

**Politechnika Wrocławskiego**  
**Wydział Informatyki i Telekomunikacji**

---

Kierunek: **Inżynieria Systemów (INS)**

**PRACA DYPLOMOWA  
INŻYNIERSKA**

**Zastosowanie algorytmu ewolucyjnego w aplikacji  
webowej wspomagającej układanie planu lekcji**

Igor Kowalczyk

Opiekun pracy  
**Dr inż. Donat Orski**

Slowa kluczowe: 3-6 słów kluczowych

---

WROCŁAW (2025)



## **Streszczenie**

Bardzo fajny algorytm w bardzo fajnej aplikacji

## **Abstract**

Very nice algorytm w bardzo nice aplikacji



# Spis treści

<b>1 Wstęp</b>	<b>1</b>
1.1 Cel i zakres pracy . . . . .	1
1.2 Aspekt systemowy . . . . .	2
1.3 Układ pracy . . . . .	2
<b>2 Powiązane prace</b>	<b>3</b>
2.1 Inspiracja podejściem iteracyjnym . . . . .	3
2.1.1 Definicja problemu harmonogramowania . . . . .	3
2.2 Job-Shop Scheduling Problem . . . . .	5
2.2.1 Podobieństwa do problemu układania planu lekcji . . . . .	6
2.2.2 Różnice i specyfika problemu szkolnego . . . . .	7
2.3 Istniejące kompleksowe rozwiązania . . . . .	8
2.3.1 Plan lekcji Optivum . . . . .	8
<b>3 Problem układania planu lekcji i algorytm jego rozwiązania</b>	<b>13</b>
3.1 Sformułowanie problemu optymalizacyjnego . . . . .	13
3.1.1 Dane i szukane . . . . .	14
3.1.2 Ograniczenia . . . . .	17
3.2 Poprzednie podejścia . . . . .	19
3.2.1 Programowanie mieszanocalkowitoliczbowe . . . . .	19
3.2.2 Grafowe sieci neuronowe . . . . .	21
3.2.3 JSSP . . . . .	22
3.3 Dekompozycja problemu i wybór technik . . . . .	23
3.3.1 Dobór technik algorytmicznych . . . . .	24
3.4 Algorytm zachłanny . . . . .	24
3.4.1 Bloki lekcyjne . . . . .	25
3.4.2 Działanie . . . . .	26
3.4.3 Rezultaty . . . . .	28
3.5 Algorytm ewolucyjny . . . . .	29
3.5.1 Cel algorytmu . . . . .	31
3.5.2 Kodowanie i ograniczenia twardé . . . . .	31
3.5.3 Generowanie populacji początkowej . . . . .	32
3.5.4 Przystosowanie . . . . .	33
3.5.5 Selekcja . . . . .	36
3.5.6 Krzyżowanie . . . . .	36
3.5.7 Mutacja . . . . .	37

3.5.8	Przykładowe rezultaty . . . . .	38
3.6	Solver programowania liniowego z ograniczeniami . . . . .	38
3.6.1	Reprezentacja interwałów . . . . .	39
3.6.2	Zmienne decyzyjne . . . . .	39
3.6.3	Ograniczenia . . . . .	40
3.6.4	Funkcja celu . . . . .	41
3.6.5	Transformacja interwałów na przypisania końcowe . . . . .	41
3.6.6	Przykładowe wyniki . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Aplikacja</b>	<b>43</b>
4.1	Specyfikacja wymagań . . . . .	43
4.1.1	Wymagania funkcjonalne . . . . .	43
4.1.2	Wymagania niefunkcjonalne . . . . .	43
4.1.3	Przypadki użycia . . . . .	45
4.1.4	Diagramy sekwencji . . . . .	52
4.2	Projekt . . . . .	53
4.2.1	Architektura systemu . . . . .	53
4.2.2	Projekt struktury bazy danych . . . . .	54
4.2.3	Projekt interfejsu . . . . .	60
4.3	Implementacja . . . . .	61
4.3.1	Wybór narzędzi . . . . .	61
4.3.2	Implementacja bazy danych w Django . . . . .	62
4.3.3	Implementacja API . . . . .	63
4.3.4	Implementacja interfejsu webowego . . . . .	64
4.3.5	Integracja z algorytmem . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Testowanie i ewaluacja rozwiązania</b>	<b>73</b>
5.1	Scenariusze testowe . . . . .	73
5.1.1	Scenariusz testowy generowania planu lekcji z określonymi parametrami	73
5.1.2	Scenariusz przeglądu planów lekcji . . . . .	73
5.1.3	Scenariusz importowania i edytowania wymagań głównych . . . . .	73
5.1.4	Scenariusz edytowania dostępności nauczycieli . . . . .	75
5.2	Testowanie aplikacji . . . . .	75
5.2.1	Funkcjonalność 1 . . . . .	75
5.2.2	Funkcjonalność 2 . . . . .	75
5.3	Wyniki i analiza skuteczności . . . . .	75
5.3.1	Statystyki planu . . . . .	75
5.3.2	Porównanie z ręcznie ułożonym planem . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Wnioski i perspektywy rozwoju</b>	<b>77</b>
6.1	Problemy rozwiązania . . . . .	77
6.2	Perspektywy rozwoju . . . . .	77
6.3	Wnioski . . . . .	78

# 1. Wstęp

Jednym z corocznych wyzwań placówek oświatowych jest ułożenie dobrego planu lekcji. Pomimo postępu technologicznego, proces ten nadal sprawia istotne trudności nawet najlepiej zorganizowanym szkołom. Problem można podzielić na dwa zasadnicze etapy:

- 1. Przydział godzinowy nauczycieli do każdej klasy.** Przydział nauczycieli do klas jest zadaniem, które wykonuje się przed rekrutacją. W praktyce oznacza to rozpoczęcie pracy nad planem bez informacji o dokładnej liczbie uczniów. Dostępne są jedynie prognozy które pozwalają na określenie liczby klas, co zapewnia to ciągłość nauczania jednego nauczyciela z roku na rok dla danej klasy.
- 2. Przypisania godzin rozpoczęcia i zakończenia lekcji oraz sal, w których będą się odbywać.** Mając już информацию o liczbie godzin lekcyjnych, które każda klasa musi odbyć z każdym nauczycielem, możemy przejść do tworzenia właściwego planu. Głównym ograniczeniem jest stworzony w etapie pierwszym przydział godzin. Proces ten, wykonywany ręcznie, może zajmować dziesiątki godzin pracy, co często skutkuje chaosem organizacyjnym w pierwszych tygodniach roku szkolnego.

Drugi etap stanowi klasyczny problem harmonogramowania z ograniczeniami twardymi i miękkimi. W niniejszej pracy zaproponowałem podejście łączące algorytm ewolucyjny, inspirowany mechanizmami biologicznej ewolucji (mutacja, krzyżowanie, selekcja), z technikami programowania ograniczeń. Takie połączenie umożliwia osiągnięcie wysokiej jakości rozwiązań przy akceptowalnym czasie obliczeń, oferując praktyczny kompromis między optymalnością a wydajnością.

## 1.1. Cel i zakres pracy

Głównym celem pracy jest opracowanie i implementacja aplikacji webowej wspomagającej automatyczne układanie planu lekcji z wykorzystaniem algorytmu ewolucyjnego. Aplikacja ma umożliwiać generowanie planów uwzględniających:

- Ograniczenia fizyczne (dostępność sal, unikanie kolizji zajęć)
- Ograniczenia jakościowe (ciągłość zajęć, brak okienek)
- Ograniczenia specyficzne definiowane przez użytkownika (bloki lekcyjne)

Algorytm ma minimalizować liczbę okienek w planach nauczycieli, redukując tym samym czas ich przebywania w szkole.

Dla osiągnięcia postawionego celu konieczne jest wykonanie następujących zadań:

- Zaprojektowanie i implementacja bazy danych do przechowywania ograniczeń, specyfikacji bloków lekcyjnych oraz wyników generowania planów.
- Zaprojektowanie i wykonanie interfejsu użytkownika umożliwiającego definiowanie wszystkich niezbędnych ograniczeń oraz wizualizację końcowych planów lekcji.
- Opracowanie algorytmu do układania planu lekcji wykorzystującego:
  - Algorytm zachłanny do tworzenia struktury bloków lekcyjnych.
  - Algorytm ewolucyjny do optymalizacji rozkładu godzinowego.
  - Solver dla zadań programowania z ograniczeniami do szczegółowego harmonogramowania.
- Integracja aplikacji webowej z algorytmem.

## 1.2. Aspekt systemowy

W pracy zastosowano podejście systemowe, ponieważ stworzenie aplikacji do generowania planu lekcji wymaga spojrzenia wykraczającego poza sam algorytm optymalizacyjny. Takie podejście obejmuje analizę wymagań, ich formalizację, projekt i implementację rozwiązania oraz końcową walidację, co pozwala traktować aplikację jako kompletny system informatyczny, a nie jedynie algorytm.

Zróżnicowanie uwarunkowań istotnie wpływa na projekt systemu. Należy uwzględnić zarówno wymagania prawne, fizyczne ograniczenia szkoły (dostępność sal i nauczycieli), jak i kwestie związane z komfortem uczniów, takie jak równomierne rozłożenie obciążen. Wszystkie te czynniki muszą być odzwierciedlone w modelu danych oraz w module optymalizacyjnym.

Istotny jest również aspekt użytkowy: system musi być praktyczny i intuicyjny w obsłudze. Dlatego projekt obejmuje także ergonomię interfejsu oraz sposób prezentacji danych.

Podejście systemowe jest konieczne, aby stworzyć spójne, skalowalne i odpowiadające rzeczywistym potrzebom szkoły narzędzie.

## 1.3. Układ pracy

Zarysuj strukturę swojej pracy dyplomowej. Ogólnie przedstawienie pracy. Przykładowo: „Praca dzieli się na 7 rozdziałów (...). Rozdział ?? dotyczy (...). Temat został rozwinieto w ??.

## 2. Powiązane prace

Struktura rozdziału?

### 2.1. Inspiracja podejściem iteracyjnym

Praca „A mixed-integer programming approach for solving university course timetabling problems” [16] przedstawia innowacyjne podejście do rozwiązywania problemów harmonogramowania poprzez dekompozycję na prostsze podproblemy i iteracyjne dodawanie ograniczeń. Autorzy wykorzystują strategię polegającą na:

1. Uzyskaniu rozwiązania początkowego z podstawowym zestawem ograniczeń.
2. Iteracyjnym „wstrzykiwaniu” kolejnych ograniczeń z wykorzystaniem zmiennych sztucznych.
3. Stosowaniu heurystyk redukcji zmiennych dla kontroli złożoności obliczeniowej.

#### 2.1.1. Definicja problemu harmonogramowania

W przedstawionym podejściu problem harmonogramowania zajęć uniwersyteckich definiowany jest jako zadanie przydzielenia zajęć do dostępnych sal i terminów oraz przypisania studentów do odpowiednich grup zajęciowych, z uwzględnieniem złożonych ograniczeń i preferencji. Głównymi komponentami problemu są:

- **Zajęcia:** Reprezentują pojedyncze wydarzenia dydaktyczne, które muszą zostać zaplanowane. Każde zajęcie  $c$  musi otrzymać unikalne przypisanie czasowe  $t$  z listy dopuszczalnych terminów  $T_c$  oraz, w wymaganych przypadkach, przypisanie sali  $r$  z listy dostępnych pomieszczeń  $R_c$ .
- **Ograniczenia dystrybucyjne:** Stanowią zbiór reguł określających relacje pomiędzy różnymi zajęciami. Wyróżnia się ograniczenia twarde, które muszą być bezwzględnie spełnione, oraz miękkie, których naruszenie generuje kary w funkcji celu. Przykłady obejmują wymóg rozpoczęzania zajęć w tym samym czasie, zakaz nakładania się terminów czy wymóg zachowania minimalnego odstępu czasowego.
- **Struktura kursów i konfiguracji:** Każdy kurs posiada hierarchiczną strukturę, w ramach której student musi wybrać jedną konfigurację  $f$ , a następnie po jednym zajęciu z każdej części składowej  $P_f$  danej konfiguracji.
- **Konflikty studentów:** Powstają gdy student jest przypisany do zajęć zachodzących na siebie w czasie lub gdy czas pomiędzy zajęciami jest niewystarczający na przemieszczenie się między salami.

Celem optymalizacyjnym jest znalezienie rozwiązania spełniającego wszystkie twarde ograniczenia przy minimalizacji łącznej kary, uwzględniającej naruszenia ograniczeń miękkich oraz konflikty studentów.

Kluczowym elementem przedstawionej metody jest dekompozycja oryginalnego, złożonego problemu na szereg prostszych podproblemów, rozwiązywanych sekwencyjnie w procesie iteracyjnym.

### Podstawowy model MIP

Podstawę stanowi sformułowanie problemu mieszanocalkowitoliczbowego (MIP) z czterema typami zmiennych decyzyjnych:

- Zmienne  $x_{c,t}$  określają czy zajęcia  $c$  są przypisane do terminu  $t$ .
- Zmienne  $y_{c,r}$  określają czy zajęcia  $c$  są przypisane do sali  $r$ .
- Zmienne  $z_{s,c}$  określają czy student  $s$  jest przypisany do zajęć  $c$ .
- Zmienne  $Z_{s,f}$  określają czy student  $s$  wybiera konfigurację  $f$ .

Model obejmuje fundamentalne ograniczenia zapewniające poprawność podstawowej struktury rozwiązania, takie jak wymóg przypisania każdych zajęć do dokładnie jednego terminu i sali, spełnienie limitów liczby studentów w grupach oraz zakaz równoczesnego użytkowania tej samej sali przez różne zajęcia.

### Iteracyjne wstrzykiwanie ograniczeń

Ze względu na bardzo dużą złożoność pełnego modelu, autorzy stosują podejście inkrementalne:

1. **Rozwiążanie początkowe:** Optymalizacja rozpoczyna się od uproszczonego modelu zawierającego jedynie fundamentalne ograniczenia oraz podstawowe składniki funkcji celu.
2. **Dodawanie ograniczeń dystrybucyjnych:** Twarde ograniczenia dystrybucyjne są dodawane do modelu w formie ograniczeń wykluczających niedopuszczalne kombinacje przypisań czasowych i salowych. Dla większości typów ograniczeń generowane są odpowiednie warunki na etapie preprocessingu.
3. **Obsługa ograniczeń specjalnych:** Dla czterech szczególnie złożonych typów ograniczeń („MaxDays”, „MaxDayLoad”, „MaxBreaks”, „MaxBlock”) stosowane jest podejście z użyciem „leniwych” ograniczeń (ang. *lazy constraints*). Ograniczenia te są dodawane dopiero gdy zostanie znalezione rozwiązanie całkowitoliczbowe, które je narusza.
4. **Iteracyjne uwzględnianie konfliktów studentów:** Podobne podejście stosowane jest dla uwzględnienia w funkcji celu kar za konflikty studentów. Początkowo pomija się najbardziej złożone składowe związane z konfliktami, a następnie iteracyjnie dodaje się do modelu te ograniczenia, które okazały się istotne w poprzednich uruchomieniach.

### Strategie redukcji złożoności

Aby utrzymać złożoność obliczeniową na akceptowalnym poziomie, autorzy stosują zaawansowane strategie redukcji modelu:

- **Eliminacja zmiennych:** Identyfikacja i usuwanie zmiennych, których wartości można ustalić z góry na podstawie analizy struktury problemu.
- **Agregacja ograniczeń:** Grupowanie podobnych ograniczeń w pojedyncze, bardziej zwarte warunki, co znacząco redukuje rozmiar modelu.
- **Selektywne uwzględnianie składowych funkcji celu:** Najbardziej złożone składowe funkcji celu (dotyczące specjalnych ograniczeń dystrybucyjnych i konfliktów studentów) są początkowo pomijane, a następnie dodawane tylko w odniesieniu do tych kombinacji, które okazały się problematyczne w poprzednich iteracjach.

Podejście to pozwala na stopniowe poprawianie jakości rozwiązania przy kontrolowanym wzroście złożoności obliczeniowej, zachowując wykonalność rozwiązania na każdym etapie procesu optymalizacji.

## 2.2. Job-Shop Scheduling Problem

Problem harmonogramowania typu *Job-Shop* (JSSP) jest jednym z najbardziej klasycznych i istotnych problemów optymalizacji kombinatorycznej w badaniach operacyjnych i zarządzaniu produkcją. Ze względu na bardzo szerokie zastosowania inżynierskie był intensywnie studiowany przez wielu autorów. Klasyczny wariant można opisać następująco [19].

Posiadamy zbiór maszyn:

$$M = \{M_1, M_2, \dots, M_m\}$$

oraz zbiór zadań (prac):

$$J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$$

Każde zadanie (job)  $J_i$  składa się z liniowo uporządkowanej sekwencji operacji:

$$O_i = \{O_{i1}, O_{i2}, \dots, O_{in_i}\}$$

które muszą zostać wykonane w ściśle określonej kolejności:

$$O_{i1} \prec O_{i2} \prec \dots \prec O_{in_i}$$

Każda operacja  $O_{ij}$  jest przypisana do dokładnie jednej maszyny oraz posiada znany czas przetwarzania:

$$p_{ij} \in \mathbb{N}^+$$

Celem jest wyznaczenie kolejności (uszeregowania) i czasów rozpoczęcia wszystkich operacji na maszynach tak, aby zminimalizować maksymalny czas zakończenia dowolnego zadania (ang. *makespan*):

$$C_{\max} = \max_i C_i$$

gdzie

$$C_i = S_{in_i} + p_{in_i}$$

a  $S_{ij}$  oznacza czas rozpoczęcia operacji  $O_{ij}$ .

Zmienne decyzyjne:

$$S_{ij} \in \mathbb{N}_0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall j = 1, \dots, n_i$$

Ograniczenia kolejnościowe:

$$S_{i,j+1} \geq S_{ij} + p_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n_i - 1$$

Dla każdej pary różnych operacji  $(O_{ij}, O_{kl})$  przypisanych do tej samej maszyny zachodzi jedno z dwóch:

$$S_{ij} + p_{ij} \leq S_{kl} \quad \vee \quad S_{kl} + p_{kl} \leq S_{ij} \quad (2.1)$$

Funkcja celu:

$$F_c = \min C_{\max} \quad \text{przy} \quad C_{\max} \geq S_{in_i} + p_{in_i} \quad \forall i$$

### 2.2.1. Podobieństwa do problemu układania planu lekcji

Problem harmonogramowania dla szkół można rozpatrywać jako specyficzną odmianę JSSP z wieloma zasobami. Podstawowe podobieństwa strukturalne obejmują:

#### Struktura zasobów

W JSSP mamy zbiór maszyn  $M$ , natomiast w problemie planu lekcji dysponujemy trzema typami zasobów:

$$\{\mathcal{T}, \mathcal{C}, \mathcal{R}\}$$

gdzie:

- $\mathcal{T}$  — zbiór nauczycieli (maszyny typu „nauczyciel”)
- $\mathcal{C}$  — zbiór klas (maszyny typu „klasa”)
- $\mathcal{R}$  — zbiór sal (maszyny typu „sala”)

#### Struktura zadań

W klasycznym JSSP zadania  $J_i$  składają się z operacji  $O_{ij}$  i wymagają dostępu do jednego zasobu — maszyn. W problemie układania planu zajęć lekcje można traktować jako operacje wymagającą jednoczesnego dostępu do trzech zasobów: nauczyciela, klasy i sali.

$$\text{Lekcja } z_i = (d_i, h_i, c_i, t_i, s_i, r_i)$$

gdzie  $d_i$  to dzień lekcji,  $h_i$  to stot czasowy lekcji,  $c_i$  to klasa,  $t_i$  to nauczyciel,  $s_i$  to przedmiot, a  $r_i$  to sala.

## Ograniczenia nakładania się

Dla każdej pary lekcji  $(z_i, z_j)$  współdzielącej zasób  $\mathcal{R}$ :

$$h_i \neq h_j \vee d_i \neq d_j \vee r_i \neq r_j$$

co odpowiada warunkowi 2.2 w JSSP.

Analogiczne ograniczenia należałyby definiować dla pozostałych zasobów  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{C}$ .

## Reprezentacja interwałowa

Kluczowym podobieństwem jest wykorzystanie zmiennych interwałowych. W JSSP operację  $O_{ij}$  reprezentujemy jako interwał:

$$I_{ij} = (S_{ij}, p_{ij}, C_{ij})$$

gdzie  $C_{ij} = S_{ij} + p_{ij}$ .

W problemie planu lekcji, lekcję  $z_i$  reprezentujemy jako:

$$I_i = (h_i, v_i, h_i + v_i)$$

gdzie  $v_i$  to liczba godzin (czas trwania), a  $h_i$  to slot rozpoczęcia.

### 2.2.2. Różnice i specyfika problemu szkolnego

Pomimo strukturalnych podobieństw, problem układania planu lekcji wprowadza istotne modyfikacje:

#### Wielozasobowość

Podczas gdy w klasycznym JSSP każda operacja wymaga jednej maszyny, lekcja wymaga **jednoczesnego** dostępu do trzech zasobów:

Lekcja  $z_i$  wymaga:  $(t_i, c_i, r_i) \in \mathcal{T} \times \mathcal{C} \times \mathcal{R}$

#### Ograniczenia

Problem szkolny wprowadza bogaty zestaw ograniczeń jakościowych niewystępujących w klasycznym JSSP:

- Brak okienek dla uczniów (ciągłość zajęć).
- Równomierny rozkład zajęć na przestrzeni tygodnia.
- Ograniczenia prawne (max 2 godziny tego samego przedmiotu dziennie).
- Dostępność nauczycieli.

Innowacją w podejściu jest wprowadzenie bloków lekcyjnych  $\mathcal{L}$ , które grupują lekcje  $z_i$  odbywające się równocześnie, co stanowi rozszerzenie klasycznej koncepcji operacji w JSSP. Umożliwia to znacznie łatwiejsze definiowanie ograniczeń.

## 2.3. Istniejące kompleksowe rozwiązania

Zadanie układania planu lekcji jest powszechnym wyzwaniem dla placówek edukacyjnych na całym świecie, w tym Polsce, co zaowocowało rozwojem komercyjnych rozwiązań tego problemu. Na polskim rynku dominuje kilka systemów, wśród których szczególną pozycję zajmuje firma Vulcan, oferująca zintegrowany system zarządzania oświatą. Obok niej funkcjonują takie rozwiązania jak Dobry Plan, czy Librus.

### 2.3.1. Plan lekcji Optivum

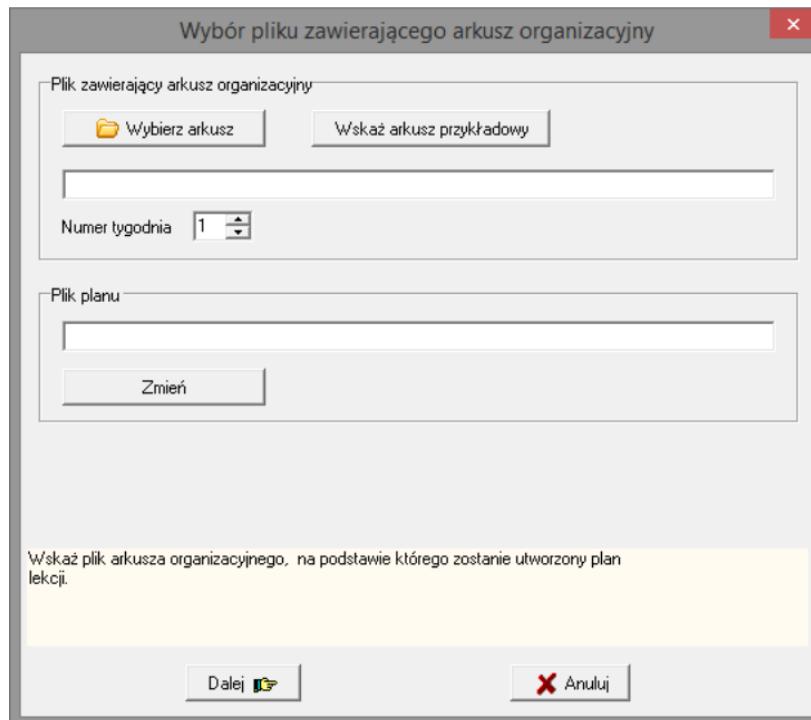
Vulcan, jako jeden z najstarszych na rynku dostawców, opracował kompleksowe rozwiązanie obejmujące nie tylko układanie planu lekcji, ale także dziennik elektroniczny, sekretariat i inne moduły zarządzania szkołą. Jego popularność w polskich szkołach wynika z lat doświadczenia w dostosowywaniu systemu do specyficznych wymagań polskiego systemu edukacji.

Aplikacja „Plan lekcji Optivum” firmy Vulcan to zaawansowane narzędzie wspomagające proces tworzenia szkolnego planu zajęć. Jego główną zaletą jest elastyczność w definiowaniu skomplikowanych ograniczeń, w tym szczegółowe zarządzanie podziałami uczniów na grupy.

Proces rozpoczyna się od zainportowania danych z arkusza organizacyjnego, a kończy na publikacji gotowego planu [18].

Podstawą do tworzenia planu są dane zainportowane z arkusza organizacyjnego. Kluczowym wymaganiem, które zostało mi przedstawione przez liceum, które zaopatrzyczyło mnie w dane do tej pracy jest możliwość importowania podobnych plików w aplikacji. W ten sposób pozbywamy się żmudnego procesu ręcznego wprowadzania ograniczeń.

W kolejnym etapie użytkownik definuje zasoby lokalne zaczynając od sal oraz preferencji. Dla zajęć grupowych kluczowe jest poprawne zdefiniowanie sal. Jeśli kilka grup ma korzystać z jednego dużego pomieszczenia (sala gimnastyczna, pracownia), należy je podzielić na części (przykładowo: salagim1, salagim2) i traktować jako odrębne sale. Dla zajęć poza szkołą (basen) wykorzystuje się tzw. „salę pozorną”.



