Lineaire Algebra

eigen oplossingen

Robbe Ramon

Oefenbundel LA 1

Warm-up oefeningen

Vraag 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & h \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} \overset{R_2-2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 3 & h \\ 0 & 0 & 9-2h \end{bmatrix}$$

Voor $h = 4,5$ is dit de uitgebreide matrix van een consistent stelsel.

Vraag 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

a) Nee, er wordt een verzameling gegeven met 3 vectoren.

b)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 3 & -4 \end{array}\right] \overset{R_3+2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \overset{R_3-2R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

De uitgebreide matrix is consistent, we kunnen concluderen dat b in $\text{span}\{a_1, a_2, a_3\}$ zit.

c)

$$1 \cdot a_1 + 0a_2 + 0a_3 = a_1$$

a_1 is een lineaire combinatie van de kolommen van W.
Hieruit kunnen we concluderen dat a_1 in W zit.

d)

$2b + 3a_2$ in Col A?

b zit in Col A en a_2 zit in Col A, $3a_2 + 2b$ is een lineaire combinatie van a_2 en b en zit dus ook in Col A.

Vraag 3

$c_1 = -3$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$

Vraag 4

a) ja want b_1 is lineair onafhankelijk van b_2

b) Nee, maar wel een deelruimte, we hebben echter 3 vectoren nodig

c) Een vlak want b_1 en b_2 zijn lineair onafhankelijk

d)

We vullen b_1 in $11x + 20y + 36z$

$11 \cdot 4 + 20 \cdot (-4) + 36 = 44 - 60 + 36 = 0$

Idem voor b_2

$11 \cdot 8 + 20 \cdot 1 + 36 \cdot (-3) = 0$

Beiden voldoen aan de vgl dus B vormt een basis voor de oplossingsruimte.

e) een rechte door de oorsprong in $\mathbb{R}^3$

Vraag 5

a) onwaar, wel lineaire combinatie van de kolommen van A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

b) waar, je kan dit al afleiden in het vb gegeven in a
Maar het volgende geldt ook:

rijen van AB = kolommen van $(AB)^T$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$\Rightarrow$ lineaire combinatie van kolommen B^T, dus lineaire combinatie van rijen B.

Vraag 6

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(2,0,0) = f(0,2,0) = (4,4,4)$

$f(2,2,2) = (2,2,2)$

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

want:

$$\overset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}} \overset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \overset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vraag 7

Waar, de matrix A is inverteerbaar asa de determinant v/d matrix verschillend is van 0.

Om een determinant te hebben die verschillend is van 0, moet elke rij een pivotkolom bevatten.

Dit wil zeggen dat de kolommen lineair onafhankelijk moeten zijn.

Lineaire vergelijkingen in Lineaire Algebra

Vraag 8

a) waar, zie uitleg van vraag 5

voorwaarde: $n = m$, anders is vermenigvuldiging niet mogelijk

b) onwaar, de rijen van $C = AB^T$ zijn lineaire combinaties van de rijen van B^T. Maar de rijen van B^T zijn gelijk aan de kolommen van B.

Dit wil zeggen dat: C is een lineaire combinatie van kolommen B

Vraag 9

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ h \end{bmatrix}$$

a) v_2 is lineair afhankelijk van v_1.

want

$-3v_1 = v_2$

Om v_3 in span$\{v_1, v_2\}$ te hebben volstaat het dus dat v_3 lineair afhankelijk is met v_1 of v_2.

We nemen nu v_1 en zien dat v_3 nooit een veelvoud kan zijn van v_1.

Voor geen enkele waarde van h zal v_3 in span$\{v_1, v_2\}$ liggen.

b) Aangezien v_1 en v_2 lineair afhankelijk zijn van elkaar zal $\{v_1, v_2, v_3\}$ lineair afhankelijk zijn $\forall x : x \in \mathbb{R}$.

Vraag 10

$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\qquad T(u) = [2x_1 - 3x_2,\ x_1 + a,\ 5x_2]$

$$\underset{3\times 2}{A} \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + a \\ 5x_2 \end{bmatrix}}$$

$a \in \mathbb{R}$

a) Voor alle waarden van a die geen lineaire transformatie zijn van x_1 en x_2.
Maar, in dit specifieke geval dus voor alle waarden van a verschillend van 0.

b)

- $$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 \\ 5x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- domein van T is $\mathbb{R}^2$

- beeld van T is span$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

Vraag 11

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & -5 & -7 \\ -2 & -4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & -5 & -7 \\ -2 & -4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$R_2 - (-1) R_1$
$R_3 - (4) R_1$
$R_4 - (-2) R_1$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 4 & & 1 & \\ -2 & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -10 & 15 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$R_3 - 5 R_2$
$R_4 - (-1) R_2$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 4 & 5 & 1 & \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dit kan alles zijn

De rang van de matrix A is 2, want 2 pivotkolommen

$$\text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \right)$$ vormt de basis van de kolomruimte

van A. We kijken hiervoor naar de pivotkolommen, deze kunnen we afleiden uit de bovendriehoeksmatrix.

Vraag 12 !

a) $\text{rang } A = \dim \text{Col } A = (7-3) = 4$

want $\dim \text{Nul } A = \#$ vrije variabelen

$\dim \text{Col } A = \#$ pivotkolommen

$\#$ kolommen $= \#$ vrije var $+ \#$ pivot kolommen

b) Waar, de pivotkolommen spannen $\mathbb{R}^3$ op want 3 pivotkolommen $\dim \text{Col } A = 3$

Maar $\text{Nul } A \neq \mathbb{R}^5$, want $\underset{3\times 8\ \ 8\times 1}{Ax = 0}$, dus Nul A is een deelruimte van $\mathbb{R}^8$ met dim 5.

c) $\text{rang } A = 3 = \dim \text{Col } A$

dim oplossingsverz. $Ax = 0 = \dim \text{Nul } A = 9 - \dim \text{Col } A$

$= 9 - \text{rang}$

$= 9 - 3$

$= 6$

Vraag 13

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{2} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{ad-bc}}_{\text{det}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & (2)^{-1} & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Vraag 14

belangrijk om hieruit mee te nemen: $AA^{-1} = I$

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ C & I & 0 \\ A & B & I \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ Z & I & 0 \\ X & Y & I \end{bmatrix} = P^{-1}$$

$$PQ = I$$

$$\begin{cases} C + Z + 0X = 0 \\ A + BZ + X = 0 \\ 0A + B + Y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} Z = -C \\ X = -A - BZ \\ Y = -B \end{cases} \iff \begin{cases} Z = -C \\ X = -A + BC \\ Y = -B \end{cases}$$

Quiz me

a) onwaar, uitgebreide matrix dus geen inconsistent lineair systeem

b) onwaar, als elke rij in de matrix A een pivot heeft, dan is de vergelijking $Ax=b$ consistent.
Als b een pivotkolom is, is het stelsel strijdig.

c) onwaar, de homogene vergelijking heeft altijd een triviale oplossing

d) onwaar, de vergelijking $x = p + tv$ omschrijft de lijn door p parallel met v (zie pagina 62)

e) waar, (meer kolommen dan rijen => lineaire afhankelijkheid
(meer vectoren dan entries in de vectoren =>

f) onwaar, dit hoeft niet zo te zijn

g) waar

h) onwaar, dom $T = \mathbb{R}^5$ en ber T is een deelruimte van $\mathbb{R}^3$

i) onwaar, te weinig info gegeven om dit te weten

j) waar

k) waar

l) waar

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ beiden moeten dus inverteerbaar zijn

$\Leftrightarrow (AB)^{-1}A = B^{-1}A^{-1}A$

$\Leftrightarrow (AB)^{-1}A = B^{-1}$

Oefenbundel LA 2

Warm-up oefeningen

Vraag 1:

