1

LA 1:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & h \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ $h = 9/2$ (bovenste rij is helft van onderste)

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & 3 & -4 \end{bmatrix} \overset{R_3+2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \overset{R_3-2R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

a) b zit niet in $\{a_1, a_2, a_3\}$. Er zitten 3 vectoren in

b) b zit in W. Er zitten oneindig veel vectoren in W

c) a_1 zit in W omdat het in de span zit.

d) Ja, de matrix is consistent => elke lin. comb. zit er in.

3) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

$c_1 = -3, c_2 = -1, c_3 = 2$

4) $B = \text{Span}\{b_1, b_2\}$; $b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

a) Nee, want vectoren zitten in $\mathbb{R}^3$

b) Nee, maar wel een subspace van $\mathbb{R}^3$

c) Een vlak, b_1 en b_2 zijn lin. onafh.

d) b_1: $11 \cdot 4 + 20 \cdot -4 + 36 \cdot 1 = 0$

b_2: $11 \cdot 8 + 20 \cdot 1 + 36 \cdot -3 = 0$

=> B is opl verzameling van $11x + 20y + 36z = 0$

e) Een lijn door de oorsprong

5) a) De kolommen van AB zijn lin. comb. v.d. kolommen van B:

fout: lin. comb. v.d. rijen van B.

b) fout: De rijen van AB zijn lin. comb. v.d. rijen van B.

6) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(2,0,0) = f(0,2,0) = (4,4,4)$ en $f(2,2,2) = (2,2,2)$

=> $f(1,0,0) = f(0,1,0) = (2,2,2)$ => $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & a \\ 2 & 2 & b \\ 2 & 2 & c \end{bmatrix}$

$f(1,1,1) = (1,1,1)$ => $\left.\begin{array}{l} 2+2+a=1 \\ 2+2+b=1 \\ 2+2+c=1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} a=-3 \\ b=-3 \\ c=-3 \end{array}$ => $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

②

A = $n \times n$ matrix

7) A is inverteerbaar $\Rightarrow A \sim I \Rightarrow n$-pivot kolommen $\Rightarrow n$ onafh. kolommen

8) a) waar, de kolommen v. AB zijn lin. comb. v.d. kolommen van A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x & \Delta \\ 0 & x & \Delta \\ 0 & x & \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sim & \sim & \sim \\ 1 & 2 & 3 \\ \sim & \sim & \sim \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \sim \\ 1 \\ \sim \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sim \\ \sim \\ \sim \\ \sim \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots$$

b) Fout, De rijen van AB^T zijn lin. comb. v. de rijen van B^T:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & x & x \\ \Delta & \Delta & \Delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} - 1 - \\ - 2 - \\ - 3 - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sim 1 \sim \\ \sim 2 \sim \\ \sim 3 \sim \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} [\sim 1 \sim] = 0[-1-] + 0[-2-] + 0[-3-] \\ [\sim 2 \sim] = x[-1-] + x[-2-] + 0[-3-] \end{matrix}$$

9) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ h \end{bmatrix}$

a) Voor welke waarden h zit v_3 in Span $\{v_1, v_2\}$?

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & h-10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & h-10 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 0 \neq 8$ dus v_3 gaat nooit in de Span zitten

b) $\{v_1, v_2, v_3\}$ is voor elke h afhankelijk want $v_2 = 3v_1$

10) $T(u) = (2x_1 - 3x_2, x_1 + a, 5x_2)$, $u = [x_1, x_2]^T$

a) Voor welke a is T een niet-lin. transformatie?

Wanneer a geen lin. comb. is van x_1 en x_2 of wanneer $a \neq x_1$ want dan geldt $T(0) = 0$ niet meer!

b) matrix v. T: $A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + a \\ 5x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

dom T: $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$

Bld T: Span $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}$

11) Vindt LU van $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & -5 & -7 \\ -2 & -4 & 7 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -10 & 15 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \end{bmatrix} = U$

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

kan eigenlijk alles zijn! Komt van dubbel 0

Rang$(A) = 2$ (# pivots) Bij LU mag je enkel een veelvoud v/e rij hoger optellen bij een rij lager.

