~~E/A/b~~

OZ1 : 22/10

warm-up oef

oef 1

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 3 & h \\ 4 & 6 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc} 2 & 3 & h \\ 0 & 0 & 9-2h \end{array}\right]$$

→ niet strijdig als $h = \frac{9}{2}$

oef 2

a) Neem, 3

b)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 3 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 6 & -5 & 4 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

→ 3 pivotkolommen, geen vrije var, maar wel opl

⇒ $\vec{b}$ zit in W

oneindig veel vectoren, iedere l.in. combinatie v. $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$

c) $1\vec{a_1} + 0.\vec{a_2} + 0.\vec{a_3} = \vec{a_1}$

d) Ja, $\vec{b} = A\vec{x}$ heeft een oplossing

Col A is gewoon W, en $\vec{b}$ zit daarin, $\vec{a_2}$ ook

dus $2\vec{b} + 3\vec{a_2} \in \text{Col}A$ $(\vec{b} \in W, \vec{a_2} \in W)$

~~$2\vec{b} + 3\vec{a_2}$~~

$$2\vec{b} + 3\vec{a}_2 = A\left(2\vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

oef 3

$c_1 = -3$ $\quad A\vec{x}$

$c_2 = -1$ $\quad$ ↳ met $\vec{x}$ de gewichten voor de kolommen

$c_3 = 2$ $\quad [\vec{a_1}\ \vec{a_2}\ \vec{a_3}]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$

oef 4

a) ~~...~~ Nee

b) Nee, is wel een deelruimte, minstens 3 vectoren voor nodig

c) een vlak ($\vec{b_1}$ en $\vec{b_2}$ zijn lin. onafh.)

! d) $\vec{b_1}$ invullen : $11.4 + 20.(-4) + 36.1 = 0$

$\vec{b_2}$ invullen : $11.8 + 20.1 + 36.(-3) = 0$

Die 2 vectoren voldoen aan die vgl, en we weten dat ze lin. onafh zijn

$\Rightarrow \vec{b_1}$ en $\vec{b_2}$ vormen een basis

e) een rechte door de oorsprong in $\mathbb{R}^3$

↳ want nulvector is altijd een voorbeeld

oef 5

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ $\quad AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & \end{bmatrix}$

?

a) onwaar, wel lin. combinaties van A, bewijs

$AB = A\,[\vec{b_1} \ldots \vec{b_n}] = [A\vec{b_1} \ldots A\vec{b_n}]$

b) rijen van AB = kolommen $(AB)^T = B^T A^T$

→ lin comb kolommen B^T, wat gelijk is aan rijen B

oef 6

$A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

A is 3 x 3 $\quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

$2a = 4$
$2d = 4$
$2g = 4$

$2b = 4$
$2e = 4$
$2h = 4$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & c \\ 2 & 2 & f \\ 2 & 2 & i \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 4 + 4 + 2c &= 2 \\ 4 + 4 + 2f &= 2 \\ 4 + 4 + 2i &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c &= -3 \\ f &= -3 \\ i &= -3 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

oef 7 — Dan A^T inverteerbaar, dus rijen van A^T zijn lineair onafhankelijk, wat gelijk is aan de kolommen van A.

meh, zie oplossing later

oef 8 a) waar, als $n = m$, zie uitleg oef 5a

b) $C^T = BA^T$, de ~~rijen~~ kols van C^T zijn lin. comb v. kols B
de rijen van $C^{\cancel{T}}$ zijn lin comb v kols B

→ onwaar

oef 9 a) nooit, $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & h \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \\ \cdot & & \end{bmatrix}$ inconsistent

b) altijd, $\vec{v_1}$ en $\vec{v_2}$ zijn al afhankelijk oef 10 a) wanneer a geen lin. combinatie is van x_1 en x_2

bvb. $a = (x_2)^3$

(maar hier doelen ze op 0)

b) $$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 \\ 5x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

domein T = $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$

beeld T = Span $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

---

oef 6 Opl adhv rekenregels lin. transformatie

$$M = \left[f(1,0,0) \,;\, f(0,1,0) \,;\, f(0,0,1) \right]$$

$f(2,0,0) = (4,4,4)$

$2f(1,0,0) = (4,4,4)$

$f(1,0,0) = (2,2,2)$

idem voor $f(0,1,0)$

$$f(2,2,2) = (2,2,2) = f\big((2,0,0) + (0,2,0) + (0,0,2)\big)$$
$$= f(2,0,0) + f(0,2,0) + f(0,0,2)$$

...

---

oef 7 A is inverteerbaar

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$A \sim \ldots \sim I$ kolommen onafhankelijk

$\Updownarrow$

n pivotkolommen

Quiz me

a) NW, ~~[illegible]~~

b) NW, als er pivot zit in $\vec{b}$

c) NW, de triviale opl is altijd een oplossing bij $A\vec{x} = \vec{0}$

d) NW

e) W

f) NW

g)

h)

28/10/'21 OZ2: LA1

Als T lin. is Dan $T(\vec{0}) = \vec{0}$

oef 10 a) transformatie van nulvector moet nulvector

$T(0) = (0, a, 0)$

niet-lin: $a \neq 0$

lin: $a = 0$ → rekenregels testen

b) mbv def. e_1 en e_2

1. neem eenheidsbasis domein $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

oef 11

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\-1\\4\\-2\end{matrix}} & \begin{matrix}3\\-5\\2\\-4\end{matrix} & \begin{matrix}-5\\8\\-5\\7\end{matrix} & \begin{matrix}-3\\4\\-7\\5\end{matrix} \end{bmatrix}$$