We gebruiken de eigenschap: $\det AB = \det A \cdot \det B$

Ook weten we: $\det I = 1$ en $\det U = \det U^T$

Stel $x = \det U = \det U^T$

$x^2 = 1$, dus $x = \pm 1$, maw $\det U = \pm 1$

Vraag 2:

Nee A is niet inverteerbaar.

$$\det A^4 = \det A \cdot \det A \cdot \det A \cdot \det A = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\det A = 0$

$\Leftrightarrow$ A niet inverteerbaar

Vraag 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det(A+B) = \det\begin{pmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{pmatrix} = (1+a)(1+d) - bc$$

$\det A = 1$ $\qquad$ $\det B = ad - bc$

$$(1+a)(1+d) - bc = 1 + ad - bc$$

$\Leftrightarrow$ $1 + \underbrace{d + a} + ad - bc = 1 + ad - bc$

$\Leftrightarrow$ $d + a = 0$

Vraag 4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dim Nul A = 3 want 3 vrije var bij het homogeen stelsel

dim Col A = 2 want 2 pivotkolommen

Wat is de nulruimte?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_5 = 0 \\ x_2 = x_2 \\ 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 3x_5 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 4/3\, x_4 - 5/3\, x_5 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

$$x = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Nul } A = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Vraag 5:

Ja want:

! eigenschappen vectorruimte

- de nulvector ligt in H
- scalaire verm. blijft in de ruimte
- optelling blijft in de ruimte

Vraag 6:

a) Nee

de nulvector $f(0)=0$ met $f'(0)=0$ maakt niet deel uit van U_1

Voldoet ook niet aan de som: $(f+g)' = f'+g' = f+1+g+1$

$\neq (f+g)+1$

b)

Nulvector:

$f(0)=0$ en $f'(0) = 2 \cdot f(0) = 0$

De nulvector maakt deel uit van U_2

Scalaire vorm:

Je kan bij een afgeleide de scalair naar buiten brengen.

Stel $g(x) = af(x)$

$$g'(x) = 2(af(x))$$

$$(af(x))' = a(2f(x))$$

$$af'(x) = a(2f(x))$$

$$f'(x) = 2f(x)$$

Optelling:

Ook van toepassing want $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

Bew: $(f(x)+g(x))' = 2(f(x)+g(x))$

$$= 2f(x) + 2g(x)$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

Vraag 7:

$p_1(t) = 1 + t^2 \qquad p_2(t) = 1 - t^2$

p_1 en p_2 zijn lineair onafhankelijk want p_1 is geen veelvoud van p_2.

Vraag 8:

$T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2 \qquad T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(0) \end{bmatrix}$

$p(x) \in \mathbb{P}_2 \qquad p(x) = a + bx + cx^2$

$T\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$

$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Kern van een lineaire transformatie = nulruimte transformatiematrix

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

$\tilde{R}_2 - R_1$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad x = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nul $A = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ = Kern van T

a) A nee, t^3 E nee, p_1 niet in nulruimte

B nee, p_2 niet in nulr. F ja

C nee, lin afh. G nee, p_1 niet in nulruimte

D nee, p_2 niet in nulruimte H ja

b)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_2 - R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Col } T = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \text{ met } a \in \mathbb{R}$$

$$= \text{bld } T$$

Vraag 9:

Nee, Col A is een deelruimte van $\mathbb{R}^4$ met dim 3

Nul A is een deelruimte van $\mathbb{R}^{10}$ met dim 7

Vraag 10:

a) $\det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det I \cdot \det A$
$= \det A$

diagonaalmatrix: det is product van de elementen op de diagonaal

b) $\det\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det I \cdot \det D - \det 0 \cdot \det C$
$= \det D - 0 \cdot \det C$
$= \det D$

c) $\det\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \det\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$
$= \det A \cdot \det D$

d) $\det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det A \det D - \det B \cdot 0$
$= \det A \det D$

Blokmatrices via co-factor expansie

a) $\det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det A \cdot (-1)^2 \det I + 0$
$= \det A \cdot 1 \cdot \det I$
$= \det A$

b) $\det\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det I \cdot (-1)^2 \det D + 0$
$= 1 \cdot 1 \cdot \det D$
$= \det D$

c) $\det\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \cdot \det\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$
$= \det A \det D$

d) $\det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det A (-1)^2 \det D + \det B \cdot (-1)^3 \cdot 0$
$= \det A \det D$

Vraag 11:

$(m \times m)$ matrices A, B, C, D $\quad$ A is inverteerbaar

a) $$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

$$0 = C - XA \qquad \underline{Y = D - XB}$$

$$-C = -XA$$

$$\underline{CA^{-1} = X}$$

b) $$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \det D - \det B \det C$$

$$= (\det I \det I - \det 0 \det X) \cdot (\det A \det Y - \det B \det 0)$$

$$= 1 \cdot (\det A \det Y) - 0$$

$$= \det A \det Y$$

$$\underline{= \det A \det (D - XB)}$$

c) $AC = CA$

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det (AY)$$

$$= \det (A \cdot (D - XB))$$

$$= \det (AD - AXB)$$

$$= \det (AD - ACA^{-1}B)$$

$$= \det (AD - AA^{-1}CB)$$

$$\underline{= \det (AD - CB)}$$

Determinanten

Vraag 12:

hoekpunten: $(1,0,-2)$, $(1,2,4)$, $(7,1,0)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Om het volume van A te vinden berekenen we de determinant van A

$$\det A = 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1\,(-4) + 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 7 \cdot 1 \cdot 4$$
$$= -4 - 2 + 28$$
$$= 22$$

Vraag 13:

A niet inverteerbaar

$\Updownarrow$

kolommen lineair afhankelijk

$\Updownarrow$

dim Col A = 0 $\Rightarrow$ nulmatrix
$\Rightarrow$ 3 punten in 0
$\Rightarrow$ volume 0

OF

dim Col A = 1 $\Rightarrow$ rechte door de oorsprong
$\Rightarrow$ volume 0

OF

dim Col A = 2 $\Rightarrow$ punten in een vlak met oorsprong als hoekpunt
$\Rightarrow$ volume 0

Volume 0 $\Leftrightarrow$ determinant 0

Vraag 14:

$(n \times n)$ matrix A

$$\det(rA) = r^n \det(A) \qquad r \in \mathbb{R}$$

want: we vermenigvuldigen r met elke rij van A, per rij is het $r \det(A)$
dus, n rijen geeft $r^n \det A$

Vectorruimten

Vraag 15: 4×2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \begin{matrix} R2 + \frac{1}{2}R_1 \\ \sim \\ R3 + 2R_1 \\ R_4 - \frac{3}{2}R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Col } A = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x = 3x_2$
$x_2 = x_2$

$x = x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ met $x_2 = 0$

$$\text{Nul } A = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a) $k = 2$ want $\text{Nul } A \subseteq \mathbb{R}^2$

b) $k = 4$ want $\text{Col } A \subseteq \mathbb{R}^4$

$\text{Nul } A = \{ x \mid Ax = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\text{Col } A = \text{Span}\{ a_1, a_2 \} \subseteq \mathbb{R}^4$

c) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vraag 16:

Gezien er 13 vergelijkingen en 18 onbekenden zijn, zijn er minimaal 5 vrije variabelen.

De homogene oplossing zal steeds een lineaire combinatie zijn van minimaal 5 vectoren. Hieruit kunnen we concluderen dat het dus niet 1 vector is zoals de opgave suggereert.