Indien LU gegeven, kijk dan gewoon naar U voor rang(A)

12) a) dim Nul $A = 3$ (bestaat uit 3 vectoren)

$= \text{Rang } A = 7 - \dim \text{Nul } A = 7 - 3 = 4$

b) Rang $A = 3$, $A = 3 \times 8$ $\Rightarrow$ Dim $A = \mathbb{R}^3$ want 3 pivots

Nul $A = 8 - 3 = 5$

c) $A = 5 \times 9$, rang $A = 3 \Rightarrow$ Nul $A = 9 - 3 = 6$

13) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $A_{22} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

* We kunnen de middelste 2 negeren omdat het een enkel element is. De inverse van 2 is 1/2

A is enkel inverteerbaar indien A_{11} en A_{22} inverteerbaar zijn.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ $A_{11}^{-1} = -1\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $A_{22}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5/2 & 7/2 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

14) $A = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ C & I & 0 \\ A & B & I \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ Z & I & 0 \\ X & Y & I \end{bmatrix}$

$A A^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ Bereken de 0'en v.d. onderdriehoek

$\Rightarrow CI + IZ = 0 \Rightarrow Z = -C$

$AI + BZ + IX = 0 = A + B(-C) + X = 0 = A - BC + X = 0 \Rightarrow X = BC - A$

$B + Y = 0 \Rightarrow Y = -B$

Quiz Me:

a) Waar want er is een vgl v.d. vorm: $5 = 0 \Leftrightarrow$ Systeem is inconsistent

b) Waar

c) Onwaar, $Ax = 0$ heeft een niet-triviale opl $\Leftrightarrow$ minstens 1 vrije variabele

d) Onwaar, (p 72) $x = p + tv$ gaat door p en is parallel met met v.

e) Waar, er zijn meer var dan vgl

f) Onwaar, meer elementen dan h. aantal vectoren

g) Waar

h) Onwaar, $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ want $T = A^{(3\times5)} \cdot x^{(5\times1)}$

i) Onwaar, de kolommen v. A zijn lin. afhankelijk

j) Waar, A moet minstens 1 vrije var hebben. (anders is er een rij v.d vorm van $[0\ 0 \ldots 0\ 1 | 0]$)

k) waar

l) waar, kijk p. 138: $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

5

LA2:

1) $U^T U = I \iff U$ pivot in elke kolom

$\Rightarrow \det U = (-1)^z \quad z =$ zij verschuivingen

2) $\det A^4 = (\det A)(\det A)(\det A)(\det A) = 0 \iff \det A = 0$

$\Rightarrow A$ is inverteerbaar

3) $A+B = \begin{bmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{bmatrix}$, $\det(A+B) = (1+a)(1+d) - bc = 1 + a + d + ad - bc$

$\det A = 1$

$\det B = ad - bc$

$\det A + \det B = 1 + ad - bc = \det(A+B) \iff a + d = 0$

4) $\dim \text{Col } A = 2$ (aantal pivot cols)

$\dim \text{Nul } A = 3$ (5-2, aantal cols - dim Col A)

5) Ja, want: - De nulvector zit in H.

(P 229) - Elke optelling v. vectoren in H blijft in H.

- Elke scalair blijft in H.

6) a) Neen, want $f'(x)$ heeft niet dezelfde nulpunten

b) Ja, je kan scalair naar buiten brengen

7) $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Er is geen manier om van p_1 naar p_2 te gaan $\Rightarrow$ lin. onafhankelijk

8) Kern T = Nul T $= T(p) = 0$

$p = a + bx + cx^2$ (tot x^2 omdat $\mathbb{P}_2$)

$T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Nul T: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} a = 0 \\ b = x_2 \\ c = x_3 \end{array} \rightarrow b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nul $T = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$= \text{Span}\{x, x^2\}$

a) A: Neen, want t^3 kan niet in $\mathbb{P}_2$

B: Neen, $p_1(0) \neq 0$ $(=-1)$

C: Neen, p_1 en p_2 zijn lin. afh.