1. Reduceer naar echelonvorm
2. Rij-operatie = vermenigvuldigen met onderdriehoeksmatrix

$$\underbrace{\tilde{L}_n \tilde{L}_{n-1} \dots \tilde{L}_2 \tilde{L}_1}_{\tilde{L}} A = U$$

$\tilde{L} A = U$

$A = \tilde{L}^{-1} U$

$A = LU$

! Bij LU mag je alleen een veelvoud v/e rij hoger optellen bij een rij lager

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -10 & 15 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \dots \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wat nu?

en dan L is matrix met 1'tjes op diagonaal
en eerste kolom is scalairing van eerste kolom
uit oorspronkelijke

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

altijd 0

kan alles zijn eigenlijk

Rang(A) = 2 = # pivotkolommen

Op examen is LU-factorisatie gegeven en moet je dan Rang geven, kijk gewoon maar boven△matrix ipv te beginnen rekenen

Wat is de basis v/d kolomruimte? pivotkolommen in originele

---

oef 12) a) 4, via formule

b) * Col A = $\mathbb{R}^3$: ja 3 onafh vectoren zijn genoeg om $\mathbb{R}^3$ op te spannen (als A 3 rijen heeft toch)

$\boxed{\dim \text{Col} A + \dim \text{Nul} A = \# \text{kols}}$

* nulruimte is voortgebracht uit uw vrije variabelen

5 vrije var
$\Downarrow$
dim Nul(A) = 5

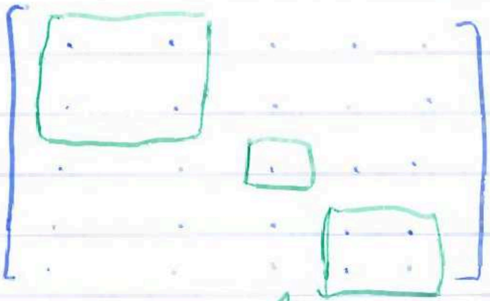
$\underset{(3\times 8)}{A}\underset{(8\times 1)}{\vec{x}} = \vec{0} \Rightarrow x \in \mathbb{R}^8$, dus Nul $A \neq \mathbb{R}^5$,
maar Nul $A \subseteq$ 5dimensionale ruimte v. $\mathbb{R}^8$

c) Rang = 3 = dim Col A
opl.verz v. $A\vec{x} = \vec{0}$ is Nul A
formule 3 + 6 = 9

<u>oef 13</u> door te partitioneren, want in diagonale blokmatrix

$$\shortparallel$$

vb $\begin{bmatrix} 3\times 3 & & \\ & 5\times 5 & \\ & & 2\times 2 \end{bmatrix}$



$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & C^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & & \\ & 1/2 & \\ & & \end{bmatrix}$$

<u>oef 14</u>

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ C & I & 0 \\ A & B & I \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ Z & I & 0 \\ X & Y & I \end{bmatrix}$$

$$PQ = I$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ C+Z & I & 0 \\ A+BZ+X & B+Y & I \end{bmatrix} = I$$

$$C + Z = 0 \qquad Z = -C$$

$$A + BZ + X = 0 \qquad X = (-A - BZ) = -A + BC$$

$$B + Y = 0 \qquad Y = -B$$

$$X = -A \pm BC \qquad Y = -B \qquad Z = -C$$

Quiz me
~~LA2~~

~~oef 1~~

g) ~~[illegible]~~ , ~~[illegible]~~ waar

h) nee , $dom = \mathbb{R}^5$ $A^{3\times5}$ $x^{5\times1}$
$ber = \mathbb{R}^3$

i) nee

j) ja , anders rij $0\ 0\ 0 \ldots 1 \mid 0$

k) ja , bekijk evt. oef 4 v. LA2

l) *)

$$AB$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$(AB)^{-1}\cdot A = B^{-1}A^{-1}\cdot A$$
$$\boxed{(AB)^{-1}\cdot A = B^{-1}}$$

alt *) er is een w
$$ABw = I$$
$$wAB = I$$
$$wA = B^{-1}$$

alt *)

$$Bx = 0$$
$$\underbrace{AB}x = 0$$
↳ AB is inverteerbaar => alleen maar triv. opl.
$\vec{x} = 0$ uniek

LA 2

oef 1/ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix}$

1) $\det A^T = \det A$
2) $\det AB = \det A \cdot \det B$

We weten $U^T U = I$

$$\det(U^T U) = \det I$$
$$(\det U)^2 = 1$$
$$\det U = \pm 1$$

---

oef 2/

$\det A \cdot A = \det A \cdot \det A$

$\Updownarrow$ $\det A^4 = 0 = (\det A)^4$

$\Updownarrow$ $\det A = 0$ $\Leftrightarrow$ niet inverteerbaar

oef 3/ $\left.\begin{array}{l} \det A = 1 \\ \det B = ad - bc \end{array}\right\}$ $\det A + \det B = 1 + ad - bc$

$\det(A+B) = (1+a)(1+d) - bc$

$$1 + ad - bc = (1+a)(1+d) - bc$$
$$1 + ad = 1 + d + a + ad$$
$$a + d = 0$$

---

oef 4/ dim Col A = 2 = # pivotkols

dim Nul A = 3 = # vrije vars

$\begin{array}{ccccc} \downarrow & x_2 & \downarrow & x_4 & x_5 \\ & \circlearrowleft & & \circlearrowleft & \circlearrowleft \end{array}$ $\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$

Col A = Span $\left\{ \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \right\}$, basis voor Col A is $[\ ],[\ ]$

↳ is ook Span van alle kolommen

oef 5/ Ja, want

- nulvector ligt er in
- scal verm blijft in zelfde ruimte
- optelling blijft in zelfde ruimte

oef 4/ wat is nulruimte nu?

