

1. INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN LINEAL

1.1 UN POCO DE HISTORIA

La *Programación Lineal* fue conceptualmente desarrollada antes de la segunda guerra mundial. Sin embargo, el mayor progreso en este campo se ubica en 1947 cuando George Dantzig, matemático estadounidense, plantea en términos muy precisos el modelo estándar al cual se ajusta todo problema de programación lineal. Posteriormente Dantzig también formula el procedimiento de solución conocido como *Método Simplex*.

Como trabajos de valor anteriores a 1947, que tuvieron influencia sobre la programación lineal, cabe citar la *Teoría de Juegos* publicada en 1928 por el matemático norteamericano de origen húngaro John Von Neumann y la extensa monografía presentada en 1939 por Leonid Kantorovich, titulada *Métodos Matemáticos en la Organización y Planificación de la Producción*. Kantorovich, economista, ingeniero y matemático ruso, obtiene en 1975 el Premio Nobel de Economía por sus aportaciones a la *Teoría de la Asignación Óptima de Recursos*.

1.2 ¿QUÉ ES UN PROGRAMA LINEAL?

La *Programación (u Optimización) Matemática* aborda el diseño de metodologías para resolver, desde un punto de vista práctico, situaciones reales en las cuales, *en general*, se pretende determinar la asignación de recursos escasos para cumplir un objetivo dado.¹ Tales situaciones presentan además, como aspecto común, la necesidad de identificar el mejor curso de acción (en lo posible, el óptimo), frente a múltiples alternativas de solución.

Una de las herramientas más importantes de la optimización matemática es la programación lineal, siendo habitual su uso en diversas áreas de toma de decisiones de empresas y organizaciones de todo el mundo.

Un *problema (o programa) lineal* está compuesto por una *función objetivo* a optimizar y un conjunto de *restricciones* que limitan o condicionan dicho objetivo. Como característica distintiva, tanto la función objetivo como las restricciones, son funciones lineales. El siguiente ejemplo nos permitirá introducir el tema de manera sencilla.

Ejemplo 1-1

Un pequeño taller de alfarería produce vasijas y cántaros de alta calidad, con diseños y colores autóctonos. Los principales recursos utilizados en el taller son la mano de obra calificada de artesanos locales y cierto tipo de arcilla. Actualmente se dispone de 40 horas de mano de obra y 75kg de arcilla, por día.

Cada vasija tiene una contribución marginal de \$20 y requiere 1 hora de mano de obra y 3kg de arcilla, mientras que, cada cántaro tiene una contribución marginal de \$45 e insume 2 horas de mano de obra y 1,5kg de arcilla. Se sabe además, que la demanda diaria de cántaros nunca excede las 15 unidades.

Bajo el supuesto que todas las unidades producidas pueden venderse, se desea programar la producción diaria de manera de maximizar la contribución marginal total.

¹ El término *programación* tiene el sentido de formulación de un plan o programa que ha de realizarse de manera óptima.

La formulación de un programa lineal requiere la construcción de un **modelo matemático** en términos de:

- **Variables de decisión**, también denominadas **variables concretas** o **actividades** del sistema.
- Una **función económica (función objetivo o funcional)** a maximizar o minimizar, siendo ésta una función lineal de las variables de decisión.
- Un **conjunto de restricciones** que limitan los valores de las variables de decisión, siendo cada restricción una ecuación o inecuación lineal de las variables de decisión.

De esta forma, para el Ejemplo 1-1 tendremos,

Variables de decisión

x_1 : producción diaria de vasijas (en unidades)

x_2 : producción diaria de cántaros (en unidades)

Función objetivo

$$\text{Maximizar } z = 20x_1 + 45x_2$$

Restricciones

Disponibilidad de mano de obra (en horas diarias): $x_1 + 2x_2 \leq 40$

Disponibilidad de arcilla (en kg/día): $3x_1 + 1,5x_2 \leq 75$

Demanda máxima (en unidades diarias): $x_2 \leq 15$

Como **restricciones implícitas**, las variables de decisión deben ser no negativas.