⑥

D: Neen, idem als B

E: Neen, $p_1(0) \neq 0$

F: Ja

G: Neen, $p_1(0) \neq 0$

H: Ja

b) dom $T = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$ met $a \in \mathbb{R}$

9) Neen, A heeft 4 rijen => col A in $\mathbb{R}^4$ (p 238)

Neen, Nul A in $\mathbb{R}^{10}$ (p 236)

10) a) waar, want det $I = 1$, dus $\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det(A.I) - \det(0)$

$= \det(A.1) = \det(A)$

b) waar, $\det \begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det(I.D) - \det(0.C) = \det(D)$

c) waar, $\det\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det A . \det D$ $(\det(AD) = \det A . \det B)$

d) waar, $\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det(AD) - \det(B0) = \det A \det D$

11) a) $X = CA^{-1}$, $Y = D - CA^{-1}B$

b) $\det \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} = \det(I) - \det(X.0)$

$= 1 - \det(0) = 1$

$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix} = \det(AY) = \det A . \det(D - CA^{-1}B$

$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = 1 . \det A . \det(D - CA^{-1}B)$

c) $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A . \det(D - CA^{-1}B)$

$= \det(AD - ACA^{-1}B)$

$= \det(AD - CAA^{-1}B)$

$= \det(AD - CB)$

12) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

$V(A) = \left|\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}\right| = \left| 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right| = |0 - 4 - 2(1 - 14)|$

$= |-4 + 26| = 22$

13) A niet inverteerbaar <=> kolommen lin afh. <=> hoekpunten op lijn of in O <=> V = 0

(7)

14) 1 zij . 2 => det . 2

n zijen . 2 => det . 2^n

$\det(2A) = \det(A) . 2^n$

15) a) $k = 2$ ($Ax = 0$ => x heeft 4 elementen)

b) $k = 4$

c) $v = [2\ -1\ -4\ 3]^T$ (elke col van A zit in Col A)

d) $Ax = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (2^e col is $-3 . 1^e$ col)

$v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

16) $13 \times 18 \rightarrow$ min. 5 vrije var.

$\left.\begin{array}{l} \text{Col } A \subseteq \mathbb{R}^{13} \\ \text{Nul } A \subseteq \mathbb{R}^{18} \end{array}\right\}$ rang $A \leq 13$ (min. 5 vrije var.)

=> dim Nul $A \geq 5$ => basis bestaat uit 5 vectoren

17) a) - rang $A = 3$ (pivot cols)

- dim Nul $A = 2$ (niet-pivot cols)

- dim Nul $A^T = 4 - 3 = 1$ (5×4 matrix, rang blijft hetzelfde)

(ook 1 nul zij in A)

b) basis Col A: $\{[1\ -2\ -3\ 3]^T, [4\ -6\ -6\ 4]^T, [9\ -10\ -3\ 0]^T\}$

basis Row A: $\{[1\ -3\ 0\ 5\ -7], [0\ 0\ 2\ -3\ 8], [0\ 0\ 0\ 0\ 5]\}$

Basis Nul A: $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Leftarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_4 - 7x_5 = 0 \\ 2x_3 - 3x_4 + 8x_5 = 0 \\ 5x_5 = 0 \quad \Rightarrow x_5 = 0 \end{cases}$