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 3x_5 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = \frac{4}{3}x_4 - \frac{5}{3}x_5 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases} \qquad \vec{x} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

basis voor nulruimte? Die 3 vectoren

---

oef 6/ nee, want $f(x) = 0$ (nulvector) ~~$f(x)$~~ ≈ nulfunctie
$f'(x) = 0 \neq f(x) + 1$

b) - nulvector bestaat $f(x) = 0$ $(f'(x) = 2 \cdot f(x) = 0)$

$$\left(\begin{array}{ll} e^{2x} & \begin{array}{l} 2x = t \\ 2dx = dt \end{array} \\ e^{t} & \\ e^{t}\,dt & \\ 2e^{2x}\,dx & \end{array} \right)$$

- scalaire vermenigvuldiging ook oké, want bij afgeleide kan je scalar naar buiten brengen

stel $g(x) = a.f(x) \rightarrow g'(x) = 2.g(x) = a.f'(x)$
$= 2.a.f(x) = a.f'(x)$

- optelling

Stel $h(x) = f(x) + g(x)$ $\quad [f(x) + g(x)]' = 2 \cdot [f(x) + g(x)]$
$= f'(x) + g'(x)$
$= 2f(x) + 2g(x)$
$= 2(f(x) + g(x))$

oef 7/ Ja, de ene functie is niet gelijk aan een scalar vermenigvuldigt met de andere

oef 8/ De kern van T ≈ nulruimte

Gegeven voor $p \in \mathbb{P}_2$: $p(x) = a + bx + cx^2$

en $T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$

dus $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

dit zijn de coördinaatsvectoren

nulruimte : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{array} \rightarrow x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

nulruimte v T in vorm $\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ Nul A = Span $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Kern = Span $\{x, x^2\}$

a) nee, t^3
b) nee, $t^2 - 1$ komt niet overeen
c) nee, lin. afh.
d) nee, p_2 niet in nulruimte (+7)
e) nee, p_1 niet in nulruimte (1)
f) ja
g) nee, p_1 niet in nulruimte (+1)
h) ja

8b) alle vectoren $\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$ met $a \in \mathbb{R}$

oef 9/ nee, 4 rijen
nee, nul A ~~= $\mathbb{R}^{10}$ geen~~ ligt in $\mathbb{R}^{10}$
$\left(A\vec{x} = \vec{0} \right.$
$\left. \vec{x} = \begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix} \}_{10} \right)$

? <u>oef 10</u>/ a) $\det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det(A.I) - \overset{\det}{}(0.0)$

$= \det A - 0$

$= \det A$

b) $\det\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det(I.D) - \det(C.0)$

$= \det D - \det 0$

$= \det D$

$\cancel{\det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}} = A$

Assistent : blokmatrices : via de COFACTOR-EXPANSIE

a) $\det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = 1.\det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} \overset{+0+\dots+0}{=} \dots = \det A$

b) $\det\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = 1.\det\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ C_{1:n;\,2:m} & D \end{bmatrix} \quad \dots = \det D$

c) volgens eig. $\mathrm{Det}(X.Y) = \det X . \det Y$

d) terugbrengen naar iets dat we kennen via transpose
en mbv eig van vraag c

$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^T & 0 \\ B^T & D^T \end{vmatrix} = \det A^T . \det D^T = \det A . \det D$

? <u>oef 11</u>/ a) - $C = X . A \quad \to \quad X = C . A^{-1}$

- $X . B + Y = D \quad\quad Y = D - C . A^{-1} . B$
- A in boven Δ
- Y in boven Δ

b) $\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(L . U) = \det\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \overset{\det}{.} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}$

$= 1 . \det A . \det Y$

$= \det A . \det(D - C . A^{-1} . B)$

c) $AC = CA \Rightarrow C = A^{-1} C A \Rightarrow \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A . \det(D - A^{-1} . C . A . A^{-1} . B)$

$= \det A . \det(D - A^{-1} C B)$

$= \det(AD - CB)$

<u>oef 6</u> · assistent

a) voldoet ook niet aan de som

bvb $(f(x)+g(x))' = f' + g' = f+1+g+1$
$\neq (f+g)+1$

<u>oef 8</u> Je kan ook gewoon invullen bvb

c) $p_1(0) = 0$ en $p_2(0) = -1$

$\rightarrow T(\vec{p}) \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, maar $T(\vec{p}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Vinden van

$\mathbb{P}_2$ → basis hiervoor : $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$

$\begin{bmatrix} p(0) \\ p(0) \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$t \qquad t^2$