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La condición de no negatividad dota a las variables de significado económico y resulta fundamental para el método de resolución.

En síntesis, en lenguaje matemático, nuestro problema consiste en seleccionar los valores o **niveles** de las actividades x_1 y x_2 para

$$\text{Maximizar } z = 20x_1 + 45x_2$$

sujeta a las restricciones

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$3x_1 + 1,5x_2 \leq 75$$

$$x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1.3 MODELO GENERAL

Es lógico pensar que el ejemplo anterior podría extenderse a n actividades y m restricciones. Así, el modelo matemático para el **problema general de programación lineal** tomará la forma:

$$\text{Max (o Min) } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

sujeta a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq; =; \geq) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (\leq; =; \geq) b_2$$

$$\dots + \dots + \dots + \dots (\leq; =; \geq) \dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq; =; \geq) b_m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1; 2; \dots; n$$

x_j simboliza a las variables de decisión. Son los valores numéricos que se obtienen con la solución del modelo y representan, o están relacionadas, con una actividad o acción a tomar. La cantidad de variables de decisión no está restringida (j varía desde 1 hasta n).

c_j simboliza el coeficiente de la variable j en la función económica. Representa la cantidad con la cual cada unidad de x_j contribuye al valor total del objetivo.

b_i simboliza el lado derecho de la restricción i . Representa la cantidad total disponible del recurso limitado i , o la cantidad total de un requerimiento o condición i establecida.

La cantidad de restricciones no está restringida (i varía desde 1 hasta m).

a_{ij} frecuentemente denominado **coeficiente o requerimiento tecnológico**, simboliza el coeficiente que en la restricción i acompaña a la variable j . Cuando la restricción o limitación representa un recurso, indica la cantidad de recurso i insumido por cada unidad de la actividad j . Cuando la limitación representa un requerimiento o condición, indica la cantidad del requerimiento o condición, que aporta cada unidad de la variable j , al requerimiento o condición total establecida.

c_j , b_i y a_{ij} son parámetros que pueden asumir cualquier valor real. Sobre ellos no se formula ninguna hipótesis.

La restricción de no negatividad de las variables está siempre presente como una condición natural en la mayoría de los modelos lineales, siendo además, un requisito fundamental para la resolución del modelo. Por otra parte, las variables irrestrictas en signo pueden ser reemplazadas fácilmente por variables no negativas.

Sin importar la interpretación o el contexto, cualquier problema que se ajuste al modelo anterior se clasifica como un problema de programación lineal.

1.4 APLICACIONES DE PROGRAMACIÓN LINEAL. EJEMPLOS

Si bien la programación lineal surgió particularmente para dar respuesta a cuestiones de carácter logístico y militar, es en la industria, en la economía y en los servicios donde posteriormente ha encontrado sus aplicaciones más interesantes. La resolución de problemas de mezcla, dietas, localización de plantas, planificación de la producción, carga de máquinas, optimización de turnos de trabajo, selección de alternativas de inversión, diseño de planes de vuelo, diagramación de recorridos de transporte, sincronización de semáforos, control de contaminación, planificación de la expansión de redes de telecomunicaciones, son sólo algunas de tales aplicaciones.

A continuación se ejemplifican distintas situaciones cuya representación y posterior solución se obtiene a partir de un modelo lineal.

Ejemplo 1-2 Problema de mezcla

Un fraccionador de whisky importa el licor en tres calidades diferentes: X , Y y Z . Dispone de un mercado ilimitado, pero las reglamentaciones aduaneras vigentes imponen las siguientes restricciones.

<i>Tipo</i>	<i>Cantidad máxima</i> <i>[litros/mensuales]</i>	<i>Costo</i> <i>[\$/litro]</i>
X	2.500	127
Y	2.800	75
Z	1.600	54

Con los tres tipos de whisky, de acuerdo a fórmulas propias que especifican los contenidos máximos y mínimos de cada tipo, obtiene las marcas comerciales: *Valentín Gold*, *F & V* y *Red & White*.