$x_1 = 3x_2 - 5x_4 + 7x_5 \Rightarrow x_1 = 3x_2 - 5x_4$

$x_3 = \frac{3}{2}x_4 - 4x_5 \Rightarrow x_3 = \frac{3}{2}x_4$

18) a) $T(p+q) = \begin{bmatrix} (p+q)(0) \\ (p+q)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0)+q(0) \\ p(1)+q(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q(0) \\ q(1) \end{bmatrix} = T(p) + T(q)$

(p245. 43) $T(cp) = \begin{bmatrix} cp(0) \\ cp(1) \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix} = c\,T(p)$

b) $T(p) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p = t^2 - t$

c) beeld $T = \mathbb{R}^2$ (is gegeven)

8

d) $T(ax^2+bx+c)=\begin{bmatrix} c \\ a+b+c \end{bmatrix}$

$T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=$

19) a) $T(A+B)=(A+B)+(A+B)^T$

$= A+B+A^T+B^T$

$=(A+A^T)+(B+B^T)=T(A)+T(B)$

$T(cA)=cA+cA^T$

$=c(A+A^T)=c(T(A))$

b) stel $T(A)=B \Rightarrow B^T=(A+A^T)^T=A^T+A^{T^T}=A^T+A=T(A)$

c) $T(A)=0$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow \begin{cases} 2a=0 \Rightarrow a=0 \\ b+c=0 \\ c+b=0 \\ 2d=0 \Rightarrow d=0 \end{cases}$

$\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ met $b\in\mathbb{R}$

d) $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix}$

matrix naar vector

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \xmapsto{T} \begin{bmatrix} 2a \\ b+c \\ c+b \\ 2d \end{bmatrix}$

$T=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

T moet 4×4 zijn omdat $T \cdot x^{4\times1}=y^{4\times1}$

Quiz me:

a) waar, elke pivot kolom zit in de Col.

b) niet waar, wel van de kolommen: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

z_1 en z_3 onafh. — z_1 en z_2 onafh.

c) waar als het door de oorsprong gaat

d) onwaar, dim = 5 : $\mathbb{P}_4=\{1,t,t^2,t^3,t^4\}$

e) onwaar, $\det(A+B)\neq\det A+\det B$

f) waar, $\dim V \leq n$

9

g) fout, $\mathbb{R}^2$ is niet eens een subset van $\mathbb{R}^3$, vectoren van lengte 2 v.s. lengte 3.

h) niet waar, dim Nul A = aantal vrije vars.

i) niet waar, aantal kolommen = dim Col A + dim Nul A

j) niet waar, Col $AB^T \subseteq$ Col A

k) waar

20) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -3 & 9 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 8 \\ -1 & 4 & -2 & -9 \\ -3 & 9 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 - 3c_2 + 2c_3 = 8 \Rightarrow c_1 = 8 - 3 - 6 = -1 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 3 \end{matrix}$

$[x]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

21) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 + c_2 + 2c_3 = 7 \Rightarrow c_1 = 7 - 6 + 4 = 5 \\ c_2 + 4c_3 = 8 \Rightarrow c_2 = 8 - 12 = -4 \\ c_3 = 3 \end{matrix}$

$[x]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

22) - Ja, Col $A^T = \mathbb{R}^{11}$ want A^T heeft 11 rijen
- Nee, Nul $A = \mathbb{R}^5 \Rightarrow$ 5 rijen

23) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}$

24) $\underset{B \leftarrow C}{P}$: $[b_1\ b_2 \,|\, c_1\ c_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 7 & -3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & -5 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 7 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 8 & -40 & 24 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 7 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right]$

(zie ex 3 p 276)

$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 7 & 0 & -14 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right]$

$\underset{B \leftarrow C}{P} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \quad \underset{C \leftarrow B}{P} = \underset{B \leftarrow C}{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

25) rang P = m

rijen v. PA = lin. comb. v.d. cols van P met rijen van A.

Hierdoor zal de rang van PA gelijk zijn aan de rang van A.

