерных распределений.*

Например, такое отождествление полезно для осмысленного определения непрерывного случайного процесса:

Определение 1.10. *Случайный процесс называется* **непрерывным** *в случае, если существует его модификацией с непрерывными реализациями.*

Задача 4

Пусть $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$. Определим случайный процесс $X_t = \mathbb{I}_{\{\eta\}}(t)$ (то есть $X_t = 1$ в том и только в том случае, когда $\eta = t$, и равен 0 иначе). Является ли X_t непрерывным процессом?

Решение задачи 4

Да, является. Процесс $Y_t \equiv 0$ является его модификацией.

При исследовании случайных процессов также бывает полезно рассматривать их моменты, дающие некоторое представление об усреднённом поведении процесса. В отличие от моментов случайных величин, любые моменты случайного процесса также зависят от времени.

Определение 1.11. *Если $\forall t \in T$ существует $\mathbb{E}\, X_t$, то функция $m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t$ определена и называется* **функцией среднего**.

Аналогично вводятся функции любых других моментов случайной величины X_t. При работе со случайными процессами нас также будут интересовать моменты, «разнесённые во времени».

Определение 1.12. *Если $\forall t_1, t_2 \in T$ существует $\mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2}$, то функции $K_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2}$ и $R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\, \mathring{X}_{t_1} \mathring{X}_{t_2}$ определены и называются, соответственно,* **ковариационной** *и* **корреляционной функциями**.[1]

Утверждение 1.13. *Функции $K_X(t_1, t_2)$ и $R_X(t_1, t_2)$ одновременно либо определены, либо не определены, причём в первом случае функция $m_X(t)$ определена и $R_X(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) - m_X(t_1) m_X(t_2)$.*

Доказательство. Следует из свойств моментов. □

[1] Данные обозначения не являются общепринятыми, а также несколько контринтуитивны; при чтении сторонних источников будьте внимательны.

Задача 5

Найти корреляционную функцию случайного процесса из задачи 2.

Решение задачи 5

Для любого t_0 случайная величина X_{t_0} может принимать только два значения — 0 или 1; это бернуллиевская случайная величина. Найдём параметр её распределения:

$$\mathbb{P}\{X_t = 1\} = \mathbb{P}\{t \leqslant \eta\} = 1 - F_\eta(t)$$

Следовательно, $m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = 1 - F_\eta(t)$. Далее,

$$K_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2} = 1 \cdot \mathbb{P}\left(\{X_{t_1} = 1\} \cap \{X_{t_2} = 1\}\right) = \\ = \mathbb{P}\left(\{t_1 \leqslant \eta\} \cap \{t_2 \leqslant \eta\}\right) = 1 - F_\eta\left(\max\{t_1, t_2\}\right)$$

Наконец,

$$R_X(t_1, t_2) = 1 - F_\eta\left(\max\{t_1, t_2\}\right) - (1 - F_\eta(t_1)) \cdot (1 - F_\eta(t_2)) = \\ = F_\eta(t_1) + F_\eta(t_2) - F_\eta(t_1) \cdot F_\eta(t_2) - F_\eta(\max\{t_1, t_2\})$$

В частности, если $t_1, t_2 \in [0; 1]$,

$$R_X(t_1, t_2) = t_1 + t_2 - t_1 t_2 - \max\{t_1, t_2\} = \min\{t_1, t_2\} - t_1 t_2$$

Задача 6

Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и $\eta \sim U_{[-\pi;\pi]}$ — независимые случайные величины. Определим случайный процесс X следующим образом: $X_t = \xi \cdot \cos(t + \eta)$, где $t \in \mathbb{R}$. Найдите функцию среднего и корреляционную функцию процесса.

Решение задачи 6

Поскольку ξ и η независимы,

$$m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = \mathbb{E}\, \xi \cdot \mathbb{E} \cos(t + \eta) = 0 \cdot \ldots = 0$$

$$R_X(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) - 0 = \mathbb{E}\, X_{t_1} X_{t_2} = \mathbb{E}\, \xi^2 \cdot \mathbb{E}\left(\cos(t_1 + \eta) \cdot \cos(t_2 + \eta)\right) = \\ = 1 \cdot \frac{1}{2}\, \mathbb{E}\left(\cos(t_1 - t_2) + \cos(t_1 + t_2 + 2\eta)\right) = \frac{1}{2} \cos(t_1 - t_2)$$

Задача 7

Пусть U, V и W — независимые в совокупности случайные величины. Известно, что U и V обладают нулевым матожиданием и дисперсией D, а W распределена с плотностью

$$\rho_W(w) = \frac{2\lambda}{\pi} \cdot \frac{\mathbb{I}_{[0;+\infty)}(w)}{\lambda^2 + w^2}, \quad \lambda > 0$$

Определим случайный процесс $X_t = U \cos(Wt) + V \sin(Wt)$. Вычислите функцию среднего и корреляционную функцию.