Capítulo 1

Los precios de venta y las referidas especificaciones se sintetizan a continuación.

Marca	Precio de venta [\$/litro]	Composición	
		Mínimo	Máximo
Valentín Gold	119	60% de X	20% de Z
F & V Reserve	99	15% de X	60% de Z
Red & White	62	—	50% de Z

Se pretende obtener el plan de producción que maximiza la contribución marginal.

Formulación del modelo

x_{ij} : cantidad de litros mensuales de whisky i destinada a la elaboración de la marca comercial j ;
 $i = X, Y, Z; j = 1$ (Valentín Gold), 2 (F & V Reserve), 3 (Red and White)

$$\text{Max } z = -8x_{X1} + 44x_{Y1} + 65x_{Z1} - 28x_{X2} + 24x_{Y2} + 45x_{Z2} - 65x_{X3} - 13x_{Y3} + 8x_{Z3}$$

s. a

$$\begin{aligned} 0,4x_{X1} - 0,6x_{Y1} - 0,6x_{Z1} &\geq 0 \\ -0,2x_{X1} - 0,2x_{Y1} + 0,8x_{Z1} &\leq 0 \\ 0,85x_{X2} - 0,15x_{Y2} - 0,15x_{Z2} &\geq 0 \\ -0,6x_{X2} - 0,6x_{Y2} + 0,4x_{Z2} &\leq 0 \\ -0,5x_{X3} - 0,5x_{Y3} + 0,5x_{Z3} &\leq 0 \\ x_{X1} + x_{X2} + x_{X3} &\leq 2.500 \\ x_{Y1} + x_{Y2} + x_{Y3} &\leq 2.800 \\ x_{Z1} + x_{Z2} + x_{Z3} &\leq 1.600 \\ x_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 1-3 Problema de dieta

En un establecimiento hospitalario se ha determinado que la dieta diaria destinada a cada individuo de un determinado segmento de pacientes debe contener, al menos, 2.500kcal de energía, 65g de proteínas y 800mg de calcio. Las vitaminas y hierro serán aportadas mediante la ingesta de pastillas.

La tabla siguiente muestra, para cada uno de los alimentos disponibles, la información nutricional, la cantidad máxima de dosis diarias (impuesta por razones de variedad) y el costo.

Alimento	Cantidad por dosis	Energía [kcal/dosis]	Proteínas [g/dosis]	Calcio [mg/dosis]	Costo [\$/dosis]	Cant. max. [dosis/día]
Leche	237 cc	160	8	285	0,65	3
Cereales	28 g	110	4	2	0,38	3
Dulces	170 g	420	4	22	0,30	2
Huevos	2 grande	160	13	54	0,50	1
Pollo	100 g	205	32	12	1,40	2
Carne	260 g	260	14	80	4,50	2

Se desea formular la dieta de mínimo costo que satisfaga los requisitos establecidos.

Formulación del modelo

x_j : cantidad de dosis diarias del alimento j suministradas a cada paciente; $j = 1$ (leche), 2 (cereales), ..., 6 (carne)

$$\text{Min } w = 0,65x_1 + 0,38x_2 + 0,3x_3 + 0,5x_4 + 1,4x_5 + 4,5x_6$$

s. a

$$\begin{array}{rcl}
 160x_1 + 110x_2 + 420x_3 + 160x_4 + 205x_5 + 260x_6 & \geq & 2.500 \\
 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 13x_4 + 32x_5 + 14x_6 & \geq & 65 \\
 285x_1 + 2x_2 + 22x_3 + 54x_4 + 12x_5 + 80x_6 & \geq & 800 \\
 x_1 & \leq & 3 \\
 & x_2 & \leq 3 \\
 & & x_3 \leq 2 \\
 & & & x_4 \leq 1 \\
 & & & & x_5 \leq 2 \\
 & & & & & x_6 \leq 2 \\
 & & & & & & x_j \geq 0
 \end{array}$$

Ejemplo 1-4 Planificación de la producción

Ross Motores S.A. desea satisfacer, en los próximos cuatro trimestres, la demanda de uno de sus modelos de motor eléctrico empleado para ventilación. El pronóstico de demanda para tales trimestres es de 9.300, 22.500, 18.000 y 12.000 unidades, respectivamente.