10

26) a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 + 4t + 2t^2$

b) $A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 + 4t$

c) $A(u) = 0 = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$

$x_3 = -3x_4 \Rightarrow$ kernel $= \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
$x_2 = -x_4$
$x_1 = x_4$

27) $A = 12 \times 8 \Rightarrow$ minstens 1 vrije var., max 2 vrije var

a) Ja, want er is minstens 1 vrije var

b) $6 = 8 - 2$

28) $\left. \begin{array}{l} x = 2y - z \\ y = y \\ z = z \end{array} \right\} \; y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

basis: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

29) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

(p 72) $\quad R \quad d$

b) - col $R = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow$ neen

- Row $R = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow$ neen

- Nul R : $R . v = \vec{0} \rightarrow$ Ja

30) rang $A = 3$ (pivot kolommen)

dim Nul $A = 3$ (niet-pivot kolommen)

col $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Row $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \\ 9 \\ -9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

(11)

$Nul\ A = [A\ 0] = x_4 = x_5 + 2x_6$

$x_2 = x_3 - 3x_4 - 4x_5 + 3x_6 = x_3 - 7x_5 - 3x_6$

$x_1 = -x_2 + 3x_3 - 7x_4 - 9x_5 + 9x_6$

$= 2x_3 - 7x_4 - 2x_5 + 12x_6$

$= 2x_3 - 9x_5 - 2x_6$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 - 9x_5 - 2x_6 \\ x_3 - 7x_5 - 3x_6 \\ x_3 \\ x_5 + 2x_6 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

$$Nul\ A = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -9 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Quiz me:

a) waar, als het een onafhankelijke set zou zijn niet.

b) niet-waar, dim Col = dim Row

c) waar, p239

d) niet-waar, lin. afh., pivots zijn lin. onafh.

e) onwaar

f) onwaar, rang A = aantal pivots

g) waar $\quad$ dim H = 0 => $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= 1 \Rightarrow [h_1\ h_1\ h_1]$

$= 2 \Rightarrow [h_1\ h_2\ h_2]$ h_1 en h_2 lin. onafh.

$= 3 \Rightarrow [h_1\ h_2\ h_3]$

h) waar

i) waar, p269

j) waar, A = inverteerbaar <=> n pivots

LA 3:

1) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1$ (diagonaal)

λ_1 : $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \text{vrij} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \quad \vec{x} = x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

λ_2 : $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = \text{vrij} \\ x_3 = 0 \end{array} \quad \vec{x} = x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

λ_3: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -5/3\, x_3 \\ x_3 = \text{vrij} \end{array} \quad \vec{x} = x_3\begin{bmatrix} 0 \\ -5/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

2) Stap 2: Basis voor $\lambda = 5$:

P316: $\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} x_1 = 2x_2 + x_3 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = \text{vrij} \end{array} \Rightarrow \vec{x} = x_3\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Basis voor $\lambda = 1$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} x_1 = -2x_2 + x_3 \\ x_2 = \text{vrij} \\ x_3 = \text{vrij} \end{array} \quad \vec{x} = x_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Heeft dus multiplicitei t 2!

Stap 3: $P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Stap 4: $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) $\lambda = 9 = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right]$ er moeten 2 vrije variabelen zijn, dit zullen x_1 en x_3 zijn. Om x_3 vrij te maken mag de 3e kolom geen pivot zijn. Dus $h = 8$

4) A is inverteerbaar <=> alle cols pivot

$\Rightarrow a \neq 0$

A is niet-diagonaliseerbaar <=> niet elke eigenwaarde is uniek

$\Rightarrow a = 1$

p 317

13

5) $A = PDP^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad A \sim B$

$= PRQP^{-1}$

$= QRQQ^{-1}$ ← dit mag omdat Q inverteerbaar is.