<u>oef 12</u> zie HB

$$\text{volume} = \left\| \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \| -4 + 26 \|$$

$$= 22$$

opl ansaten

A is 3x3

oef 13

A niet inverteerbaar

$\Updownarrow$

kolommen lin afh

$\Updownarrow$

2 hoekpunten in verlengde van elkaar

$\Updownarrow$

V = 0

$\Updownarrow$

dim Col A = 0 ⇒ nulmatrix ⇒ 3 ptn in 0 ⇒ geen volume

of dim Col A = 1 ⇒ ptn op rechte ⇒ geen volume

of dim = 2 ⇒ ptn in vlak

$\Updownarrow$

V = 0

$\Updownarrow$

det A = 0

oef 14 $\det(rA) = r^n \cdot \det(A)$

1 rij × r → det ook × r

n rijen → det $\cdot \underbrace{(r \cdot r \cdot r \cdot \ldots)}_{n}$

oef 15

a) k = 2 $A\vec{x} = \vec{0}$ | $\mathrm{Nul}A = \{\vec{x} \mid A\underset{2\times1}{\vec{x}} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

b) k = 4 | $\mathrm{Col}\ A = \mathrm{Span}\{a_1, a_2\} \subseteq \mathbb{R}^4$

c) eerste vector van A bvb

d) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 12 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $x_1 = 3x_2$, $x_2 = x_2$

→ alle vectoren volgen $x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ met $x_2 \neq 0$

oef 16 13 vgl en 18 onbekenden

zie korte uitleg op oefenbundel zelf

→ 13 rijen en 18 kolommen → minstens 5 vrije var.

opl. v. $A\vec{x} = \vec{0}$

→ opl

$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Col}\ A \subseteq \mathbb{R}^{13} \\ \mathrm{Nul}\ A \subseteq \mathbb{R}^{18} \end{array}\right\}$ Rang ≤ 13 → minstens 5 vrije var

dim Nul A ≥ 5 ⇒ basis bestaat uit minstens 5 vectoren

en dus niet 1 vector zoals opgave suggereert

oef 14 $\det(rA) = \det(r \cdot I \cdot A) = \det(r \cdot I) \cdot \det A$

$= \det \begin{bmatrix} r & & \\ & \ddots & \\ & & r \end{bmatrix} \det A = r^n \cdot \det A$

of je kan ook denken via ~~formulen~~ volume

Oef 17

a) $\text{Rang } A$ = dimensie Col A
= # pivotkolommen
= ~~2~~ 3

dim Nul A = # vrije var
= 2

dim Nul A^T = 1 , want 1 nulrij | of A^T is (5×4) en Rang blijft 3 → 4 - 3 = 1

b) basis Col A : pivotkolommen oorspronkelijke

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ -10 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

basis Row A = $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

= niet-nulrijen in gereduceerde

basis Nul A : $[B \mid \vec{0}]$ → zie opl

Quiz me

a) ja, want n pivotkols zijn lin. onafh
→ basis bevat n vectoren

b) fout, van de kolommen wel

vb dat dit aantoont $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ r_1 en r_2 afh
r_1 en r_3 onafh

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ r_1 en r_2 onafh

c) juist ALS het door de oorsprong gaat
(nulelement moet tot deelruimte behoren)
maar algemeen fout

d) dimensie is 5 $\mathbb{P}_4 = \text{Span}\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$

e) fout
- $A = 0 \to \det A = 0$
- $\det(A+B) \neq \det A + \det B$
- $\det(kA) = k^n \cdot A$
$\neq k \cdot A$

f) waar, $\dim V \leq p$

g) fout

h) fout, # onbekenden = # kolommen
$\dim \text{Nul } A =$

OZ week 8 : vb

$$\underset{C \leftarrow B}{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}} \text{ , bereken nog } \underset{B \leftarrow C}{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}$$

oef 26 X alleen maar opgelost voor B_1, oeps

c) $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$x_1 = x_4$

$x_2 = -x_4$ $\qquad \vec{x} = x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ → kern is voortgebracht uit $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_3 = -3x_4$

$x_4 =$ vrij

controle : neem $x_4 = 1$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

opgeteld : $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ → dit is afgebeeld op 0 betere controle : $A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ✓

---

oef 27 A : 12 rijen
8 kolommen

minstens 1 vrije var.
max 2 vrije var. (enkel $\vec{0}$)

a) Ja, want je hebt minstens 1 vrije var

b) 6

oef 28 $x - 2y + z = 0$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2y - z \\ y &= y \\ z &= z \end{aligned}\right\} \text{opl} = y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

basis: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

oef 29 a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

R d

b) Col R = Span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ → nee

Row R = Span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$ → nee

$\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in$ Nul A $\Leftrightarrow$ $R \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0}$ → ja oef 30 Rang A = 3

dim Nul A = via formule

Rang A + dim Nul A = # kols

$\rightarrow$ = 3

basis voor Col A : ~~...~~ = $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

moet uit oorspronkelijke

basis voor Row A : $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \\ 9 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

basis voor Nul A : $[\, A \mid \vec{0} \,] \sim [\, B \mid \vec{0} \,]$

~~$x_1 =$~~

~~$x_2 = x_3 - 3x_4 - 6x_5 + 3x_6$~~ eerst rij-reduceren

~~$x_3 =$ vrij~~

~~$x_4 = x_5 + 2x_6$~~

~~$x_5 =$ vrij~~

~~$x_6 =$ vrij~~

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

part. opl. $A\vec{x} = \vec{b}$ — homogene opl. $A\vec{x} = \vec{0}$

oef 2j a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

R d

b) $\text{Col } R = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ → nee

$\text{Row } R = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$ → nee

$\text{Nul } R \iff R \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{0}$ → ja

