Logica Bewijsoefening

Dit is de tweede bewijsopdracht voor het vak Logica, gemaakt door **Dehaes Jordy**.
Mijn partner voor deze oefening was **Tim Vanherwegen**.
De transitieve sluiting R van een binaire relatie G is inductief gedefinieerd als volgt:

1. als (x,y) behoort tot G dan behoort (x,y) tot R;
2. als (x,y) en (y,z) behoren tot R, dan behoort (x,z) tot R.

Bewijs volgende stelling door middel van het principe van volledige inductie.

Theorem 1 *Een paar (x, y) behoort tot R als en slechts als er n $x_0, ..., x_n$ bestaan, zodat $x_0 = x, x_n = y$ en elk paar (x_i, x_{i+1}) behoort tot G.*

1 Bewijs

Om deze bewering met het principe van volledige inductie te bewijzen, moeten we eerst vaststellen wat de inductievariabele is. In dit geval is dit "n" is, het aantal paren (x_i, x_{i+1}) dat bij G hoort.

1.1 Basisstap

We bewijzen de basisstap, voor $n = 1$. Dat wil zeggen, wanneer er slechts één paar (x_0, x_1) is dat tot G behoort. In dit geval, als (x_0, x_1) tot G behoort, dan zit het ook in R door de eerste voorwaarde van de definitie van de transitieve sluiting R. Dit betekent dat als (x, y) bij R hoort, er minstens één paar (x_0, x_1) moet bestaan dat bij G hoort. Hier is de basisstap voor $n = 1$ bewezen.

1.2 Inductiestap

Voor de inductiestap kunnen we aannemen dat de bewering waar is voor een willekeurige n.
We nemen aan dat als (x, y) tot R behoort, er n paren moeten bestaan $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ die bij G horen. We moeten aantonen dat dit impliceert dat de bewering ook waar is voor $n + 1$.
Als (x, y) tot R behoort, dan moeten er volgens de veronderstelling n paren bestaan $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$ die bij G horen. Als we nog een paar (x_n, x_{n+1}) toevoegen dat tot G behoort, dan moet door de tweede voorwaarde in de definitie van de transitieve sluiting R, het paar (x_0, x_{n+1}) ook bij R horen. Hieruit kunnen we besluiten dat als (x, y) bij R hoort, er minstens $n + 1$ paren moeten bestaan die bij G horen.

1.3 Conclusie

Door het principe van volledige inductie kunnen we concluderen dat de bewering waar is voor alle waarden van n. Met andere woorden, een paar (x, y) behoort tot R als en slechts als er n $x_0, \ldots, x_n$ bestaan, zodat $x_0 = x$, $x_n = y$ en elk paar (x_i, x_{i+1}) hoort bij G.

2 Feedback samenwerking

Persoonlijk had ik dit niet nodig voor deze bewijsopdracht omdat de oefening wel vlot ging vermoed ik, voor andere studenten die niet direct zien hoe te beginnen aan de oefening kon dit denk ik wel een goed ding zijn geweest. Al heb ik wel met mijn partner besproken hoe we tot ons bewijs zijn gekomen en zagen we al snel in dat we in grote lijnen dezelfde oplossing zijn bekomen.

Tim Vanherwegen

Partner: Jordy Dehaes

Bewijs 2

Inductie bewijs

Basis Stap: Als (x,y) in G zit dan zit het ook in R. Er zijn geen andere elementen in G dan x en y dus is er een pad van x naar y in G

Inductie Stap: Als we aannemen dat de stelling waar is voor alle paren (x,y) in R tot op het moment dat we (x,z) willen toevoegen aan R omdat (x,y) en (y,z) in R aanwezig zijn. Dan bestaat er een pad van x naar y in G en er bestaat een pad van y naar z in G dus bestaat er een pad van x naar z in G. Als we van x naar y en gaan en vervolgens van y naar z gaan dan kunnen we dit samenvoegen. Dit betekent dat (x,z) ook behoort tot R.

Samenwerking:

Ik vond de samenwerking best handig. Was goed om te horen hoe andere mensen redeneren en beginnen met redeneren. Een ander perspectief kan u vaak helpen om dingen beter te begrijpen.