Rysunek 2.1: Zrzut ekranu importowania arkusza organizacyjnego do programu „Plan lekcji Optivum” [18]

Rysunek 2.2: Zrzut ekranu wprowadzania sal do programu „Plan lekcji Optivum” [18]

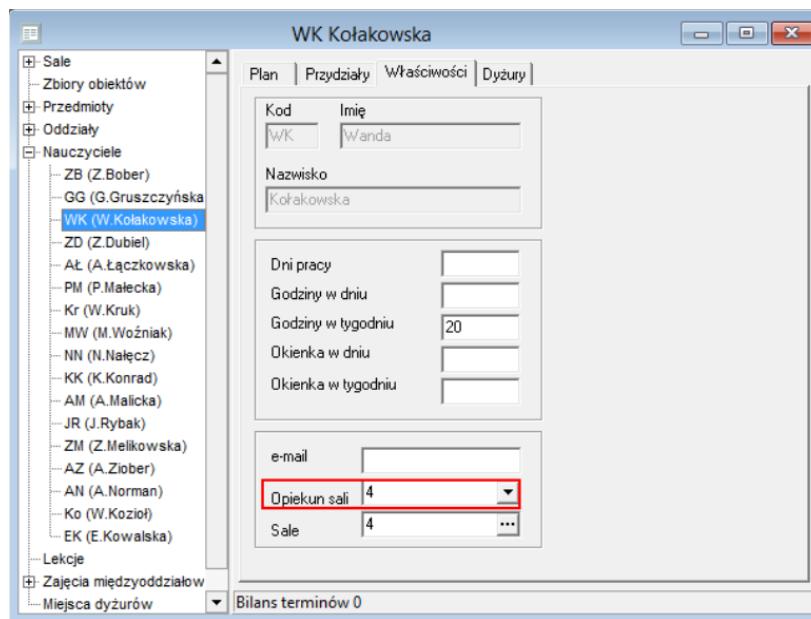
Po wprowadzeniu sal oraz ich preferencji użytkownik jest poproszony o wprowadzenie ewentualnych podziałów na bloki. Decyzja o rozkładzie godzin w tygodniu ma bezpośredni wpływ na grupy. Dla przydziału 4-godzinnego WF-u, podział na bloki 2,1,1 oznacza, że jedna z lekcji (przykładowo dla dziewcząt) będzie dwugodzinnym blokiem, a pozostałe pojedynczymi.

W kolejnym etapie wprowadzane są terminy odbycia zajęć w poszczególnych klasach. Program na bieżąco wylicza „Bilans gwiazdek” — różnicę między liczbą gwiazdek a minimalną liczbą potrzebną do ułożenia planu. Dla oddziałów z podziałami na grupy, prawidłowe rozmieszczenie gwiazdek jest kluczowe, aby uniknąć okienek lub niemożności ułożenia planu.

Następnie definiuje się dostępność nauczycieli. Wybrane terminy nauczyciela można



Rysunek 2.3: Zrzut ekranu wprowadzania preferencji sal względem przedmiotów do programu „Plan lekcji Optivum” [18]



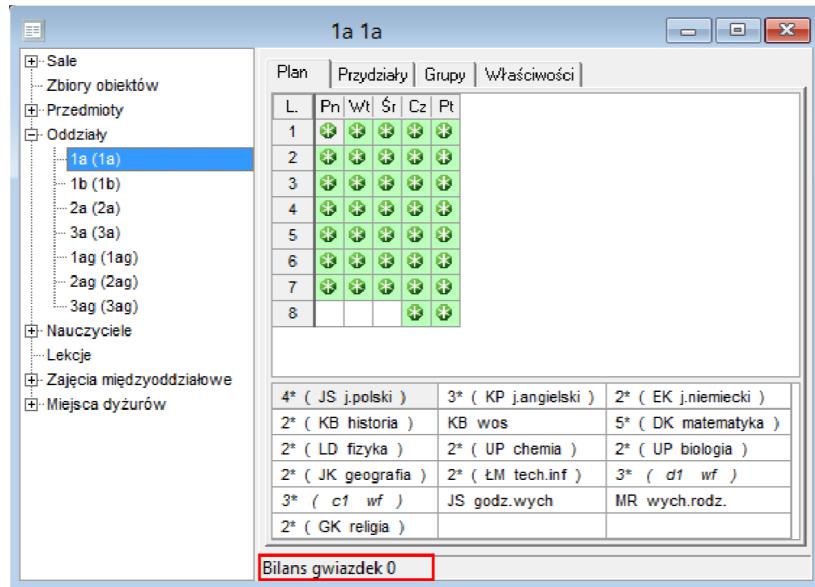
Rysunek 2.4: Zrzut ekranu wprowadzania preferencji sal względem nauczycieli do programu „Plan lekcji Optivum” [18]

j.polski Język polski								
			Przydziel   Warunki układania   Właściwości					
Nauczyciel	Oddział	Grupa	Godziny	Blok	Sale	Blokada sal	Wybierz	Wyłącz
GG	1A	5	2	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
GG	f1	f1	3	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
WK	1B		5	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
GG	2A	5	2	3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
GG	3A	4	2	3, hum.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
GG	2B	5	2	4, hum.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
WK	3B	4	2	4, hum.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
WK	2C	5	2	4, hum.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
GG	3C	4	2	3, hum.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

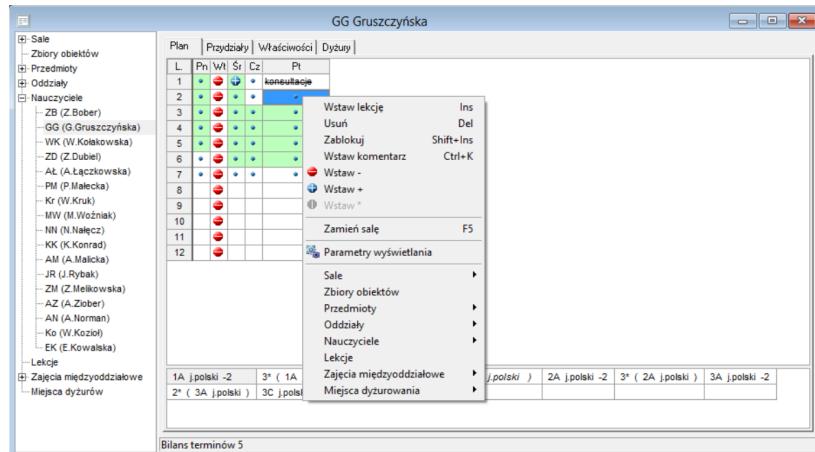
Rysunek 2.5: Zrzut ekranu wprowadzania bloków przedmiotów do programu „Plan lekcji Optivum” [18]

zablokować lub wskazać jako szczególnie pożąданie poprzez odpowiednio symbole  $\ominus$  oraz  $\oplus$ .

Przed automatycznym ułożeniem całego planu, zaleca się ręczne lub automatyczne umieszczenie lekcji uznanych za najtrudniejsze, do których należą zajęcia dzielone na grupy i



Rysunek 2.6: Zrzut ekranu wprowadzania terminów zajęć dla poszczególnych klas do programu „Plan lekcji Optivum” [18]



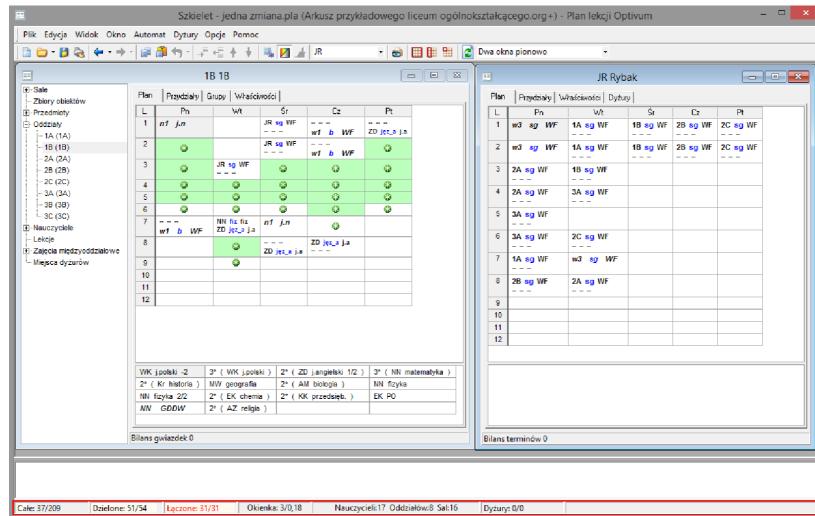
Rysunek 2.7: Zrzut ekranu wprowadzania dostępności nauczycieli do programu „Plan lekcji Optivum” [18]

międzyoddziałowe.

Po ułożeniu „trudnych” lekcji uruchamia się automat dla całego planu. Jeśli automat nie poradzi sobie z ułożeniem wszystkich lekcji (przykładowo z powodu zbyt restrykcyjnych warunków dla grup), należy analizować nieułożone lekcje i łagodzić parametry. Czasami pomaga kilkakrotne wykonanie minimalizacji okienek i układania całego planu.

Narzędzie „Plan lekcji Optivum” jest bardzo obszernym narzędziem oferującym wiele możliwości. Bierze pod uwagę praktycznie każdy możliwy scenariusz, który może wystąpić w polskiej szkole, co jest rezultatem wieloletniej obecności na rynku oraz doświadczenia deweloperów.

Aplikacja znakomicie ilustruje cenę uniwersalności, która jest konieczność stworzenia



Rysunek 2.8: Zrzut ekranu wprowadzania „trudnych” lekcji do programu „Plan lekcji Optivum” [18]

rozbudowanej aplikacji wymagającej od użytkowników definiowania wielu ograniczeń, nawet tych rzadko spotykanych w przeciętnej szkole. Kolejnym kosztem takiego podejścia jest konieczność specjalistycznych szkoleń — Vulcan oferuje kosztowne szesnastogodzinne szkolenia online poświęcone wyłącznie obsłudze aplikacji do układania planu lekcji.

Podsumowując, „Plan lekcji Optivum” to doskonałe narzędzie dla dużych placówek, które potrzebują sprawdzonego i kompleksowego rozwiązania. Niemniej jednak dla małych i średnich szkół, które nie dysponują odpowiednimi funduszami ani czasem na usługę tak rozbudowanego systemu, może okazać się zbyt skomplikowane i kosztowne.

# 3. Problem układania planu lekcji i algorytm jego rozwiązania

Opis struktury rozdziału.

## 3.1. Sformułowanie problemu optymalizacyjnego

Na potrzeby pracy warto ujednolicić terminologię, z uwagi na to, że w języku potocznym niektóre z tych terminów są używane zamiennie:

- **Klasa:** Grupa uczniów; przykładowo „IIA”, „IVC”, … Ze względu na angielską nazwę *class*, która koliduje ze składnią języków programowania, w kodzie często odnoszę się do klas jako `student_group`.
- **Sala:** Miejsce, w którym prowadzone są zajęcia; przykładowo „Sala Gimnastyczna 1”, „2”, …
- **Przedmiot:** Temat zajęć prowadzonych przez nauczyciela; przykładowo „Wychowanie Fizyczne”, „Matematyka”, …
- **Lekcja:** Zajęcia prowadzone przez jednego nauczyciela, w jednej sali, z jedną lub więcej klas, które są na temat jednego przedmiotu.
- **Slot czasowy:** Czas w którym odbywa się lekcja; przykładowo slot zerowy może odbywać się od 7:00 do 7:45.
- **Blok lekcyjny:** Grupa dwóch lub więcej lekcji, które odbywają się w tym samym slocie czasowym. Mogą one dotyczyć jednej klasy oraz wielu nauczycieli, jednego nauczyciela i wielu klas, lub też wielu klas i wielu nauczycieli.
- **Okienko:** Przerwa między dwoma lekcjami klasy lub nauczyciela. Występuje gdy zajęcia nie są przeprowadzane bezpośrednio po sobie.

Problem optymalizacyjny w tej pracy polega na przypisaniu lekcji do odpowiednich slotów czasowych i sal przy jednoczesnym spełnieniu wymagań. W rzeczywistości sformułowanie takiego zadania i wyznaczenie jego rozwiązania stanowi duże wyzwanie. Istnieją ograniczenia, które są różne dla każdej klasy, co utrudnia formułowanie problemu — wiele lekcji jest realizowanych w blokach, które są definiowane każdy z osobna. Przez te wyjątki nie jest możliwym wykorzystanie prostych algorytmów. Nie jest także możliwym rozwiązanie jednego wielkiego problemu programowania całkowitoliczbowego w sensownym czasie przy użyciu komputera z przeciętną specyfikacją.

### 3.1.1. Dane i szukane

#### Słownik podstawowych oznaczeń

- $\mathcal{C}$  — zbiór klas
- $\mathcal{T}$  — zbiór nauczycieli
- $\mathcal{S}$  — zbiór przedmiotów
- $\mathcal{R}$  — zbiór sal
- $\vec{R}_i$  — zbiór przedmiotów obsługiwanych przez  $i$ -tą salę
- $H$  — liczba slotów czasowych w dniu

#### Wymagania główne

Warto zacząć od przedstawienia sposobu reprezentacji zmiennych zaczynając od wymagań głównych. Ilość godzin tygodniowo odbytych przez klasę z danym nauczycielem w ramach danego przedmiotu jest z góry ustalona. Aby łatwiej zrozumieć na czym polegają takie przypisania warto spojrzeć na dotychczasowy sposób przypisywania ilości godzin nauczycieli do klas w liceum, które dostarczyło dane na potrzeby tej pracy.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	BA	
1	Projekt 2025/2026	psychol	jęz-tur	społ-pr	polit	b-ch	eko-men		psych-prawn	jęz-ekonomiczny	polityk-biol	eko-men				dyspl	jęz-tur	społ-pr	polit	b-ch	eko-men		dyspl	jęz-tur	społ-pr	polit	b-ch	eko-men		
2		I	I	I	I	I	I		II	II	II	II	II	II	II		III	III	III	III	III	III	III	IV	IV	IV	IV	IV	IV	
3		A	B	C	D	F	G		AC	BG	DF	G				A	B	C	D	F	G		A	B	C	D	F	G		
4	J. Polski	6	4	6	4	4	4		6	4	4	4	0	0		4	4	6	4	4	4	4	4	4	5	4	4	4		
5																									3.16	3.16	3.95	3.16	3.16	3.16
6	Jp1																													
7																														
8	Jp2																													
9																														
10	Jp3																													
11																														
12	Jp3																													
13																														
14	Jp4																													
15																														
16	Jp5																													
17																														
18																														

Rysunek 3.1: Zrzut ekranu z arkusza kalkulacyjnego przedstawiający przypisanie godzinowe nauczycieli dla każdej klasy.

Każdy nauczyciel jest przypisany do prowadzonych przez niego przedmiotów. Następnie w odpowiednim wierszu nauczyciela, pod odpowiednim przedmiotem, w kolumnie każdej klasy definiowana jest ilość godzin, która będzie poświęcona na prowadzenie tego przedmiotu.

Zbiór takich wymagań  $\mathcal{W}$  definiuje się następująco:

$$w_i \triangleq (t_{w_i}, c_{w_i}, s_{w_i}, g_{w_i}) \in \mathcal{W}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{W}|\} : \begin{cases} t_{w_i} & \in \mathcal{T} \\ c_{w_i} & \in \mathcal{C} \\ s_{w_i} & \in \mathcal{S} \\ g_{w_i} & \in \mathbb{N}^+ \end{cases} \quad (3.1)$$

gdzie  $g_{w_i}$  to liczba wymaganych tygodniowo godzin przedmiotu  $s_{w_i}$  przeprowadzonego przez nauczyciela  $t_{w_i}$  dla klasy  $c_{w_i}$ .

### Dostępność nauczycieli

Każdy nauczyciel ma też zdefiniowaną dostępność, która jest reprezentowana przez macierz  $A$  o wymiarach  $|\mathcal{T}|$  na 5, gdzie  $|\mathcal{T}|$  to liczba wszystkich nauczycieli. Macierz jest zero-jedynkowa, gdzie 1 oznacza, że  $t$ -ty nauczyciel jest dostępny  $d$ -tego dnia tygodnia, a 0 że jest niedostępny.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,5} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{|\mathcal{T}|,1} & a_{|\mathcal{T}|,2} & \cdots & a_{|\mathcal{T}|,5} \end{bmatrix}, \quad \forall t \in \mathcal{T}, d \in \{1, 2, 3, 4, 5\} : a_{t,d} \in \{0, 1\}$$

### Bloki przedmiotów

W celu tworzenia bloków lekcyjnych mamy także dostęp do zbioru bloków przedmiotów  $\mathcal{B}$ :

$$b_i \triangleq (\vec{S}_{b_i}, \vec{C}_{b_i}, \vec{G}_{b_i}, \text{is\_aggregating}_{b_i}, \text{max\_weekly}_{b_i}) \in \mathcal{B}$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{B}|\} : \begin{cases} \vec{S}_{b_i} & \subset \mathcal{S} \\ \vec{C}_{b_i} & \subseteq \mathcal{C} \\ \vec{G}_{b_i} & \in \mathbb{N}^{|\vec{S}_b|} \\ \text{is\_aggregating}_{b_i} & \in \{0, 1\} \\ \text{max\_weekly}_{b_i} & \in \mathbb{N} \end{cases}$$

gdzie

- $\vec{S}_{b_i}$  to podzbiór wszystkich przedmiotów, których dotyczy blok  $b_i$ ,
- $\vec{C}_{b_i}$  to podzbiór wszystkich klas, których dotyczy blok  $b_i$ ,
- $\vec{G}_{b_i}$  to wektor oczekiwanej liczby przedmiotów w bloku.
- **is\_aggregating** to wartość binarna informująca o tym czy blok jest *agregujący*, to znaczy czy służy w celu łączenia innych bloków w jeszcze większe bloki.
- **max\_weekly** to liczba naturalna która informuje o maksymalnej liczbie bloków. Jeśli **max\_weekly** = 0 to oznacza to, że liczba bloków jest nielimitowana.

Przykładowy blok przedmiotów:

- $\vec{S}_b = (\text{język angielski, informatyka}),$
- $\vec{C}_b = (\text{IA, IB, IC}),$
- $\vec{G}_b = (1, 1),$
- $\text{is\_aggregating} = 0,$
- $\text{max\_weekly} = 0.$

lub:

- $\vec{S}_b = (\text{język angielski}),$
- $\vec{C}_b = \mathcal{C}$
- $\vec{G}_b = (2),$
- $\text{is\_aggregating} = 0,$
- $\text{max\_weekly} = 0.$

### Bloki lekcyjne

Blok lekcyjny  $L$  jest zbiorem wymagań głównych, które mogą być realizowane w ramach jednej bądź wielu lekcji jednocześnie.

Zbiór takich bloków lekcyjnych  $\mathcal{L}$  definiujemy następująco:

$$\mathcal{L} = \left\{ L_1, L_2, \dots, L_{|\mathcal{L}|} \right\}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{L}|\} : L_i \subset \mathcal{W}$$

Przykładowe interpretacje bloków lekcyjnych:

- 3 godziny języka angielskiego z klasą IA prowadzone przez nauczyciela angielskiego 1,
- 3 godziny języka angielskiego z klasą IA prowadzone przez nauczyciela angielskiego 2,

w przypadku różnych przedmiotów:

- 3 godziny języka angielskiego z klasą IA prowadzone przez nauczyciela angielskiego 1,
- 2 godziny informatyki z klasą IA prowadzone przez nauczyciela informatyki 1,

lub dla różnych klas:

- 1 godzina języka francuskiego z klasą IA prowadzona przez nauczyciela francuskiego 1,
- 1 godzina języka francuskiego z klasą IB prowadzona przez nauczyciela francuskiego 1,

## Szukane

Oczekiwany rezultatem działania algorytmu powinien być zbiór przypisań  $\mathcal{Z}$ . Każde takie przypisanie powinno mieć 6 wartości:

$$z_i \triangleq (d_{z_i}, h_{z_i}, c_{z_i}, t_{z_i}, s_{z_i}, r_{z_i}) \in \mathcal{Z}, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, |\mathcal{Z}_d|\} : \begin{cases} d_{z_i} & \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ h_{z_i} & \in \{0, 1, \dots, H\} \\ c_{z_i} & \in \mathcal{C} \\ t_{z_i} & \in \mathcal{T} \\ s_{z_i} & \in \mathcal{S} \\ r_{z_i} & \in \mathcal{R} \end{cases}$$

Przykładowe interpretacje takich przypisań:

- Poniedziałek, Slot czasowy 0, IA, nauczyciel francuskiego 1, język francuski, Sala nr 1
- Poniedziałek, Slot czasowy 0, IIA, nauczyciel francuskiego 1, język francuski, Sala nr 1
- ⋮
- Piątek, Slot czasowy 10, IVC, nauczyciel fizyki 2, fizyka, Sala nr 15

W przypadku lekcji, która obejmuje więcej klas niż jedna, należy stworzyć przypisanie dla każdej klasy osobno.

### 3.1.2. Ograniczenia

Wcześniej wspomniane ograniczenia można podzielić na 4 kategorie:

#### Ograniczenia fizyczne

- Żaden nauczyciel nie może być w 2 miejscach na raz.

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{Z}|\} : t_{z_i} = t_{z_j} \implies [i = j \vee d_{z_i} \neq d_{z_j} \vee h_{z_i} \neq h_{z_j} \vee (d_{z_i} = d_{z_j} \wedge h_{z_i} = h_{z_j} \wedge r_{z_i} = r_{z_j})]$$

- Nauczyciel musi być dostępny.

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{Z}|\} : a_{t_{z_i}, d_{z_i}} = 1$$

- Żaden uczeń nie może być w 2 miejscach na raz.

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{Z}|\}, \exists k \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{B}|\} : (d_{z_i} = d_{z_j} \wedge h_{z_i} = h_{z_j} \wedge c_{z_i} = c_{z_j} \wedge i \neq j) \implies c_{z_i} \in \vec{C}_{b_k} \wedge s_{z_i}, s_{z_j} \in \vec{S}_{b_k}$$

- W żadnej sali nie mogą odbywać się 2 lekcje na raz.

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{Z}|\}, \exists k \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{B}|\} : \\ (d_{z_i} = d_{z_j} \wedge h_{z_i} = h_{z_j} \wedge r_{z_i} = r_{z_j} \wedge i \neq j) \implies s_{z_i} = s_{z_j} \wedge s_{z_i}, s_{z_j} \in \vec{S}_{b_k}$$

### Ograniczenia prawne [1, 2, 3]

- Uczeń nie może mieć więcej niż 2 godzin lekcyjnych tego samego przedmiotu dziennie.

$$\forall d \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, c \in \mathcal{C}, s \in \mathcal{S} : |\{z \in \mathcal{Z} : d_z = d \wedge c_z = c \wedge s_z = s\}| \leq 2$$

- Jeśli danego dnia mają zostać przeprowadzone 2 godziny jednego przedmiotu, to uczeń musi je mieć bezpośrednio po sobie.

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{Z}|\}, c \in \mathcal{C}, s \in \mathcal{S} : \\ (d_{z_i} = d_{z_j} \wedge c_{z_i} = c_{z_j} \wedge s_{z_i} = s_{z_j} \wedge i \neq j) \implies |h_{z_i} - h_{z_j}| = 1$$

### Ograniczenia jakościowe

- Brak okienek dla uczniów. Nie istnieje taka para przypisań, dla których różnica między slotami czasowymi jest większa niż suma wszystkich lekcji danego dnia.

$$\nexists i, j \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{Z}|\}, c \in \mathcal{C} : \\ d_{z_i} = d_{z_j} \wedge c_{z_i} = c_{z_j} \wedge |h_{z_i} - h_{z_j}| > |\{z_k : d_{z_k} = d_{z_i} \wedge c_{z_k}\}|$$

- Odpowiednie przypisanie sal. Lekcje wychowania fizycznego muszą odbyć się w przeznaczonych do tego salach, podobnie lekcji informatyki itd.

$$\forall z \in \mathcal{Z} : s_z \in \vec{R}_{r_z}$$

- Dla bloków lekcyjnych, które odbywają się 3 razy w tygodniu konieczne jest stworzenie jednego bloku dwugodzinnego.

$$\forall w \in \mathcal{W}, \exists d \in \{1, 2, 3, 4, 5\} : \\ g_w = 3 \implies |\{z \in \mathcal{Z} : c_w = c_z \wedge s_w = s_z \wedge t_w = t_z \wedge d_z = d\}| = 2$$

### Ograniczenie główne

Zgodnie z definicją przyjętą w 3.1 tygodniowa liczba godzin każdego przedmiotu musi być równa tej ustalonej w zbiorze wymagań:

$$\forall w \in \mathcal{W} : |\{z \in \mathcal{Z} : c_w = c_z \wedge t_w = t_z \wedge s_w = s_z\}| = g_w$$

### Hierarchiczna dekompozycja problemu

Podczas gdy w pracy [16] dekompozycja dotyczy głównie warstw ograniczeń, w moim rozwiążaniu wprowadziłem dekompozycję całego problemu:

Każdy poziom rozwiązuje inny problem i wykorzystuje odpowiednie do tego celu algorytmy.

## Kombinacja metod optymalizacyjnych

W odróżnieniu od pracy źródłowej, która wykorzystuje wyłącznie solver MIP z heurystykami, w moim podejściu zastosowałem wiele technik:

- **Algorytm zachłanny** — dla problemów konstrukcyjnych (tworzenie bloków)
- **Algorytm ewolucyjny** — dla dyskretnego przydziału bloków do dni
- **Solver CP** — dla problemów szeregowania

## Redukcja złożoności obliczeniowej

Pełny problem harmonogramowania wymagałby liczby zmiennych decyzyjnych proporcjonalnych do:

$$|\mathcal{T}| \times |\mathcal{C}| \times |\mathcal{S}| \times 5 \times H \times |\mathcal{R}|$$

milionów co dla typowej szkoły daje miliony potencjalnych zmiennych.

W podejściu dekompozycyjnym:

- **Etap 1:** Operuje na  $|\mathcal{W}|$  wymaganiach
- **Etap 2:** Operuje na  $5 \times |\mathcal{L}|$  zmiennych
- **Etap 3:** Rozwiązuje 5 niezależnych podproblemów o rozmiarze 20% oryginalnego problemu

Każdy etap można modyfikować lub wymieniać niezależnie. Jest to ważna zaleta podczas rozwijania oprogramowania. W szczególności jeśli takie oprogramowanie może być w przyszłości rozwijane przez więcej niż jednego dewelopera.

## 3.2. Poprzednie podejścia

Aby w pełni zrozumieć mój wybór narzędzi warto szybko przetoczyć historię moich poprzednich podejść do rozwiązania tego problemu.