Решение задачи 7

Поскольку U, V и W независимы в совокупоности,

$$m_X(t) = \mathbb{E}\, X_t = \mathbb{E}\, U \cdot \mathbb{E} \cos(Wt) + \mathbb{E}\, V \cdot \mathbb{E} \sin(Wt) = 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots = 0$$

Корреляционную функцию удобно искать с помощью формулы полной вероятности в непрерывном случае:

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2} \mid W = w)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{E}(X_{t_1} X_{t_2} \mid W = w)}_{\triangleq R_X(t_1, t_2 | w)} \cdot \rho_W(w)\, dw$$

В силу нулевого матожидания,

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left((U \cos(wt_1) + V \sin(wt_1)) \cdot (U \cos(wt_2) + V \sin(wt_2))\right) =$$
$$= \mathbb{E}(U^2) \cdot \cos(wt_1) \cos(wt_2) + 2 \cdot \underbrace{\mathbb{E}\, U\, \mathbb{E}\, V}_{0} \cdot \ldots + \mathbb{E}(V^2) \cdot \sin(wt_1) \sin(wt_2) = D \cos(w(t_1 - t_2))$$

Наконец,

$$R_X(t_1, t_2) = \int\limits_0^{+\infty} D \cos(w(t_1 - t_2)) \cdot \frac{2\lambda}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + w^2}\, dw = De^{-\lambda |t_1 - t_2|}$$

Здесь использовалось значение интеграла Лапласа:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$$

Определение 1.14. Функцией коэффициента корреляции *называют функцию*

$$r_X(t_1, t_2) = \frac{R_X(t_1, t_2)}{\sqrt{R_X(t_1, t_1) \cdot R_X(t_2, t_2)}} = \frac{\operatorname{cov}(X_{t_1}, X_{t_2})}{\sqrt{\mathbb{D}\, X_{t_1}\, \mathbb{D}\, X_{t_2}}}$$

Данная функция, если определена, принимает значения от -1 до 1 и имеет смысл степени линейной связи сечений процесса, соответствующих выбранным моментам времени.

Задача 8

Найти функции коэффициента корреляции для процессов из задач 6 и 7.

Решение задачи 8

- Задача 6: $r_X(t_1, t_2) = \dfrac{\frac{1}{2} \cos(t_1 - t_2)}{\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = \cos(t_1 - t_2)$.

  Если взять два произвольных момента времени и начать сдвигать их друг к другу или друг от друга, будет наблюдаться периодическая корреляция и декорреляция соответствующих сечений.

- Задача 7: $r_X(t_1, t_2) = \dfrac{De^{-\lambda |t_1 - t_2|}}{\sqrt{De^{-\lambda \cdot 0} \cdot De^{-\lambda \cdot 0}}} = e^{-\lambda |t_1 - t_2|}$.

  Несмотря на схожесть процессов, в данном случае наблюдается корреляция, затухающая экспоненциально с ростом разницы между моментами времени, в которых взяты сечения.

Дело в том, что в первом процессе случайным был фазовый сдвиг, а потому реализации процесса «не расползались». Во втором же случае случайной является ещё и частота, и линейная связь между разными моментами времени быстро теряется (реализации «декогерируют»).

Из курса теории вероятностей вы должны помнить, что случайные величины удобно исследовать при помощи характеристической функции. Аналогичный объект можно ввести и для случайного процесса.

Определение 1.15. Характеристической функцией случайного процесса X *называется функция* $\varphi_X(t,s) = \varphi_{X_t}(s) \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{E}\exp(is \cdot X_t)$, *где* $i^2 = -1$.

2 Важные примеры случайных процессов

В этом разделе речь пойдёт о нескольких процессах особого вида, наиболее часто встречающихся при исследовании реальных явлений. Зачастую такие процессы именные. На их примере мы продолжим практиковаться в решении задач, а также введём несколько новых теоретических понятий.

2.1 Пуассоновский процесс

Данный процесс встречается в реальной жизни довольно часто; он описывает поток случайных событий, которые регистрируются с некоторой постоянной «интенсивностью». Например, речь может идти о регистрации космических частиц, о кликах по ссылке, о запросах к серверу, о проезжающих по магистрали автомобилях.