---

~~[illegible]~~ Quiz me again

W g)

dim H = 0 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

dim H = 1 $[h_1 \ h_1 \ h_1]$

dim H = 2 $[h_1 \ h_2 \ h_2]$ met h_1 en h_2 lin. onafh

dim H = 3 $[h_1 \ h_2 \ h_3]$

W h)

NW i)

W j)

LA 3

hoe vind je eigenwaarden?
$$|A - \lambda I| = 0$$

Oef 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \end{array}\right] \overset{(*)}{\rightarrow} \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \end{array}$$

$\lambda = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x_1 = \text{vrij} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \quad \vec{x} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{eigenvector} \\ \text{voor } \lambda = 0}}$$

$\lambda = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{5}{3} x_3 \\ x_3 = \text{vrij} \end{array} \quad \vec{x} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -5/3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{eigenvector} \\ \text{voor } \lambda = -1}}$$

(*)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \left[(2-\lambda)(-1-\lambda) - 0 \right] = 0$$

$\lambda = 0$

$\lambda = -1$

$\lambda = 2$

$\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \text{vrij} \\ x_3 = 0 \end{array} \rightarrow x = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{eigenvector} \\ \text{voor } \lambda = 2}}$$

oef 2 Diagonaliseer $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

P: eigenvectoren

D: hierop staan eigenwaarden

$\lambda = 5$: $\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$ $x_1 = 2x_2 + x_3 = -x_3$

$x_2 = -x_3$

$x_3 = \text{vrij}$

$\rightarrow \vec{x} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Eigenruimte $\lambda = 5$:

$\text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = 1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$x_1 = -2x_2 + x_3$

$x_2 = \text{vrij}$

$x_3 = \text{vrij}$

$\vec{x} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 1$ heeft dus als multipliciteit 2 !

$\rightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

met $P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ en $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

oef 3

$\lambda = 9$

$$A - 9I = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & -2 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

~~x_2~~

~~x_3 = vrij~~

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & h-8 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2 dimensionale eigenruimte als 2 vrije variabelen, dus kolom 3 mag geen pivotkolom zijn

$\Rightarrow 8 = h$

26/11 WS: LA3

oef 12-19, 0

oef 4 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

eigenvector A : $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(1-\lambda)(a-\lambda) = 0$

$\lambda = 1, a$

① A is inverteerbaar <=> alle kolommen pivotkolommen <=> $a \neq 0$

② A is diagonaliseerbaar <=> $\exists P, \exists D : A = PDP^{-1}$
<=> n lin. onafh eigenvectoren

eigenvector $\lambda = 1$: $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_1 \\ x_2 = 0 \end{array} \rightarrow x = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$1 . x_2 = 0$
$(a-1) x_2 = 0$
$\rightarrow$ eigenvector $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{①}$

eigenvector $\lambda = a$ $\left[\begin{array}{cc|c} 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{array}{l} x_1 = x_1 \\ x_2 = (a-1) x_1 \end{array}$

$x = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ a-1 \end{bmatrix} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ a-1 \end{bmatrix}}_{②}$

① en ② lin onafh <=> $a \neq 1$ <=> diagonaliseerbaar

=> A inverteerbaar en niet diagonaliseerbaar als $a = 1$

oef 5 $\cancel{A^{\alpha\times b}} \cancel{=} \cancel{Q^{\alpha\times\alpha}} \cancel{R^{\alpha\times b}}$

$\cancel{B} \cancel{R^{\alpha\times b}} \cancel{Q^{\alpha\times\alpha}} \cancel{\neq} \cancel{B^{\alpha\times\alpha}}$

((2 matrices A en B zijn gelijkvormig als hun eigenwaarden gelijk zijn.))

def gelijkvormig : $A = P B P^{-1} \leftrightarrow A \sim B$

$$\rightarrow A = P RQ P^{-1}$$
$$QR = P RQ P^{-1} \quad < P = Q \text{ (mag, want Q is invert.)}$$
$$Q RQ Q^{-1}$$
$$QR = QR$$

oef 6 $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

matrix voor de transformatie :

basis. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

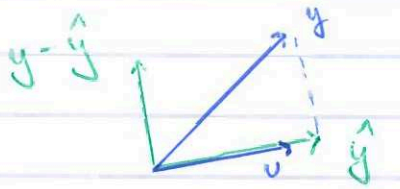
controle $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda = 1, -1$$

. . . . .

oef 10 $\quad y = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}$



$\hat{y}$ = proj. v. y op span $\vec{u}$

$= \dfrac{y \cdot u}{u \cdot u} u = \dfrac{-18}{90} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}$

$z = y - \hat{y}$

controle : $z \perp \hat{y}$

---

oef 7 als je eigenvectoren neemt, krijg je $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ voor matrixvoorstelling voor transformatie

$\Rightarrow$ basis B adhv eigenv

$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 2, 5$

eigv $\lambda = 2$: $\left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ & 0 \end{array} \right]$

eigv $\lambda = 5$ $\left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ & 0 \end{array} \right]$

oef 12

a) waar, want som v. dimensies eigenruimtes = n
($\Rightarrow$ n onafh. eigenvectoren)

b) fout, som dims eigruimtes = 2, $\neq 3$

c) als A niet inv : $A = PDP^{-1}$
↳ D minstens 1 nul op diagonaal
$\Rightarrow$ nul is eigw !