### 3.2.1. Programowanie mieszanocałkowitoliczbowe

Moim pierwszym podejściem była próba użycia tylko i wyłącznie pakietu optymalizacyjnego *IBM ILOG CPLEX*. Problem zdefiniowałem używając zmiennych binarnych inspirując się podejściem opisany w podrozdziale 2.1, tworząc sześćwymiarową macierz:

1. Wymiar nauczycieli
2. Wymiar klas
3. Wymiar przedmiotów
4. Wymiar dnia

## 5. Wymiar slotu czasowego

## 6. Wymiar sal

Jak można zauważać złożoność pamięciowa takiego podejścia uniemożliwia jego efektywne skalowanie. Nawet dla danych średniej szkoły, mającej mniej niż 100 sal, nauczycieli, klas i przedmiotów, taka macierz zajmowała setki GB pamięci RAM. Rozwiążaniem tego problemu było zastosowanie słownika z wartościami jako zmienne binarne i kluczami jako krótkie 6 liczb całkowitych. W ten sposób zmienne, które nie posiadają klucza, nie powstają w pamięci. Przykładowo krotka reprezentująca (nauczyciel francuskiego, IIIA, poniedziałek, slot czasowy 0, niemiecki, siłownia) nie jest w zbiorze możliwych kluczy.

$$X = \{(t, c, d, h, s, r) : x_{t,c,d,h,s,r}\}, \quad \begin{cases} t & \in \{1, 2, \dots, \mathfrak{T}\} \\ c & \in \{1, 2, \dots, \mathfrak{C}\} \\ d & \in \{1, 2, \dots, 5\} \\ h & \in \{1, 2, \dots, \mathfrak{H}\} \\ s & \in \{1, 2, \dots, \mathfrak{S}\} \\ r & \in \{1, 2, \dots, \mathfrak{R}\} \end{cases}$$

$$\forall t \in \{1, 2, \dots, \mathfrak{T}\}, c \in \{1, 2, \dots, \mathfrak{C}\}, d \in \{1, 2, \dots, 5\}, \\ h \in \{1, 2, \dots, \mathfrak{H}\}, s \in \{1, 2, \dots, \mathfrak{S}\}, r \in \{1, 2, \dots, \mathfrak{R}\} : \quad x_{(t,c,d,h,s,r)} \in \{0, 1\}$$

gdzie

- $\mathfrak{T}$  to liczba nauczycieli,
- $\mathfrak{C}$  to liczba klas,
- $H$  to wartości horyzontu,
- $\mathfrak{S}$  to liczba przedmiotów,
- $\mathfrak{R}$  to liczba dostępnych sal,
- $d$  reprezentuje dzień tygodnia,
- $h$  reprezentuje slot czasowy.

W ten sposób pozbywam się wszystkich niemożliwych wartości, przykładowo wychowania fizycznego z nauczycielem matematyki. Używając tej metody nadal możemy używać sum w ten sam sposób jak to robimy korzystając ze zmiennych decyzyjnych w postaci macierzowej. Musimy tylko sprawdzać czy dane zmienne binarne faktycznie istnieją.

Jest to intuicyjny sposób poradzenia sobie z problemem harmonogramowania zajęć o niezmiennej długości jednego slotu czasowego. Bardzo łatwo można definiować ograniczenia fizyczne.

- Ograniczenie prowadzenia maksymalnie jednej lekcji dla wszystkich nauczycieli:

$$\forall t \in \{0, 1, 2, \dots, \mathfrak{T}\}, \quad \sum_{c=0}^{\mathfrak{C}} \sum_{s=0}^{\mathfrak{S}} \sum_{d=1}^5 \sum_{h=0}^H \sum_{r=0}^{\mathfrak{R}} x_{t,c,s,d,h,r} = 1$$

- Ograniczenie posiadania maksymalnie jednej lekcji w jednym slocie czasowym dla wszystkich uczniów:

$$\forall c \in \{0, 1, 2, \dots, \mathfrak{C}\}, \quad \sum_{t=0}^{\mathfrak{T}} \sum_{s=0}^{\mathfrak{S}} \sum_{d=1}^5 \sum_{h=0}^H \sum_{r=0}^{\mathfrak{R}} x_{t,c,s,d,h,r} = 1$$

- Ograniczenie maksymalnie jednej lekcji w pokoju:

$$\forall r \in \{0, 1, 2, \dots, \mathfrak{R}\}, \quad \sum_{t=0}^{\mathfrak{T}} \sum_{s=0}^{\mathfrak{S}} \sum_{d=1}^5 \sum_{h=0}^H \sum_{c=0}^{\mathfrak{C}} x_{t,c,s,d,h,r} = 1$$

Tak zdefiniowany problem bardzo szybko znajdował rozwiązania, które spełniały wszystkie ograniczenia fizyczne.

Problemem tego rozwiązania jest niemożność wprowadzenia bloków lekcyjnych przy jednoczesnym zachowaniu prostoty obliczeniowej. Kolejnym wyzwaniem było również wprowadzenie minimalizacji liczby okienek dla nauczycieli oraz wprowadzenie wymagania ciągłości zajęć dla wszystkich klas. Zmienne binarne nie oferują wystarczającej wszechstronności, która jest potrzebna w układaniu planów zajęć.

### 3.2.2. Grafowe sieci neuronowe

W odpowiedzi na problemy z MIP, zdecydowałem się na zbadanie alternatywnych metod rozwiązania. Wybrałem niekonwencjonalną reprezentację problemu harmonogramowania używając grafowych sieci neuronowych [17]. W przyjętym modelu problem został przedstawiony w postaci grafu, gdzie węzły reprezentowały wymagania główne, a krawędzie łączyły zajęcia o tych samych nauczycielach lub tych samych klasach.

Taka reprezentacja okazała się szczególnie atrakcyjna pod względem implementacji funkcji celu. Ocena dopuszczalności rozwiązania sprawdzała się do weryfikacji spełnienia ograniczeń, które można było w prosty sposób zamodelować za pomocą funkcji kary. Jednocześnie można nagradzać model za przypisywanie lekcji do poprawnych bloków. Początkowe rezultaty były bardzo obiecujące — model już po kilkudziesięciu epokach wykazywał zdolność do identyfikowania, które lekcji powinny być w blokach, a które wymagają rozdzielenia w celu uniknięcia kolizji.

Główną wadą w tym podejściu okazał się brak gwarancji spełnienia ograniczeń twardych oraz trudności przy układaniu planu iteracyjnie (lekcja po lekcji). Eksperymenty wykazały, że przy zastosowaniu zbyt wysokich współczynników kary, proces uczenia nie przynosił rezultatów. Zbyt niskie natomiast powodowały, że model preferował optymalizację nagrody za grupowanie lekcji kosztem naruszenia ograniczeń.

### 3.2.3. JSSP

Kolejnym podejściem było wykorzystanie metod opisanych w 2.2. Spośród istniejących rozwiązań szczególnie inspirujące okazało się podejście zaprezentowane w dokumentacji Google OR-Tools [12], w którym operacje reprezentowane są za pomocą zmiennych interwałowych. Mechanizm ten oferuje znacznie większą elastyczność niż model binarny przedstawiony w podrozdziale 3.2.1, a równocześnie pozwala zachować przejrzystość definicji ograniczeń.



Rysunek 3.2: Wizualizacja rozwiązania klasycznego problemu JSSP z wykorzystaniem zmiennych interwałowych [12]

### Zmienne interwałowe

- W JSSP:  $\text{IntervalVar}(start, duration, end)$ .
- W planie lekcji:  $\text{IntervalVar}(h_i, v_i, h_i + v_i)$ , gdzie  $h_i$  to slot czasowy, a  $v_i$  to długość trwania lekcji.

### Ograniczenie NoOverlap

- W JSSP:  $\text{AddNoOverlap}([\text{interval}_1, \dots, \text{interval}_n])$  dla operacji na tej samej maszynie [10].
- W planie lekcji: AddNoOverlap zastosowane dla:
  - Wszystkich lekcji tej samej klasy
  - Wszystkich lekcji tego samego nauczyciela
  - Wszystkich lekcji w tej samej sali

### Optional Intervals

Rozszerzenie o interwały opcjonalne pozwala na modelowanie przypisań sal do nauczycieli w blokach lekcyjnych:

$\text{OptionalIntervalVar}(start, duration, end, presence)$

Takie interwały są brane pod uwagę w ograniczeniach tylko i wyłącznie, jeśli  $presence = 1$ ; Oznacza to, że interwał jest „aktywny”.

### 3.3. Dekompozycja problemu i wybór technik

W niniejszej pracy zaadaptowałem oraz rozwiniąłem fundamentalną ideę przedstawioną w podrozdziale 2.1, dostosowując ją do specyfiki problemu układania planu lekcji. Zdecydowałem się na podział zadania na trzy mniejsze, kolejno realizowane etapy, z których każdy rozwiązuje wyraźnie wydzielony podproblem o niższej złożoności obliczeniowej.

Analiza moich wcześniejszych prób rozwiązania tego zagadnienia, wskazuje, że oparcie się wyłącznie na metodach inteligentnych bądź na MIP nie prowadzi do satysfakcjonujących rezultatów. Zasadnicza innowacja przedstawionego podejścia polega na dekompozycji oryginalnego problemu na trzy sekwencyjne fazy, każda używająca adekwatnej techniki, co stanowi rozwinięcie względem moich wcześniejszych koncepcji.

Pierwsze dwa etapy mają na celu stopniowe ograniczanie przestrzeni decyzyjnej, tak aby w trzeciej, końcowej fazie możliwe było efektywne sformułowanie i rozwiązanie problemu programowania z ograniczeniami. Ostatecznym rezultatem takiej dekompozycji jest wyraźne zmniejszenie liczby zmiennych decyzyjnych niezbędnych do zdefiniowania ograniczeń w etapie końcowym, co bezpośrednio przekłada się na poprawę efektywności obliczeniowej całego procesu.

#### 1. Etap 1 — Konstrukcja bloków lekcyjnych:

**Dane wejściowe:** Zbiór wymagań głównych  $\mathcal{W}$ , zbiór definicji bloków przedmiotów  $\mathcal{B}$  oraz zasoby szkolne  $\mathcal{T}, \mathcal{C}, \mathcal{S}$ .

**Wynik:** Zbiór bloków lekcyjnych  $\mathcal{L}$  i wektor godzin  $V$ .

**Cel:** Grupowanie pojedynczych wymagań w spójne jednostki dydaktyczne.

#### 2. Etap 2 — Alokacja tygodniowa:

**Dane wejściowe:** Bloki lekcyjne  $\mathcal{L}$ , wektor godzin  $V$ , macierz dostępności nauczycieli  $A$  oraz zasoby szkolne  $\mathcal{T}$  i  $\mathcal{C}$ .

**Wynik:** Macierz przydziału  $S_{\text{best}}$  określająca liczbę godzin bloków każdego dnia.

**Cel:** Optymalny rozkład godzin bloków na pięć dni roboczych.

#### 3. Etap 3 — Harmonogramowanie:

**Dane wejściowe:** Macierz  $S_{\text{best}}$ , bloki lekcyjne  $\mathcal{L}$  oraz zasoby sal  $\mathcal{R}$ .

**Wynik:** Zbiór przypisań  $\mathcal{Z}$  określających konkretne sloty czasowe i sale.

**Cel:** Przypisanie terminów i pomieszczeń dla wszystkich zajęć.

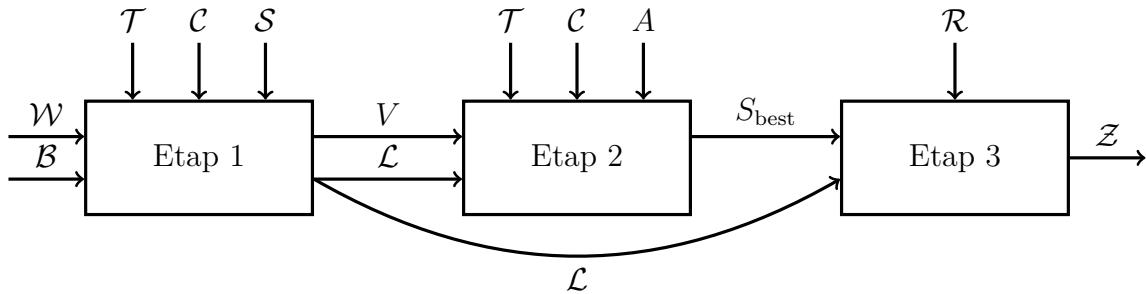
gdzie  $S_{\text{best}}$  to macierz reprezentująca najlepszego osobnika algorytmu ewolucyjnego, reprezentująca przypisania konkretnych bloków lekcyjnych  $L$  do dni tygodnia.

Pełne sformułowanie problemu harmonogramowania prowadziłoby do liczby zmiennych decyzyjnych proporcjonalnej do wyrażenia

$$|\mathcal{T}| \times |\mathcal{C}| \times |\mathcal{S}| \times 5 \times H \times |\mathcal{R}|$$

co w przypadku typowej szkoły skutkowałoby powstaniem nawet kilku milionów potencjalnych zmiennych. Tak duża skala zadania stanowi istotne wyzwanie obliczeniowe i uzasadnia konieczność zastosowania przedstawionego wcześniej, wieloetapowego podejścia. Dzięki dekompozycji problemu na trzy mniejsze etapy możliwe jest stopniowe ograniczanie przestrzeni decyzyjnej:

1. Tworzenie zmiennych operuje na  $|\mathcal{W}|$  wymaganiach głównych.
2. Przydział bloków lekcyjnych operuje na  $|\mathcal{L}|$  blokach lekcyjnych.
3. Liczba zmiennych decyzyjnych w solverze do zadań programowania z ograniczeniami jest proporcjonalna do  $|\mathcal{L}|$ .



Rysunek 3.3: Struktura algorytmu

### 3.3.1. Dobór technik algorytmicznych

Dla każdego etapu dobrano technikę optymalizacyjną dopasowaną do charakterystyki podproblemu:

- Etap 1 — **Algorytm zachłanny**: Wybór podyktowany konstrukcyjnym charakterem problemu grupowania wymagań w maksymalne bloki przy spełnieniu ograniczeń strukturalnych.
- Etap 2 — **Algorytm ewolucyjny**: Idealny dla dyskretnych problemów alokacji z wieloma kryteriami jakości i bogatą przestrzenią rozwiązań.
- Etap 3 — **Programowanie z ograniczeniami**: Optymalne dla problemów harmonogramowania gdzie zależy nam na jakości rozwiązań.

Taki dobór technik tworzy hybrydowe podejście, które wykorzystuje mocne strony każdej metody, zapewniając kompromis między jakością rozwiązania a czasem obliczeń.

## 3.4. Algorytm zachłanny

Algorytm zachłanny (ang. *greedy*) polega na iteracyjnym podejmowaniu lokalnie najlepszej decyzji bez cofania się i bez globalnego przeszukiwania przestrzeni rozwiązań [5]. Choć w wielu problemach algorytm zachłanny daje rozwiązania przybliżone, w zadaniach konstrukcyjnych, w których celem jest wyłącznie znalezienie wszystkich maksymalnych (niedających się już powiększyć) struktur, jego prostota jest zaletą: eliminuje zbędną warstwę optymalizacji.

W etapie budowy bloków lekcyjnych nie maksymalizujemy funkcji celu ani nie porównujemy jakości wariantów — każdy poprawny (zgodny z ograniczeniami) blok jest akceptowalny. Celem jest:

1. Pokrycie wszystkich wymagań głównych.
2. Rozpatrzenie wszystkich bloków przedmiotów.
3. Utworzenie możliwie największych spójnych bloków (maksymalnych względem liczby składowych wymagań głównych).
4. Uniknięcie duplikacji i kolizji (spełnienie ograniczeń).

Problem sprowadza się do iterowania się po blokach przedmiotów i tworzenia wszystkich, maksymalnie dużych, bloków lekcyjnych. Próba użycia metod optymalizacyjnych (MIP, metataheurystyki) na tym etapie wprowadzałaby koszt obliczeniowy bez zysku jakościowego: już sam algorytm zachłanny pozwala na stworzenie maksymalnie dużych bloków. Algorytm zachłanny pozwala szybko eksplorować przestrzeń lokalną: dla każdej potencjalnej konfiguracji rozszerzamy blok dopóki wszystkie warunki (brak konfliktu nauczycieli, zgodność klas, ...) pozostają spełnione. Po wyczerpaniu możliwości blok osiąga swoją maksymalną wielkość. Wielkość innych bloków nie wpływa na ten wynik, co oznacza, że rozwiązanie optymalne lokalnie jest również optymalne globalnie.

### 3.4.1. Bloki lekcyjne

Operując na blokach lekcyjnych dużo łatwiej zdefiniować ograniczenia fizyczne. Weźmy na przykład 3 lekcje: Język Niemiecki, Język Francuski oraz Język Rosyjski. Gdybyśmy mieli definiować dla nich ograniczenie określające, że żaden uczeń nie może mieć przypisanych dwóch lub więcej lekcji w tym samym czasie, musielibyśmy zapewnić, że żadna z tych lekcji nie pokrywa się z innymi lekcjami tej klasy, takimi jak Matematyka czy Fizyka, przy jednoczesnym zapewnieniu, że te lekcje mogą się na siebie nałożyć. Te zajęcia stanowią obowiązkowy język dodatkowy, który uczniowie wybierają każdy z osobna. Każdy uczeń może wybrać tylko jeden język, co za tym idzie lekcje mogą odbywać się niezależnie od siebie. Grupując takie ograniczenia główne w bloki 3 lekcji możemy potraktować taki blok jak każdą inną lekcję przy definiowaniu ograniczeń — nie może być przypisany do tego samego slotu czasowego z żadną inną lekcją.

Następną zaletą jest prostota w projektowaniu ograniczeń dla lekcji, które odbywają się dla więcej niż jednej klasy. Często w szkołach brakuje uczniów zapisanych na przykładowo Język Rosyjski w jednej klasie, aby uzasadnić indywidualną lekcję prowadzoną przez nauczyciela z tylko i wyłącznie jedną klasą. W takich przypadkach szkoła definiuje lekcje, które nauczyciel prowadzi dla wielu klas jednocześnie. Podobnie jak w poprzednim przykładzie, definiowanie ograniczeń dla każdej lekcji z osobna wiąże się z wyjątkami. Jeśli natomiast połączymy wymagania główne dla paru klas w jeden blok, możemy go traktować tak jak każdą inną lekcję.

Kolejną zaletą tego rozwiązania jest możliwość łączenia bloków w jeszcze większe bloki. Wyobraźmy sobie sytuację, w której mamy trzy klasy: IIIA, IIIB i IIIC, oraz 3 przedmioty do przeprowadzenia: Język Niemiecki, Język Francuski i Język Rosyjski. Z uwagi na niską liczbę uczniów zapisanych na rosyjski i francuski te zajęcia są prowadzone w następujących grupach:

- wszystkie 3 klasy mają razem Język Rosyjski,

- klasa IIIA i IIIB mają razem Język Francuski, a klasa IIIC ma indywidualnie z innym nauczycielem,
- każda klasa ma indywidualnie Język Niemiecki, z czego klasa IIIA i IIIC mają tego samego nauczyciela.

Jak można łatwo zauważać wszystkie te lekcji poza jedną lekcją języka niemieckiego mogą odbyć się jednocześnie. Po stworzeniu wieloklasowych bloków lekcyjnych możemy je łączyć dalej. Język Rosyjski może być połączony z blokiem Języka Francuskiego dla klas IIIA i IIIB oraz lekcją klasy IIIC. Do tego możemy też dodać dwie lekcje języka Niemieckiego pozostawiając ostatnią lekcję poza blokiem ze względu na kolizję nauczycieli.

### 3.4.2. Działanie

#### Dane wejściowe

- $\mathcal{B}$
- $\mathcal{W}$

#### Klasyfikacja bloków

- **Bloki agregujące** — tworzą wyższy poziom hierarchii, łącząc istniejące bloki i wymagania w jeszcze większe bloki

$$\mathcal{B}_{\text{agg}} = \{b \in \mathcal{B} : \text{is\_aggregating}_b = 1\}$$

- **Bloki wieloklasowe** — łączą wymagania z wielu klas dla tych samych przedmiotów

$$\mathcal{B}_{\text{multi}} = \left\{ b \in \mathcal{B} : |\vec{S}_b| = 1 \right\}$$

- **Bloki pojedyncze** — obejmują pojedyncze klasy

$$\mathcal{B}_{\text{single}} = \mathcal{B} \cap (\mathcal{B}_{\text{multi}} \cup \mathcal{B}_{\text{multi}})$$

#### Inicjalizacja

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\leftarrow \emptyset && (\text{zbiór bloków lekcyjnych}) \\ V &\leftarrow \emptyset && (\text{wektor godzin bloków}) \\ U : \mathcal{W} &\rightarrow \mathbb{N} && (\text{funkcja wykorzystania godzin wymagań}) \\ U(w) &\leftarrow 0 && \forall w \in \mathcal{W} \end{aligned}$$

## Tworzenie grup wieloklasowych

Dla każdego bloku  $b \in \mathcal{B}_{\text{multi}}$  tworzymy zbiór wymagań zgodnych z definicją bloku:

$$\begin{cases} \mathcal{W}_b = \{w \in \mathcal{W} : s_w \in \vec{S}_b \wedge c_w \in \vec{C}_b\} \\ |\{w \in \mathcal{W}_b : s_w = s\}| = g_b \quad \forall s \in \vec{S}_b \end{cases}$$

Grupy te stanowią podstawę do tworzenia bloków lekcyjnych międzyklasowych.

## Agregacja bloków

Dla każdego bloku  $b \in \mathcal{B}_{\text{agg}}$ :

1. Wybieramy maksymalnie duży zbiór wymagań  $\mathcal{W}_{\text{agg}} \subseteq \mathcal{W}$  spełniający:

$$\forall w \in \mathcal{W}_{\text{agg}} : c_w \in \vec{C}_b \wedge s_w \in \vec{S}_b$$

- Nauczyciele w  $\mathcal{W}_{\text{agg}}$  są różni.
- Wymagania nie były wcześniej wykorzystane.

Robimy to poprzez łączenie odpowiednich bloków  $\mathcal{W}_b$  dla  $b \in \mathcal{B}_{\text{multi}}$ .

2. Określamy liczbę godzin:  $v = \min\{g_w - U(w) : w \in \mathcal{W}_{\text{agg}}\}$
3. Dodajemy do wyników:  $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} \cup \{\mathcal{W}_{\text{agg}}\}$ ,  $V \leftarrow V \cup \{v\}$
4. Aktualizujemy wykorzystanie:  $U(w) \leftarrow U(w) + v$  dla  $w \in \mathcal{W}_{\text{agg}}$

## Przetwarzanie bloków wieloklasowych

Dla każdej utworzonej wcześniej grupy  $\mathcal{W}_b$ :

1. Jeśli wymagania nie zostały w pełni wykorzystane, tworzymy blok
2. Liczba godzin:  $v = \min\{g_w - U(w) : w \in \mathcal{W}_b\}$
3. Dodajemy do wyników i aktualizujemy wykorzystanie

## Generowanie bloków pojedynczych

Dla każdego bloku  $b \in \mathcal{B}_{\text{single}}$  i klasy  $c \in \vec{C}_b$ :

1. Znajdujemy wymagania:  $\mathcal{W}_c = \{w \in \mathcal{W} : c_w = c \wedge s_w \in \vec{S}_b\}$
2. Jeśli zbiór spełnia warunki bloku co do ilości przedmiotów, tworzymy blok lekcyjny
3. W przeciwnym przypadku generujemy wszystkie poprawne kombinacje wymagań
4. Dla każdej poprawnej kombinacji  $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}_c$  tworzymy blok

### Iteracyjna alokacja pozostałych godzin

1. Dopóki istnieją nie w pełni wykorzystane wymagania w blokach pojedynczych:
  - (a) Równomiernie zwiększamy liczbę godzin we wszystkich możliwych blokach. Równomiernie oznacza, że iteruję się przez wszystkie bloki i zwiększam ich przypisanie o 1, gwarantując tym samym, że wszystkie zostaną użyte.
  - (b) Respektujemy ograniczenia maksymalnej liczby bloków tygodniowo

### Finalizacja

1. Dla każdego wymagania  $w \in \mathcal{W}$  z niewykorzystanymi godzinami:
  - (a) Tworzymy blok jednostkowy:  $\mathcal{L} \leftarrow \mathcal{L} \cup \{\{w\}\}$
  - (b)  $V \leftarrow V \cup \{g_w - U(w)\}$

Wynikiem działania algorytmu zachłannego jest efektywna reprezentacja bloków gotowa do dalszego generowania planu. Algorytm zwraca:

- Zbiór bloków lekcyjnych  $\mathcal{L}$ , gdzie każdy blok  $L_i$  jest wektem zbiorem wymagań głównych:

$$\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \dots, L_{|\mathcal{L}|}\}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{L}|\} : L_i \subset \mathcal{W}$$

gdzie  $|\mathcal{L}|$  to liczba wszystkich bloków.

- Macierz wymagań głównych bloków — liczby godzin tygodniowych, gdzie  $v_i$  oznacza liczbę godzin przeznaczonych na blok  $b_i$  na przestrzeni tygodnia.

$$V = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_{|\mathcal{L}|}], \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{L}|\} : v_i \in \mathbb{N}^+$$

Przy czym gwarantowane jest spełnienie wymagania głównego:

$$\forall w \in \mathcal{W} : \sum_{i:w \in L_i} v_i = g_w$$

### 3.4.3. Rezultaty

Dla danych udostępnionych przez szkołę liczba wymagań głównych wynosi  $|\mathcal{W}| = 378$ , natomiast liczba zdefiniowanych bloków przedmiotów  $|\mathcal{B}| = 47$ . Zastosowany algorytm zachłanny wygenerował 302 bloków lekcyjnych. Średni czas wykonywania dla pięciu niezależnych uruchomień wyniósł 0.84s, przy czym pomiar czasu obejmował również czas pobierania danych z bazy.