$\text{Col } A \subseteq \mathbb{R}^{13}$ $\qquad$ $\text{Nul } A \subseteq \mathbb{R}^{18}$

Vraag 17

a) $\text{rang } A = \dim \text{Col } A = 3$

$\dim \text{Nul } A = \#\text{ vrije var} = 2$

$\dim \text{Nul } A^T = 1$, want A^T is (5×4), $5 - 4 = 1$ (of er is 1 nulrij)

$\dim \text{Nul } A^T$ is het aantal nulrijen in gereduceerde echelonvorm

b) basis $\text{Col } A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$

basis $\text{Row } A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

basis van de Row space zijn de rijen in de oorspronkelijke matrix die geen nulrij vormen in de gereduceerde echelonmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 3x_2 - 5x_4 + 7x_5$

$x_3 = 3/2\, x_4 - 4x_5$

$x_5 = 0$

$$\text{basis Nul } A = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Vraag 18:

$$T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2 : T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$$

$p(t) = 3 + 5t + 7t^2 \qquad T(p) = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix}$

zie pagina 82 en 83

a) • $\underline{T(u+v) = T(u) + T(v)}$ voorwaarde lineaire transformatie

$$T(p_1 + p_2) = \begin{bmatrix} p_1(0) + p_2(0) \\ p_1(1) + p_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_1(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_2(0) \\ p_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= T(p_1) + T(p_2)$$

• $\underline{cT(u) = T(cv)}$ $\quad c \in \mathbb{R}$ voorwaarde lineaire transformatie

$$T(c \cdot p_1) = \begin{bmatrix} c \cdot p_1(0) \\ c \cdot p_2(1) \end{bmatrix}$$

$$= c \cdot \begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_2(1) \end{bmatrix}$$

$$= c \cdot T(p_1)$$

Aan beide voorwaarden voldaan, dit impliceert ook dat de nulvector op de nulvector wordt afgebeeld b)

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} a \\ a+b+c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ a+b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$a=0$
$b=-c$

$\Rightarrow$ kern $= \{ a(t-t^2), a \in \mathbb{R} \} = \text{Nul} \begin{bmatrix} a \\ a+b+c \end{bmatrix}$

dim kern $= 1$, want 1 vrije variabele

dim domein = dim kern + dim beeld

c) beeld T = Col T

Vraag 18:

$$T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2 : T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$$

Zie pagina 82 en 83 voor eigenschappen lineaire transformatie

a) - $\underline{T(u+v) = T(u) + T(v)}$

neem $p_1(t) = 1 + 2t + 3t^2$
$p_2(t) = 2 + 3t + 4t^2$

je zou dit ook kunnen veralgemenen maar letters

$p_1(t) + p_2(t) = 3 + 5t + 7t^2$

$$T(p_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad T(p_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} T(p_1) + T(p_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix} \\ T(p_1 + p_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \text{ gelijk aan elkaar}$$

- $\underline{T(c \cdot u) = cT(u), c \in \mathbb{R}}$

neem $p_1(t) = a + bx + cx^2$ en $d p_1(t) = da + dbx + dcx^2$

$$T(cp_1) = \begin{bmatrix} d \cdot a \\ da + dbx \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} a \\ a + bx \end{bmatrix} = d \cdot T(p_1)$$

b) We zoeken eerst de transformatiematrix T

$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 15 \end{bmatrix}}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

De kern v/d transformatie is de nulruimte v/d transformatiematrix

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 - R_1$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{array}$$

$$x = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\text{Nul } A = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ = kern v/d transformatie

b) $p = 0 - x + x^2 = x^2 - x$ $\quad$ $\text{kern } T = \{ a(x^2 - x), a \in \mathbb{R} \}$

c) beeld v/d transformatie $= \text{Col } T = \mathbb{R}^2$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{Col } T = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ = beeld v/d transformatie $= \mathbb{R}^2$

d)

standaardbasis $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

standaardbasis $\mathbb{P}_2 = \{ 1, x, x^2 \}$

We hebben reeds gevonden dat $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ tov $\mathbb{R}_2$

$T = \begin{bmatrix} a \\ a+b+c \end{bmatrix}$ tov $\mathbb{P}_2$

Vraag 19

$$T: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2} \qquad T(A) = A + A^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

a) We bewijzen dat T een lineaire transformatie is

- $T(u+v) = T(u) + T(v)$

neem A en $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$T(A+B) = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(a+e) & b+f+c+g \\ c+g+b+f & d+h+d+h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+a & b+c \\ c+b & d+d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e+e & f+g \\ g+f & h+h \end{bmatrix}$$

$$= A + A^T + B + B^T$$

$$= T(A) + T(B)$$

- $\underline{T(c\cdot A) = cT(A),\ c \in \mathbb{R}}$

$$c\cdot A = \begin{bmatrix} ac & bc \\ dc & ec \end{bmatrix}$$

$$T(c\cdot A) = \begin{bmatrix} ac & bc \\ dc & ec \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ac & dc \\ bc & ec \end{bmatrix}$$

$$= c\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \end{bmatrix}$$

$$= c\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \end{bmatrix}\right)$$

$$= cT(A)$$

Aan beide voorwaarden is voldaan, dus er is sprake van een lineaire transformatie.

b) $$T(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+a & b+c \\ b+c & d+d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+a & b+c \\ b+c & d+d \end{bmatrix}^T$$

c) $\ker T = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad b \in \mathbb{R}$

d)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ b+c \\ b+c \\ 2d \end{bmatrix}$$

$T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ tov basis B voor $M_{2\times 2}$

Quiz Me

R_1 en R_2 afh

a) waar

b) onwaar, bv. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ R_1 en R_2 niet afh.

c) waar als het door de oorsprong gaat

d) onwaar, de dimensie is 4 $\mathbb{P}_4 = \{1, t, t^2, t^3, t^4\}$

e) onwaar, $cT(v) \neq T(c \cdot v)$ met v een vector en $c \in \mathbb{R}$

f) waar

g) onwaar

h) onwaar, het # vrije var = dim Nul A

i) onwaar, n = dim Col A + dim Nul A

j) onwaar

k) onwaar, rang B^T

Warm-up again

Vraag 20: Zie boek p. 239 (example 7)

$$c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\-3\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-3\\4\\9\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}2\\-2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\-9\\6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&-3&2&8\\-1&4&-2&-9\\-3&9&4&6\end{bmatrix}\underset{R_3+3R_1}{\overset{R_2+R_1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&-3&2&8\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\end{bmatrix}$$

$$\overset{R_1+3R_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&2&5\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\end{bmatrix}\overset{R_1-2R_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\end{bmatrix}$$

$c_1=-1,\ c_2=-1,\ c_3=3$

$$[x]_B=\begin{bmatrix}-1\\-1\\3\end{bmatrix}$$

Vraag 21:

$\mathbb{B} = \{1, 1-t, 2-4t+t^2\}$ van $\mathbb{P}_2$

$p(t) = 7 - 8t + 3t^2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \overset{-R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{R_1 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{R_1 + 2R_3}{\overset{R_2 - 4R_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$c_1 = 5$
$c_2 = -4$
$c_3 = 3$

$$[x]_{\mathbb{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vraag 22:

(5×11) met 5 pivotkolommen

$\dim \operatorname{Col} A = \dim \operatorname{Col} A^T = 5$

dus, $\operatorname{Col} A^T \neq \mathbb{R}^{11}$, het is wel een deelruimte van $\mathbb{R}^{11}$ met dim 5

$\operatorname{Nul} A \neq \mathbb{R}^6$, Nul A heeft dim 0, deelruimte van $\mathbb{R}^{11}$, want er zijn geen vrije var.