$= QR$

6) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

=> T moet 2x2 zijn

$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$

$(A - \lambda I)x = 0 \qquad \det\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ ← P 306

$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, -1$

Eigenvectors: $\lambda = 1: \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = -1: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

7) Stap 1: $\det\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

P 324

$(4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 12 + \lambda^2 - 3\lambda - 4\lambda - 2 = 0$

$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \qquad D = 49 - 40 = 9$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{7 \pm 3}{2} = 5, 2$

Stap 2:

$\lambda = 5: \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = x_2\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 2: \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(14)

8) $U_1 . U_2 = -1+0+1=0$
P 383 $U_1 . U_3 = 2+0-2=0$
$U_2 . U_3 = -2+4-2=0$

$\left.\right\} \{U_1, U_2, U_3\}$ = orthogonal

$x . U_1 = 5$ $\qquad x = \frac{5}{U_1 \cdot U_1} U_1 + \frac{-27}{U_2 \cdot U_2} U_2 + \frac{18}{U_3 \cdot U_3} U_3$

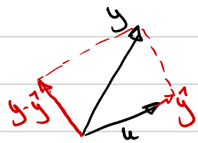
$x . U_2 = -27$

$x . U_3 = 18$ $\qquad = \frac{5}{2} U_1 - \frac{27}{18} U_2 + 2 U_3$

9) $\hat{y} = \frac{y \cdot U_1}{U_1 \cdot U_1} U_1 + \frac{y \cdot U_2}{U_2 \cdot U_2} U_2 = \frac{50}{41} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-1}{41} \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$
P393

10) $y \cdot U = 18-36 = -18$
P 384 $U \cdot U = 9+81 = 90$

$\hat{y} = \frac{-18}{90} \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 9/5 \end{bmatrix}$



$y - \hat{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3/5 \\ 9/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33/5 \\ 11/5 \end{bmatrix}$

$y = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 9/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 33/5 \\ 11/5 \end{bmatrix}$

11) a) $\det \begin{pmatrix} -5-\lambda & -1 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$(-5-\lambda)(-1-\lambda)+3=0 \Rightarrow 5+5\lambda+\lambda+\lambda^2+3=0$

$\lambda^2+6\lambda+8=0$

$D = 36-32 = 4 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = -2, -4$

$\lambda = -2: \left[\begin{array}{cc|c} -3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} -3x_1 = x_2 \\ x_2 = \text{vrij} \end{array}$ $\qquad \vec{x} = x_2 \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = -4: \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} x_1 = -x_2 \\ x_2 = \text{vrij} \end{array}$ $\qquad \vec{x} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

12) a) waar, want de som v.d. dims eigenruimtes = n

$\Rightarrow$ n onafh. eigenvectoren

b) onwaar, som dims eigenruimtes = 2 $\neq 3$

c) waar, A niet inv. $\Rightarrow$ 0 is eigenwaarde (P 308)

dim Nul A = 2 $\Rightarrow$ dim eigenruimte ($\lambda = 0$) = 2

1 pivot $\Rightarrow$ dim Col A = 1 $\Rightarrow$ dim Nul A = 3-1 = 2

en je hebt nog een eigenw $\rightarrow$ som dim eigenr = 3

13) A is niet inv. $\Rightarrow$ 0 = eigenw

$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = 6$

Som v. elke rij is gelijk $\Rightarrow$ som is eigenw.

14) $A = PDP^{-1}$

$A.A^{-1} = PDP^{-1}A^{-1}$

$I = PDP^{-1}A^{-1}$

$A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ $\leftarrow$ kijken of D^{-1} bestaat:

A is inv $\Rightarrow 0 \neq$ eigenw.

$\Rightarrow$ D niet-nul elem op elke diag

$\Rightarrow$ D n lin. onafh. cols.

$\Rightarrow$ D is inv.

15) $B = P^{-1}AP \Rightarrow A = PBP^{-1}$

$PBP^{-1}x = \lambda x$

$BP^{-1}x = \lambda P^{-1}x$

$\Rightarrow P^{-1}x$ is eigenv.