Poniżej fragment otrzymanego zbioru bloków oraz odpowiadających wartości macierzy  $V$ :

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{array}{l} (\langle \text{Req: J.Niem 2h - Jn1 / IV\_A} \rangle, \langle \text{Req: J.Niem 2h - Jn1 / IV\_F} \rangle, \dots \\ \qquad \langle \text{Req: J.Ros 2h - Jr1 / IV\_A} \rangle, \langle \text{Req: J.Ros 2h - Jr1 / IV\_G} \rangle, \dots \\ \qquad \langle \text{Req: J.Fran 2h - Jf2 / IV\_D} \rangle, \langle \text{Req: J.Fran 2h - Jf1 / IV\_F} \rangle, \dots), \dots, \\ (\langle \text{Req: J.Ang 6h - Ja5 / I\_A} \rangle, \langle \text{Req: Informatyka 2h - Inf2 / I\_A} \rangle), \dots, \\ (\langle \text{Req: Chemia 1h - Chem1 / I\_G} \rangle), \dots \end{array} \right\}$$

$$V = \begin{bmatrix} 2 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots \end{bmatrix}$$

W wynikach możemy zaobserwować działanie algorytmu. Pierwszym elementem w  $\mathcal{L}$  jest komparatynie duży, wieloklasowy blok lekcyjny powstał w fazie agregacji (opisanej w 3.4.2). Obejmuje on między innymi:

- Lekcję j. niemieckiego z klasami IVA oraz IVF prowadzoną przez nauczyciela Jn1,
- Lekcję j. niemieckiego z klasami IVC oraz IVG prowadzoną przez nauczyciela Jn2,
- Lekcję j. rosyjskiego z klasami IVA, IVC, IVD, IVF oraz IVG przez nauczyciela Jr1,
- Lekcję j. francuskiego z klasą IVA oraz IVF prowadzoną przez nauczyciela Jf1,
- Lekcję j. francuskiego z klasą IVD prowadzoną przez nauczyciela Jf2.

Dla tego bloku wartość  $v_1$  wynosi:

$$v_1 = \min_{\forall w \in L_1} g_w - U(w) = 2$$

ponieważ na początku wszystkie wymagania mają  $U(w) = 0$ .

Drugim typem bloków są bloki pojedyncze. Jeden z przykładów widocznych w wynikach obejmuje:

- Lekcję j. angielskiego z klasą IA prowadzoną przez nauczyciela Ja5
- Lekcję informatyki z klasą IA prowadzoną przez nauczyciela Inf2

W tym przypadku  $v = 1$ , ponieważ klasa posiada dwie grupy języka angielskiego oraz dwie grupy informatyki, a pełne wymaganie informatyki musi zostać rozzielone między odpowiadające mu bloki. Obrazuje to konieczność iteracyjnego przydzielania wymaganych godzin do bloków — gdybyśmy chcieli przypisać obie godziny do pierwszego bloku to druga grupa informatyki nie miałaby możliwości odbycia lekcji.

Ostatnią kategorię stanowią bloki jednostkowe, przykładowo lekcja chemii dla klasy IG. Bloki takie pojawiają się w przypadku wymagań, które nie mogą być dołączone do żadnego większego bloku.

### 3.5. Algorytm ewolucyjny

Algorytm ewolucyjny jest populacyjną metodą przeszukiwania inspirowaną mechanizmami doboru naturalnego: selekcją, krzyżowaniem i mutacją. Klasyczne podstawy teorii zaprezentował Holland w pracy „Genetic algorithms” [13]. W odróżnieniu od podejść gradientowych lub zachłannych algorytm genetyczny eksploruje wiele konkurencyjnych rozwiązań równolegle oraz uniknięcie wcześniego utknięcia na lokalnych wierzchołkach funkcji celu.

W mojej pracy algorytm ewolucyjny pełni rolę drugiego etapu dekompozycji: po redukcji problemu do listy bloków lekcyjnych pozostaje dyskretne zadanie rozdziału tygodniowych godzin każdego bloku na pięć dni roboczych przy prostych ograniczeniach.

Zastosowany algorytm ewolucyjny wnosi:

1. **Naturalną obsługę wielu kryteriów** poprzez dodawanie komponentów funkcji przystosowania.
2. **Specjalistyczne operatory** krzyżowania i mutacji działające na poziomie kolumn (bloków), co zachowuje poprawność bez kosztownych procedur naprawczych.
3. **Niską złożoność obliczeniową** dzięki małej liczbie zmiennych w jednym osobniku (5 wartości na blok) i możliwości jednoczesnego oceniania całej populacji używając operacji na macierzach.
4. **Łatwe dostrajanie wag** (priorytety klas kontra nauczyciele) bez zmian w strukturze modelu.

Ogólna struktura algorytmu:

---

**Algorithm 3.1:** „The general scheme of an evolutionary algorithm in pseudocode” [7]

---

```
1 INITIALISE population with random individuals;  
2 EVALUATE each individual;  
3 repeat  
4   SELECT parents;  
5   RECOMBINE pairs of parents;  
6   MUTATE the resulting offspring;  
7   EVALUATE new individuals;  
8   SELECT individuals for the next generation;  
9 until TERMINATION CONDITION is satisfied;
```

---

gdzie w mojej pracy:

- **INITIALISE** reprezentuje budowę pierwszej populacji (3.5.3) przez losowe generowanie kolumn zgodnie z dostępnością i wymaganiami bloków.
- **EVALUATE** oblicza wartości funkcji przystosowania (3.5.4) dla każdego osobnika według zdefiniowanych metryk.
- **SELECT parents** realizuje selekcję probabilistyczną (3.5.5) z przewagą lepiej ocenionych osobników.
- **RECOMBINE pairs of parents** tworzy potomków (3.5.6) przez kolumnowe dziedziczenie struktur bloków (bez łamania ograniczeń).
- **MUTATE the resulting offspring** wprowadza różnorodność przez rekonstrukcję wybranych kolumn (3.5.7) z rozkładu wielomianowego.
- **SELECT individuals for the next generation** implementuje elitarystm i utrzymuje stały rozmiar populacji.
- **TERMINATION CONDITION** kończy proces po ustalonej liczbie generacji.

### 3.5.1. Cel algorytmu

Algorytm ma na celu przydział godzin lekcyjnych z macierzy bloków  $V$  do pięciu roboczych dni tygodnia reprezentowanych przez macierz  $S$  (3.2). Dla każdego bloku generowanych jest pięć wartości całkowitoliczbowych reprezentujących liczbę godzin lekcyjnych przydzielonych do poszczególnych dni, przy zachowaniu wymagań wynikających z poprzedniego etapu przetwarzania. Końcowy przydział godzin powinien mieć następujące cechy:

- Spełnione ograniczenia twardé
- Równomierny przydział bloków na przestrzeni tygodnia dla klas
- Równomierny przydział bloków na przestrzeni tygodnia dla nauczycieli

#### Dane wejściowe

- $\mathcal{L}$
- $V$
- $A$
- $\mathcal{B}$
- $\mathcal{C}$
- $\mathcal{T}$
- $\mathcal{S}$

#### Dane wyjściowe

- Poprawna macierz  $S_{\text{best}}$ :
  - spełniająca wszystkie ograniczenia twardé,
  - posiadająca satysfakcjonującą wartość funkcji przystosowania.

### 3.5.2. Kodowanie i ograniczenia twardé

Każdy osobnik w populacji jest reprezentowany przez macierz przydziałów  $S$  o wymiarach  $5 \times |\mathcal{L}|$ .

$$S = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} & \cdots & s_{1,|\mathcal{L}|} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} & \cdots & s_{2,|\mathcal{L}|} \\ s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} & \cdots & s_{3,|\mathcal{L}|} \\ s_{4,1} & s_{4,2} & s_{4,3} & \cdots & s_{4,|\mathcal{L}|} \\ s_{5,1} & s_{5,2} & s_{5,3} & \cdots & s_{5,|\mathcal{L}|} \end{bmatrix}, \quad S \in \mathbb{N}^2 \quad (3.2)$$

gdzie  $s_{d,i}$  oznacza liczbę godzin  $i$ -tego bloku lekcyjnego  $L_i$  przydzielonych do  $d$ -tego dnia tygodnia.

Tak przyjęta reprezentacja umożliwia prostą weryfikację następujących ograniczeń:

1. Całkowita liczba godzin każdego bloku musi odpowiadać wymaganiom określonym w macierzy  $V$ .

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{L}|\} : \sum_{d=1}^5 s_{d,i} = v_i$$

2. Maksymalna liczba godzin każdego bloku w pojedynczym dniu nie może być większa niż 2.

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{L}|\}, \forall d \in \{1, 2, 3, 4, 5\} : s_{d,i} \leq 2$$

3. Dla bloków 3-godzinnych konieczne jest przedzielenie 2 godzin do jednego dnia.

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{L}|\} : v_i = 3 \implies \exists d \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ takie, że } s_{d,i} = 2$$

### 3.5.3. Generowanie populacji początkowej

Generowanie osobników odbywa się losowo z uwzględnieniem wymagań bloków oraz dostępności nauczycieli. Wykorzystuję w tym celu rozkład wielomianowy [8], który zapewnia spełnienie podstawowych ograniczeń. Proces generowania pojedynczego osobnika składa się z następujących etapów wykonywanych dla każdego  $i$ -tego bloku:

1. **Zagregowanie dostępności nauczycieli:**

Dla każdego dnia wyznaczana jest dostępność wszystkich nauczycieli przypisanych do  $i$ -tego bloku.

$$\forall d \in \{1, 2, 3, 4, 5\} : a'_d = \min_{t \in T_i} a_{t,d}$$

gdzie  $T_i = \{t_{w_j} : w_j \in L_i\}$  to zbiór nauczycieli w bloku  $L_i$ .

2. **Jeśli  $v_i = 3$  to:**

- (a)  $X_i \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- (b)  $k, l \leftarrow$  losowe dni, dla których  $a'_i = a'_j = 1$
- (c)  $x_k \leftarrow 2, x_l \leftarrow 1$

Po wykonaniu tych kroków generowanie dla bieżącego bloku jest zakończone.

3. **Stworzenie macierzy prawdopodobieństw wystąpienia bloku w danym dniu:**  
Tworzymy wektor prawdopodobieństw:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{a'_1}{\sum_{i=1}^5 a'_i} & \frac{a'_2}{\sum_{i=1}^5 a'_i} & \frac{a'_3}{\sum_{i=1}^5 a'_i} & \frac{a'_4}{\sum_{i=1}^5 a'_i} & \frac{a'_5}{\sum_{i=1}^5 a'_i} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{bmatrix}$$

tak stworzone prawdopodobieństwa zapewniają, że  $p_d = 0$  jeśli którykolwiek nauczyciel jest niedostępny  $d$ -tego dnia oraz  $\sum_{d=1}^5 p_d = 1$ .

#### 4. Losowanie z rozkładu wielomianowego:

Korzystając z implementacji biblioteki numpy [6], generowana jest próbka:

```
numpy.random.multinomial(r, [p1 p2 ... p5])
```

Wynikiem tej funkcji jest macierz  $X_i = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_5]$ , która ze względu na własności rozkładu spełnia:

$$\begin{cases} x_d \in \mathbb{N} & \forall d \in \{1, 2, \dots, 5\} \\ \sum_{d=1}^5 x_d = v_i \end{cases}$$

#### 5. Korekcja przekroczeń limitu dziennego:

Dopóki  $\exists d \in \{1, 2, 3, 4, 5\} : x_d > 2$ :

- (a) Dla każdego  $d \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  spełniającego  $x_d > 2$ :
  - i.  $X'_i \leftarrow \text{numpy.random.multinomial}(x_d - 2, P)$
  - ii.  $x_d \leftarrow 2$
  - iii.  $X_i \leftarrow X_i + X'_i$

Po wykonaniu powyższej procedury dla wszystkich bloków, uzyskane wektory  $X_i$  łączy się w macierz:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{|\mathcal{L}|} \end{bmatrix}$$

Osobnik populacji reprezentowany jest przez transpozycję tej macierzy:  $S = X^T$ .

#### 3.5.4. Przystosowanie

Ocena jakości osobników odbywa się na podstawie czterech niezależnych metryk:

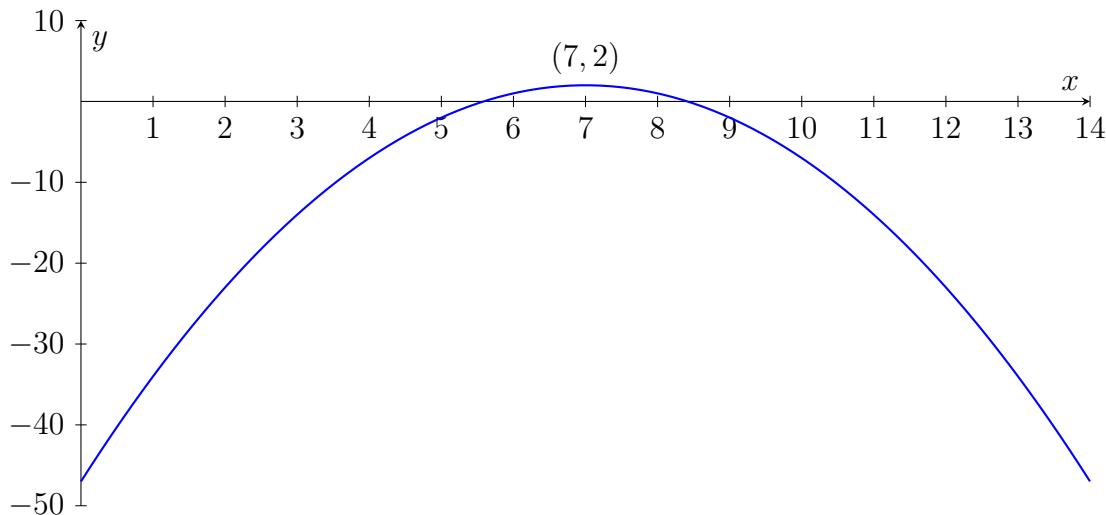
- Równomierność rozkładu godzin pracy nauczycieli w ciągu tygodnia
- Równomierność rozkładu godzin lekcyjnych klas w ciągu tygodnia
- Liczba dni, w których nauczyciele muszą pojawić się w szkole
- Różnica między najdłuższym i najkrótszym dniem lekcyjnym dla klas

W początkowej fazie prac wykorzystałem funkcję gęstości rozkładu normalnego z wartością oczekiwana  $\mu = 8$ , co wynika z ośmiodziennego dnia pracy. Okazało się jednak, że takie podejście zapewniało wyłącznie nagrody, nie oferując mechanizmu karania niepożądanych rozwiązań. Ograniczało to zdolność algorytmu do korekcji błędów. W odpowiedzi na te wyzwania zaprojektowałem funkcję kwadratową:

$$f(x) = -(7 - x)^2 + 2$$

Jak widać na wykresie funkcji 3.4, jej głównym zadaniem jest karanie dni o skrajnym obciążeniu dydaktycznym zarówno dla nauczycieli, jak i uczniów. Wierzchołek funkcji umieściłem w punkcie  $x = 7$ , a nie  $x = 8$ , ponieważ pięciogodzinny dzień pracy jest znacznie bardziej akceptowalny niż dziesięciogodzinny. Funkcja nagradza wartości z przedziału  $(5, 9)$ , przy czym wartości bliskie 7 otrzymują maksymalną ocenę. Wartości spoza tego przedziału są znacznie karane, co zapewnia spełnienie dwóch kluczowych warunków: brak ponad dziesięciogodzinnych dni pracy dla nauczycieli oraz utrzymywanie około siedmiogodzinnych dni lekcyjnych dla uczniów.

Nawet w przypadkach, gdy program nauczania przekracza 35 godzin tygodniowo (co uniemożliwia dodatnią wartość tej funkcji przy równomiernym rozłożeniu), funkcja zachowuje swoją przydatność w zapewnianiu zgodności z wymaganiami równomiernych rozkładów godzin. Ze względu na malejącą pochodną w przedziale  $[7, +\infty)$ , rozwiązania z jednym dniem 7-godzinnym kosztem dnia 11-godzinnego otrzymują gorszą ocenę niż rozwiązania z dwoma dniami 9-godzinnymi, co promuje bardziej zrównoważony rozkład obciążenia. będą gorzej oceniane niż osoby z dwoma dniami o 9 godzinach.



Rysunek 3.4: Wykres funkcji użytej do ewaluacji rozkładu godzin nauczycieli i klas na przestrzeni tygodnia.

### Ocena względem nauczycieli

Ocena równomierności rozpoczyna się od obliczenia dla każdego nauczyciela wektora obciążenia godzinowego:

$$X_i = [x_{i,1} \ x_{i,2} \ x_{i,3} \ x_{i,4} \ x_{i,5}]$$

gdzie  $x_{i,d}$  oznacza liczbę godzin lekcyjnych do przeprowadzenia przez  $i$ -tego nauczyciela  $d$ -tego dnia.

Problemem funkcji kwadradowej jest fakt, że osoby otrzymują dużą karę, kiedy zgodnie z przydziałem nauczyciel ma dzień wolny — jest to niezgodne z założeniami. Wolimy, aby nauczyciel miał cztery dni 8-godzinne niż pięć dni po 6 lub 7 godzin. Aby osiągnąć taką

właściwość zerującej wartość funkcji dla  $x = 0$ , co skutkuje następującą funkcją:

$$\begin{cases} f_T(x) = 0 & x = 0 \\ f_T(x) = -(7 - x)^2 + 2 & \text{wpp.} \end{cases}$$

Następnie wyznaczam sumę wartości funkcji dla wszystkich argumentów tego wektora:

$$F_{c_{T_i}} = \sum_{d=1}^5 f_T(x_{i,d})$$

gdzie  $|\mathcal{T}|$  to liczba wszystkich nauczycieli.

Końcowa ocena wszystkich nauczycieli to najzwyczajniej suma wszystkich wartości:

$$F_{c_T} = \sum_{i=1}^{|\mathcal{T}|} F_{c_{T_i}}$$

### Ocena względem klas

Ocena równomierności godzin lekcyjnych dla klas jest analogiczna do poprzedniej. Tworzony jest wektor obciążenia godzinowego:

$$X_i = [x_{i,1} \ x_{i,2} \ x_{i,3} \ x_{i,4} \ x_{i,5}]$$

gdzie  $g_{i,d}$  oznacza liczbę godzin lekcyjnych przez  $i$ -tej klasy  $d$ -tego dnia.

W tym przypadku dni wolne nie są zgodne ze względu na ograniczenia opisane w 3.1.2, a więc modyfikacje funkcji nie są potrzebne.

Analogicznie do nauczycieli tworzymy kolejno wektory i wartości:

$$F_{c_{C_i}} = \sum_{d=1}^5 f(x_{i,d}) \quad F_{c_C} = \sum_{i=1}^{|\mathcal{C}|} F_{c_{C_i}}$$

gdzie  $|\mathcal{C}|$  to liczba wszystkich klas.

### Normalizacja i wagi

Wyznaczanie końcowej wartości funkcji przystosowania wymaga uwzględnienia stosunku liczby nauczycieli do liczby uczniów. W typowych placówkach oświatowych liczba nauczycieli przywyjsza liczbę klas. Bezpośrednie dodawanie ocen  $F_{c_T} + F_{c_G}$  prowadziłoby do znaczającej dominacji oceny nauczycieli w ocenie końcowej. W celu rozwiązania tego problemu zastosowałem normalizację poprzez dzielenie każdej składowej przez odpowiednio  $|\mathcal{T}|$  i  $|\mathcal{C}|$ . Takie podejście gwarantuje, że wpływ pojedynczej klasy na ocenę końcową jest porównywalny z wpływem pojedynczego nauczyciela.

Kolejnym aspektem wymagającym uwzględnienia jest relatywna ważność obu kryteriów oceny. W praktyce, wymagania równomiernego rozkładu dla każdej klasy są ważniejsze niż równomierny rozkład godzin nauczycieli. Aby umożliwić sterowanie tymi preferencjami należy zaimplementować wagi, co prowadzi do następującej postaci funkcji przystosowania:

$$F_c = \frac{\alpha_T}{|\mathcal{T}|} F_{c_T} + \frac{\alpha_G}{|\mathcal{C}|} F_{c_G}, \quad \alpha_T, \alpha_G \in \mathbb{R}^+$$

gdzie  $\alpha_T$  to waga oceny nauczycieli, a  $\alpha_G$  to waga oceny klas.

### 3.5.5. Selekcja

Zastosowałem tradycyjną metodę ruletkową. Polega ona na losowaniu osobników, którzy posługują jako rodzice z prawdopodobieństwami, które są proporcjonalne do wartości ich funkcji przystosowania. Mając wektor ocen  $F_{c \text{ total}} = [F_{c_1} \ F_{c_1} \ \dots \ F_{c_{\mathfrak{P}}}]$ , gdzie  $\mathfrak{P}$  to rozmiar populacji, sortujemy go i dzielimy go na pół. Drugą połowę populacji, która ma najgorsze wyniki, usuwamy i na jej miejsce wstawiam potomków rodziców wylosowanych zgodnie z prawdopodobieństwami:

$$P = [\sigma(F_{c_1}) \ \sigma(F_{c_2}) \ \dots \ \sigma(F_{c_{\mathfrak{P}}})], \quad \sigma(F_{c_i}) = \frac{\exp[F_{c_i}]}{\sum_{j=1}^{\mathfrak{P}} \exp[F_{c_j}]}$$

W celu zamiany funkcji przystosowania na prawdopodobieństwa użyłem funkcji SoftMax.

### 3.5.6. Krzyżowanie

Największym wyzwaniem podczas projektowania algorytmu okazało się opracowanie krzyżowania osobników, które zagwarantowałoby spójność z nałożonymi ograniczeniami. Niemożność zaimplementowania takich rozwiązań jak proste modyfikowanie krzyżowania jednopunktowego zmusiło mnie do opracowania specjalistycznych metod.

Z uwagi na dwie składowe funkcji zdecydowałem się na zaimplementowanie dwóch niezależnych metod krzyżowania osobników. Takie podejście umożliwia równoczesne dziedziczenie cech związanych z optymalnym rozkładem zajęć zarówno z perspektywy nauczycieli, jak i klas. Pozwala to także na stworzenie dwóch różnych potomków z dwóch rodziców.

#### Względem oceny nauczycieli

Funkcja krzyżowania uwzględniająca ocenę rozkładu godzin nauczycieli definiuje się następująco:

##### Dane wejściowe:

- $S_1$  — pierwszy rodzic
- $S_2$  — drugi rodzic
- $F_{T_{S_1}}$  — ocena nauczycieli pierwszego osobnika
- $F_{T_{S_2}}$  — ocena nauczycieli drugiego osobnika

##### Proces:

1. Inicjalizacja macierzy potomka:  $S_{\text{child}} = \mathbf{0}_{5 \times |\mathcal{L}|}$
2. Dla każdego nauczyciela  $i \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{T}|\}$ :
  - (a) Jeżeli  $F_{T_{i,S_1}} > F_{T_{i,S_2}}$ , to dla każdego bloku  $j$  prowadzonego przez nauczyciela  $i$ :
    - i. Przepisz kolumnę  $j$  z macierzy  $S_1$  do kolumny  $j$  macierzy  $S_{\text{child}}$
  - (b) W przeciwnym przypadku, dla każdego bloku  $j$  prowadzonego przez nauczyciela  $i$ :

- i. Przepisz kolumnę  $j$  z macierzy  $S_2$  do kolumny  $j$  macierzy  $S_{\text{child}}$

Wygenerowany w ten sposób osobnik  $S_{\text{child}}$  ma cechy, które gwarantują jak najlepsze przypisanie nauczycieli wśród obu rodziców. Następną zaletą tego podejścia jest fakt, że gwarantuje to też także spełnienie wszystkich wymagań, jako że wszystkie wymagania odnoszą się do indywidualnych bloków, a tych nie zmieniamy, tylko przepisujemy.

### **Wzgędem oceny klas**

Analogicznie definiujemy krzyżowanie względem oceny klas:

#### **Dane wejściowe:**

- $S_1$  — pierwszy rodzic
- $S_2$  — drugi rodzic
- $F_{G_{S_1}}$  — ocena klas pierwszego osobnika
- $F_{G_{S_2}}$  — ocena klas drugiego osobnika

#### **Proces:**

1. Inicjalizacja macierzy potomka:  $S_{\text{child}} = \mathbf{0}_{5 \times |\mathcal{L}|}$
2. Dla każdej klasy  $i \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{C}|\}$ :
  - (a) Jeżeli  $F_{G_{i,S_1}} > F_{G_{i,S_2}}$ , to dla każdego bloku  $j$  prowadzonego dla klasy  $i$ :
    - i. Przepisz kolumnę  $j$  z macierzy  $S_1$  do kolumny  $j$  macierzy  $S_{\text{child}}$
  - (b) W przeciwnym przypadku, dla każdego bloku  $j$  prowadzonego przez nauczyciela  $i$ :
    - i. Przepisz kolumnę  $j$  z macierzy  $S_2$  do kolumny  $j$  macierzy  $S_{\text{child}}$

Wygenerowany w ten sposób osobnik  $S_{\text{child}}$  ma cechy, które gwarantują jak najlepszy rozkład godzin lekcyjnych dla klas wśród obu rodziców. Podobnie w tym przypadku nie modyfikujemy przydziału godzin w indywidualnych blokach, więc zachowujemy zgodność z ograniczeniami.

### **3.5.7. Mutacja**

Analogicznie do przypadku krzyżowania, zastosowanie prostych metod mutacji (takich jak losowa zamiana pojedynczych przydziałów) nie jest możliwe ze względu na wysokie ryzyko naruszenia ograniczeń. W szczególności, modyfikacja pojedynczych wartości macierzy  $S$  może prowadzić do niezgodności z warunkiem głównym bloków.

W odpowiedzi na to wyzwanie, przyjąłem strategię mutacji operującą na poziomie bloków — kolumn macierzy przydziałów, podobną do podejścia zastosowanego w funkcji krzyżowania. Pozwana to na zachowania zgodności z ograniczeniami.

Procedura mutacji definiuje się następująco:

1. Z populacji wybieranych jest losowo  $n$  osobników.
2. Dla każdego wybranego osobnika wybierany jest losowy podzbiór kolumn (bloków lekcyjnych).
3. Dla każdej wybranej kolumny  $j$  wylosuj nowy przydział zgodnie z procedurą opisaną w podrozdziale 3.5.3.

Takie podejście gwarantuje, że zmutowane osobniki zachowują zgodność z podstawowymi ograniczeniami problemu, jednocześnie wprowadzając do populacji nowe warianty rozkładów godzinowych wybranych bloków lekcyjnych.

W celu zwiększenia stabilności procesu ewolucyjnego zaimplementowałem także elitarnego osobnika, który zawsze pojawia się niezmieniony w następnej generacji. Jest to osobik o największej wartości funkcji przystosowania:

$$S_{\text{best}} = S_i, \quad i = \arg \max_{j \in \{1, 2, \dots, p\}} F_{c_j}$$

### 3.5.8. Przykładowe rezultaty

*Przykładowe macierze z opisami*

## 3.6. Solver programowania liniowego z ograniczeniami

W trzecim etapie algorytmu wykorzystuję solver programowania liniowego z ograniczeniami (Constraint Programming — CP). W odróżnieniu od czystego programowania liniowego (MIP), solver CP operuje na szerszej klasie ograniczeń, w tym na zmiennych interwałowych, co czyni go idealnym narzędziem do problemów harmonogramowania. W odpowiedzi na wyzwania napotkane w podejściu opisanym w podrozdziale 3.2.1 zdecydowałem się na wykorzystanie zmiennych interwałowych opisanych dokładniej w dokumentacji OR-Tools [11].

