# Autómatas con pila y LIC

Parte I y Parte II

# Integrantes

## Parte I

Nora Patricia Vicente Arellano

Claudia Dominguez Valenzuela

Angel Giovanny

## Parte II

Vania Stephany Sanchez Lee

Karina Puente Fernández

Axel Frederick Félix Jiménez

# Parte I

# Autómatas con pila y LIC.

# 5.4.1 Teorema

**5.4.1 Teorema.** *Dada una GIC $G$, existe un AFPN $M$ tal que $L(G) = L(M)$.*

La función de transición se define de la siguiente manera:

1. $\Delta(q_0, \lambda, z_0) = \{(q_1, Sz_0)\}$. Transición $\lambda$ mediante la cual $M$ coloca el símbolo inicial de la gramática, $S$, en el tope de la pila al iniciar el procesamiento de una cadena de entrada.

2. Para cada variable $A \in V$,

   $\Delta(q_1, \lambda, A) = \{(q_1, u) : A \to u$ es una producción de la gramática $G\}$.

   Mediante estas transiciones, $M$ utiliza la pila para simular las derivaciones: si el tope de la pila es $A$ y en la derivación se usa la producción $A \to u$, el tope de la pila $A$ es substituido por $u$.

3. Para cada símbolo terminal $a \in \Sigma$, $\Delta(q_1, a, a) = \{(q_1, \lambda)\}$. Mediante estas transiciones, $M$ borra los terminales del tope de la pila al consumirlos sobre la cinta de entrada.

4. $\Delta(q_1, \lambda, z_0) = \{(q_2, z_0)\}$. $M$ ingresa al estado de aceptación $q_2$ cuando detecta el marcador de fondo $z_0$.

# Ejemplo

Sea $G$ la gramática:

$$G : \begin{cases} S \to aAbS \mid bBa \mid \lambda \\ A \to aA \mid a \\ B \to bB \mid b \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(q_0, \lambda, z_0) &= \{(q_1, Sz_0)\}, \\
\Delta(q_1, \lambda, S) &= \{(q_1, aAbS), (q_1, bBa), (q_1, \lambda)\}, \\
\Delta(q_1, \lambda, A) &= \{(q_1, aA), (q_1, a)\}, \\
\Delta(q_1, \lambda, B) &= \{(q_1, bB), (q_1, b)\}, \\
\Delta(q_1, a, a) &= \{(q_1, \lambda)\}, \\
\Delta(q_1, b, b) &= \{(q_1, \lambda)\}, \\
\Delta(q_1, \lambda, z_0) &= \{(q_2, z_0)\}.
\end{aligned}$$

Por el teorema 5.4.1

$M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, z_0, \Delta)$ donde

$$\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_2\}, \\
F &= \{q_2\}, \\
\Gamma &= \{a, b, S, A, B, z_0\},
\end{aligned}$$

$$S \Longrightarrow aAbS \Longrightarrow aabS \Longrightarrow aabbBa \Longrightarrow aabbba.$$

El autómata $M$ simula esta derivación de la cadena $aabbba$ así:

$$\begin{aligned}(q_0, aabbba, z_0) &\vdash (q_1, aabbba, Sz_0) \vdash (q_1, aabbba, aAbSz_0)\\ &\vdash (q_1, abbba, AbSz_0) \vdash (q_1, abbba, abSz_0)\\ &\vdash (q_1, bbba, bSz_0) \vdash (q_1, bba, Sz_0) \vdash (q_1, bba, bBaz_0)\\ &\vdash (q_1, ba, Baz_0) \vdash (q_1, ba, baz_0) \vdash (q_1, a, az_0)\\ &\vdash (q_1, \lambda, z_0) \vdash (q_2, \lambda, z_0).\end{aligned}$$

# Parte II

# Autómatas con pila y LIC.

# Teorema

Segunda parte de la correspondencia entre AFPN y LIC.

## 5.4.1

### Teorema

Dado un AFPN $M = (Q, q0, \Sigma, \Gamma, z0, \Delta)$ que acepta por pila vacía, existe una GIC $G = (\Sigma, V, S, P)$ tal que $L(G) = N(M)$.

Para todo AFPN que acepta por pila vacía existe una GIC que genera el lenguaje aceptado por el autómata.
Las gramáticas obtenidas son bastante complejas, con un gran número de variables y de producciones, el procedimiento puede dar lugar a muchas variables inútiles (no terminables o no alcanzables).

# Demostración

En la gramática G las variables (aparte de la variable inicial S) serán tripletas de la forma [qXp] donde q, p∈Q y X∈Γ.
Las producciones de G se definen de la siguiente manera:

**01**

Si (p, λ) ∈ Δ(q, a, X)
Se añade la producción
[qXp]→a

**02**

Si (p, λ) ∈Δ (q, λ, X)
Se añade la producción
[qXp]→λ

**03**

Si (r, Y1Y2⋯Yk) ∈ Δ (q,a,X)
a puede ser un símbolo del alfabeto Σ o a= λyk ≥1
Se añaden todas las producciones de la forma
$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2]\cdots[r_{k-1}Y_kr_k]$
para todas las secuencias posibles $r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}$ de estados de Q

**04**

Para todo p ∈ Q se añade la producción
$S \rightarrow [q_0z_0p]$

# Demostración - Ec. 5.1

La gramática G pretende simular con derivaciones a izquierda los cómputos de M

[qXp] : Al extraer X del tope de la pila, se pasa del estado q al estado p

$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2]\cdots[r_{k-1}Y_kr_k]$

Indica las posibles maneras en las que M puede extraer la cadena Y1 Y2 ⋯ Yk de la pila

Demostraremos primero la inclusión N(M)⊆L(G). Para todo q, p∈Q, X∈Γ y w∈Σ∗, se demostrara la implicación

$$(5.1) \qquad \text{si } (q, w, X) \overset{+}{\vdash} (p, \lambda, \lambda) \text{ entonces } [qXp] \overset{+}{\Longrightarrow} w,$$

Un paso: es de la forma $(q, a, X) \vdash (p, \lambda, \lambda)$ o de la forma $(q, \lambda, X) \vdash (p, \lambda, \lambda)$.