16

16) $A = PDP^{-1}$

$B = 5I + 3PDP^{-1} + PD^2P^{-1}$

$= P(5I + 3D + D^2)P^{-1}$ diag matrix

$= P\begin{bmatrix} 5+6+4 & 0 \\ 0 & 5+21+49 \end{bmatrix} P^{-1} = P\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 75 \end{bmatrix} P^{-1}$

$5 = 5I$
$21 = 7 \cdot 3$
$49 = 7^2$

$\Rightarrow \lambda = 15, 75$

17) Zou examenvraag kunnen zijn (+ wat is kern v. T)

$T: M_{2\times2} \to M_{2\times2} : T(A) = A\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

st. basis voor 2x2: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Transformeer

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Blokmatrix

$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(B - \lambda I) = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{matrix} \end{bmatrix}$

$= \det\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \cdot \det\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$

$= |\lambda^2 - 1|^2 = 0$

$\lambda = \pm 1$

$\lambda = 1: \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$, $x_2 = vrij$, $x_4 = vrij$ $\vec{x} = x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = -1: \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $x_1 = -x_2$, $x_3 = -x_4$, $x_2 = vrij$, $x_4 = vrij$ $\vec{x} = x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

eigenv. T ≠ eigenv B $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

18) $\hat{y} = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{y \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \frac{-1}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{28}{42} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10/3 \\ 2/3 \\ 8/3 \end{bmatrix}$

$y - \hat{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10/3 \\ 2/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/3 \\ 7/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$

$y = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 2/3 \\ 8/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7/3 \\ 7/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$

Quiz 1e:

a) Onwaar, x mag niet $\vec{0}$ zijn

b) Onwaar

c) Onwaar, enkel bij Δ-matrix

d) waar, $Ax = \lambda x$

$x = \lambda A^{-1} x \Rightarrow A^{-1} x = 1/\lambda \; x$, maar eigenv. blijven hetzelfde

e) Onwaar, $Ax = \lambda x$

$A^k x = \lambda^k x$

f) waar $\underbrace{(A - \lambda I)}_{\text{welbepaalde matrix}} x = 0$

g) waar, zie d en e

h) Onwaar, D moet diagonaalmatrix zijn

i) Onwaar, A moet n lin. onafh. eigenv. hebben

j) Onwaar

k) waar, $A = PDP^{-1}$

$B = QAQ^{-1} = QPDP^{-1}Q^{-1}$

$= QP\,D\,(PQ)^{-1}$

Beide D's zijn hetzelfde, want gelijkvormig => dezelfde eigenw.

l) waar, $A = PDP^{-1}$ rang A = rang BP^{-1}, want P is inv.

$=$ rang $P^{-T}B^{T}$

$=$ rang B^{T}

$=$ rang B

18

21) Bekijk w_2 als y en w_1 als u_1

$$\hat{y} = \frac{w_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = \frac{4}{8}\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$z = y - \hat{y} = \begin{bmatrix}6\\6\\-4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\5\\-5\end{bmatrix}$$

$$B = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\5\\-5\end{bmatrix}\right\}$$

22) Stap 1: $\det\left(\begin{bmatrix}4-\lambda & 1\\1 & 4-\lambda\end{bmatrix}\right) = 0$ $\quad (4-\lambda)(4-\lambda) - 1 = 0$

$$16 - 8\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0 \qquad D = 64 - 60 = 4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm 2}{2} = 5, 3$$

Stap 2: $\lambda = 5: \left[\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\end{array}\right] \sim \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$\lambda = 3: \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0\end{array}\right] \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

Stap 3: $P = \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$

Stap 4: $D = \begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$

controle: $AP = \begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & -3\\5 & 3\end{bmatrix}$

$PD = \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & -3\\5 & 3\end{bmatrix} \quad \Rightarrow$ OK