Zalety podejścia CP:

- **Naturalne modelowanie:** Zmienne interwałowe bezpośrednio reprezentują zajęcia o określonym czasie rozpoczęcia i zakończenia.
- **Efektywność pamięciowa:** W porównaniu z reprezentacją binarną z podrozdziału 3.2.1, podejście interwałowe redukuje liczbę zmiennych decyzyjnych.
- **Specjalizowane ograniczenia:** Solver oferuje gotowe implementacje ograniczeń typowych dla harmonogramów — nakładanie się interwałów.

Proces jest wykonywany niezależnie dla każdego dnia tygodnia  $d \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , reprezentowanego przez wiersze macierzy  $S_{\text{best}}$ . Dla każdego dnia rozwiązuje podproblem zawierający tylko te bloki  $L_i$ , dla których  $S_{\text{best}_{d,i}} > 0$ .

Takie podejście:

- Redukuje wymagania pamięciowe o  $\approx 5$ .
- Umożliwia równoległe przetwarzanie dni, jeśli nie ogranicza nas pamięć.
- Upraszcza strukturę ograniczeń.

### 3.6.1. Reprezentacja interwałów

Dla modelowania zajęć używamy zmiennych interwałowych, które reprezentują bloki czasowe o określonej długości:

- **Interwał podstawowy** dla bloku lekcyjnego  $L_i \in \mathcal{L}$ :

$$\begin{cases} s_i & \in [0, H] \\ d_i & = v_i \\ e_i & \in [0, H] \\ e_i & = s_i + d_i \end{cases}$$

gdzie  $s_i$  to czas rozpoczęcia,  $e_i$  to czas zakończenia, a  $d_i$  to czas trwania.

- **Interwał opcjonalny** dla przypisania sali:

$$\begin{cases} p_{i,j,r} & \in \{0, 1\} \\ p_{i,j,r} & \implies e_i = s_i + d_i \end{cases}$$

### 3.6.2. Zmienne decyzyjne

#### Interwały bloków lekcyjnych

Dla każdego bloku  $L_i \in \mathcal{L}$  z liczbą godzin  $v_i > 0$  definiujemy:

$$I_i = (s_i, v_i, e_i)$$

#### Przypisania sal

Dla każdej możliwej kombinacji (blok, nauczyciel, sala) definiujemy interwał opcjonalny:

$$O_{L_i,t,r} = (s_i, v_i, e_i, p_{L_i,t,r}), \quad \begin{cases} L_i & \in \mathcal{L} \\ t & \in \mathcal{T} \\ r & \in \mathcal{R} \end{cases}$$

gdzie brane pod uwagę są tylko możliwe kombinacje. Przykładowo blok lekcyjny z jednym wymaganiem głównym matematyki, nauczyciel matematyki oraz sala do matematyki.

### 3.6.3. Ograniczenia

#### Ograniczenie przypisania sal

Dla każdego bloku  $L_i$  musi być przypisana odpowiednia liczba sal:

$$\forall L_i \in \mathcal{L} : \sum_{r \in \mathcal{R}, t \in \mathcal{T}} p_{L_i, t, r} = |T_i|$$

#### Ciągłość zajęć dla klas

Dla każdej klasy  $c \in \mathcal{C}$  i dnia  $d \in \{1, 2, \dots, 5\}$ :

$$\mathcal{L}_{c,d} = \{L_i \in \mathcal{L} : \exists w \in L_i \text{ takie, że } c_w = c \wedge s_{\text{best}_{d,i}} > 0\}$$

#### Nienakładanie się zajęć [10]:

$$\text{AddNoOverlap}(\{I_i : L_i \in \mathcal{L}_{c,d}\})$$

#### Brak okienek:

$$\begin{cases} \text{start}_c = \min\{s_i : L_i \in \mathcal{L}_{c,d}\} \\ \text{end}_c = \max\{e_i : L_i \in \mathcal{L}_{c,d}\} \\ \text{end}_c - \text{start}_c = \sum_{L_i \in \mathcal{L}_{c,d}} v_i \end{cases}$$

#### Nakładanie się nauczycieli

Dla każdego nauczyciela  $t \in \mathcal{T}$  i dnia  $d \in \{1, 2, \dots, 5\}$ :

$$\mathcal{L}_{t,d} = \{L_i \in \mathcal{L} : t \in T_i \wedge s_{\text{best}_{d,i}} > 0\}$$

$$\text{AddNoOverlap}(\{I_i : L_i \in \mathcal{L}_{t,d}\})$$

#### Kolizje sal

Dla każdej sali  $r \in \mathcal{R}$  i dnia  $d \in \{1, 2, \dots, 5\}$ :

$$\mathcal{O}_{r,d} = \{O_{L_i, t, r} : L_i \in \mathcal{L}, t \in \mathcal{T}, s_{\text{best}_{d,i}} > 0\}$$

$$\text{AddNoOverlap}(\mathcal{O}_{r,d})$$

#### Sekwencjonowanie przedmiotów

Ograniczenie dotyczące dwóch takich samych przedmiotów jednego dnia jest łatwo rozwijywane poprzez zastosowanie interwałów, gdyż z definicji mamy zagwarantowane, że:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, |\mathcal{L}|\} : v_i = 2 \implies e_i - s_i = 2$$

W ten sposób jeśli do danego dnia są przypisane dwie godziny  $i$ -tego bloku, to mamy gwarancję, że następują one po sobie.

### 3.6.4. Funkcja celu

Minimalizujemy całkowity czas przebywania nauczycieli w szkole:

$$\forall t \in \mathcal{T}, d \in \{1, 2, \dots, 5\} : \begin{cases} \text{start}_{t,d} &= \min\{s_i : L_i \in \mathcal{L}_{t,d}\} \\ \text{end}_{t,d} &= \max\{e_i : L_i \in \mathcal{L}_{t,d}\} \\ \text{duration}_{t,d} &= \text{end}_{t,d} - \text{start}_{t,d} \end{cases}$$

$$F_c = \sum_{t \in \mathcal{T}} \sum_{d=1}^5 \text{duration}_{t,d}$$

Minimalizacja tej funkcji prowadzi do kompaktowego układania zajęć, redukując okienka w planach nauczycieli.

### 3.6.5. Transformacja interwałów na przypisania końcowe

Po znalezieniu rozwiązania przez solver CP-SAT, konieczne jest przekształcenie zmiennych interwałowych na ostateczne przypisania w zbiorze  $\mathcal{Z}$ . Proces ten obejmuje ekstrakcję wartości zmiennych decyzyjnych i mapowanie na strukturę danych planu lekcji.

#### Ekstrakcja rozwiązań z solvera

Dla każdego interwału  $I_i$  w rozwiązaniu zapisujemy następujące wartości:

- $L_i$
- $s_i$
- $e_i$
- $v_i$
- $d$  — aktualnie przetwarzany dzień tygodnia
- $\mathcal{R}_i = \{r \in \mathcal{R} : \exists t \in \mathcal{T} \text{ takie, że } p_{i,t,r} = 1\}$  — zbiór aktywnych sal, które zostały przypisane do bloku  $L_i$ .

#### Mapowanie na strukturę lekcji

Dla każdych takich wartości tworzymy konkretne lekcje w zbiorze  $\mathcal{Z}$ . Wpierw tworzymy funkcję, która będzie przypisywać nauczycieli i prowadzone przez nich przedmioty  $s$  do odpowiednich sal.

$$f : T_i \rightarrow \mathcal{R}_i$$

$$\forall t \in T_i : f(t) = r \in \mathcal{R}_i \text{ takie, że } r \text{ obsługuje przedmiot } s \in \vec{S}_{L_i}$$

Konieczne jest użycie takiej funkcji, ponieważ każdy nauczyciel w jednym bloku może mieć przypisane wiele klas. Musimy stworzyć wiele przypisań, które będą miały taką samą salę  $r$  dla każdej klasy.

Dla każdego wymagania  $w \in L_i$  i każdego slotu czasowego  $h \in [1, e_i - s_i]$ :

$$\begin{aligned} z &= (d, h, c_w, t_w, s_w, f(t_w)) \\ \mathcal{Z}_d &\leftarrow \mathcal{Z}_d \cup \{z\} \end{aligned}$$

### Przykład transformacji

Rozważmy blok  $L_i = \{w_1, w_2\}$  z  $v_i = 2$ , gdzie:

- $w_1 = (t_1, c_1, s_1, 3)$  — nauczyciel  $t_1$ , klasa  $c_1$ , wychowanie fizyczne
- $w_2 = (t_2, c_1, s_2, 3)$  — nauczyciel  $t_2$ , klasa  $c_1$ , wychowanie fizyczne

Po rozwiązaniu otrzymujemy przypisania:

$$\begin{aligned} z_1 &= (1, 2, c_A, t_1, s_1, r_1) \\ z_2 &= (1, 3, c_A, t_1, s_1, r_1) \\ z_3 &= (1, 2, c_A, t_2, s_2, r_2) \\ z_4 &= (1, 3, c_A, t_2, s_2, r_2) \end{aligned}$$

Jest to równoznaczne z lekką wychowania fizycznego podzieloną na dwie grupy, które odbywają się w tym samym czasie.

Proces ten powtarzamy dla wszystkich dni tygodnia, tworząc kompletny plan lekcji  $\mathcal{Z} = \bigcup_{d=1}^5 \mathcal{Z}_d$  spełniający wszystkie ograniczenia i optymalizujący funkcję celu.

### 3.6.6. Przykładowe wyniki

abc

# 4. Aplikacja

## 4.1. Specyfikacja wymagań

### 4.1.1. Wymagania funkcjonalne

Aplikacja musi realizować cztery kluczowe grupy funkcjonalności:

- **Obsługa wielu planów i konfiguracji** — możliwość pracy z wieloma zestawami zasobów i ograniczeń oraz wieloma planami równolegle.
- **Wprowadzanie danych** — import plików txt i csv oraz ręczna edycja nauczycieli, klas, przedmiotów, sal, wymagań głównych i bloków przedmiotów.
- **Generowanie planu** — automatyczne tworzenie planów z możliwością kontroli parametrów algorytmu ewolucyjnego.
- **Przeglądanie planów** — wizualizacja planów z perspektywy nauczycieli i klas dla wielu wariantów.

### 4.1.2. Wymagania niefunkcjonalne

System musi spełniać następujące wymagania jakościowe:

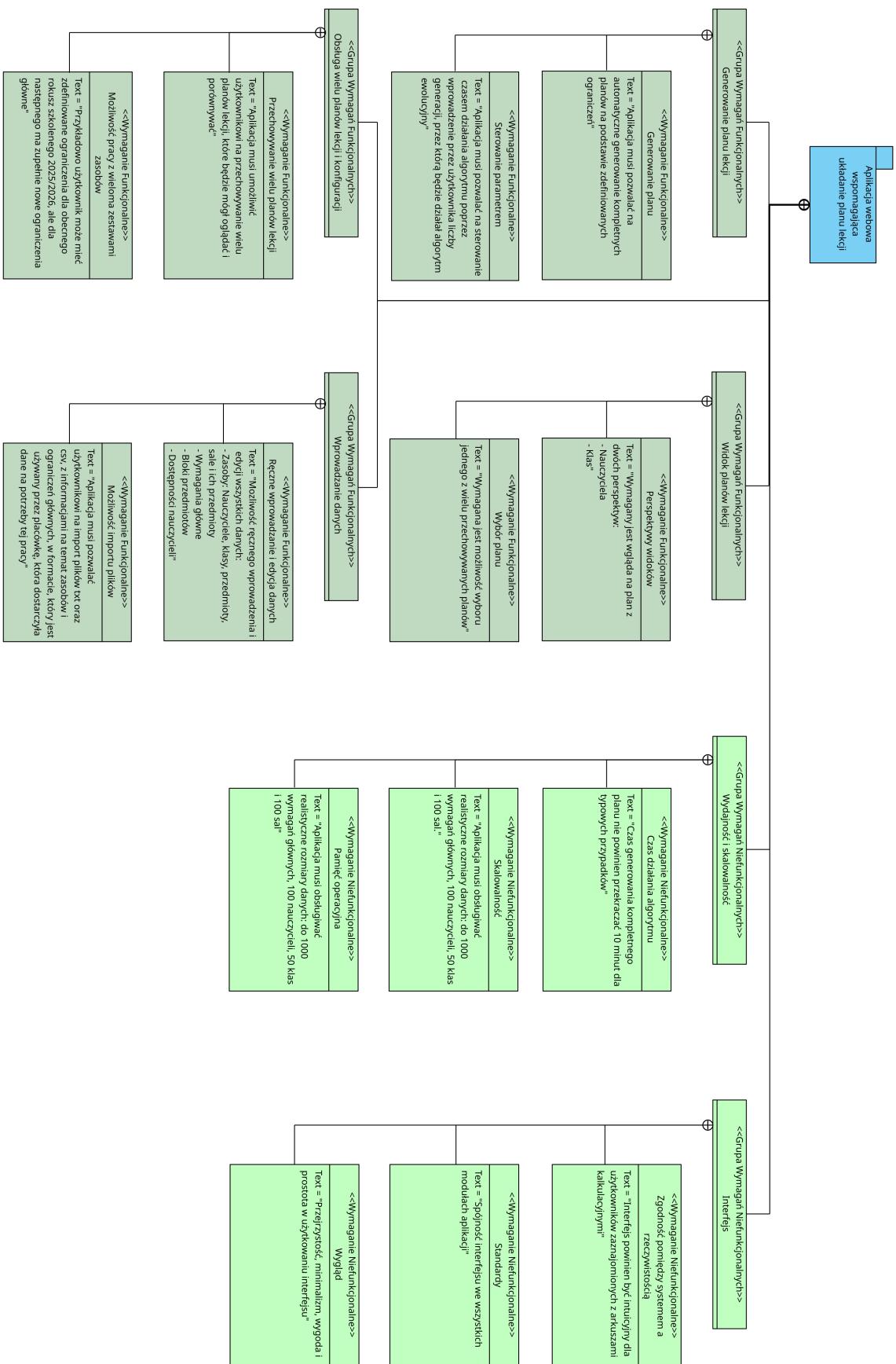
- **Wymagania wydajnościowe:**

- Czas generowania kompletnego planu nie powinien przekraczać 10 minut dla typowych przypadków.
- Aplikacja musi obsługiwać realistyczne rozmiary danych: do 1000 wymagań głównych, 100 nauczycieli, 50 klas i 100 sal.
- Zużycie pamięci operacyjnej nie może przekraczać 8GB podczas generowania planu.

- **Wymagania co do interfejsu:**

- Interfejs powinien być intuicyjny dla użytkowników zaznajomionych z arkuszami kalkulacyjnymi.
- Spójność interfejsu we wszystkich modułach aplikacji.
- Przejrzystość, minimalizm, wygoda i prostota w użytkowaniu interfejsu.

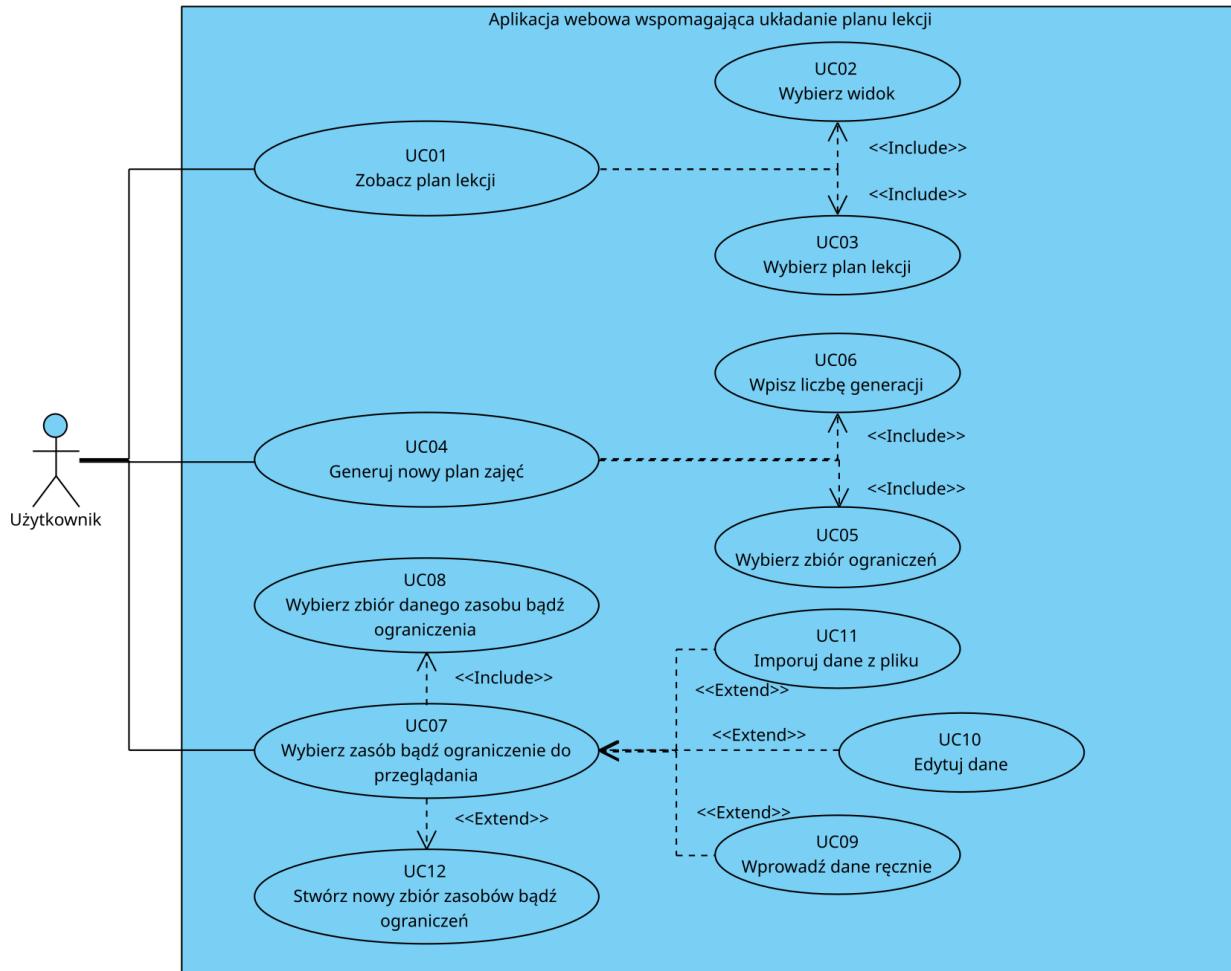
Szczegółowa specyfikacja wymagań została przedstawiona na załączonym diagramie przykładów użycia (4.1).



Rysunek 4.1: Diagram wymagań

### 4.1.3. Przypadki użycia

Diagram przypadków użycia pozwala na zwizualizowanie wcześniej omawianych wymagań funkcjonalnych w formie graficznej, ukazując interakcje między użytkownikami a systemem. Diagram pomaga połączyć specyfikację wymagań z projektem technicznym, stanowiąc punkt wyjścia do dalszej analizy i implementacji. W niniejszej sekcji omawiam kluczowe przypadki użycia zilustrowane na diagramie.



Rysunek 4.2: Diagram przypadków użycia

<b>Identyfikator</b>	UC01
<b>Przypadek użycia</b>	Zobacz plan lekcji
<b>Aktor</b>	Użytkownik
<b>Cel</b>	Sprawdzenie wygenerowanych planów
<b>Składowe przypadki użycia</b>	Wybierz widok Wybierz plan lekcji
<b>Warunki wstępne</b>	Wprowadzone zasoby: nauczyciele, sale, klasy, przedmioty Przynajmniej jeden wygenerowany plan
<b>Stan końcowy</b>	Wyświetlony plan lekcji
<b>Scenariusz</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Użytkownik przechodzi w widok przeglądania planów lekcji</li> <li>2. Użytkownik wybiera plan lekcji</li> <li>3. Użytkownik wybiera widok</li> <li>4. System wyświetla odpowiedni plan lekcji z danej perspektywy</li> </ol>

Tabela 4.1: Przypadek użycia UC01

<b>Identyfikator</b>	UC02
<b>Przypadek użycia</b>	Wybierz widok
<b>Aktor</b>	Użytkownik
<b>Cel</b>	Wybranie perspektywy oglądania planu lekcji
<b>Warunki wstępne</b>	Wprowadzone zasoby: nauczyciele, sale, klasy, przedmioty Przynajmniej jeden wygenerowany plan
<b>Stan końcowy</b>	Wybrany nauczyciel bądź klasa Plan wyświetlony z perspektywy wybranej klasy bądź nauczyciela
<b>Scenariusze</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1a. Użytkownik rozwija listę dostępnych nauczycieli</li> <li>2a. Użytkownik wybiera konkretnego nauczyciela</li> <li>3a. System wyświetla wybranego nauczyciela</li> </ol> <ol style="list-style-type: none"> <li>1b. Użytkownik rozwija listę dostępnych klas</li> <li>2b. Użytkownik wybiera konkretną klasę</li> <li>3b. System wyświetla wybraną klasę</li> </ol>

Tabela 4.2: Przypadek użycia UC02

<b>Identyfikator</b>	UC03
<b>Przypadek użycia</b>	Wybierz plan lekcji
<b>Aktor</b>	Użytkownik
<b>Cel</b>	Wybranie planu lekcji do podglądu
<b>Składowe przypadki użycia</b>	Wybierz zbiór ograniczeń Wybierz liczbę generacji
<b>Warunki wstępne</b>	Wprowadzone zasoby: nauczyciele, sale, klasy, przedmioty Przynajmniej jeden wygenerowany plan
<b>Stan końcowy</b>	Wybrany plan lekcji Możliwość wybrania w systemie widoku
<b>Scenariusz</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Użytkownik rozwija listę dostępnych planów lekcji</li> <li>2. Użytkownik wybiera konkretnego plan lekcji</li> <li>3. System wyświetla nazwę wybranego planu lekcji</li> <li>4. System umożliwia wybranie widoku</li> </ol>

Tabela 4.3: Przypadek użycia UC03

<b>Identyfikator</b>	UC04
<b>Przypadek użycia</b>	Generuj nowy plan lekcji
<b>Aktor</b>	Użytkownik
<b>Cel</b>	Wygenerowanie nowego planu lekcji na podstawie wybranych ograniczeń
<b>Warunki wstępne</b>	Wprowadzone zasoby: nauczyciele, sale, klasy, przedmioty Wprowadzone wymagania główne Wprowadzone dostępności nauczycieli Wprowadzone bloki przedmiotów
<b>Stan końcowy</b>	Wyświetlony komunikat o sukcesie operacji
<b>Scenariusz</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Użytkownik wybiera zestaw ograniczeń</li> <li>2. Użytkownik wpisuje liczbę generacji</li> <li>3. Użytkownik wybiera opcję generowania planu</li> <li>4. System generuje plan</li> <li>5. System wysyła powiadomienie o zakończeniu procesu</li> </ol>

Tabela 4.4: Przypadek użycia UC04

<b>Identyfikator</b>	UC05
<b>Przypadek użycia</b>	Wybierz zbiór ograniczeń
<b>Aktor</b>	Użytkownik
<b>Cel</b>	Wybranie zbioru ograniczeń służącego do wygenerowania nowego planu lekcji
<b>Warunki wstępne</b>	Przynajmniej jeden istniejący zbiór ograniczeń
<b>Stan końcowy</b>	Wybrany zestaw ograniczeń
<b>Scenariusz</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Użytkownik rozwija listę dostępnych zestawów ograniczeń</li> <li>2. Użytkownik wybiera konkretny zestaw ograniczeń</li> <li>3. System wyświetla nazwę wybranego zestawu ograniczeń</li> </ol>

Tabela 4.5: Przypadek użycia UC05

<b>Identyfikator</b>	UC06
<b>Przypadek użycia</b>	Wpisz liczbę generacji
<b>Aktor</b>	Użytkownik
<b>Cel</b>	Wpisanie liczby generacji służącej do wygenerowania planu lekcji
<b>Warunki wstępne</b>	Przynajmniej jeden istniejący zbiór ograniczeń
<b>Stan końcowy</b>	Widoczna wpisana liczba generacji Możliwa opcja wygenerowania planu lekcji
<b>Scenariusz</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Użytkownik wpisuje liczbę generacji</li> <li>2. System wyświetla wpisaną liczbę</li> <li>3. System umożliwia wybranie opcji generowania planu lekcji</li> </ol>

Tabela 4.6: Przypadek użycia UC06

<b>Identyfikator</b>	UC07
<b>Przypadek użycia</b>	Wybierz zasób bądź ograniczenie do przeglądania
<b>Aktor</b>	Użytkownik
<b>Cel</b>	Wybranie zasoby bądź ograniczenia do przeglądania, edytowania bądź wprowadzania
<b>Składowe przypadki użycia</b>	Wybierz zbiór danego zasobu bądź ograniczenia Stwórz nowy zbiór danego zasobu bądź ograniczenia
<b>Warunki wstępne</b>	—
<b>Stan końcowy</b>	Widoczny widok zasobu bądź ograniczenia
<b>Scenariusz</b>	1. Użytkownik rozwija listę dostępnych zasobów i ograniczeń
	2. Użytkownik wybiera jeden z nich
	3. System wyświetla widok danego zasobu
	4a. Użytkownik wybiera zbiór danego zasobu bądź ograniczenia
	4b. Użytkownik tworzy nowy zbiór danego zasobu bądź ograniczenia
	5a. Użytkownik importuje dane z pliku
	5b. Użytkownik edytuje dane
	5c. Użytkownik wprowadza dane ręcznie

Tabela 4.7: Przypadek użycia UC07

<b>Identyfikator</b>	UC08
<b>Przypadek użycia</b>	Wybierz zbiór danego zasobu bądź ograniczenia
<b>Aktor</b>	Użytkownik
<b>Cel</b>	Wybranie zbioru zasobu bądź ograniczenia do wglądu
<b>Warunki wstępne</b>	Przynajmniej jeden istniejący zbiór zasobu bądź ograniczenia
<b>Stan końcowy</b>	Widoczna nazwa zbioru Widoczny wybrany zbiór zasobów bądź ograniczeń
<b>Scenariusz</b>	1. Użytkownik wpisuje liczbę generacji 2. System wyświetla wpisaną liczbę 3. System umożliwia wybranie opcji generowania planu lekcji