La capacidad de producción, en horas normales, es de 14.000 motores por trimestre. Empleando horas extra pueden fabricarse 3.750 unidades adicionales a un costo de \$3.300 por unidad. El costo de cada motor en horas normales es de \$3.000. Las unidades producidas durante un trimestre pueden cubrir la demanda de ese trimestre o almacenarse para atender demandas posteriores. El costo de mantenimiento de stock es de \$130 por unidad, por trimestre. La empresa cuenta con un stock inicial de 1.200 motores.

¿Cuál debería ser el plan de producción de la empresa?

Formulación del modelo

x_t : cantidad de unidades producidas en horas normales durante el trimestre t ; $t = 1, 2, 3, 4$
 y_t : cantidad de unidades producidas en horas extra durante el trimestre t ; $t = 1, 2, 3, 4$
 s_t : cantidad de unidades en stock al final del trimestre t ; $t = 1, 2, 3$

$$\text{Min } w = 3.000(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 3.300(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + 130(s_1 + s_2 + s_3)$$

s. a

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + y_1 - s_1 & = & 8.100 \\
 x_2 + y_2 + s_1 - s_2 & = & 22.500 \\
 x_3 + y_3 + s_2 - s_3 & = & 18.000 \\
 x_4 + y_4 + s_3 & = & 12.000 \\
 x_t & \leq & 14.000 \\
 y_t & \leq & 3.750 \\
 x_t; y_t; s_t & \geq & 0
 \end{array}$$

Ejemplo 1-5 Programa de producción y ventas con ley de precios en función de la cantidad

En un taller se fabrican dos tipos de piezas: *A* y *B*. Cada pieza de tipo *A* insume 1 hora de maquinado, 6 horas de mano de obra y 0,5kg de materia prima. Cada pieza de tipo *B* insume 3 horas de maquinado, 4 horas de mano de obra y 1kg de materia prima.

Para el próximo período se dispone de 600 horas de maquinado, 600 horas de mano de obra y 150kg de materia prima.

Capítulo 1

Los precios de venta de las piezas contemplan descuentos por cantidad, por consiguiente, sus utilidades disminuyen a medida que aumenta el número de unidades vendidas según se muestra en la tabla siguiente.

Pieza tipo A		Pieza tipo B	
Unidades vendidas	Utilidad unitaria	Unidades vendidas	Utilidad unitaria
1 – 40	\$20	1 – 50	\$18
41 – 100	\$18	51 – 100	\$17
		101 – 150	\$14

En la tabla debemos interpretar que, si por ejemplo, se venden 130 piezas tipo B, las primeras 50 darán \$18 de utilidad unitaria, las siguientes 50, \$17 y las últimas 30, \$14.

¿Cuál será el programa de producción y ventas que maximiza la utilidad total?

Formulación del modelo

x_{ij} : cantidad de unidades a producir/vender de las piezas tipo i que pertenecen al intervalo j , en el período; $i = A, B$; para las piezas tipo A: $j = 1$ (1 – 40), 2 (41 – 100); para las piezas tipo B: $j = 1$ (1 – 50), 2 (51 – 100), 3 (101 – 150)

x_i : cantidad total de piezas tipo i a producir/vender durante el período; $i = A, B$

$$\text{Max } z = 20x_{A1} + 18x_{A2} + 18x_{B1} + 17x_{B2} + 14x_{B3}$$

s. a

$$\begin{array}{rcl} x_{A1} & & \leq 40 \\ x_{A2} & & \leq 60 \\ x_{B1} & & \leq 50 \\ x_{B2} & & \leq 50 \\ x_{B3} & & \leq 50 \\ -x_{A1} - x_{A2} & + x_A & = 0 \\ -x_{B1} - x_{B2} - x_{B3} & + x_B & = 0 \\ x_A + 3x_B & \leq 600 \\ 6x_A + 4x_B & \leq 600 \\ 0,5x_A + x_B & \leq 150 \\ x_{ij}; & x_i & \geq 0 \end{array}$$

Ejemplo 1-6 Programación de recursos humanos

La oficina de recepción y retiro de un servicio de encomiendas local funciona los 7 días de la semana.