Vraag 23:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$W = \text{span}\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_4 & 0 \\ 0 & 3c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_2 + c_4 & 0 \\ 0 & 6c_1 + 3c_3 + 3c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c_2 + c_4 = 0$$
$$6c_1 + 3c_3 + 3c_4 = 0$$

hier de nulvector niet opgenomen, was overbodig

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

dit was ook al af te leiden door op lineaire combinaties te controleren

Vraag 24:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} \quad c_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[\, c_1 \quad c_2 \mid b_1 \quad b_2 \,] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 7 & -3 \\ -5 & 2 & 5 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_2+5R_1}{\sim} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 7 & -3 \\ 0 & -8 & 40 & -16 \end{array}\right]$$

$$\underset{-1/8 R_2}{\sim} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_1+2R_2}{\sim} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right]$$

$$\underset{C \leftarrow B}{P} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det \underset{C \leftarrow B}{P} = -3 \cdot 2 + 5 = -1$$

$$\underset{B \leftarrow C}{P} = -1 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Vraag 25:

$(m \times n)$ matrix A
$(m \times m)$ matrix P

- Wat weet je over de rijen van PA? Wat weet je dan over de rang van PA?

PA is lineaire combinatie van rijen van A

dus $\text{rang } PA \leq \text{rang } A$

want max evenveel lineair onafh. kolommen

- Wat weet je over de rijen van $P^{-1}PA$? Wat weet je dan over de rang van PA?

$P^{-1}PA$ is een lineaire combinatie v/d rijen van PA.

$\text{rang } P^{-1}(PA) \leq \text{rang } PA$

max ...

maar aangezien $P^{-1}PA = A$

$\text{rang } A \leq \text{rang } PA \leq \text{rang } A$

$\Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } PA$

Vraag 26:

$T: M_{2\times 2} \to \mathbb{P}_2$ met $M_{2\times 2}$ de vectorruimte van alle (2×2) matrices

$B_1 = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

↳ basis van $M_{2\times 2}$

$B_2 = \{ 1 - t, 1 + t, t^2 \}$

↳ basis van $\mathbb{P}_2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ matrixvoorstelling van T tegenover B_1 en B_2

dus : $T(x) = Ax$

a)

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 0$ $\quad x_3 = 0$

$x_2 = 1$ $\quad x_4 = 0$

$$\underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{4\times 1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

→ coördinatenvector beeld tov B_2

↳ coördinatenvector x tov. B_1

$$\underline{T\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}} = 0 \cdot (1-t) + (1+t) + t^2$$

$$= \underline{1 + t + t^2}$$

b) $x_1\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&4\\2&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}2&0\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}$

$x_1=0 \qquad x_3=0$

$x_2=1 \qquad x_4=1$

→ coördinatenvector x tov B_1

→ coördinatenvector beeld tov. B_2

$$\underset{3\times 4}{\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&0&1\\-2&1&-1&0\end{bmatrix}}\underset{4\times 1}{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$\underline{T\begin{pmatrix}2&4\\0&0\end{pmatrix}}=2(1-t)+2(1+t)+t^2$$
$$=2-2t+2+2t+t^2$$
$$\underline{=t^2+4}$$

c) Kern van T = Nul A

$$\begin{bmatrix}1&0&1&2&0\\0&1&0&1&0\\-2&1&-1&0&0\end{bmatrix}\overset{R_2+2R_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&1&2&0\\0&1&0&1&0\\0&1&1&4&0\end{bmatrix}$$

R_3-R_2

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&1&2&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&3&0\end{bmatrix}\overset{R_1-R_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&3&0\end{bmatrix}$$

$x_1=x_4$

$x_2=-x_4$

$x_3=-3x_4$

$$x=x_4\begin{bmatrix}1\\-1\\-3\\1\end{bmatrix}$$

→ coördinatenvector tov. B_1

$$1\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}0&4\\2&0\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}2&0\\-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-4\\-7&2\end{bmatrix}$$

→ wordt dit zo gezien als het geen coördinatenvector is?

$$\underline{\text{Kern } T=\text{Nul } A=\text{span}\left\{\begin{bmatrix}0&-4\\-7&2\end{bmatrix}\right\}=\left\{k\begin{bmatrix}0&-4\\-7&2\end{bmatrix}\text{ met } k\in\mathbb{R}\right\}}$$

Vraag 27:

(12×8) matrix

dim Nul A = 2 want # oplossingen v/h homogeen stelsel die geen veelvoud zijn van elkaar = 2

dim Col A = #kolommen - dim Nul A = 6

Dit wil zeggen dat een stelsel van 6 homogene vgl moet ontstaan om de oplossingen v/d homogene vgl^n te omschrijven.

Vraag 28:

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_1 = 2x_2 - x_3$$

$$x = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Nul } A = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

De oplossingsverzameling van $x - 2y + z = 0$ wordt gegeven door

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Vraag 29:

stelsel 3 vgl gerelateerd $Ax = b$

a) $c_1 = x_2$ en $c_2 = x_3$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 5x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$d = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ want dit is een oplossing

$Rx = d$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\to R$ $\to d$

$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en $d = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

---

b) Element van col R?

Nee, het is geen lineaire combinatie van de kolommen van R

$[R | v]$ is een strijdig stelsel

Element van Row R?

$$\text{Row } R = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$$

Nee, geen element van Row R want geen veelvoud van $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Element van Nul R?

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1 - 2R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1 - 5R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ja, dit is een element van Nul R want lineaire combinatie van $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Quiz me again

a) onwaar

b) onwaar, het is gelijk aan het aantal kolommen

c) waar

d) waar, anders zou het geen basis kunnen vormen voor de nulruimte

e) onwaar, ze kunnen wel de kolomruimte aanpassen

f) onwaar, de rang is het # rijen met een pivotkolom

g) waar

h) waar

i) onwaar, maximaal 5 want er zijn maar 5 kolommen dus maar 5 pivotkolommen mogelijk

j) waar, want de kolommen zijn lineair onafhankelijk

Vraag 30:

- rang van A = dim Col A = 3
- dim Nul A = 3
- $\operatorname{Col} A = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\-1\\-3\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\10\\1\\-5\\0\end{bmatrix} \right\}$
- $\begin{bmatrix}1 & 1 & -3 & 7 & 9 & -9 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 4 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \overset{R_1 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 4 & 5 & -6 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 3 & 4 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$\begin{matrix}R_1 - 4R_3\\ R_2 - 3R_3\end{matrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 0 & 9 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 7 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$x_1 = 2x_3 - 9x_5 - 2x_6$
$x_2 = x_3 - 7x_5 - 3x_6$
$x_3 = x_3$
$x_4 = x_5 + 2x_6$
$x_5 = x_5$
$x_6 = x_6$

$$x = x_3 \begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix}-9\\-7\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix}-2\\-3\\0\\2\\0\\1\end{bmatrix}$$

Belangrijk om hieruit mee te nemen: ga naar gereduceerde echelonvorm om nulruimte basis af te leiden (is eenvoudiger zo)

$$\operatorname{Nul} A = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-9\\-7\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-3\\0\\2\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$$

- $\operatorname{Row} A = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\-3\\7\\9\\-9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\\3\\4\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\\-2\end{bmatrix} \right\}$

LA3

Warm-up Oefeningen

Vraag 1:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = -1$

We zoeken nu de eigenvectoren

$\underline{\lambda = 0}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_2+5R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eigenvector op een constante na: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda = 2}$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0$
$x_3 = 0$

$$x = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eigenvector op een constante na: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda = -1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{1/3 R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0$
$x_2 = -5/3\, x_3$

$$x = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -5/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

eigenvector op een constante na: $\begin{bmatrix} 0 \\ -5/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vraag 2:

Voor stappenplan diagonaliseren zie pagina 301 in boek.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

De eigenwaarden zijn: $\lambda_1 = 5$ en $\lambda_2 = 1$

Gezien A een 3×3 matrix is en we maar 2 eigenwaarden hebben is er sprake van een meervoudige eigenwaarde

Bereken de eigenwaarden: (we hebben 3 lineair onafh. nodig)

$\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} 2-5 & 2 & -1 \\ 1 & 3-5 & -1 \\ -1 & -2 & 2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \underset{R_3+R_1}{\overset{R_2+3R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_3-R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_1+2R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad x = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_{\lambda=5} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda = 1}$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3-1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2-1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_3 + R_2 \\ R_2 - R_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = -2x_2 + x_3$

$x_2 = x_2$

$x_3 = x_3$

$$x = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_{2_{\lambda=1}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_{3_{\lambda=1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De set $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is lineair onafh.