Tabela 4.8: Przypadek użycia UC08

<b>Identyfikator</b>	UC09
<b>Przypadek użycia</b>	Wprowadź ręcznie dane
<b>Aktor</b>	Użytkownik
<b>Cel</b>	Ręczne wprowadzenie nowych zasobów bądź ograniczeń
<b>Warunki wstępne</b>	Przynajmniej jeden istniejący zbiór zasobu bądź ograniczenia
<b>Stan końcowy</b>	Widoczne nowe ograniczenie/zasób Nowe ograniczenie/zasów zapisany w bazie danych
<b>Scenariusz</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Użytkownik wybiera opcję dodania nowego zasobu bądź ograniczenia</li> <li>2. Użytkownik wpisuje odpowiednie dane</li> <li>3. Użytkownik zapisuje dane</li> <li>3. System wyświetla powiadomienie o powodzeniu zapisu</li> </ol>

Tabela 4.9: Przypadek użycia UC09

<b>Identyfikator</b>	UC10
<b>Przypadek użycia</b>	Edytuj dane
<b>Aktor</b>	Użytkownik
<b>Cel</b>	Edytowanie istniejących danych
<b>Warunki wstępne</b>	Przynajmniej jeden istniejący zbiór zasobu bądź ograniczenia
<b>Stan końcowy</b>	Widoczne zmiany Zmiany zapisane w bazie danych
<b>Scenariusz</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Użytkownik edytuje wiersz zasobu bądź ograniczenia</li> <li>2. Użytkownik zapisuje dane</li> <li>3. System wyświetla powiadomienie o powodzeniu zapisu</li> </ol>

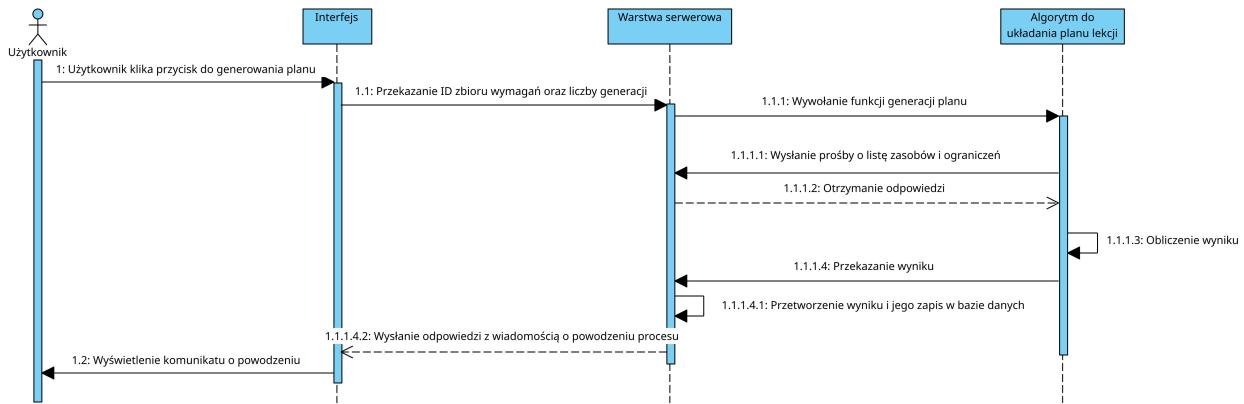
Tabela 4.10: Przypadek użycia UC10

<b>Identyfikator</b>	UC11
<b>Przypadek użycia</b>	Importuj dane z pliku
<b>Aktor</b>	Użytkownik
<b>Cel</b>	Import danych z pliku txt lub csv
<b>Warunki wstępne</b>	Przynajmniej jeden istniejący zbiór zasobu bądź ograniczenia Użytkownik posiada plik we właściwym formacie
<b>Stan końcowy</b>	Widoczne dane, które były w pliku Dane zapisane w bazie danych
<b>Scenariusz</b>	1a. Użytkownik wybiera opcję wybrania pliku źródłowego 2a. Użytkownik wybiera i zatwierdza wybrany plik źródłowy 1b. Użytkownik otwiera eksplorator plików 2b. Użytkownik przeciąga i upuszcza wybrany plik źródłowy 3. System wyświetla dane w pliku 4. Użytkownik zapisuje dane 5. System wyświetla powiadomienie o powodzeniu zapisu

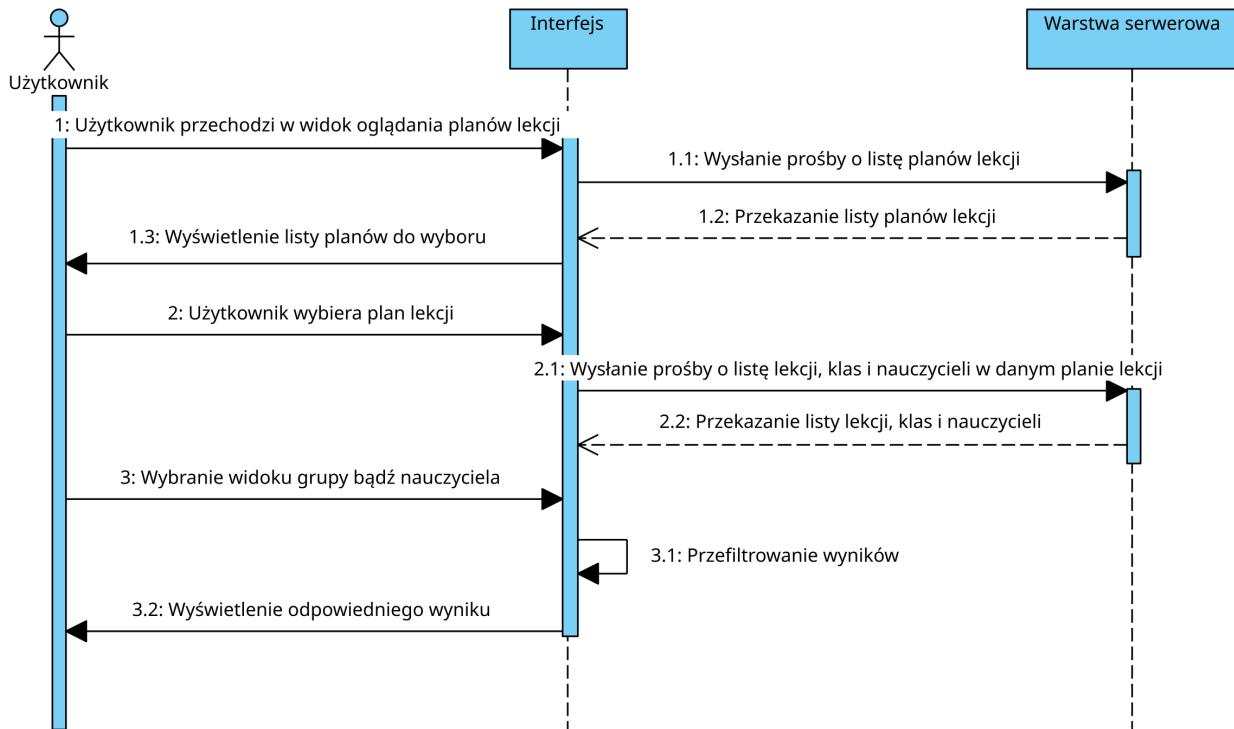
Tabela 4.11: Przypadek użycia UC11

<b>Identyfikator</b>	UC12
<b>Przypadek użycia</b>	Stwórz nowy zbiór zasobów bądź ograniczeń
<b>Aktor</b>	Użytkownik
<b>Cel</b>	Stworzenie nowego zbioru zasobów bądź ograniczeń
<b>Warunki wstępne</b>	—
<b>Stan końcowy</b>	Wybrany zbiór zasobów bądź ograniczeń Widoczny nowy zbiór zasobów bądź ograniczeń
<b>Scenariusz</b>	Użytkownik wpisuje nazwę nowego zbioru zasobów bądź ograniczeń Użytkownik wybiera opcję stworzenia nowego zbioru zasobów bądź ograniczeń System wyświetla powiadomienie o powodzeniu zapisu System wybiera nowy zbiór zasobów bądź ograniczeń

Tabela 4.12: Przypadek użycia UC12



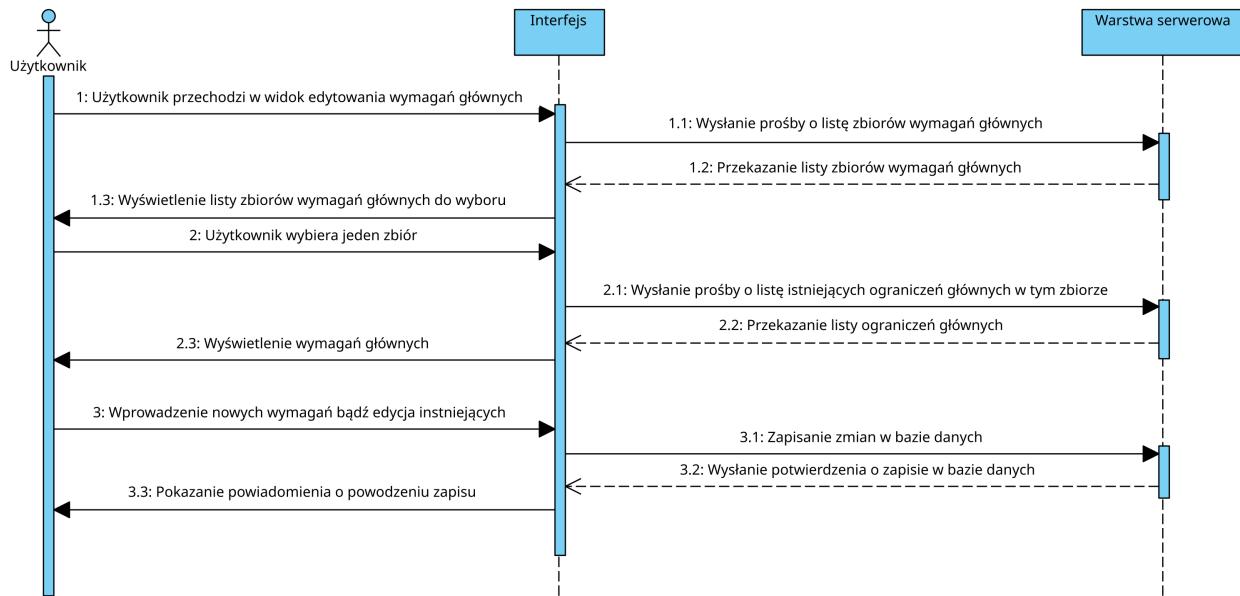
Rysunek 4.3: Diagram sekwencji dla przypadku użycia generowania planu lekcji



Rysunek 4.4: Diagram sekwencji dla przypadku użycia oglądania planu lekcji

#### 4.1.4. Diagramy sekwencji

Diagramy sekwencji stanowią kluczowy element modelowania systemu, ukazując sekwencyjny przepływ komunikatów między obiektami w czasie. Pozwalają prześledzić interakcje między obiektami w systemie — od inicjacji akcji w interfejsie, poprzez przetwarzanie w backendzie, aż do generowania planu przez algorytmy. W niniejszej sekcji przedstawiam scenariusze współpracy pomiędzy głównymi komponentami aplikacji: interfejsem, warstwą serwerową oraz algorytmem.



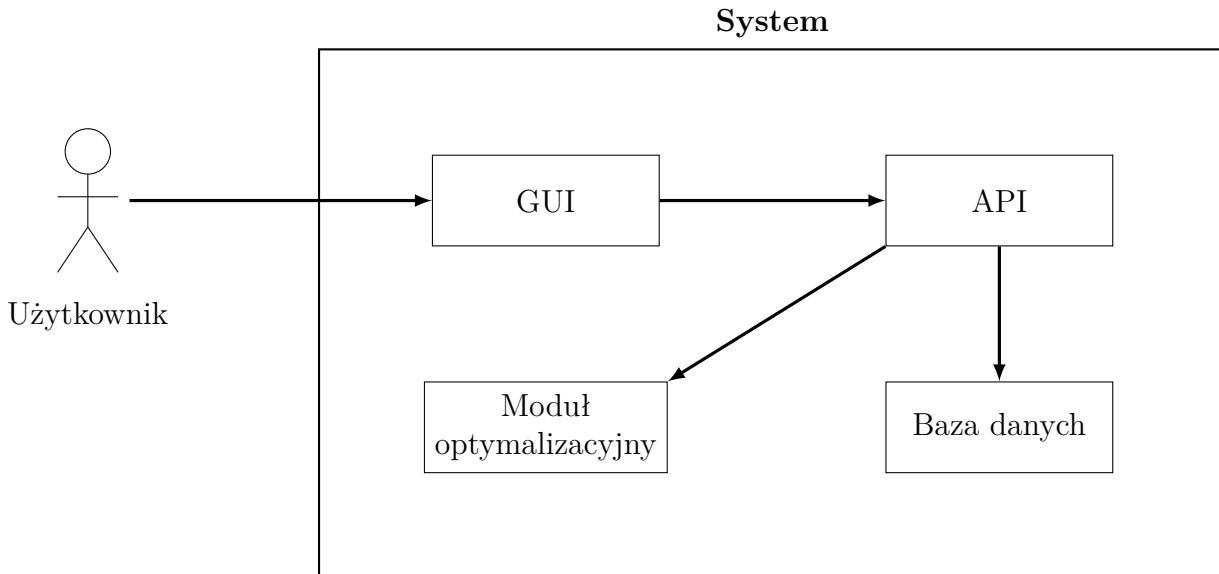
Rysunek 4.5: Diagram sekwencji dla przypadku użycia edycji bądź wprowadzania wymagań głównych

## 4.2. Projekt

### 4.2.1. Architektura systemu

Wybór poprawnej architektury stanowi jedno z pierwszych zadań, które stoi przed projektantem aplikacji. Aby zagwarantować możliwość spełnienia wszystkich wymagań oraz umożliwić dalszy, łatwy rozwój rozwiązania, zdecydowałem się na podzielenie aplikacji na 4 oddzielne komponenty:

1. Interfejs użytkownika (*ang. Graphical User Interface GUI*) — odpowiada za komunikację z użytkownikiem, umożliwiając wygodną obsługę systemu bez konieczności znajomości szczegółów działania jego wewnętrznych mechanizmów.
2. Warstwę severową — umożliwia sprawną integrację wszystkich komponentów poprzez interfejs programowania aplikacji (*ang. Application Programming Interface, API*).
3. Bazę danych — przechowuje wszystkie zasoby, ograniczenia oraz plany lekcji w ustrukturyzowany sposób.
4. Moduł optymalizacyjny — pozwala na generowanie planów lekcji.



Rysunek 4.6: Architektura aplikacji

#### 4.2.2. Projekt struktury bazy danych

Projekt bazy danych stanowi kluczowy element architektury aplikacji webowej, determinujący jej skalowalność i funkcjonalność. Głównym wyzwaniem projektowym było opracowanie modelu umożliwiającego wielokrotne wykorzystanie tych samych zasobów przy jednoczesnej obsłudze zmieniających się wymagań głównych pomiędzy generowaniami planów lekcji. W odpowiedzi na to wymaganie wprowadziłem mechanizm grupowania zasobów i ograniczeń w zbiory, co zapewnia elastyczność niezbędną w środowisku szkolnym. W celu wyjaśnienia tej skomplikowanej struktury bazy danych warto podzielić tabele na parę kategorii.

##### Tabele podstawowe

Tabele podstawowe definiują fundamentalne zasoby szkoły, stanowiąc punkt odniesienia dla całego systemu:

Tabela	Relacja
subject	
student_group	
teacher	M:N do subject
room	M:N do subject

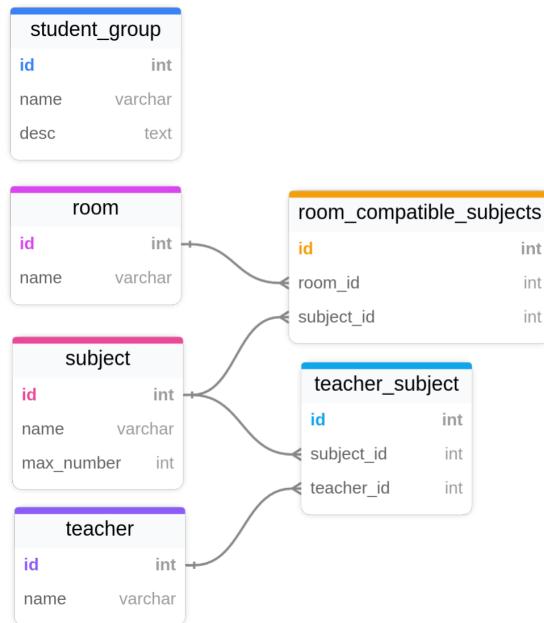
Tabela 4.13: Tabele podstawowe zasobów szkolnych

gdzie:

- **subject** przechowuje przedmioty.
- **student\_group** przechowuje przedmioty.

- **teacher** przechowuje nauczycieli.
- **room** przechowuje sale.

Relacja między nauczycielami a przedmiotami reprezentuje prowadzone przez nich przedmioty, a relacja między salami a przedmiotami reprezentuje przedmioty, które są przez nie obsługiwane.



Rysunek 4.7: Diagram tabel podstawowych w bazie danych

### Tabele wymagań

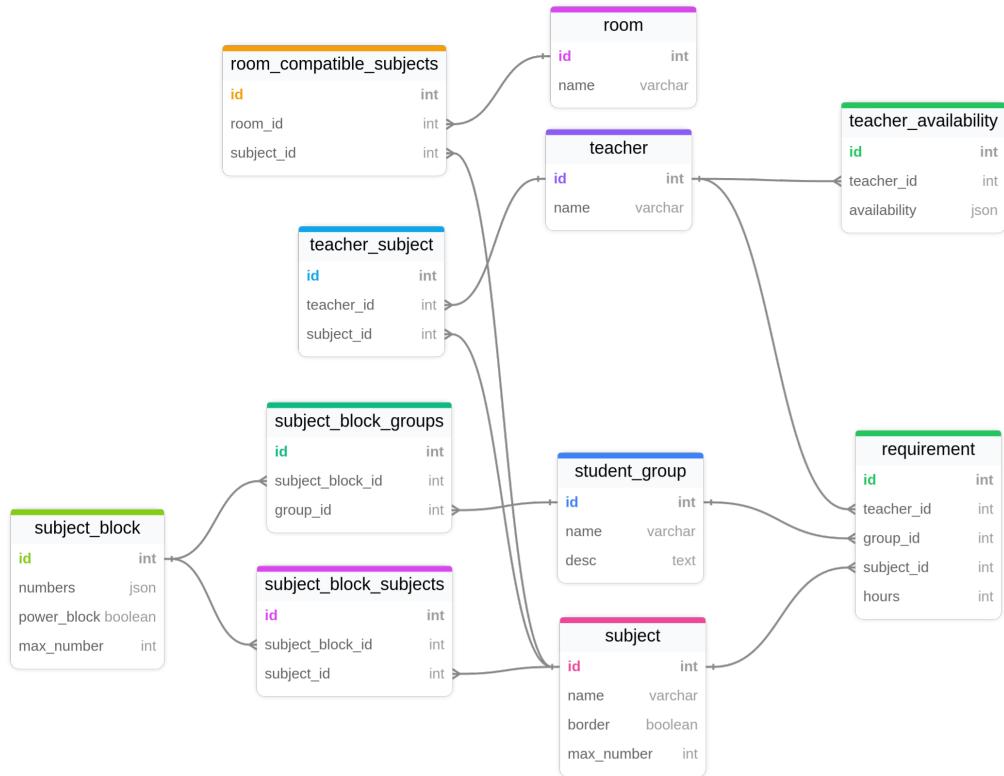
Tabele wymagań przechowują ograniczenia i reguły generowania planu, powiązane z zasobami podstawowymi:

Tabela	Relacje
<b>requirement</b>	N:1 z <b>teacher</b> , <b>student_group</b> , <b>subject</b>
<b>subject_block</b>	M:N z <b>subject</b>
<b>teacher_availability</b>	N:1 z <b>teacher</b>

Tabela 4.14: Tabele definiujące wymagania i ograniczenia

gdzie:

- **requirement** przechowuje wymagania główne.
- **subject\_block** przechowuje informacje na temat bloków przedmiotów.
- **teacher\_availability** przechowuje dostępności nauczycieli.



Rysunek 4.8: Diagram tabel podstawowych i wymagań w bazie danych

### Tabele agregujące

Mechanizm zbiorów umożliwia grupowanie zasobów i wymagań dla różnych kontekstów:

Tabela	Relacja
<b>subject_pool</b>	M:N z <b>subject</b>
<b>student_group_pool</b>	1:N z <b>student_group</b>
<b>teacher_pool</b>	M:N z <b>teacher</b>
<b>room_pool</b>	1:N z <b>room</b>

Tabela 4.15: Tabele zbiorów zasobów z uzasadnieniem relacji

Dla nauczycieli i przedmiotów zastosowałem relację wiele-do-wielu, ponieważ zasoby te charakteryzują się względną stabilnością pomiędzy latami szkolnymi — większość nauczycieli i przedmiotów pozostaje niezmienna, a jedynie dodawane są nowe rekordy dla nowo zatrudnionych pedagogów lub wprowadzanych przedmiotów.

W przypadku sal przyjęto relację jeden-do-wielu, co wynika z całkowitej niezmienności tej puli zasobów pomiędzy okresami szkolnymi. Natomiast dla klas zastosowałem relację jeden-do-wielu, odzwierciedlającą coroczną całkowitą wymianę składu grup uczniowskich — klasy z poprzedniego roku nie są ponownie wykorzystywane w kolejnych okresach, co eliminuje potrzebę stosowania relacji wiele-do-wielu.

Szczególną rolę pełni tabela **requirement\_set** (zbiór wymagań głównych), która agreguje wszystkie wymagania poprzez relacje 1:N z **requirement**, **teacher\_availability**, **subject\_block** oraz relacje N:1 z pozostałymi zbiorami. Ta struktura umożliwia generowanie kompletnego planu lekcji na podstawie pojedynczego rekordu zbioru wymagań.

Zaprezentowany model bazy danych zapewnia elastyczność niezbędną do obsługi zmieniających się wymagań szkolnych poprzez mechanizm zbiorów. Struktura umożliwia wielokrotne wykorzystanie zasobów pomiędzy różnymi konfiguracjami planów, zachowując przy tym prostotę i wydajność.

### Tabele wyników

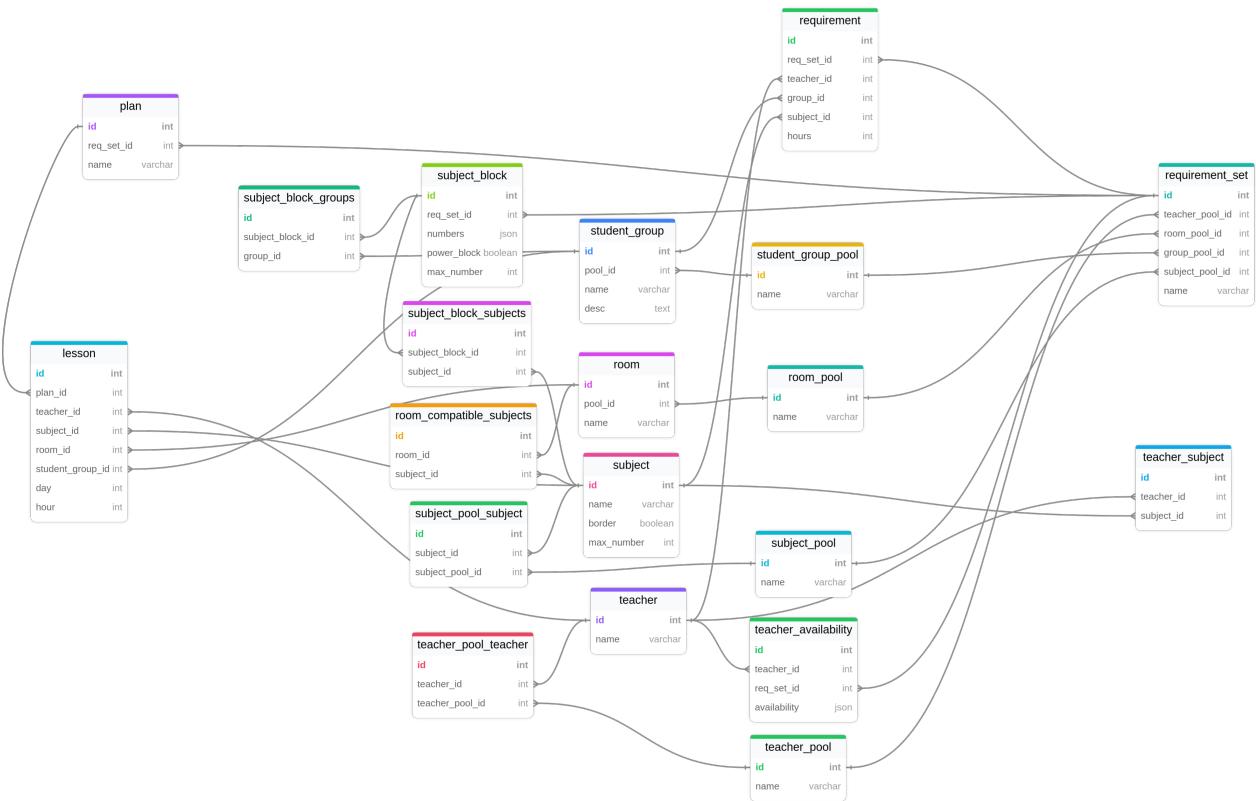
Tabele przechowujące wygenerowane plany lekcji i ich przypisania:

Tabela	Relacje
<b>plan</b>	N:1 z requirement_set
<b>lesson</b>	N:1 z teacher, subject, room, student_group, plan

Tabela 4.16: Tabele przechowujące wygenerowane plany lekcji

gdzie:

- **plan** przechowuje plany lekcji.
- **lesson** przechowuje przypisania.