(want $A - 0I = A$)
dim Nul $A = 2$ $\Rightarrow$ dim eigenruimte$(\lambda = 0) = 2$

en je hebt nog een eigenw → som dim eigenruimtes = 3
$\Rightarrow$ waar

oef 13

(kolommen afh $\Rightarrow$ niet invert $\Rightarrow$ 0 = sowieso eigw)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

eigw: 0, 0

dim $Eig_{\lambda=0} \overset{dim}{=} \text{Nul } A = 2 \leq \text{mult. } \lambda = 0$

som v. iedere rij is 6

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

→ definitie eigenw: $A\underbrace{\vec{x}} = \lambda \underbrace{\vec{x}}$
$\Rightarrow \lambda = 6$
↳ ook meteen eigenvector

dus als som v. iedere rij gelijk is, som is eigenw

voor $Eig_{\lambda=0}$: = Nul A → sowieso rekenwerk

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1-\lambda & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3-\lambda & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad x = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>oef 14</u> $A = P D P^{-1} \rightarrow A . A^{-1} = P . D . P^{-1} . A^{-1}$

$I = P . D . P^{-1} . A^{-1}$

$P^{-1} = D . P^{-1} . A^{-1}$

$\vdots$

via rechts vermenigv.

$\cancel{A^{-1} = (P D P^{-1})^{-1}}$

$\cancel{= P^{-1} D^{-1} P^{-1^{-1}}}$

$\cancel{A^{-1} = P^{-1} D^{-1} P}$, ~~dit kan niet~~

$A^{-1} = P D^{-1} P^{-1}$

A is inv $\Rightarrow$ 0 geen eigenw $\Rightarrow$ op D diagonaal nergens 0

$\Rightarrow D$ heeft n lin onafh. kols

$\Rightarrow D$ is inverteerbaar

$\Rightarrow D^{-1}$ bestaat

<u>oef 15</u> zie p 312

$\begin{cases} B = P^{-1} A P \\ A\vec{x} = \lambda \vec{x} \ , \ \vec{x} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow A = P B P^{-1}$

$\Downarrow$

$P B P^{-1} x = \lambda x \ , \ x \neq 0$

$B \underbrace{P^{-1} x} = \lambda \underbrace{P^{-1} x} \ , \ x \neq 0$

niet vergeten! $\begin{cases} P^{-1} x \neq 0 \\ \text{want } P^{-1} \text{ is inverteerbaar} \\ P^{-1} x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ \text{maar } x \neq 0 \end{cases}$

oef 16 Geg $A = P.D.P^{-1}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \to D^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 49 \end{bmatrix}$

a) $B = 5I + 3A + A^2$

$$= \underset{P.P^{-1}}{5I} + 3P.D.P^{-1} + P.D^2.P^{-1}$$

$$= P\,(\underbrace{5I + 3D + D^2}_{\text{diagonaal matrix}})\,P^{-1}$$

$$B = P.\begin{bmatrix} 5+6+4 & 0 \\ 0 & 5+21+49 \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 75 \end{bmatrix} P^{-1}$$

b) $\lambda_B = 15 , 75$

---

oef 17 zou examenvraag kunnen zijn (+ wat is de kern vd T, ...)

$T : M_{2\times2} \to M_{2\times2} : T(A) = A.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} \right.$

st. basis voor 2x2 : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\downarrow T$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

transmatrix $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{matrix}} \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} . \det\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

diagonaal blokmatrices

$$= (\lambda^2 - 1)^2 = 0$$

$\lambda = \pm 1$

$\lambda = -1, -1, 1, 1$

mult is allebei $\underline{2}$, want $\left[(\lambda+1)(\lambda-1)\right]^2 = 0$

$(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2 = 0$

$\boxed{\lambda = 1}$ $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \ldots$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\lambda = -1}$ $\ldots$

$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

controle:

---

eigenvectoren T $\neq$ eigenvectoren B

$\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\underline{\text{Eig}}_{\lambda=1} = \text{Span}\{\leftarrow$ die 2 matrices$\}$

$\lambda = -1$: $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\text{Eig}_{\lambda=-1} = \text{Span}\{ \quad \}$

oef 18 ook rekenvraag

Quiz me

a) ow, $\vec{x}$ mag niet $\vec{0}$ zijn

b) ow

c) OW, enkel bij Δ-matrix (of diagonaalmatrix)

$$Ax = \lambda x = A^{-1}x$$

d) w, $Ax = \lambda x$

$x = \lambda A^{-1} x \rightarrow \boxed{A^{-1}x = \frac{1}{\lambda} x}$, maar eigenvectoren blijven wel hetzelfde

e) ow $Ax = \lambda x$

$AAx = \lambda Ax = \lambda^2 x$

f) w $(A - \lambda I)\vec{x} = 0$

↳ dit in die welbepaalde matrix

g) w, zie d en e

h) OW, D moet diagonaal zijn

i) ow, diagonaliseerbaar <=>

<=> som dimensies eigenruimten

j) ow

is hetzelfde, want gelijkvormige hebben zelfde eigw

k) $A = P D P^{-1}$

$B = Q A Q^{-1} = Q P D P^{-1} Q^{-1}$

$= \underline{QP}\ D\ \underline{(QP)^{-1}}$

w

l) $A = P B P^{-1}$

rang A = rang $B . P^{-1}$, (*) want P is inverteerbaar

$=$ rang $P^{-T} B^{T}$ = rang B^{T}

$=$ rang B

(*) $A = PB$

rijen v. A zijn lin. comb. v/d rijen v B

rang X = dim Row$X$

row $A \subseteq$ row B

rang $A \leq$ rang B

$B = P^{-1} A$

rang $B \leq$ rang A

rang A = rang B

OZ week 10 : vb

oef 18 $\hat{y} = \frac{\langle y, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot \vec{u_1} + \frac{\langle y, u_2 \rangle}{\langle y, u_2 \rangle} \cdot \vec{u_2}$