Пуассоновский процесс можно неформально определить следующим образом: пусть ось времени разбита на бесконечно малые промежутки Δt. Тогда пуассоновский процесс ведёт себя следующим образом: в самом начале он равен нулю, и на каждом последующем шаге по времени может претерпеть скачок на $+1$ с вероятностью $\lambda \Delta t$. Параметр λ называется интенсивностью процесса и характеризует «скорость» потока событий. Дадим формальное определение:

Определение 2.1 (Явная конструкция пуассоновского процесса)**.** *Пусть* $\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ *и независимы в совокупности,* $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. *Тогда процесс* $K_t = \sup\{n \mid S_n \leqslant t\}$ *называется* **пуассоновским процессом с интенсивностью** λ.

Процесс K_t, построенный по случайным величинам ξ_k способом, указанным выше, называется ***процессом восстановления*** и отвечает следующей модели: в нулевой момент включается прибор, который работает время ξ_1, после чего ломается. Одновременно с поломкой включается следующий прибор, который работает случайное время ξ_2, и так далее. Величина K_t отражает количество приборов, введённых в эксплуатацию к моменту t.

Приведённая явная конструкция возвращает нас к неформальному определению, использующему дискретное время с шагом Δt. Можно заметить, что экспоненциальное распределение получается как предел вероятностного распределения случайной величины — времени между соседними скачками — при $\Delta t \to +0$:

$$\mathbb{P}\{\xi_i = t\} = \lim_{\Delta t \to +0} (1 - \lambda \Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}} = e^{-\lambda t}$$

Пуассоновский процесс можно определить и иначе. Для этого введём понятие процесса с независимыми приращениями.

Определение 2.2. *Случайный процесс* X *называется* **процессом с независимыми приращениями**, *если* $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \{t_i\}_{i=1}^n \subseteq T$ *случайные величины* $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_1}$ *независимы в совокупности.*

Определение 2.3. Пуассоновским процессом с интенсивностью $\lambda > 0$ *называется случайный процесс* $K\colon \Omega \times [0; +\infty) \to \mathbb{N}$ *такой, что*

1. $K_0 \overset{\text{п.н.}}{=} 0$.
2. K *— процесс с независимыми приращениями.*
3. $K_t - K_s \sim \mathrm{Po}\left(\lambda \cdot (t - s)\right)$ *(при* $t > s \geqslant 0$*).*

Теорема 2.4. *Определения 2.1 и 2.3 эквивалентны.*

Утверждение 2.5. *Пуассоновский процесс обладает следующими свойствами:*

1. *Реализации пуассоновского процесса — кусочно-постоянные неубывающие функции со значениями в* $\mathbb{N}$*.*
2. *С вероятностью* 1 *все скачки пуассоновского процесса равны единице.*
3. *Время, когда произошёл* n*-ый скачёк (обозначим его* τ_n*) имеет* $\Gamma(n, 1/\lambda)$*-распределение:*
$$\rho_{\tau_n}(t) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \cdot \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(t)$$
4. *Случайные величины* $\{\tau_n - \tau_{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ *распределены экспоненциально с параметром* λ *и независимы.*
5. *Число событий за конечный период времени конечно с вероятностью* 1*.*
6. *Число событий* $K_{t+h} - K_t$ *на промежутке* $(t; t+h]$ *зависит лишь от длины промежутка* h*:* $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t = k\} = p(h, k)$
7. *Вероятность более чем одного скачка на полуинтервале* $(t; t+h]$ *есть* $o(h)$*, то есть* $\lim\limits_{h \to +0} \mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 1\} = 0$*.*
8. *Для коротких полуинтервалов* $(t; t+h]$ *вероятность того, что на них произойдёт хотя бы один скачок, убывает линейно с уменьшением* h*:* $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 0\} = 1 - e^{-\lambda h} = \lambda h + o(h)$ *при* $h \to 0$*.*
9. *Из определения распределения Пуассона:*
$$\mathbb{P}\{K_t = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Наконец, приведём ещё одно из альтернативных определений пуассоновского процесса:

Утверждение 2.6. *Случайный процесс* $K\colon \Omega \times T \to \mathbb{N}$ *является пуассоновским тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим свойствам:*

1. **(стационарность приращений)** $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t = k\} = p(h, k)$
2. **(отсутствие последействия)** *Приращения процесса независимы.*
3. **(ординарность)** $\mathbb{P}\{K_{t+h} - K_t > 1\} \in o(h)$