Si (q, a, X)⊢(p, λ, λ), entonces (p, λ)∈Δ(q, a, X); así que [qXp]→a es una producción de G, y se obtendrá la derivación [qXp]⇒a.

Si (q, λ, X)⊢(p, λ, λ), entonces (p, λ)∈Δ(q, λ, X); así que [qXp]→λ es una producción de G y se obtendrá [qXp]⇒λ.

# Demostración - Ec. 5.2

Supóngase que $(q, w, X) \overset{n}{\vdash} (p, \lambda, \lambda)$ donde n > 1.
Considerando el primer paso de este cómputo de n pasos, podemos escribir:

$$(q, ax, X) \vdash (r_0, x, Y_1Y_2 \cdots Y_k) \overset{*}{\vdash} (p, \lambda, \lambda),$$

Por la definición de la gramática G:

$$[qXr_k] \to a[r_0Y_1r_1][r_1Y_2r_2] \cdots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

Existe una secuencia de estados r1, r2,. . . , rk−1, rk = p tales que:

$$\begin{aligned}(r_0, x, Y_1Y_2 \cdots Y_k) = (r_0, w_1w_2 \cdots w_k, Y_1Y_2 \cdots Y_k) &\overset{+}{\vdash} (r_1, w_2 \cdots w_k, Y_2 \cdots Y_k) \\ &\overset{+}{\vdash} (r_2, w_3 \cdots w_k, Y_3 \cdots Y_k) \overset{+}{\vdash} (r_{k-1}, w_k, Y_k) \overset{+}{\vdash} (r_k, \lambda, \lambda).\end{aligned}$$

Para $i = 1, 2, \ldots, k$ se tiene así una secuencia de cómputos parciales

$$(r_{i-1}, w_i, Y_i) \overset{+}{\vdash} (r_i, \lambda, \lambda),$$

donde $r_k = p$. Por la hipótesis de inducción, $[r_{i-1}Y_ir_i] \overset{+}{\Longrightarrow} w_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. Por consiguiente,

$$[qXp] = [qXr_k] \Longrightarrow a[r_0Y_1r_1][r_1Y_2r_2] \cdots [r_{k-1}Y_kr_k] \overset{+}{\Longrightarrow} aw_1w_2 \cdots w_k = w.$$

Esto demuestra la implicación 5.1. Por lo tanto, si $w$ es aceptada por $M$, siendo $w \neq \lambda$, se tendrá $(q_0, w, z_0) \overset{+}{\vdash} (p, \lambda, \lambda)$, y usando 5.1 se concluirá que $S \Longrightarrow [q_0z_0p] \overset{+}{\Longrightarrow} w$. Si $w = \lambda$ es aceptada por $M$, necesariamente $(q_0, \lambda, z_0) \vdash (p, \lambda, \lambda)$ para algún estado $p$. Esto significa que $(q_0, \lambda, z_0) \vdash (p, \lambda, \lambda)$, y se tendrá $S \Longrightarrow [q_0z_0p] \Longrightarrow \lambda$. Esto demuestra que $N(M) \subseteq L(G)$.

# Demostración - Ec. 5.3

Para establecer L(G) ⊆ N(M) se demuestra la implicación:

$$\text{si } [qXp] \overset{+}{\Longrightarrow} w, \text{ entonces } (q, w, X) \overset{+}{\vdash} (p, \lambda, \lambda),$$

por inducción sobre el número de pasos en la derivación:

$$[qXp] \overset{+}{\Longrightarrow} w.$$

Si en G se puede derivar la cadena w, la primera producción aplicada será de la forma:

$$S \to [q_0 z_0 p]. \text{ De donde, } S \Longrightarrow [q_0 z_0 p] \overset{+}{\Longrightarrow} w.$$

Usando 5.3 se concluye: $(q_0, w, z_0) \overset{+}{\vdash} (p, \lambda, \lambda)$, o sea $w \in N(M)$.

# Ejemplo

La siguiente gramática genera los palíndromos de longitud par, sobre $\Sigma = \{a, b\}$, es decir, el lenguaje $L = \{ww^R : w \in \Sigma^*\}$:

$$S \to aSa \mid bSb \mid \lambda.$$

Siguiendo el procedimiento del Teorema 5.4.1 podemos construir un AFPN que acepta a L. $M = (Q, q0, F, \Sigma, \Gamma, z0, \Delta)$ donde

$Q = \{q0, q1, q2\}$,

$F = \{q2\}$,

$\Gamma = \{a, b, S, z0\}$.

La función de transición $\Delta$ está dada por:

$$\Delta(q0, \lambda, z0) = \{(q1, Sz0)\},$$
$$\Delta(q1, \lambda, S) = \{(q1, aSa), (q1, bSb), (q1, \lambda)\},$$
$$\Delta(q1, a, a) = \{(q1, \lambda)\},$$
$$\Delta(q1, b, b) = \{(q1, \lambda)\},$$
$$\Delta(q1, \lambda, z0) = \{(q2, z0)\}.$$

Puede observarse que este autómata es diferente del exhibido en el tercer ejemplo de la sección 5.2

# Gracias por su atención