Rysunek 4.9: Diagram pełnego projektu bazy danych

Tabela	Kolumna	Opis
student_group	<code>id</code> <code>pool_id</code> <code>name</code> <code>desc</code>	Unikalny identyfikator klasy Klucz obcy do zbioru klas Nazwa klasy („IIIA”) Opis klasy (opcjonalny)
room	<code>id</code> <code>pool_id</code> <code>name</code>	Unikalny identyfikator sali Klucz obcy do zbioru sal Nazwa sali („Sala 101”)
subject	<code>id</code> <code>name</code>	Unikalny identyfikator przedmiotu Nazwa przedmiotu („Matematyka”)
teacher	<code>id</code> <code>name</code>	Unikalny identyfikator nauczyciela Imię i/lub nazwisko nauczyciela
requirement_set	<code>id</code> <code>teacher_pool_id</code> <code>room_pool_id</code> <code>group_pool_id</code> <code>subject_pool_id</code> <code>name</code>	Unikalny identyfikator zbioru wymagań Klucz obcy do zbioru nauczycieli Klucz obcy do zbioru sal Klucz obcy do zbioru klas Klucz obcy do zbioru przedmiotów Nazwa zbioru wymagań
subject_block	<code>id</code> <code>req_set_id</code> <code>numbers</code> <code>power_block</code> <code>max_number</code>	Unikalny identyfikator bloku przedmiotów Klucz obcy do zbioru wymagań Konfiguracja liczby godzin (JSON) Flaga bloku agregującego Maksymalna liczba bloków tygodniowo
requirement	<code>id</code> <code>req_set_id</code> <code>teacher_id</code> <code>group_id</code> <code>subject_id</code> <code>hours</code>	Unikalny identyfikator wymagania Klucz obcy do zbioru wymagań Klucz obcy do nauczyciela Klucz obcy do klasy Klucz obcy do przedmiotu Liczba wymaganych godzin tygodniowo
teacher_availability	<code>id</code> <code>teacher_id</code> <code>req_set_id</code> <code>availability</code>	Unikalny identyfikator dostępności Klucz obcy do nauczyciela Klucz obcy do zbioru wymagań Macierz dostępności (JSON)
plan	<code>id</code> <code>req_set_id</code> <code>name</code>	Unikalny identyfikator planu Klucz obcy do zbioru wymagań Nazwa planu lekcji
lesson	<code>id</code> <code>plan_id</code> <code>teacher_id</code> <code>subject_id</code> <code>room_id</code> <code>student_group_id</code> <code>day</code> <code>hour</code>	Unikalny identyfikator lekcji Klucz obcy do planu Klucz obcy do nauczyciela Klucz obcy do przedmiotu Klucz obcy do sali Klucz obcy do klasy Dzień tygodnia Slot czasowy

Tabela 4.17: Struktura wszystkich tabel

### 4.2.3. Projekt interfejsu

Projekt interfejsu użytkownika opracowałem z uwzględnieniem wymagań funkcjonalnych oraz heurystyk Nilsena [15]. Architektura nawigacji opiera się na logicznym przepływie pracy charakterystycznym dla procesu układania planu lekcji, zapewniając intuicyjne środowisko dla użytkowników zaznajomionych z arkuszami kalkulacyjnymi.

#### Nawigacja

System nawigacji został zaprojektowany jako hierarchiczny, z głównym menu umożliwiającym dostęp do wszystkich kluczowych funkcjonalności. Nawigacja górnego poziomu obejmuje przejście między głównymi modułami aplikacji, podczas gdy niższe poziomy zapewniają dostęp do szczegółowych funkcji w obrębie modułu wprowadzania danych.

#### Strona główna

Strona główna pełni funkcję centralnego hubu aplikacji. Umożliwia bezpośrednie przejście do trzech kluczowych sekcji:

1. Podglądu istniejących planów lekcji.
2. Wprowadzania i edycji ograniczeń głównych.
3. Modułu generowania nowych planów.

#### Podgląd planów lekcji

Sekcja podglądu planów lekcji realizuje wymagania dotyczące wieloperspektywicznego oglądu w wygenerowane plany. Umożliwia przeglądanie wielu wariantów planów, z możliwością przełączania między widokami:

- Nauczycieli — prezentujący indywidualne plany zajęć każdego pedagoga.
- Klas — ukazujący rozkład zajęć dla poszczególnych grup uczniowskich.

#### Moduły wprowadzania danych

Aplikacja zawiera kompleksowy zestaw stron do wprowadzania wszystkich typów danych wymaganych do generowania planu:

- **Strony zasobów podstawowych** umożliwiają zarządzanie czterema fundamentalnymi zasobami: przedmiotami, nauczycielami, klasami oraz salami. Interfejs powinien zapewniać możliwość ręcznego wprowadzania, edycji i usuwania rekordów, a także importu danych z plików tekstowych w ustalonych formatach.
- **Strona ograniczeń głównych** dedykowana jest definiowaniu wymagań głównych, czyli przypisań godzinowych nauczycieli do klas dla konkretnych przedmiotów. Interfejs powinien nawiazywać wyglądem i funkcjonalnością do arkuszy kalkulacyjnych, co ułatwia migrację z dotychczas używanych narzędzi.

- **Strona dostępności nauczycieli** zapewnia graficzny interfejs do określania dni, w których poszczególni nauczyciele są dostępni do prowadzenia zajęć. Wykorzystanie intuicyjnych checkboxów z możliwością blokowania i preferowania konkretnych dni.
- **Strona bloków przedmiotów** umożliwia konfigurację bloków przedmiotów, zgodnie z koncepcją przedstawioną w rozdziale 3. Interfejs powinien pozwalać na definiowanie składu bloków, klas objętych blokiem, ograniczeń liczbowych oraz flagi agregacji.

## Moduł generowania planu

Strona generowania planu lekcji powinna integrować wszystkie wprowadzone dane i ograniczenia, oferując proste dla użytkownika sterowanie procesem optymalizacji. Docelowi użytkownicy nie są osobami zaznajomionymi z technologią, a tym bardziej algorytmami ewolucyjnymi — nie powinni mieć pełnej kontroli nad wszystkimi parametrami. Jedyny parametr, który jest ważny z ich punktu widzenia to liczba generacji algorytmu genetycznego, która jest proporcjonalna do czasu oczekiwania na generację planu.

## Spójność i ergonomia

Wszystkie strony aplikacji powinny utrzymywać spójny schemat wizualny oparty na zasadach minimalizmu i przejrzystości. Projekt interfejsu prioritetyzuje wygodę użytkowania poprzez ograniczenie liczby koniecznych kliknięć do wykonania kluczowych operacji oraz zapewnienie natychmiastowego dostępu do najczęściej używanych funkcjonalności.

Wszystkie strony powinny również oferować powiadomienia o wszystkich wykonanych działaniach, tak aby użytkownik wiedział czy jego działania kończą się sukcesem.

## 4.3. Implementacja

### 4.3.1. Wybór narzędzi

W wyborze stosu technologicznego kierowałem się produktywnością rozwoju aplikacji, skalowalnością rozwiązania oraz integracją z innymi komponentami systemu.

#### Interfejs webowy

Decyzja o wykorzystaniu Reacta [14] jako frameworka frontendowego wynika z kilku kluczowych czynników. Po pierwsze, posiadam znaczące doświadczenie w rozwoju aplikacji przy użyciu tej technologii, co pozwoliło na efektywną implementację interfejsu użytkownika. Po drugie, React jest jednym z najbardziej popularnych i dojrzałych frameworków frontendowych, co gwarantuje obszerną dokumentację oraz aktywną społeczność wspierającą rozwój. Po trzecie, React oferuje responsywne zarządzanie stanem aplikacji, co umożliwia dynamiczną aktualizację widoków planów lekcji bez konieczności przeładowywania strony, zapewniając płynne doświadczenie użytkownika podczas przeglądania planów lekcji. Komponentowa architektura Reacta idealnie odpowiada modularnej strukturze aplikacji do układania planu lekcji, umożliwiając tworzenie reużywalnych elementów takich jak nawigacja.

## Warstwa serwerowa

Wybór Pythona jako głównego języka programowania dla całego systemu był decyzją, podyktowaną koniecznością sprawnej integracji modułu optymalizacyjnego z warstwą aplikacji webowej. Implementacja algorytmu generowania planu lekcji w Pythonie umożliwiła wykorzystanie pakietów optymalizacyjnych Google OR-Tools oraz biblioteki NumPy, eliminując potrzebę tworzenia skomplikowanych interfejsów międzyjęzykowych.

Wybór Django [9] jako frameworka backendowego został dokonany po analizie alternatywnego rozwiązania w Pythonie — FastAPI. Pomimo że FastAPI oferuje wydajność i nowoczesne funkcje, Django zapewnia kompleksowe podejście, które jest lepiej dostosowane do złożonych aplikacji webowych. Moje wcześniejsze doświadczenie z Django pozwoliło na efektywną pracę oraz sprawne wykorzystanie technik ORM (ang. *Object-relational mapping*). Dodatkowo, skalowalność Django i jego bezpieczeństwo zapewniają solidne fundamenty dla aplikacji, która może ewoluować w przyszłości.

## Baza danych

PostgreSQL został wybrany jako system zarządzania bazą danych ze względu na jego wsparcie oraz doskonałą integrację z Django. Kluczowym czynnikiem była kompatybilność z biblioteką django-tenants, która umożliwia przyszłą implementację architektury opisanej w dokumentacji [4]. Ta funkcjonalność pozwoli w przyszłości na łatwe dodanie obsługi wielu niezależnych użytkowników lub instytucji w obrębie pojedynczej instancji aplikacji. Dodatkowo, wsparcie dla niestandardowych typów danych, między innymi JSON, w PostgreSQL idealnie odpowiada potrzebom przechowywania skomplikowanych struktur danych, takich jak macierze dostępności nauczycieli czy konfiguracje bloków przedmiotów.

## Moduł optymalizacyjny

Moduł optymalizacyjny został zaimplementowany w języku Python, co umożliwiło łatwą integrację z warstwą serwerową oraz szybkie prototypowanie rozwiązań. W przypadku algorytmu ewolucyjnego wykorzystałem bibliotekę NumPy, która dzięki zoptymalizowanym operacjom macierzowym znaczaco przyspiesza obliczenia i umożliwia efektywne przetwarzanie populacji rozwiązań.

Algorytm zachłanny oraz algorytm ewolucyjny zostały zaimplementowane od zera, przy użyciu wspomnianej wyżej biblioteki, co pozwoliło na pełną kontrolę nad ich działaniem. W trzecim etapie użyłem pakietu Google OR-Tools, który oferuje bogaty zestaw narzędzi do modelowania problemów programowania z ograniczeniami, w tym zmienne interwałowe i ograniczenia typu `NoOverlap`. Jego dobra dokumentacja, wysoka wydajność oraz natywna integracja z Pythonem sprawiają, że stanowi on naturalny wybór w tego typu zastosowaniach.

### 4.3.2. Implementacja bazy danych w Django

Technika ORM stosowana w Django oferuje intuicyjny sposób definiowania relacji między modelami.

Relacje wiele-do-jednego są definiowane klasą `ForeignKey(to, on_delete, **options)`, gdzie parametr `on_delete` określa zachowanie przy usuwaniu powiązanych rekordów. Relacje

wiele-do-wielu implementuje się za pomocą klasy `ManyToManyField`, która automatycznie generuje niezbędne tabele pośredniczące w bazie danych.

Każda tabela w systemie, z wyjątkiem automatycznie generowanych tabel dla relacji wiele-do-wielu, jest definiowana przez dedykowaną klasę w pliku `models.py`. Poniżej przedstawiłem przykładową implementację modelu reprezentującego sale.

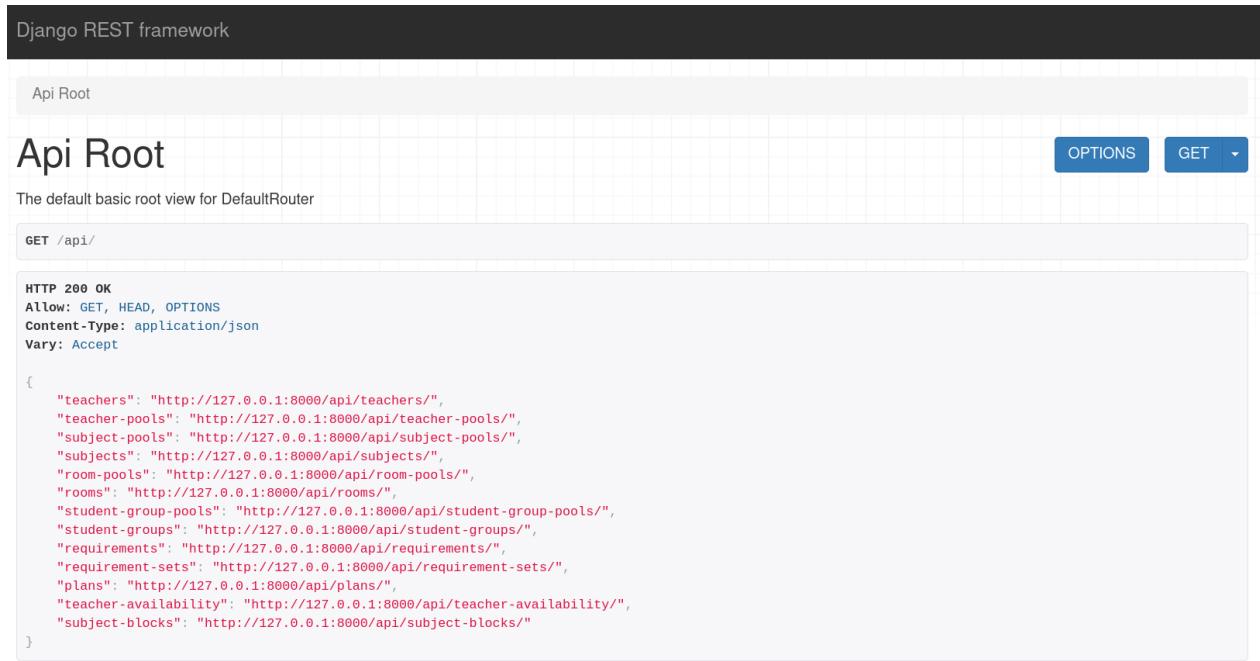
### Tabela sal

```
1 class Room(models.Model):
2     pool = models.ForeignKey(RoomPool, on_delete=models.CASCADE)
3     name = models.CharField(max_length=255)
4     compatible_subjects = models.ManyToManyField(Subject)
```

Analogiczna implementacja dla reszty tabel opisanych w [4.2.2](#).

### 4.3.3. Implementacja API

Warstwa API została zaimplementowana z wykorzystaniem Django REST Framework — elastycznego zestawu narzędzi do budowy interfejsów REST w Django. Znacząco przyspieszyło to proces rozwijania aplikacji poprzez dostarczenie gotowych komponentów do obsługi operacji CRUD, validacji danych, autentykacji i serializacji. Jedną z kluczowych zalet framework'a są automatyczne widoki `ModelViewSet`, które generują kompletny zestaw endpointów dla modelu na podstawie minimalnej konfiguracji, eliminując konieczność ręcznego implementowania rutynowych operacji. Takie widoki są również modyfikowalne, co pozwala na uwzględnienie niestandardowych przypadków, takich jak tworzenie wielu wymagań głównych na raz w celu poprawienia wydajności, z relatywną łatwością.



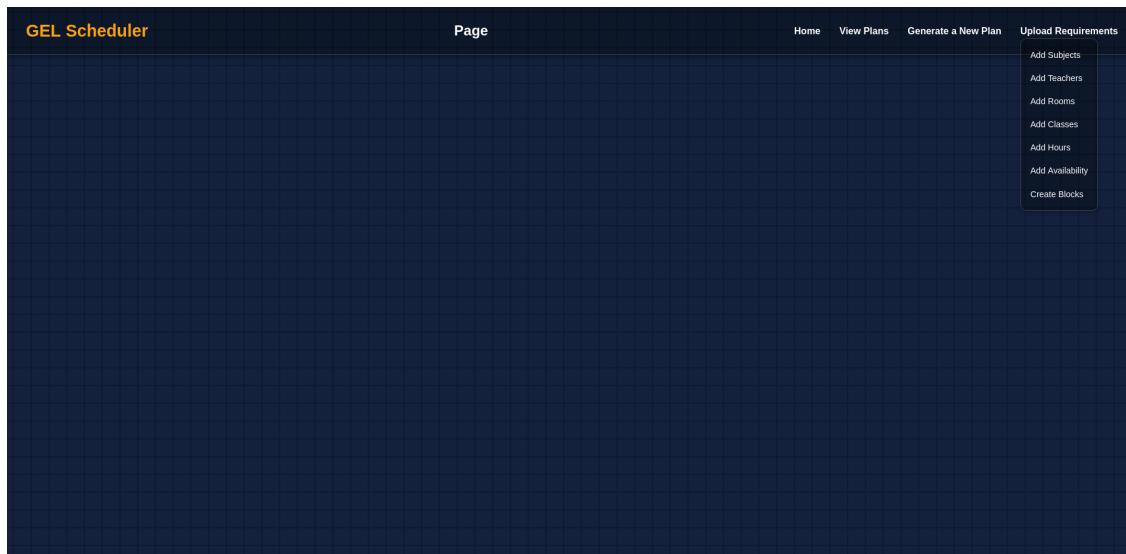
Rysunek 4.10: Automatycznie wygenerowana lista endpointów stworzonych przy użyciu ModelViewSet

#### 4.3.4. Implementacja interfejsu webowego

Komponentowa architektura Reacta pozwoliła na zbudowanie modułarnego interfejsu, gdzie poszczególne widoki (takie jak edycja wymagań, konfiguracja zasobów czy podgląd planów) zostały wydzielone jako niezależne komponenty, które w połączeniu z komponentem nawigacji tworzą konkretne strony. Połączenie z backendem realizowane jest poprzez zdefiniowane powyżej API, zapewniając płynną komunikację między warstwą interfejsu a warstwą serwerową.

## Nawigacja

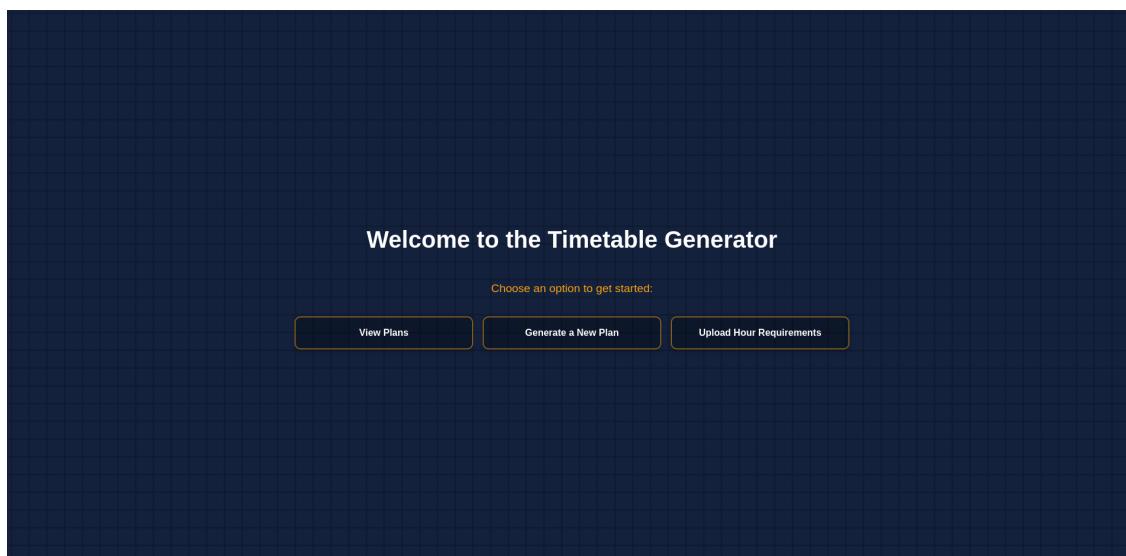
Po lewej widzimy nazwę aplikacji, na środku nazwę strony na której znajduje się użytkownik (w celach pokazowych „Page”), a po prawej widzimy różne podstrony aplikacji, gdzie „Upload Requirements” rozwija się, pozwalając użytkownikowi na przejście do konkretnej strony wprowadzania wymagań.



Rysunek 4.11: Nawigacja interfejsu webowego

## Strona główna

Strona główna pozwala na bezpośrednie przejście do widoku przeglądania planów lekcji, generowania nowych planów, bądź wprowadzania wymagań głównych. W widoku klas widać nauczyciela z którym jest lekcja, a w widoku nauczyciela widać klasę.



Rysunek 4.12: Strona główna interfejsu webowego

## Podgląd planów lekcji

Widok planów lekcji z perspektywy klas oraz nauczyciela.

GEL Scheduler		Lesson View					Home			View Plans		Generate a New Plan		Upload Requirements	
							Plan generated using			Select Group		Mat1			
Time Slot		Monday		Tuesday		Wednesday		Thursday		Friday					
1						Matematyka II_BG		Matematyka I_B		Matematyka II_BG					
2	Matematyka II_BG			Matematyka III_D		Matematyka III_D		Matematyka I_D		Matematyka II_BG					
3	Matematyka II_BG			Matematyka III_D		Matematyka III_D		Matematyka I_D		Matematyka II_BG					
4	Matematyka II_D							Matematyka I_D		Matematyka II_BG					
5	Matematyka I_D			Matematyka I_D		Matematyka I_B		Matematyka I_B		Matematyka I_D					
6			Matematyka I_D				14								
9										Matematyka II_BG					15

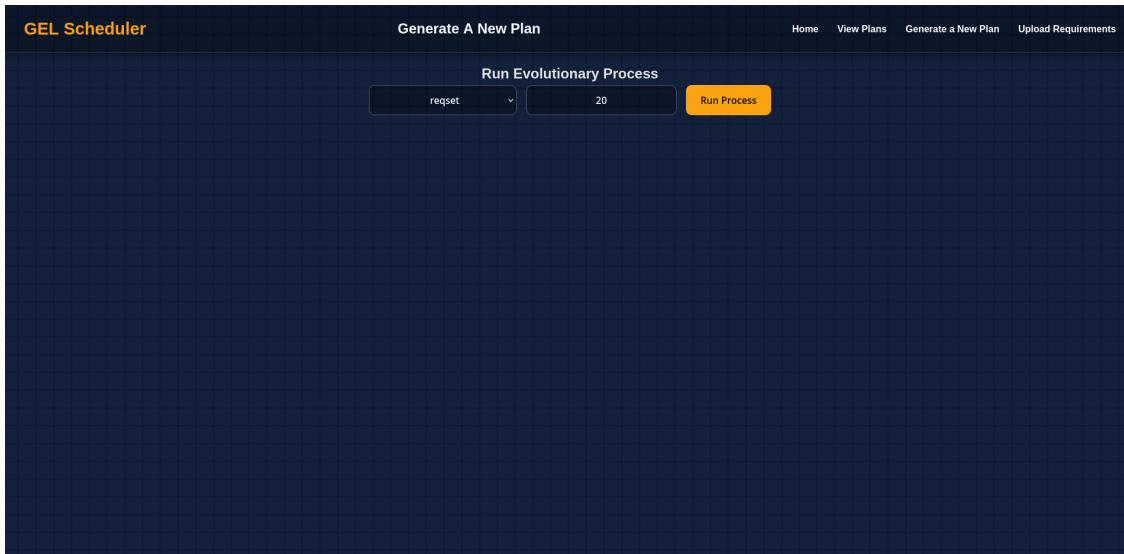
Rysunek 4.13: Podgląd planu z perspektywy nauczyciela

GEL Scheduler		Lesson View					Home			View Plans		Generate a New Plan		Upload Requirements	
							Plan generated using			Select Group		Select Teacher			
Time Slot		Monday		Tuesday		Wednesday		Thursday		Friday					
1										J.Polski Jp5					
2										J.Polski Jp5					
3										Historia Hist3					
4										Biznes i zarządzanie BZ1					
5	J.Angielski Ja3	J.Angielski Ja5		Matematyka Mas4		21				J.Angielski Ja3	J.Angielski Ja5				
6	J.Angielski Ja3	J.Angielski Ja5		Wych.Fiz. WF1	Wych.Fiz. WF6	Słownika 1	J.Angielski Ja5	Informatyka Inf2		J.Polski Jp5					
7	Biology Bio1			Wych.Fiz. WF1	Wych.Fiz. WF6	Słownika 1	Biology Bio1	Biznes i zarządzanie BZ1		Religia Re1	Religia Re3				
8	Biology Bio1			J.Angielski Ja3	J.Angielski Ja5		J.Angielski Ja3	Geografia Geo3		J.Polski Jp5					
9	Zajęcia kreatywne Zk2			Chemia Chem3		Sala do Chemicznej 1	J.Polski Jp5			J.Polski Jp5					
10	J.Angielski Ja3	Informatyka Inf2		J.Niemiecki Jn2	J.Francuski Jf3	20	J.Rosyjski Jr1	J.Polski Jp5							
11				J.Niemiecki Jn2	J.Francuski Jf3	20	J.Rosyjski Jr1	Filozofia Fil1							

Rysunek 4.14: Podgląd planu z perspektywy klasy

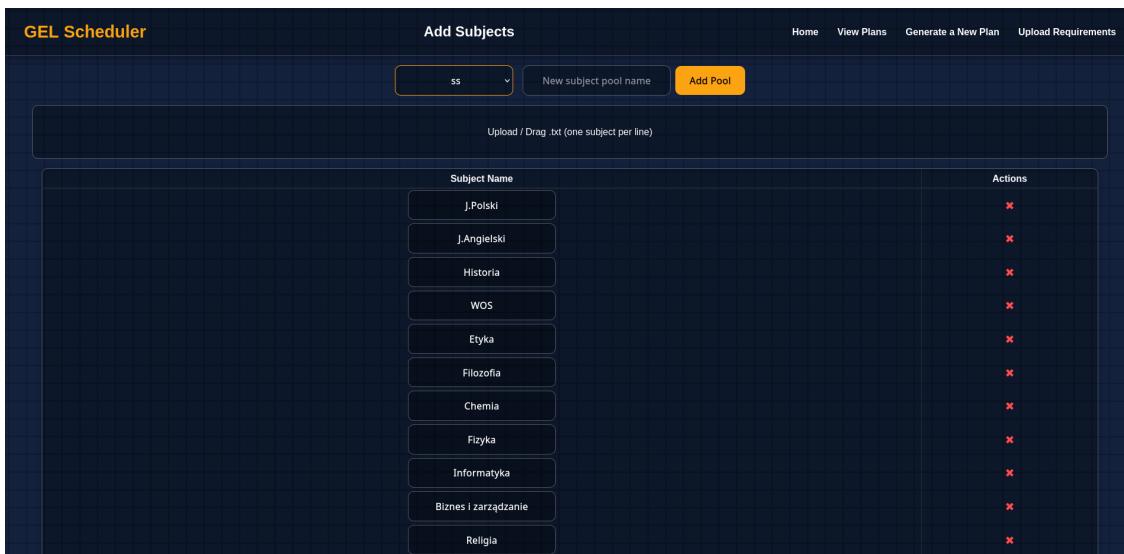
## Widok generowania planów lekcji

Widok pozwalający użytkownikowi na wpisanie liczby generacji do wygenerowania planu lekcji.