Утверждение 2.7. *Пусть* K *— пуассоновский процесс с интенсивностью* λ*. Тогда* $m_K(t) = \lambda t$*,* $R_K(t, s) = \lambda \cdot \min\{t, s\}$*.*

Доказательство. Так как $K_t \overset{\text{п.н.}}{=} K_t - K_0 \sim \mathrm{Po}(\lambda t)$, $m_K(t) = \mathbb{E}\, K_t = \lambda t$. Далее, в силу независимости приращений, при $t \geqslant s$ имеем $\mathrm{cov}(K_t, K_s) = \mathrm{cov}(K_t - K_s + K_s, K_s) = 0 + \mathrm{cov}(K_s, K_s) = \lambda t$. Поэтому $R_k(t, s) = \lambda \cdot \min\{t, s\}$. □

Задача 9

Поток прибывающих на железнодорожную станцию пассажиров моделируется пуассоновским процессом K с интенсивностью λ. В момент $t = 0$ пассажиров нет, в момент $t = t_0$ прибывает первый поезд. Пусть η — суммарное время ожидания прибытия поезда всеми пассажирами на станции. Найти $\mathbb{E}\,\eta$.

Решение задачи 9

$$\eta = \int\limits_0^{t_0} K_t\, dt, \qquad \mathbb{E}\,\eta = \int\limits_\Omega d\mathbb{P} \int\limits_0^{t_0} K_t\, dt = \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_\Omega K_t\, d\mathbb{P} = \int\limits_0^{t_0} m_K(t)\, dt = \int\limits_0^{t_0} \lambda t\, dt = \frac{\lambda t_0^2}{2}$$

Задача 10

Пусть K_t — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, а τ_1 — момент первого скачка. Найдите $\mathbb{P}\{\tau_1 \leqslant s \mid K_t = 1\}$ при $0 < s < t$.

Решение задачи 10

Событие $\{\tau_1 \leqslant s\}$ означает, что первый скачок процесса произошёл не позже момента s. Если при этом $K_t = 1$, то это означает, что $K_s = 1$. Тогда

$$\mathbb{P}\{\tau_1 \leqslant s \mid K_t = 1\} = \mathbb{P}\{K_s = 1 \mid K_t = 1\} = \frac{\mathbb{P}\left(\{K_s = 1\} \cap \{K_t = 1\}\right)}{\mathbb{P}\{K_t = 1\}} =$$
$$= \frac{\mathbb{P}\left(\{K_s = 1\} \cap \{K_t - K_s = 0\}\right)}{\mathbb{P}\{K_t = 1\}} = \frac{\frac{\lambda s}{1!}e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^0}{0!}e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{\lambda t}{1!}e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

Задача 11

Пусть K — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, τ_3 — время третьего скачка процесса. Найти $\mathbb{P}\{\tau_3 \leqslant 2\}$.

Решение задачи 11

$$\mathbb{P}\{\tau_3 \leqslant 2\} = \mathbb{P}\{K_2 \geqslant 3\} = 1 - \mathbb{P}\{K_2 < 3\} = 1 - e^{-2\lambda} - \frac{2\lambda}{1!}e^{-2\lambda} - \frac{(2\lambda)^2}{2!}e^{-2\lambda}$$

Задача 12

Пусть $\eta \sim \mathrm{U}_{[0;1]}$, K — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, и η не зависит от K. Найти $\mathbb{P}\{K_\eta = K_{\eta+1}\}$.

Решение задачи 12

По формуле полной вероятности,

$$\mathbb{P}\{K_\eta = K_{\eta+1}\} = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{\underbrace{K_{t+1} - K_t}_{\sim \mathrm{Po}(1\cdot\lambda)} = 0 \mid \eta = t\} \cdot \rho_\eta(t)\, dt = \int\limits_0^1 e^{-1\cdot\lambda}\, dt = e^{-\lambda}$$

Пуассоновский процесс моделирует лишь поток некоторых событий. Иногда сами события также имеют сложную и/или случайную природу. Тогда требуется построить более продвинутую модель, наследующую от пуассоновского процесса только характер возникновения событий с течением времени. В качестве примера такой модели можно привести ***сложный (составной) пуассоновский процесс***. Данный процесс может возникнуть, например, при моделировании покупок в магазине: каждый покупатель будет появляться на кассе согласно пуассоновскому процессу, при этом закупаясь на некоторое случайное количество денег.