Construeer P van de gevonden eigenvectoren:

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \end{array}$$

Construeer D van de gevonden eigenwaarden:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Let op: de kolom v/d eigenwaarde moet overeenkomen met de positie van zijn eigenvector in P.

Nakijken of AP = PD

$$AP = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} = PD$$

Vraag 3:

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & 7 & h & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

We zoeken een waarde voor h zodat de eigenruimte v/d matrix A bij eigenwaarde $\lambda = 9$ twee-dimensionaal is.

dim nulruimte deze matrix moet 2 zijn

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$h \neq 8$, anders zal de dimensie 3 zijn.

Vraag 4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

wanneer is a inverteerbaar maar niet diagonaliseerbaar?

$a \neq 0$ want anders is A niet inverteerbaar.
We willen een meervoudige eigenwaarde. $\lambda = 1$ 2-voudig

Stel $a = 1$:

Dan $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = x_2 \end{array} \qquad x = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ dan hebben we geen 2 lineair onafh. eigenvectoren $\Rightarrow$ A niet diag.

$\boxed{a = 1}$

Vraag 5:

Geg: $A = QR$, Q is inverteerbaar

TB: A gelijkvormig met $B = PQ$

B:

gelijkvormig $\Rightarrow$ $\exists P \in \mathbb{R}^n : P^{-1} A P = B$ en omgekeerd $P B P^{-1} = A$

$$A = QR$$
$$\Leftrightarrow Q^{-1} A = Q^{-1} Q R = R$$
$$\Leftrightarrow Q^{-1} A Q = RQ$$
$$\Leftrightarrow Q^{-1} A Q = B$$

$\Rightarrow$ A gelijkvormig met B

Vraag 6:

Geg: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

Gevr: eigenw. en eigenvect. van transformatiematrix T

Opl:

we zoeken eerst de transformatiematrix.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{want} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 = 1$$
$$= \lambda^2 - 1 \qquad \lambda = \pm 1$$

$\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vraag 7:

Geg: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : T(x) = Ax$

met $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Gevr: basis β voor $\mathbb{R}^2$ met eigenschap dat $[T]_B$ diagonaal is

opl:

Om dit te bekomen diagonaliseren we de matrix A

Eigenwaarden A zoeken

$$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$$
$$12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$$
$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9$$

$$\lambda = \frac{7 \pm 3}{2} \qquad \lambda_1 = 5$$
$$\lambda_2 = 2$$

Eigenvectoren zoeken

$\lambda_1 = 5$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = 2}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_2+2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad x = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>Basis is kolommen van P</u>

$$P = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

<u>Vraag 8:</u>

$x = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3$ formule zie pagina 357

deze constanten worden gegeven door: $c_j = \dfrac{x \cdot u_j}{u_j \cdot u_j}$

$$c_1 = \frac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} = \frac{\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{5}{2}$$

$$c_2 = \frac{x \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{-8-16-3}{1+16+1} = \frac{-27}{18} = \frac{-3}{2}$$

$$c_2 = \frac{x \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}} = \frac{16 - 4 + 6}{4+1+4} = \frac{18}{9} = 2$$

$$\underline{x = \frac{5}{2} u_1 - \frac{3}{2} u_2 + 2 u_3}$$

Vraag 9:

Zie pagina 366 - 367

$$y = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad u_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

We kijken eerst na of $\{u_1, u_2\}$ een orthogonale basis vormen.
Daarvoor moet het vectoriëel product gelijk zijn aan 0.

$$u_1 \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = -20 + 20 = 0 \ ✓$$

Nu we weten dat $\{u_1, u_2\}$ een orthogonale basis vormt kunnen we de formules van de orthogonale decompositie theorie gebruiken.

$$\hat{y} = \text{proj}_{\{u_1, u_2\}} y$$

$$\hat{y} = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{y \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \frac{50}{41} u_1 - \frac{1}{41} u_2$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{200}{41} \\ \frac{250}{41} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{41} \\ -\frac{4}{41} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \text{proj}_{\{u_1, u_2\}} y$$

Controle:

$$y - \hat{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$y - \hat{y}$ is in $\text{Span}\{u_1, u_2\}^{\perp}$ en moet loodrecht zijn t.o.v. zowel u_1 en u_2.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \checkmark \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

Vraag 10:

Zie pagina 358

$y = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}$

We schrijven y als de som van 2 orthogonale vectoren, waarvan 1 vector behoort tot Span{u}.

$\hat{y} = \text{proj}_L\, y = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} u \qquad$ met $L = \text{Span}\{u\}$

$\hat{y} = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} u = \frac{18 - 36}{9 + 81} u = \frac{-18}{90} \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} = \frac{-1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} \\ 9/5 \end{bmatrix}$

$y - \hat{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} \\ 9/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33/5 \\ 11/5 \end{bmatrix}$

$y = \underbrace{\begin{bmatrix} -3/5 \\ 9/5 \end{bmatrix}}_{\hat{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 33/5 \\ 11/5 \end{bmatrix}}_{y - \hat{y}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

Controle:

$\hat{y} \cdot u = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 9/5 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 33/5 \\ 11/5 \end{bmatrix} = -99/5 + 99/5 = 0 \checkmark$

Vraag 11:

Bereken eigenwaarden en bijhorende eigenvectoren

a) $A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$\det \begin{bmatrix} -5-\lambda & -1 \\ 3 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$

$(-5-\lambda)(-1-\lambda) + 3 = 0$

$5 + 5\lambda + \lambda + \lambda^2 + 3 = 0$

$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$

$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8$

$= 36 - 32$

$= 4$

$\lambda_1 = \dfrac{-6+2}{2} = -2$ $\qquad$ $\lambda_2 = \dfrac{-6-2}{2} = -4$

$\underline{\lambda = -2}$

$\begin{bmatrix} -5-(-2) & -1 & 0 \\ 3 & -1-(-2) & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\overset{R_2 - R_1}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\overset{-R_1/3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x = x_2 \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$v_1 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$ op een cte na bepaald

$\underline{\lambda = -4}$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_2 + 3R_1}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ op een cte na bepaald}$$

Eigenwaarden en Eigenvectoren

Vraag 12:

Nulruimte A = Nulruimte $(A - \lambda I_n)$
bij eigenwaarde $\lambda = 0$

a) A is (5×5) met 2 eigenwaarden

A is diagonaliseerbaar want de som van de dimensies van de eigenruimtes is 5.

waar

Dit wil zeggen dat er 5 lineair onafh. eigenvectoren zijn
$\Rightarrow$ voldoende vw. voor diagonaliseren

b) A is (3×3) met 2 eigenwaarden

A is hier niet diagonaliseerbaar want som dim eigenr. $= 2 < 3$

onwaar

Dwz dat 1 eigenvector lineair afh. is van de andere 2 en is A dus niet diagonaliseerbaar

c) Aangezien A niet inverteerbaar is, is 0 een eigenwaarde.

Dit wil zeggen dat de matrix $A - \lambda I_3 = A$ met $\lambda = 0$

Dus is $\text{Nul}(A - \lambda I_3) = \text{Nul}(A)$

waar

We weten dat A één pivotkolom heeft, dus 2 vrije variabelen.

$\dim \text{Nul} A = 2 = \dim \text{Nul}(A - \lambda I_3)$

Dwz dat de som van de dim. van de eigenruimtes 3 is en de matrix diagonaliseerbaar is.