$= 0 \cdot \vec{u_1} + \frac{28}{42} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$= \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 2/3 \\ 8/3 \end{bmatrix}$

$z = y - \hat{y} = \begin{bmatrix} 1 - 10/3 \\ 3 - 2/3 \\ 5 - 8/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/3 \\ 7/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$

controle $z \perp u_1$ en $z \perp u_2$

oef 19 a) ① zie stelling 3, p 371 : $(\text{Row } A)^\perp = \text{Nul } A$

② $\dim \text{Row } A + \dim \text{Nul } A = n$

① + ② $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n = \text{Span}\{\text{Row } A, \text{Nul } A\}$

b) ?

oef 20 a) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$

$ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - bc =$

$\lambda^2 + (-a-d)\lambda + ad - bc = 0$

opl $= \frac{+\sqrt{D} - b}{2a}$ en $\frac{-\sqrt{D} + -b}{2a}$

som opl $= \frac{2(a+d)}{2} = a + d = tr(A)$

b)

$ax^2 + bx + c = 0$

som opl $= \frac{-b}{a}$

prod opl $= \frac{c}{a}$

prod eigw $= ad - bc$

det $A = ad - bc$

<u>oef 21</u> zoals oef 18 ; zorg eerst voor orthogonale basis

bekijk w_2 als y en w_1 als u_1

$$\hat{y} = \frac{\langle w_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot \vec{w_1} = \frac{4}{8} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z = y - \hat{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

orthogonale basis = Span $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$

OZ week 10

oef 19 $\quad A^{m \times n}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$x = p + u$, $p \in \text{Row}A$, $u \in \text{Nul}A$

stelling 8
p 38 ...

a) **ODA** $\quad W$ en $W^{\perp}$

$\forall x \in \mathbb{R}^n : x = p + u, p \in W, u \in W^{\perp}$

en neem $W = \text{Row}A$, dan is $W^T = \text{Nul}A$

b) **Stel** $Ax = b$ is consistent $\rightsquigarrow \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n : x = p + v$ met $p \in \text{Row}A$, $u \in \text{Nul}A$

Dan unieke $p \in \text{Row}A : Ap = b$

$$A(\vec{u} + \vec{p}) = A\vec{u} + A\vec{p} = \vec{b}$$

$< A\vec{u} = \vec{0}$, want $\vec{u} \in \text{Nul}A$

$$\vec{0} + A\vec{p} = \vec{b} \quad \checkmark$$

nu bewijzen dat $\vec{p}$ uniek is:

uit ongerijmde: Stel $\vec{p_1}$ en $\vec{p_2}$:

$$\left.\begin{array}{l} A\vec{p_1} = \vec{b} \\ A\vec{p_2} = \vec{b} \end{array}\right\} \ominus \quad \underline{A(\vec{p_1} - \vec{p_2}) = \vec{0}}$$

$(p_1 - p_2) \in \text{Row}A$, want is lin. comb. v. $\vec{p_1}$ en $\vec{p_2}$

en $(\vec{p_1} - \vec{p_2}) \in \text{Nul}A$

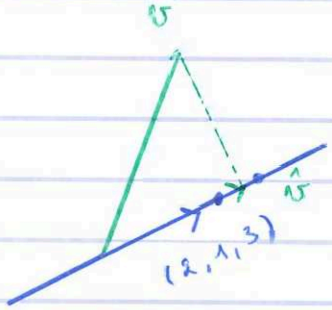
en alleen $\vec{0} \in \text{Nul}A \wedge \in \text{Row}A$

$\Rightarrow \vec{p_1} = \vec{p_2}$

Span $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$
u

Oef 28 a) st. basis $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\downarrow T$, met T is projectie op $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$



$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{v_1 \cdot u}{u \cdot u} \vec{u} = \frac{2}{14} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{v_2 \cdot u}{u \cdot u} \cdot \vec{u} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \frac{3}{14} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

b) Col P = alle vectoren die lin. comb. zijn v. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, Span $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$
Row P = dus een lijn door die vector
Nul P = vlak $\perp$ op vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2x + y + 3z = 0$

c) basis Col P = $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

basis Nul P => rekenen

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow x = x_2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

basis Nul P = $\left\{ \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

d) we hebben lin. afh kolommen

$\Rightarrow \det P = 0 \rightarrow \det(P - 0 \cdot I) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$, multipliciteit ≥ 2, want dim Nul $P = 2$

$$\text{Eig}_{\lambda=0} \overset{\text{basis}}{=} \text{Nul } P = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

en $\lambda = 1$, want ~~A~~ $P\vec{x} = \lambda \vec{x}$

en $P\vec{x}$ komt overeen met transformatie

en vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (en zijn veelvouden)

$\vec{w}$ op zichzelf afgebeeld. $\Rightarrow P\vec{x} = \vec{x}$

en $\text{Eig}_{\lambda=1} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$

---

oef 29 en 30: rekenvragen

oef 29 b) Via kleinste kwadraten

1) ~~kolommen van A orthogonaal maken mbv GS~~

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{bmatrix}$$

$$A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$[\, A^T A \mid A^T \vec{b} \,]$ om $\hat{\vec{x}}$ te vinden