Определение 2.8. *Рассмотрим пуассоновский процесс K и набор независимых (в совокупности с K) одинаково распределённых случайных величин $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.* **Сложным пуассоновским процессом** *называется процесс $Q_t = \sum\limits_{j=1}^{K_t} V_j$.*

Это означает следующее: $Q_0 \overset{\text{п.н.}}{=} 0$, и в каждый момент, когда K испытывает скачок, к Q добавляется V_j.

Утверждение 2.9. *Сложный пуассоновский процесс является процессом с независимыми приращениями.*

Доказательство. Следует из независимости приращений K и независимости $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ в совокупности с K_t. □

Утверждение 2.10. *Рассмотрим сложный пуассоновский процесс Q с интенсивностью λ, определённый по случайным величинам $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Пусть $\varphi_V(s)$ — характеристическая функция случайных величин V_j. Тогда характеристичекая функция процесса Q задаётся формулой*

$$\varphi_{Q_t}(s) = e^{(\varphi_V(s)-1)\cdot\lambda t}$$

Доказательство.

$$\varphi_{Q_t}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{is\cdot Q_t} \mid K_t = k\right)\mathbb{P}\{K_t = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{is\cdot(V_1+\ldots+V_k)}\right)\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(\varphi_V(s))^k\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} = e^{\varphi_V(s)\cdot\lambda t}\cdot e^{-\lambda t}$$

□

Следствие 2.11. *Функция среднего и корреляционная функция сложного пуассоновского процесса имеют вид, соответственно,*

$$m_Q(t) = \lambda t\cdot\mathbb{E}\,V, \qquad R_Q(t,s) = \lambda\min\{t,s\}\cdot\mathbb{E}(V^2)$$

Доказательство. По свойству характеристической функции,

$$m_Q(t) = \mathbb{E}\,Q_t = -i\frac{\partial\varphi_{Q_t}(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0} = -i\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{(\varphi_V(s)-1)\cdot\lambda t}\right)\bigg|_{s=0} =$$

$$= \lambda t\cdot\underbrace{\left(-i\frac{\partial\varphi_V(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0}\right)}_{\mathbb{E}\,V}\cdot\underbrace{e^{(\varphi_V(0)-1)\cdot\lambda t}}_{e^0} = \lambda t\cdot\mathbb{E}\,V$$

Пользуясь независимостью приращений и полагая $t \leqslant s$,

$$R_Q(t,s) = \mathbb{E}\,Q_tQ_s - m_Q(t)m_Q(s) = \mathbb{E}\left(Q_t(Q_s-Q_t)\right) + \mathbb{E}\,Q_t^2 - \lambda^2 ts\cdot(\mathbb{E}\,V)^2$$

$$\mathbb{E}\left(Q_t(Q_s-Q_t)\right) = \mathbb{E}\,Q_t\cdot\mathbb{E}(Q_s-Q_t) = \lambda t\cdot\mathbb{E}\,V\cdot\lambda(s-t)\cdot\mathbb{E}\,V = \lambda^2 t(s-t)\cdot(\mathbb{E}\,V)^2$$

$$\mathbb{E}(Q_t)^2 = (-i)^2\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(e^{(\varphi_V(s)-1)\cdot\lambda t}\right)\bigg|_{s=0} = (\lambda t)^2(\mathbb{E}\,V)^2 + \lambda t\cdot\mathbb{E}(V^2)$$

Собирая всё вместе, получаем

$$R_Q(t,s) = \lambda^2[\underbrace{t(s-t)+t^2-ts}_{0}]\cdot(\mathbb{E}\,V)^2 + \lambda t\cdot\mathbb{E}(V^2) = \lambda t\cdot\mathbb{E}(V^2)$$

В общем же случае $R_Q(t,s) = \lambda\min\{t,s\}\cdot\mathbb{E}(V^2)$. □

Задача 13 ***(Прореживание пуассоновского процесса)***

Пусть K_t — пуассоновский процесс с интенсивностью λ, а случайные величины $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ независимы и имеют распределение Бернулли с параметром p. Покажите, что Q_t — также пуассоновский процесс с интенсивностью $p\lambda$.

Решение задачи 13

Пуассоновский процесс также является сложным пуассоновским процессом с $V_j \equiv 1$. Тогда характеристическая функция пуассоновского процесса:

$$\varphi_{K_t}(s) = e^{\left(e^{is}-1\right)\cdot\lambda t}$$

Характеристическая функция «прореженного» процесса Q:

$$\varphi_{Q_t}(s) = e^{\left(p\,e^{is}+(1-p)-1\right)\cdot\lambda t} = e^{\left(e^{is}-1\right)\cdot p\lambda t}$$

Что и требовалось доказать.