Vraag 13:

Geg: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Gev: vind alle eigenwaarden

Opl:

Gezien A niet inverteerbaar is, want de kolommen zijn niet lineair onafhankelijk, zal $\lambda = 0$ een eigenwaarde zijn.

Als we de nulruimte van $(A - 0 \cdot I_3)$ bekijken, heeft deze dim 2.

$\lambda = 0$ moet dus een tweevoudige eigenwaarde zijn.

We weten uit oef 20:

Som v/d eigenwaarden = som v/d diagonaalelementen

We hebben reeds $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Som moet $1+2+3 = 6$ zijn, dus $\lambda_3 = 6$.

Eigenvectoren berekenen:

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_3 = 6}$

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 + 5R_1$

$\sim$

$R_2 - R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & -18 & 18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 + 4R_1$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vraag 14:

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

$A = PDP^{-1}$

$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1}$

$= (P^{-1})^{-1} D^{-1} P^{-1}$

$= PD^{-1}P^{-1}$

$D = \begin{bmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{bmatrix}$

we weten dat D inverteerbaar is want er is geen 0 op de diagonaal want $\lambda = 0$ is geen eigenwaarde, gezien A inverteerbaar is.

$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & & \\ & 1/b & \\ & & 1/c \end{bmatrix}$

Vraag 15:

$B = P^{-1} A P$

x is een eigenvector van A met eigenw. λ

De eigenw. van A zijn ook de eigenw. van B.

$Ax = \lambda x$

$PBP^{-1}x = \lambda x$

$PP^{-1}BP^{-1}x = P^{-1}\lambda x$

$B\underline{P^{-1}x} = \lambda \underline{P^{-1}x}$

Hieruit halen we dat $P^{-1}x$ de eigenvector in B is van λ

Vraag 16:

$A = PDP^{-1}$ P een 2×2 matrix en $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

$B = 5I + 3PDP^{-1} + PD^2P^{-1}$

a) B is diagonaliseerbaar asa er 2 lin. onafh. eigenvectoren zijn

$B = 5I + 3PDP^{-1} + PD^2P^{-1}$
$= 5PP^{-1} + 3PDP^{-1} + PD^2P^{-1}$
$= P5P^{-1} + P3DP^{-1} + PD^2P^{-1}$
$= P\underbrace{(5I + 3D + D^2)}_{\text{Diagonaalmatrix}}P^{-1}$

interessante techniek: $I = PP^{-1}$

$D_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 49 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 75 \end{bmatrix}$

$B = P\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 75 \end{bmatrix}P^{-1}$

b) de eigenw. van B zijn: $\lambda_1 = 15, \lambda_2 = 75$

Vraag 17:

Examenvraag!

ggg: $T: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2} : T(A) = A\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

gevr: eigenwaarden, eigenvectoren en eigenruimten

opl:

stel $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\qquad T(A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

We zoeken de transformatiematrix T

we weten dat $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \\ d \\ c \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 \cdot (\lambda^2 - 1) + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^4 - \lambda^2 + \lambda^2 - 1 = 0$$

$\lambda^4 - 1 = 0$

$\lambda = 1$ of $\lambda = -1$

$\hookrightarrow$ 2-voudig $\qquad \hookrightarrow$ 2 voudig

$\underline{\lambda = 1}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dit is in $\mathbb{R}^4$, we moeten dit nog omzetten naar $M_{2\times 2}$!

Ja, als de eigenwaarden van T gevr. zijn

Als eigenw. van A gevr. zijn hoeft dat niet

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{\lambda=1} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\underline{\lambda = -1}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{\lambda=-1} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Vraag 18:

geg: $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\quad u_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$W = \text{Span}\{u_1, u_2\}$

gevr: $y = \hat{y} + z$ $\quad$ met $z = y - \hat{y}$

opl:

We kijken na of u_1 en u_2 orthogonaal zijn.

$$u_1 \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 5 + 3 - 8 = 0 \quad \checkmark$$

Dan geldt volgende formule:

$$\text{proj}_W y = \hat{y} = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{y \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2$$

$$= 0 \cdot u_1 + \frac{28}{42} u_2$$

$$= \frac{2}{3} u_2 = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 2/3 \\ 8/3 \end{bmatrix}$$

$$y - \hat{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10/3 \\ 2/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/3 \\ 7/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 2/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7/3 \\ 7/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}}$$

Controle:
$\hat{y}$ en $y - \hat{y}$ moeten orthogonaal zijn

$$\begin{bmatrix} 10/3 \\ 2/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7/3 \\ 7/3 \\ 7/3 \end{bmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

Vraag 19:

geg: $(m \times n)$ matrix A

gev:

1 $\forall x \in \mathbb{R}^n : \exists r, \exists u : x = r + u : r \in \text{Row } A \wedge u \in \text{Nul } A$

2 $\underset{\text{consistent}}{Ax = b} \Rightarrow \exists! r \in \text{Row } A : Ar = b$

bew:

1. Er is een basis b van A die orthogonaal is.

$\text{proj}_b\, x = \hat{y}$ met $x - \hat{y} = z$

we kunnen x schrijven als $x = \overset{r}{\hat{y}} + \overset{u}{z}$

Ook weten we dat: $\hat{y} \cdot z = 0$, deze vectoren zijn orthogonaal

Dit heeft volgende eig:

- $\hat{y}$ ligt in A dus een element van Row A
- z is orthogonaal met $\hat{y}$ en ligt in $\text{Row } A^{\perp}$, $\text{Row } A^{\perp} = \text{Nul } A$

2. $Ax = b$ is consistent, er is dus min. 1 stelsel v/h stelsel

$x = r + u$ met $r \in \text{Row } A$ en $u \in \text{Nul } A$

$$Ax = A(r + u)$$
$$= Ar + Au \qquad \Rightarrow Ax = Ar = b$$
$$= Ar + 0$$
$$= Ar \quad \text{want } u \in \text{Nul } A$$

Nu moeten we nog aantonen dat r uniek is

Stel $\exists r_1 \in \text{Row } A : r_1 \neq r : Ax = Ar_1$

$A(r - r_1) = Ar - Ar_1 = b - b = 0$

$r = r_1 + (r - r_1)$

$r = r + 0$ $\Rightarrow r_1 = r$ want ontbinding is uniek

Vraag 20:

$tr(A)$ = som v/d diagonaalelementen van matrix A → vierkante matrix

belangrijke eigenschappen

a) tb: som eigenwaarden $= tr(A)$

b:

$$tr\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a+d$$

$$\det\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - bc$$

$$= \lambda^2 + (-a-d)\lambda + ad - bc$$

$$D = (-a-d)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (ad-bc)$$

$$\lambda_1 = \frac{a+d+\sqrt{(-a-d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{a+d-\sqrt{(-a-d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{a+d+\cancel{\sqrt{\ldots}}}{2} + \frac{a+d-\cancel{\sqrt{\ldots}}}{2}$$

$$= a+d$$

$$= tr(A)$$

Som van de eigenwaarden is gelijk aan de som van de diagonaalelementen b)

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{a+d+\sqrt{\cdots}}{2} \cdot \frac{a+d-\sqrt{\cdots}}{2}$$

$$= \frac{\cancel{a^2} + \cancel{ad} - \cancel{a\sqrt{\cdots}} + \cancel{da} + \cancel{d^2} - \cancel{d\sqrt{}} + \cancel{a\sqrt{\cdots}} + \cancel{d\sqrt{\cdots}} - (\cancel{-a-d})^2 + 4(ad-bc)}{4}$$

$$= \frac{4(ad-bc)}{4}$$

$$= ad - bc$$

$$= \det A$$

Het product van de eigenwaarden is gelijk aan de determinant van de matrix.