Rysunek 4.15: Widok generowania planu lekcji

## Widoki wprowadzania zasobów



Rysunek 4.16: Widok dodawania przedmiotów

GEL Scheduler

Add Teachers

tt ss New teacher pool name Add Pool

Upload / Drag .txt (Teacher,Subject,...)

Teacher Name	Subjects (multi-select)	Actions
jp1	J.Polski J.Angielski Historia WOS Fizyka	x
jp2	J.Polski J.Angielski Historia WOS Fizyka	x
jp3	J.Polski J.Angielski Historia WOS Fizyka	x
jp4	J.Polski J.Angielski Historia WOS Fizyka	x

Rysunek 4.17: Widok dodawania nauczycieli

GEL Scheduler

Add Rooms

tt ss New room pool name Add Pool

Upload / Drag .txt (Room,Subject,...)

Room Name	Compatible Subjects (multi-select)	Actions
1	J.Polski J.Angielski Historia WOS	x
2	J.Polski J.Angielski Historia WOS	x
3	J.Polski J.Angielski Historia WOS	x
4	J.Polski J.Angielski Historia WOS Chemia Fizyka	x

Rysunek 4.18: Widok dodawania sal

The screenshot shows the 'GEL Scheduler' interface with the title 'Add Classes'. At the top, there is a dropdown menu set to 'cc', a text input field for 'New group pool name', and a yellow 'Add Pool' button. Below this is a section for uploading files with the placeholder 'Upload / Drag .txt (name[.desc])'. The main area is a grid table with two columns: 'Group Name' and 'Description'. The 'Actions' column contains red 'x' icons. The data is organized into three sections: I, II, and III.

Group Name	Description	Actions
I_A	psychol	x
I_B	jez-tur	x
I_C	spok-pr	x
I_D	polit	x
I_F	b-ch	x
I_G	eko-men	x
II_AC	psych-prawna	x
II_BG	jez-ekonomiczna	x
II_DF	polit-biol-chem	x
II_G	eko-men	x
III_A	dypł	x

Rysunek 4.19: Widok dodawania klas

### Widok wprowadzania wymagań głównych

Widok wprowadzania wymagań głównych, który przypomina arkusz kalkulacyjny pokazany w 3.1. Górný wiersz przewija się razem ze stroną.

GEL Scheduler		Add Hour Requirements																					
		reqset	tt	ss	cc	New requirement set name										Create Set							
Drag / click to upload requirements CSV (first 2 rows = groups)																							
Subject / Teacher	I_A	I_B	I_C	I_D	I_F	I_G	II_AC	II_BG	II_DF	II_G	III_A	III_B	III_C	III_D	III_F	III_G	IV_A	IV_B	IV_C	IV_D	IV_F	IV_G	
J.Polski	6	4	6	4	4	4	6	4	4	4	4	4	6	4	4	4	4	4	5	4	4	4	
Jp1		4					6	4		4												4	
Jp2							4						4		4								4
Jp3			6										6		4		4						
Jp4					4	4											4		4	5			
Jp5	6								4		4										4		
J.Angielski	12	8	6	6	6	8	6	10	3	5	12	10	6	6	6	6	10	10	8	6	6	6	
Ja1		4	6				3					5											
Ja2								5		6		3	3						3				
Ja3	6								5									5				4	
Ja4		4		3								3	3	5								3	
Ja5	6								5								5	4					
Ja6					3												5		3		3		
Ja7																							
GEL Scheduler		Add Hour Requirements																					
Mat4	I_A	I_B	I_C	I_D	I_F	I_G	II_AC	II_BG	II_DF	II_G	III_A	III_B	III_C	III_D	III_F	III_G	IV_A	IV_B	IV_C	IV_D	IV_F	IV_G	
Mat5																	5						6
Mat6							5	5		5							5						
Mat7																							
Geografia	1	2	1	1	0	2	1	3	1	3	3	2	1	1	1	4	2	3	0	0	0	3	
Geo1		2				2				3	2					4	2	3					
Geo2									3	3													
Geo3	1		1	1			1		1			1	1	1									
WDZ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Wdz1																							
Zajęcia kreatywne	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	
Zk1																							
Zk2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1							
Civil Society	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Cs1												2											
Creative Writing	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	
Cw1																2							
																	Save Changes						

Rysunek 4.20: Widok dodawania wymagań głównych

## Widok wprowadzania dostępności nauczycieli

Teacher	Day 1	Day 2	Day 3	Day 4	Day 5
Jp1	✓	✓	✓	✓	✗
Jp2	✓	✓	✓	✓	✗
Jp3	✓	✓	✓	✓	✗
Jp4	✓	✓	✓	✓	✗
Jp5	✓	✓	✓	✓	✗
Ja1	✓	✓	✓	✓	✗
Ja2	✓	✓	✓	✓	✗
Ja3	✓	✓	✓	✓	✗
Ja4	✓	✓	✓	✓	✗
Ja5	✓	✓	✓	✓	✗
Ja6	✓	✓	✓	✓	✗
Ja7	✓	✓	✓	✓	✗
Ja8	✓	✓	✓	✓	✗

Rysunek 4.21: Widok wprowadzania dostępności nauczycieli

## Widok wprowadzania bloków przedmiotów

Block 1		Applicable Groups	
J.Polski	J.Angielski	I_A	I_B
WOS	Etyka	I_C	I_D
Chemia	Fizyka	II_A	II_B
Biznes i zarządzanie	Religia	II_C	II_D
J.Francuski	J.Rosyjski z elem. Kult.	III_A	III_B
Biologia	Wych.Fiz.	III_C	III_D
Matematyka	Geografia	III_F	III_G
Zajęcia kreatywne	Civil Society	IV_A	IV_B
		IV_C	IV_D
		IV_F	IV_G

Block 2		Applicable Groups	
Subjects		I_A	I_B
		I_C	I_D

Rysunek 4.22: Widok dodawania bloków przedmiotów

#### 4.3.5. Integracja z algorytmem

Dzięki adekwatnemu wyborowi technologii, proces integracji modułu optymalizacyjnego z warstwą serwerową został znaczco uproszczony. Zaimplementowałem dedykowany endpoint, który przyjmuje żądania typu POST zawierające parametry konfiguracyjne algorytmu, w tym liczbę generacji dla algorytmu ewolucyjnego oraz ID zbioru wymagań.

Proces generowania planu lekcji przebiega według następującego schematu:

1. Pobranie i walidacja danych wejściowych z żądania.
2. Wczytanie odpowiedniego zestawu ograniczeń i wymagań z bazy danych.
3. Uruchomienie trójetapowego algorytmu optymalizacyjnego z przekazanymi parametrami.
4. Transformacja wyników algorytmu do przypisań lekcyjnych.
5. Utworzenie nowego rekordu planu lekcji w bazie danych.
6. Zapisanie wygenerowanych przypisań (lekcji) w powiązaniu z utworzonym planem.
7. Zwrócenie odpowiedzi zawierającej status operacji.

# 5. Testowanie i ewaluacja rozwiązania

## 5.1. Scenariusze testowe

### 5.1.1. Scenariusz testowy generowania planu lekcji z określonymi parametrami

Poniższy scenariusz opisuje proces wygenerowania planu lekcji przy użyciu zaimplementowanego modułu optymalizacyjnego.

<b>Scenariusz</b>	Generowanie planu lekcji z określonymi parametrami
<b>Opis</b>	Test weryfikuje poprawność procesu generowania planu lekcji przy zadanej liczbie generacji oraz pełnym zestawie danych wejściowych.
<b>Widok początkowy</b>	Strona główna
<b>Wymagania</b>	Wprowadzone zasoby: nauczyciele, klasy, sale, przedmioty Zdefiniowane wymagania główne dla każdej klasy Wprowadzone dostępności nauczycieli Zdefiniowane bloki przedmiotowe
<b>Kroki testowe</b>	1. Przejdź do widoku generowania planu lekcji 2. Wprowadź liczbę generacji 3. Uruchom proces generowania planu
<b>Oczekiwany rezultat</b>	System generuje kompletny plan lekcji zgodny z ograniczeniami fizycznymi oraz wymaganiem głównym. Użytkownik otrzymuje możliwość podglądu i weryfikacji wygenerowanego planu.

Tabela 5.1: Generowanie planu lekcji z określonymi parametrami

### 5.1.2. Scenariusz przeglądu planów lekcji

Poniższy scenariusz opisuje proces przeglądania istniejących planów lekcji wygenerowanych w systemie.

### 5.1.3. Scenariusz importowania i edytowania wymagań głównych

Scenariusz opisuje proces masowego importu wymagań głównych oraz ich późniejszej ręcznej edycji.

<b>Scenariusz</b>	Przegląd planów lekcji
<b>Opis</b>	Test weryfikuje możliwość przeglądania wielu wygenerowanych planów lekcji oraz podglądu ich szczegółów z perspektywy klasy i nauczyciela.
<b>Widok początkowy</b>	Strona główna
<b>Wymagania</b>	Wprowadzone zasoby: nauczyciele, klasy, sale, przedmioty W systemie dostępne są co najmniej dwa wygenerowane plany lekcji
<b>Kroki testowe</b>	1. Przejdź do widoku przeglądania planów lekcji 2. Wybierz najnowszy dostępny plan 3. Wyświetl plan lekcji dla wybranej klasy 4. Wyświetl plan lekcji dla konkretnego nauczyciela
<b>Oczekiwany rezultat</b>	Użytkownik może poprawnie przeglądać różne warianty planów lekcji oraz widoki szczegółowe, a system prezentuje dane zgodnie z zapisanym stanem.

Tabela 5.2: Scenariusz przeglądu planów lekcji

<b>Scenariusz</b>	Importowanie i edytowanie wymagań głównych
<b>Opis</b>	Test weryfikuje poprawność importu danych z pliku CSV oraz poprawność procesu edycji wymagań godzinowych dla klas i nauczycieli.
<b>Widok początkowy</b>	Strona główna
<b>Wymagania</b>	Wprowadzone zasoby: nauczyciele, klasy, przedmioty Dostępny plik CSV zawierający wymagania główne
<b>Kroki testowe</b>	1. Przejdź do widoku dodawania wymagań głównych 2. Przeciągnij plik CSV do aplikacji 3. Edytuj wymagania godzinowe dla wybranej klasy i nauczyciela 4. Zapisz zmiany
<b>Oczekiwany rezultat</b>	System poprawnie importuje dane z pliku CSV oraz umożliwia ich edycję i zapisanie nowych wartości.

Tabela 5.3: Scenariusz importowania i edytowania wymagań głównych

### 5.1.4. Scenariusz edytowania dostępności nauczycieli

Scenariusz opisuje proces modyfikacji dostępności nauczycieli po wcześniejszym zdefiniowaniu wymagań głównych.

<b>Scenariusz</b>	Edytowanie dostępności nauczycieli
<b>Opis</b>	Test sprawdza możliwość modyfikacji godzin dostępności nauczycieli z poziomu odpowiedniego widoku systemu.
<b>Widok początkowy</b>	Widok wprowadzania wymagań głównych
<b>Wymagania</b>	Wprowadzone zasoby: nauczyciele
<b>Kroki testowe</b>	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Rozwiń wstążkę nawigacji</li><li>2. Przejdź do widoku dostępności nauczycieli</li><li>3. Edytuj dostępność wybranego nauczyciela</li><li>4. Zapisz zmiany</li></ol>
<b>Oczekiwany rezultat</b>	System zapisuje zmodyfikowane dane dostępności, a wprowadzone zmiany są widoczne po ponownym wczytaniu widoku.

Tabela 5.4: Scenariusz edytowania dostępności nauczycieli

## 5.2. Testowanie aplikacji

### 5.2.1. Funkcjonalność 1

### 5.2.2. Funkcjonalność 2

## 5.3. Wyniki i analiza skuteczności

- Dlaczego moje wyniki są wspaniałe
- Średni czas potrzebny na generację planu

### 5.3.1. Statystyki planu

- Ilość okienek
- Rozkład lekcji w tygodniu
- Lekcje początek/kończące
- Statystyki nauczycieli, godziny w szkole do godzin lekcyjnych (płatnych)

### **5.3.2. Porównanie z ręcznie ułożonym planem**

Porównanie z planem, który szkoła ułożyła ręcznie.

# 6. Wnioski i perspektywy rozwoju

## 6.1. Problemy rozwiązania

Choć system realizuje wszystkie cele, które założyłem w tej pracy, jego obecna wersja posiada ograniczenia, które mogą utrudniać wykorzystanie w realnej szkole.

Pierwszym problemem jest obsługa bloków lekcyjnych obejmujących tylko część klasy. W praktyce takie zajęcia powinny być umieszczane wyłącznie na początku lub końcu dnia, aby uniknąć powstawania okienek dla uczniów. System nie narzuca jeszcze tego warunku, co może prowadzić do niepożądanych okienek.

Uproszczony jest również mechanizm przypisywania sal. Obecnie wykorzystuje on tzw. białe listy obsługiwanych przedmiotów, co jest rozwiązaniem poprawnym, ale mało elastycznym. W wielu sytuacjach potrzebne jest rozróżnienie między salą „dozwoloną” a „preferowaną”. Przykładowo nic nie stoi na przeszkodzie, aby w sytuacji w której brakuje sal zajęcia języka polskiego odbyły się w sali do matematyki; natomiast zajęcia wychowania fizycznego mogą odbyć się tylko i wyłącznie w dedykowanych salach.

Kolejne ograniczenie dotyczy dostępności nauczycieli, które są definiowane w skali dnia. W rzeczywistości dostępności powinny być opisane per slot czasowy.

Ograniczenia dotyczą również samego procesu generowania planów. Algorytm ewolucyjny stosowany do alokacji bloków lekcyjnych pomiędzy dniami działa poprawnie, jednak jego natura heurystyczna powoduje, że nie gwarantuje optymalności.

Ponadto generowanie planów lekcji jest realizowane lokalnie (niezależnie dla każdego dnia) co redukuje złożoność obliczeniową, ale może prowadzić do utraty globalnej (tygodniowej) optymalności.

## 6.2. Perspektywy rozwoju

Dalszy rozwój aplikacji powinien w pierwszej kolejności skoncentrować się na rozwiązaniu problemów zidentyfikowanych w poprzedniej sekcji. Ich eliminacja jest kluczowa, aby system mógł zostać wykorzystany w realnych warunkach szkolnych.

Jednym z naturalnych kierunków rozbudowy jest ponowna analiza sposobu przydzielania lekcji do dni tygodnia. Obecne podejście heurystyczne jest szybkie, jednak zastosowanie metod programowania całkowitaliczbowego mogłoby zapewnić rozwiązania bliższe optymalnym, szczególnie przy bardziej wymagających konfiguracjach danych.

Warto również rozszerzyć model sal lekcyjnych poprzez wprowadzenie funkcji kar i nagród. Pozwoliłoby to nie tylko uwzględnić twarde ograniczenia, ale też modelować preferencje. Przykładowo ograniczyć korzystanie z nieoptimalnych pomieszczeń lub promować nowoczesne sale.

Kolejnym istotnym elementem jest zmiana sposobu reprezentacji dostępności nauczycieli. Zamiast ograniczeń na poziomie dni, powinny być one definiowane w skali slotów czasowych.

Integracja takich informacji w ostatnim etapie algorytmu umożliwia bardziej realistyczne planowanie.

Wartym analizy kierunkiem rozwoju jest również dodanie czwartego etapu generowania planu lekcji. Móglby on polegać na zebraniu dziennych harmonogramów i potraktowaniu ich jako punktu wyjścia dla solwera programowania liniowego z ograniczeniami. Ponieważ bazowe rozwiązanie jest już poprawne, dodatkowa optymalizacja nie powinna znacząco zwiększyć czasu obliczeń, a może wyraźnie poprawić globalną jakość tygodniowego planu.

Poza stroną algorytmiczną, dalsze prace wymagają rozbudowy warstwy użytkowej. System powinien obsługiwać wielu użytkowników, co wymaga implementacji kont opartych o przykładowo adresy e-mail i hasła. Pozwoliłoby to na wdrożenie aplikacji na rynku.

Interfejs aplikacji również powinien zostać znacząco rozwinięty. Obecna wersja skupia się na funkcjonalności, natomiast pełnoprawne wdrożenie wymaga bardziej intuicyjnego, przejrzystego i przyjaznego użytkownikowi UI. W szczególności konieczne jest zapewnienie narzędzi do ręcznej edycji wygenerowanego planu — poprawy sal, wymiany pojedynczych lekcji czy reorganizacji fragmentów tygodnia. Tego typu funkcjonalność jest niezbędna, ponieważ nawet najlepszy algorytm nie jest w stanie uwzględnić wszystkich specyficznych preferencji i wyjątków charakterystycznych dla danej szkoły.

## 6.3. Wnioski

Zastosowany algorytm zachłanny do generowania bloków lekcyjnych okazał się trafnym wyborem. Jego prostota znacząco ułatwia konstrukcję ograniczeń i eliminuje potrzebę stosowania bardziej złożonych metod. Pozwala również na pojedyncze wywołanie funkcji `NoOverlap` dla danej klasy, ponieważ bloki lekcyjne, w przeciwieństwie do pojedynczych zajęć, nie mogą na siebie zachodzić (przykładowo francuski i niemiecki). Dzięki temu proces tworzenia harmonogramu jest bardziej przejrzysty i obliczeniowo efektywny.

Uzyskany plan lekcji, choć wymagałby pewnych ręcznych korekt, jest wystarczająco bliski rozwiązaniu praktycznemu. Podejście które przedstawiłem, oparte na podziale problemu na trzy mniejsze podproblemy, okazało się efektywne przy dostępnej strukturze danych wejściowych. Koncepcja ta jest na tyle dobrze uzasadniona i elastyczna, że z powodzeniem może być stosowana również w przyszłych działaniach i projektach.

Praca zawiera propozycję wieloetapowego modelu generowania planu lekcji, opartego na łączeniu metod zachłannych oraz heurystycznych. Zostało pokazane, że takie połączenie umożliwia uzyskanie poprawnych rozwiązań mimo złożonych zależności między zajęciami. Eksperymenty wykazały, że rozdzielenie problemu na trzy podproblemy znacząco poprawia efektywność obliczeń i upraszcza formułowanie ograniczeń.

Zakończenie, podsumowuje najważniejsze wnioski, podaje możliwości dalszego rozwinięcia wykonanych prac i wskazuje obszar potencjalnego zastosowania pracy. Rezultaty pracy mają charakter poznawczy, mogą mieć charakter użytkowy. Należy dokonać analizy uzyskanych wyników. Rezultaty powinny charakteryzować się oryginalnością, a nawet w pewnym stopniu nowatorstwem. Praca zawiera (...). Zostało pokazane (...). Eksperymenty wykazały (...). Tu piszemy wnioski i obserwacje.

Widzimy, że (...). Z tego powodu przeszła praca powinna obejmować (...).

# Bibliografia

- [1] Ustawy karta nauczyciela z dnia 26 stycznia 1982r. Dz. U. z 2021 r. poz. 1762 oraz z 2022 r. poz. 935, 1982.
- [2] Ustawy prawo oświatowe z dnia 14 grudnia 2016r. Dz. U. z 2017 r. poz. 60, 949 i 2203, z 2018 r. poz. 2245 oraz z 2019 r. poz. 1287, 2016.
- [3] Obwieszczenie ministra edukacji narodowej z dnia 4 września 2020 r. w sprawie ogłoszenia jednolitego tekstu rozporządzenia ministra edukacji narodowej i sportu w sprawie bezpieczeństwa i higieny w publicznych i niepublicznych szkołach i placówkach. Dz.U. 2020 poz. 1604, 2020.
- [4] B. P. Carneiro. Django-tenants documentation, (2025). Ostatnio otworzono 27 listopada 2025.
- [5] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein. *Introduction to algorithms*. MIT press, 2022.
- [6] N. Developers. Documentation, numpy.random.multinomial, (2025). Ostatnio otworzono 14 listopada 2025.
- [7] A. E. Eiben and J. E. Smith. What is an evolutionary algorithm? In *Introduction to evolutionary computing*, pages 15–35. Springer, 2015.
- [8] W. Feller et al. *An introduction to probability theory and its applications*, volume 963. Wiley New York, 1971.
- [9] D. S. Foundation. The web framework for perfectionists with deadlines., (2025). Ostatnio otworzono 27 listopada 2025.
- [10] Google. Documentation, or-tools - addnooverlap, (2025). Ostatnio otworzono 25 listopada 2025.
- [11] Google. Documentation, or-tools - intervalvar, (2025). Ostatnio otworzono 15 listopada 2025.
- [12] Google. Documentation, or-tools - job shop, (2025). Ostatnio otworzono 25 listopada 2025.
- [13] J. H. Holland. Genetic algorithms. *Scientific american*, 267(1):66–73, 1992.
- [14] Meta. React, (2025). Ostatnio otworzono 27 listopada 2025.
- [15] J. Nielsen. 10 usability heuristics for user interface design, (2024). Ostatnio otworzono 25 listopada 2025.

- [16] E. Rappos, E. Thiémard, S. Robert, and J.-F. Hêche. A mixed-integer programming approach for solving university course timetabling problems. *Journal of Scheduling*, 25(4):391–404, 2022.
- [17] M. Schlichtkrull, T. N. Kipf, P. Bloem, R. Van Den Berg, I. Titov, and M. Welling. Modeling relational data with graph convolutional networks. In *European semantic web conference*, pages 593–607. Springer, 2018.
- [18] Vulcan. Plan lekcji optivum. układanie planu lekcji - krok po kroku, (2025). Ostatnio otworzono 25 listopada 2025.
- [19] H. Xiong, S. Shi, D. Ren, and J. Hu. A survey of job shop scheduling problem: The types and models. *Computers & Operations Research*, 142:105731, 2022.

# Spis rysunków

2.1	Zrzut ekranu importowania arkusza organizacyjnego do programu „Plan lekcji Optivum” [18] . . . . .	9
2.2	Zrzut ekranu wprowadzania sal do programu „Plan lekcji Optivum” [18] . . . . .	9
2.3	Zrzut ekranu wprowadzania preferencji sal względem przedmiotów do programu „Plan lekcji Optivum” [18] . . . . .	10
2.4	Zrzut ekranu wprowadzania preferencji sal względem nauczycieli do programu „Plan lekcji Optivum” [18] . . . . .	10
2.5	Zrzut ekranu wprowadzania bloków przedmiotów do programu „Plan lekcji Optivum” [18] . . . . .	10
2.6	Zrzut ekranu wprowadzania terminów zajęć dla poszczególnych klas do programu „Plan lekcji Optivum” [18] . . . . .	11
2.7	Zrzut ekranu wprowadzania dostępności nauczycieli do programu „Plan lekcji Optivum” [18] . . . . .	11
2.8	Zrzut ekranu wprowadzania „trudnych” lekcji do programu „Plan lekcji Optivum” [18] . . . . .	12
3.1	Zrzut ekranu z arkusza kalkulacyjnego przedstawiający przypisanie godzinowe nauczycieli dla każdej klasy. . . . .	14
3.2	Wizualizacja rozwiązania klasycznego problemu JSSP z wykorzystaniem zmiennych interwałowych [12] . . . . .	22
3.3	Struktura algorytmu . . . . .	24
3.4	Wykres funkcji użytej do ewaluacji rozkładu godzin nauczycieli i klas na przestrzeni tygodnia. . . . .	34
4.1	Diagram wymagań . . . . .	44
4.2	Diagram przypadków użycia . . . . .	45
4.3	Diagram sekwencji dla przypadku użycia generowania planu lekcji . . . . .	52
4.4	Diagram sekwencji dla przypadku użycia oglądania planu lekcji . . . . .	52
4.5	Diagram sekwencji dla przypadku użycia edycji bądź wprowadzania wymagań głównych . . . . .	53
4.6	Architektura aplikacji . . . . .	54
4.7	Diagram tabel podstawowych w bazie danych . . . . .	55
4.8	Diagram tabel podstawowych i wymagań w bazie danych . . . . .	56
4.9	Diagram pełnego projektu bazy danych . . . . .	58
4.10	Automatycznie wygenerowana lista endpointów stworzonych przy użyciu ModelViewSet	64
4.11	Nawigacja interfejsu webowego . . . . .	65
4.12	Strona główna interfejsu webowego . . . . .	65

4.13 Podgląd planu z perspektywy nauczyciela . . . . .	66
4.14 Podgląd planu z perspektywy klasy . . . . .	66
4.15 Widok generowania planu lekcji . . . . .	67
4.16 Widok dodawania przedmiotów . . . . .	67
4.17 Widok dodawania nauczycieli . . . . .	68
4.18 Widok dodawania sal . . . . .	68
4.19 Widok dodawania klas . . . . .	69
4.20 Widok dodawania wymagań głównych . . . . .	70
4.21 Widok wprowadzania dostępności nauczycieli . . . . .	71
4.22 Widok dodawania bloków przedmiotów . . . . .	71

# Spis tabel

4.1 Przypadek użycia UC01 . . . . .	46
4.2 Przypadek użycia UC02 . . . . .	46
4.3 Przypadek użycia UC03 . . . . .	47
4.4 Przypadek użycia UC04 . . . . .	47
4.5 Przypadek użycia UC05 . . . . .	48
4.6 Przypadek użycia UC06 . . . . .	48
4.7 Przypadek użycia UC07 . . . . .	49
4.8 Przypadek użycia UC08 . . . . .	49
4.9 Przypadek użycia UC09 . . . . .	50
4.10 Przypadek użycia UC10 . . . . .	50
4.11 Przypadek użycia UC11 . . . . .	51
4.12 Przypadek użycia UC12 . . . . .	51
4.13 Tabele podstawowe zasobów szkolnych . . . . .	54
4.14 Tabele definiujące wymagania i ograniczenia . . . . .	55
4.15 Tabele zbiorów zasobów z uzasadnieniem relacji . . . . .	56
4.16 Tabele przechowujące wygenerowane plany lekcji . . . . .	57
4.17 Struktura wszystkich tabel . . . . .	59
5.1 Generowanie planu lekcji z określonymi parametrami . . . . .	73
5.2 Scenariusz przeglądu planów lekcji . . . . .	74
5.3 Scenariusz importowania i edytowania wymagań głównych . . . . .	74
5.4 Scenariusz edytowania dostępności nauczycieli . . . . .	75