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 42 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \end{array}\right]$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

$$\cancel{\vec{x} = x_3 \begin{bmatrix} -4/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\hat{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{x_1 + x_2 + x_3 = 0} \qquad \cancel{x_1 = -x_2 - x_3 = -\frac{4}{3} x_3}$$
$$\cancel{6x_2 - 2x_3 = 0} \qquad \cancel{x_2 = \frac{1}{3} x_3}$$

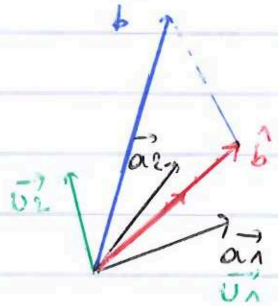
---

a) kan ook door:

1) kolommen A orthogonaal maken

$u_1 = a_1$

$$u_2 = a_2 - \frac{a_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} \cdot u_1 = \ldots = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$



$$\hat{b} = \frac{b \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{b \cdot u_2}{\langle u_2, u_2 \rangle} \cdot u_2 = \frac{6}{6} u_1 + \frac{-12}{36} u_2$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b ligt niet in vlak van $\vec{a_1}$ en $\vec{a_2}$,
dus bekijken we benadering $\hat{b}$ (?)

b) zie vorige
1) $A^T A$
2) $A^T \vec{b}$
3) $[\, A^T A \mid A^T \vec{b} \,] \rightarrow \hat{\vec{x}}$

$$\hat{b} = A \hat{x} = \begin{bmatrix} 4/3 & +2/3 \\ -4/3 & -2/3 \\ 0 & -1 \\ 8/3 & -5/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) kleinste kwadratenfout

$$\| A\hat{x} - b \| = \| \hat{b} - b \| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{20}$$

a en b) kan ook via QR-factorisatie

$$A = QR$$

$$R^T Q^T QR \hat{x} = R^T Q^T b$$

$$R \hat{x} = Q^T b$$

examenvraag: bereken vector dichtst bij andere vector

↳ opl. via kleinste kwadraten

$$\Rightarrow \hat{b} = A\hat{x}$$

Quiz me

a) OW: klopt als de matrix vierkant is

$Q^{-1} = Q^T$ $\qquad QQ^T = I$

als Q orthogonale matrix is

b) W: $\|Ax\|^2 = (Ax)^T Ax = x^T \underbrace{A^T A}_{I} x$ want A is orthonormaal

$$= x^T x$$

$$= \|x\|^2$$

c) OW: klopt wel als U vierkant is.

proj $\vec{x}$ op Col $U = U \cdot U^T \vec{x}$

d) OW: det matrix = product eigw.

symm matrix = diagonaliseerbaar

det $A \neq 64$, want 4 heeft niet multipliciteit 3, want eigenruimte heeft dimensie 2

det $A \in \mathbb{R} \setminus \{64\}$

e) W , hebben we net gedaan in 29

f) W , stelling in cursus
lin. onafh
$\Rightarrow$ $A^T A$ is inverteerbaar

g) W , bij symm staan eigenvectoren bij verschillende eigenw $\perp$.

h) W

i) OW : alleen als het symm is.

orth - diagonaliseerbaar : $A = PDP^{-1}$ met P orthogonaal
$= PDP^T$

j) NW: positief definiet : alle eigw zijn positief , niet som

OZ week 8

oef 26 $T : M_{2\times 2} \to \mathbb{P}_2$

neem het beeld v/e basiselement, kijk welke veelterm dit uitkomt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \left\{ M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$B_2 = \{ 1-t, \cancel{t}\ 1+t,$

a) $T \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (= coördinaatsvector)

$\hookrightarrow = T(M_2)$ en coörd-vector $M_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ = coörd vector veelterm tov

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot B_2 = 0 \cdot (1-t) + 1 \cdot (1+t) + 1 \cdot t^2 = \underline{1 + t + t^2}$

---

b) $T \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T(M_2 + M_4) \Rightarrow$ coördvector : $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\to T \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot (1-t) + 2(1+t) + t^2$

$= \underline{4 + t^2}$

---

c) = alle 2x2 matrices die afgebeeld w op nul-veelterm

$\Rightarrow$ op zoek naar alle coördinaatsvectoren $\vec{x}$ zodat $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ $[A \mid 0]$ uitwerken

$\vec{x} = x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ alle veelvouden v. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ geven nulwaarden

Opl: $M = M_1 - M_2 - 3M_3 + M_4$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

Kern = alle veelvouden van M

$$= \left\{ k \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R} \right\}$$

---

oef 27 A : 12 rijen
8 kolommen

a) minstens 6 homogene lineaire vgl
(die uit de echelonvorm)

⊛ basis Nul A bestaat uit 2 vectoren
dim Nul A = 2

⊛ want homogeen stelsel heeft 2 opl die l.in. onafh. zijn

oef 28 $x - 2y + z = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{0}$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2y - z \\ y &= y \\ z &= z \end{aligned}\right\} \quad p = y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

→ vlak door de oorsprong opl = $\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

extra: normaalvector is $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, vlak is gedefinieerd door zijn normaalvector

meer alg: rijruimte ⊥ nulruimte (bij matrices)
$\text{Row} A = (\text{Nul} A)^\perp$

ex: "basis voor het complement" = ~~het~~ ruimte die er ⊥ op ligt