23) $v_1 = x_1 = [1\ -1\ -1\ 1\ 1]^T$

P 400

$$v_2 = x_2 - \text{proj}_{W_1} x_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\4\\-4\\2\end{bmatrix} - \frac{-5}{1}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\4\\-4\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5\\-5\\-5\\5\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\-4\\-1\\1\\7\end{bmatrix}$$

$$v_3 = x_3 - \text{proj}_{W_2} x_3 = x_3 - \left(\frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2\right)$$

$$= \begin{bmatrix}5\\-4\\-3\\7\\1\end{bmatrix} - \frac{20}{1}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{54}{116}\begin{bmatrix}7\\-4\\-1\\1\\7\end{bmatrix} =$$

P 403 Normaliseer: $u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$

$$u_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2 =$$

...

19

24) $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

P408

$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 15 \end{bmatrix}$

$A^T A x = A^T b \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 15 \end{bmatrix}$

$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 15 \end{bmatrix} = \Big[8$

25) $\hat{y} = \frac{y \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{y \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \frac{20}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{-52}{26} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \\ -10 \end{bmatrix}$

P395

$y - \hat{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ -13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\| y - \hat{y} \|^2 = 9 \cdot 4 = 36$

Afstand van y tot w is $\sqrt{36} = 6$

28) a) st. basis in $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{v_1 \cdot u}{u \cdot u} \vec{u} = \frac{2}{14} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{v_2 \cdot u}{u \cdot u} \vec{u} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ v_3 = \qquad = 3/14 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{array}\right\} P = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

b) Col P = $\left\{ \right.$ Alle vectoren die lin. comb. zijn v. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Row P = dus lijn door die vector

Nul P = vlak $\perp$ op $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 2x + y + 3z = 0$

c) basis col P = $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

basis Nul P = $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \vec{x} = x_2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

d) we hebben lin. onafh. cols => det P=0 → det(P-0I)=0

=> $\lambda = 0$, multipliciteit = 2, want dim Nul P = 2

$Eig_{\lambda=0} = Nul\,P = \left\{ \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

en $\lambda = 1$, want $P\vec{x} = \lambda \vec{x}$

en $P\vec{x}$ komt overeen met tranf. en vect. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(en zijn veelvouden)

$Eig_{\lambda=1} = Span\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

29) a) cols van A orthogonaal maken:

P 410 $\quad u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2 - \frac{a_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \dots = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\hat{b} = \frac{b \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{b \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \frac{6}{6} u_1 + \frac{-12}{36} u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{bmatrix} \qquad A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$

$\hat{x} = [A^T A \mid A^T \vec{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 42 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \end{array}\right]$ $\quad x_1 = 1 - x_2 = 1 + 1/3 = 4/3$

$x_2 = -2/6 = -1/3$

$\hat{x} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$

c) $\| Ax - b \| = \| \hat{b} - \vec{b} \| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{20}$

Examen: bereken vector dichtst bij andere vector

=> via kleinste kwadraten => $\hat{b} = A\hat{x}$

Quiz me:

a) Onwaar, enkel als de matrix vierkant is

b) waar, $\|A\vec{x}\|^2 = (Ax)^T Ax = x^T \underbrace{A^T A}_{I} x$ ← want A is orthogonaal

$= x^T x$

$= \|x\|^2$

(21)

c) Onwaar, waar als $n \times n$ matrix

proj $\vec{x}$ op col $U = U.U^T\vec{x}$

d) Onwaar, det A = product eigw.

Symm matrix <=> diagonaliseerbaar

det $A \neq 64$, want 4 heeft niet multiplicitiet 3, want

dim eigenruimte = 2

det $\in \mathbb{R} \setminus \{64\}$

e) waar, oef 29

f) waar, Theorem p 409

g) waar, bij symm matrices staan eigenv. bij verschillende eigenw $\perp$ op elkaar

h) waar, p 444

i) onwaar, Alleen als Symm matrix

j) onwaar, positief definiet <=> alle eigenw. positief