Quiz me

a) onwaar, x mag niet 0 zijn

b) onwaar, $(A-\lambda I)$ reduceren tot echelonvorm

c) waar, eigenwaarde is $1/\lambda$ maar eigenvectoren blijven gelijk

d) waar

e) onwaar, λ^2

f) waar

g) waar, eigenwaarde is λ^2 maar eigenvector is hetzelfde

h) onwaar, D hoeft niet per definitie inverteerbaar te zijn, wel diagonaal

i) onwaar, de eigenvectoren moeten ook allemaal lineair onafh. zijn

j) onwaar

k) $A = PDP^{-1}$

$$B = QAQ^{-1} = QP \quad D \quad P^{-1}Q^{-1}$$
$$= QP \quad D\,(QP)^{-1}$$

waar

l) waar, $A = PBP^{-1}$

rang A = rang BP^{-1} want P is inverteerbaar

$= \text{rang}\,(BP^{-1})^T$

$= \text{rang}\ P^{-T}B^T$

$= \text{rang}\ B^T$

$= \text{rang}\ B$

Belangrijk:

Stel $A = PB$
als P inv. dan
rang A = rang B
want

$A = PB$
rang $A \leq$ rang B
$P^{-1}A = B$
rang $B \leq$ rang A
rang A = rang B

Warm-up again

Vraag 21:

geg:

$$W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$$

gevr:

bereken een orthogonale basis voor W (deelruimte van $\mathbb{R}^3$)

opl:

we gebruiken de Gram-Schmidt methode.

Zie pagina 373

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{12 - 8}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$ vormt een orthogonale basis voor W

Vraag 22:

geg: $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$ symmetrisch matrix

gvr: diagonaliseer orthogonaal

opl:

we zoeken de eigenwaarden

$$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$(4-\lambda)(4-\lambda) - 1 = 0$

$16 - 4\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$

$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15$
$= 64 - 60 = 4$

$\lambda_1 = \dfrac{8+2}{2} = 5 \qquad \lambda_2 = \dfrac{6}{2} = 3$

we zoeken de eigenvectoren

$\underline{\lambda = 5}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 + R_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda = 3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad x = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

PDP^T

We zien dat v_1 en v_2 orthogonaal zijn

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Vraag 23:

geg:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

gvr:

- ortogonale basis van Col A
- QR factorisatie

opl:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{R_3 + 4R_1 \\ R_4 - R_1 \\ R_5 - R_1}}{\overset{R_2 + R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 12 & 17 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{R_3 - 4R_2}{R_4 + 2R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Col } A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Deze basis is niet orthogonaal

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{x_2 \, v_1}{v_1 \, v_1} v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{-21}{20} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -21/20 \\ 21/20 \\ 84/20 \\ -21/20 \\ -21/20 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 41/20 \\ -1/20 \\ -4/20 \\ 59/20 \\ 19/20 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\times 20} \begin{bmatrix} 41 \\ -1 \\ -4 \\ 59 \\ 19 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} -$$

Vraag 24:

geg:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gevr:

zoek de kwadratenoplossing en de bijhorende kleinste kwadratenfout

opl:

de kolommen van A zijn lineair onafh. (A^TA is dus ook inv.)

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 18 - 4 = 14$$

$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/14 & -1/7 \\ -1/7 & 3/14 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 6/14 & -1/7 \\ -1/7 & 3/14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/14 & 8/14 & 4/14 \\ 2/7 & -5/14 & 1/14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

We kijken nu dus wat de kleinste kwadratenfout is

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 6 \end{bmatrix} = A\hat{x}$$

$$b - A\hat{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\| b - A\hat{x} \| = \sqrt{(4)^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 1 + 36}$$

$$= \sqrt{53}$$

Vraag 25:

geg:

$$W = \text{span}\{v_1, v_2\}$$

$$y = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

gevr:
welke vector in W het dichtst bij y

opl:

De vector die het dichtst ligt moet loodrecht op y staan

We kijken na of $\{v_1, v_2\}$ een orthogonale basis vormt.

$v_1^T v_2 = 0$ dus een orthogonale basis

$$\hat{y} = \text{proj}_W y = \frac{y \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{y \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2$$

$$y \cdot v_1 = -3 - 2 - 1 + 26 = 20$$
$$v_1 \cdot v_1 = 1 + 4 + 1 + 4 = 10$$
$$y \cdot v_2 = -12 - 1 + 0 - 39 = -52$$
$$v_2 \cdot v_2 = 16 + 1 + 0 + 9 = 26$$

$$\hat{y} = \frac{20}{10} v_1 + \frac{-52}{26} v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-208}{26} \\ \frac{-52}{26} \\ 0 \\ \frac{-156}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$y - \hat{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\|y - \hat{y}\| = \sqrt{9 + 9 + 9 + 9} = 6$$

Vraag 26:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a \\ a & a_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 & b \\ b & b_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_1 & a \\ a & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= a_1 x_1^2 +$$

Vraag 27:

$$2x_1^2 - 16x_1x_2 + 5x_2^2$$

a) $Q(x) = x^T A x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

eigenw. van A:

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -8 \\ -8 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$(2-\lambda)(5-\lambda) - 64 = 0$

$10 - 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 64 = 0$

$\lambda^2 - 7\lambda - 54 = 0$

$D = 49 - 2 \cdot 1 \cdot (-54)$

$= 49 + 108 = 157$

$\lambda_1 = \dfrac{7+\sqrt{157}}{2} \rightarrow$ positief

$\lambda_2 = \dfrac{7-\sqrt{157}}{2} \rightarrow$ negatief

De vorm is indefiniet gezien er een positieve en negatieve eigenwaarde is.

b) $Q(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\det \begin{bmatrix} 9-\lambda & 4 \\ 4 & 0-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$(9-\lambda)(-\lambda) - 16 = 0$

$-9\lambda + \lambda^2 - 16 = 0$

$D = (-9)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-16)$

$= 81 + 64 = 125$

$\lambda_1 = \dfrac{9+\sqrt{125}}{2} \rightarrow$ positief

$\lambda_2 = \dfrac{9-\sqrt{125}}{2} \rightarrow$ negatief

indefiniet want positieve en negatieve eigenwaarden

c) $Q(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$\det \begin{bmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} = 0$

$(-2-\lambda)(-3-\lambda) - 1 = 0$

$6 - 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 25 - 20 = 5$

$\lambda_1 = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}$ → positief

$\lambda_1 = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}$ → positief

positief definiet want de eigenwaarden van A zijn positief

Orthogonaliteit en kleinste kwadraten

Vraag 28:

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a) $\text{proj}_a\, y = \frac{y\, a}{a \cdot a} a = \begin{bmatrix} \frac{y^T a}{a^T a} & a_1 \\ \dots & a_2 \\ \dots & a_3 \end{bmatrix}$

$a^T a = 14$

$$\begin{bmatrix} 4/14 & 2/14 & 6/14 \\ 2/14 & 1/14 & 3/14 \\ 6/14 & 3/14 & 9/14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Controle:

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/14 \\ 6/14 \\ 18/14 \end{bmatrix}$$

$$y - \hat{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12/14 \\ 6/14 \\ 18/14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/14 \\ 8/14 \\ -4/14 \end{bmatrix}$$

$a^T(y - \hat{y}) = 4 + 8 - 12 = 0$ ✓

transformatiematrix $P = \begin{bmatrix} 4/14 & 2/14 & 6/14 \\ 2/14 & 1/14 & 3/14 \\ 6/14 & 3/14 & 9/14 \end{bmatrix}$

b) - Col P heeft als basis $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ → 2ie c. en is dus een rechte door de oorsprong door $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

- Row P heeft 1 dim → rechte door oorsprong
- Nul P is een vlak door de oorsprong want 2 vrije var.

c) $P = \begin{bmatrix} 4/14 & 2/14 & 6/14 \\ 2/14 & 1/14 & 3/14 \\ 6/14 & 3/14 & 9/14 \end{bmatrix} \underset{14R_3}{\overset{14R_1,\ 14R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

$\underset{1/3 R_3}{\overset{1/2 R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

basis Col $P = \left\{ \begin{bmatrix} 4/14 \\ 2/14 \\ 6/14 \end{bmatrix} \right\}$ of ook: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x = x_2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nul $P = \left\{ \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

d) We berekenen de eigenwaarden

$$\det \begin{bmatrix} 4/14-\lambda & 2/14 & 6/14 \\ 2/14 & 1/14-\lambda & 3/14 \\ 6/14 & 3/14 & 9/14-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\cancel{\left(4/14-\lambda\right) \cdot \det \begin{bmatrix} 1/14-\lambda & 3/14 \\ 3/14 & 9/14-\lambda \end{bmatrix}} \dots$$ te veel werk

P projecteert een vector op een lijn, welke vector wordt op een veelvoud van die lijn geprojecteerd?

$Ax = \lambda x \qquad \lambda_1 = 1$

ook weten we dat : - Som v/d eigenwaarden moet gelijk zijn aan som diagonaalelementen

Som moet dus 1 zijn

- Product v/d eigenwaarden moet gelijk zijn aan det P

det P = 0 want kolommen zijn lineair afhankelijk

Dus product eigenwaarden moet 0 zijn

$\Rightarrow \lambda_2 = 0$

$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ en v_2 en v_3 zijn de basisvectoren van Nul A

$\text{Nul}(A - 0 \cdot I) = \text{Nul } P$

$v_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vraag 29:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) manier 1: orthogonale projectie van b op A

manier 2: kleinste kwadratenmethode

$$\|b - A\hat{x}\| \leq \|b - Ax\|$$

We werken manier 1 uit, a_1 en a_2 vormen geen orthogonale basis voor Col A.

Orthogonale basis construeren:

$v_1 = a_1$

$$v_2 = a_2 - \frac{a_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{6}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\hat{y} = \text{proj}_W b = \frac{b v_1}{v_1 v_1} v_1 + \frac{b v_2}{v_2 v_2} v_2$$

$$\hat{y} = \frac{6}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z = b - \hat{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

staat orthogonaal op W
antwoord is correct

Vector $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ligt het dichtst bij de vector b (en in Col A).

b)

We zoeken dezelfde vector, maar nu met de methode der kleinste kwadraten.

De kolommen van A zijn lineair onafh.

$\Rightarrow$ er is een unieke kleinste kwadratenoplossing en A^TA is inverteerbaar

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(A^T A\right) = 6 \cdot 42 - 6 \cdot 6 = 252 - 36 = 216$$

$$\left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{216}\begin{bmatrix} 42 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/36 & -1/36 \\ -1/36 & 1/36 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b = \overset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 7/36 & -1/36 \\ -1/36 & 1/36 \end{bmatrix}} \overset{2\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}} \overset{4\times 1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 9/36 & -9/36 & -3/36 & 9/36 \\ -3/36 & 3/36 & 3/36 & 3/36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{27 - 9 + 12 + 18}{36} \\ \\ \dfrac{-9 + 3 - 12 + 6}{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{48}{36} \\ \\ \dfrac{-12}{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$A\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Symmetrische Matrices en kwadratische vorm

Vraag 30:

ggg: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 7$ en $\lambda_2 = -2$

gevr:

diagonaliseer orthogonaal

opl:

$\underline{\lambda = 7}$

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \underset{R_2 - 1/2 R_1}{\overset{R_3 + R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x = x_2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda = -2}$

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Omdat A symmetrisch is weten we dat de eigenvectoren van verschillende eigenwaarden loodrecht op elkaar staan.

Echter is de dim v/d eigenruimte van $-7 = 2$

Deze 2 vectoren moeten we nog loodrecht op elkaar zetten

$$v_2' = v_2 - \frac{v_2 v_1}{v_1 v_1} v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-2}{5}\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_2' = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|v_1\| = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \|v_2'\| = \frac{\sqrt{45}}{5} \qquad \|v_3\| = \frac{3}{2}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} & -2/3 \\ 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} & -1/3 \\ 0 & 5/\sqrt{45} & 2/3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 7 & & \\ & 7 & \\ & & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = P D P^T$$

Vraag 31:

- Singuliere waarden van B zijn sqrt v/d eigenwaarden van B^TB

  => eigenwaarden van B^TB zijn altijd positief (met 0 erbij)

  => positief semi-definiet

- B inv. => B^T inv.

  B^TB lineaire comb kolommen B^T => lin onafh.

  => B^TB inverteerbaar

  => $\lambda \neq 0$

  => positief definiet

Vraag 32:

geg: $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$

gevr:
- klassifiseer de vorm
- variabele-verandering toepassen $x = Py$ die $x^T A x$ omzet in een kwadratische vorm zonder term x_1x_2

opl:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \qquad Q(x) = x^T A x$$

Stap 1: A orthogonaal diagonaliseren

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(6-\lambda) - (4) = 0$$
$$18 - 3\lambda - 6\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$
$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$$

$$D = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 = 81 - 56 = 25$$

$$\lambda_1 = \frac{9+5}{2} = 7 \qquad \lambda_2 = \frac{9-5}{2} = 2$$

$\underline{\lambda = 7}$

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_2 - 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = x_2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \|v_1\| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$\underline{\lambda = 2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_2 + 2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \|v_2\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

de eigenvectoren zijn automatisch orthogonaal want symm. matrix, we moeten de genormaliseerde vectoren gebruiken

$$A = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$= P D P^{-1}$$

en $D = P^{-1} A P$

Een verandering van variabele

$$x = Py \qquad \text{met } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ en } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = x^T A x = (Py)^T A (Py)$$

$$= y^T P^T A P y = y^T D y$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= 7y_1^2 + 2y_2^2$$

$$Q(y) = 7y_1^2 + 2y_2^2$$

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Quiz me again

a) onwaar, klopt als de matrix vierkant is

$Q^{-1} = Q^T \qquad QQ^T = I \qquad \Rightarrow Q$ is orthogonale matrix

b) waar

c) waar, want $UU^T = I$ gezien U een orthogonale matrix is ?

d) onwaar, det A = product eigenwaarden. A is symm dus som dim. eigenruimtes is 3. Er moet dus nog een eigenwaarde zijn $\neq 4$ dwz, det A kan niet 4^3 zijn. $\Rightarrow$ det $A \in \mathbb{R} \setminus \{64\}$

e) waar

f) waar, det $\neq 0$ en $A^T A$ is dan inverteerbaar

$\Rightarrow$ snelle eenduidige formule

g) waar, u en v zijn eigenvectoren

gezien $A^T = A$ is A een symm. matrix

dus $u \cdot v = 0$

h) waar

i) onwaar

j) onwaar, alle eigenwaarden moeten positief zijn

Oef uit boek

Example 4 (7.4 p. 437)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Vind een orthogonale diagonalisatie van A^TA

$$A^TA = \begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 9-\lambda & -9 \\ -9 & 9-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(9-\lambda)(9-\lambda) - 81 = 0$$
$$81 - 9\lambda - 9\lambda + \lambda^2 - 81 = 0$$
$$\lambda^2 - 18\lambda = 0$$

$$D = (-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0$$
$$= 18^2$$

$$\lambda_1 = \frac{18 + 18}{2} = 18$$

$$\lambda_2 = 0$$

$v_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ← orthonormaal

Stel V en Σ op

$$V = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

De singuliere waarden zijn de sqrt van eigenwaarden A^TA

$\sigma_1 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ $\sigma_2 = 0$

$$D = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maar gezien er slechts 1 niet nulwaarde is nemen we

$$D' = 3\sqrt{2}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D' & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$