Los requerimientos mínimos de personal, durante el horario de atención, se resumen en la siguiente tabla.

	Lun.	Mar.	Miér.	Jue.	Vier.	Sáb.	Dom.
Cantidad mínima de empleados	20	13	15	18	14	16	11

Los empleados tienen un régimen de trabajo de 5 días consecutivos a la semana y 2 días de descanso. Cada empleado goza de los mismos dos días libres consecutivos cada semana.

El costo laboral por empleado y por día es de \$150 de lunes a viernes, \$175 los sábados y \$200 los domingos.

¿De qué manera se pueden satisfacer los requerimientos de servicio al mínimo costo?

Formulación del modelo

x_j : cantidad de empleados que inician su secuencia de 5 días el día j ; $j = 1$ (lun. a vier.), 2 (mar. a sáb.), 3 (miér. a dom.), 4 (jue. a lun.), 5 (vier. a mar.), 6 (sáb. a miér.), 7 (dom. a jue.)

$$\text{Min } W = 750x_1 + 775x_2 + 825x_3 + 825x_4 + 825x_5 + 825x_6 + 800x_7$$

s. a

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 20 \\ x_1 + x_2 &+ x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 &+ x_6 + x_7 \geq 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &+ x_7 \geq 18 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq 14 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\geq 16 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 11 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 1-7 Cartera de inversiones

R & R Negocios Financieros dispone de un monto de \$10.000.000 para ser colocado en las siguientes alternativas de inversión.

Alternativa	Retorno [%]	Riesgo [%]
<i>Títulos Públicos (bonos)</i>	8	2
<i>Títulos Privados (acciones)</i>	17	5
<i>Fideicomisos</i>	10	3
<i>Préstamos Comerciales</i>	9	4
<i>Préstamos Personales</i>	14	8

El capital no invertido en alguna de las opciones anteriores es colocado en depósitos bancarios con un retorno del 3% y riesgo nulo.

Además, los directivos *R & R* han dispuesto que: el riesgo promedio (sobre el capital invertido) no debe superar el 5%; se debe invertir al menos el 20% en préstamos comerciales; el monto combinado entre préstamos personales y títulos privados no puede ser mayor que el monto en títulos públicos.

Se desea obtener el plan de inversión que maximice el retorno.

Formulación del modelo

x_j : monto invertido en la alternativa j ; $j = 1$ (títulos públicos), 2 (títulos privados), 3 (fideicomisos), 4 (préstamos comerciales), 5 (préstamos personales)

y : monto no invertido asignado a depósitos bancarios

$$\text{Max } z = 0,08x_1 + 0,17x_2 + 0,1x_3 + 0,09x_4 + 0,14x_5 + 0,03y$$

s. a

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 &+ x_3 &+ x_4 &+ x_5 + y &= 10.000.000 \\ -0,03x_1 &&&&-0,02x_3 - 0,01x_4 + 0,03x_5 &\leq 0 \\ -0,2x_1 - 0,2x_2 &-0,2x_3 &+ 0,8x_4 &-0,2x_5 &&\geq 0 \\ -x_1 &+ x_2 &&&+ x_5 &\leq 0 \\ &&&&x_j; y &\geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 1-8 Plan multiperíodo de inversiones

Un alumno avanzado en la *Licenciatura en Ciencias Empresariales* desea determinar el mejor plan de inversión en un horizonte de 5 años.

Inicialmente cuenta con \$30.000 y las alternativas existentes son *A* y *B*. Cada peso invertido en *A* retribuye una utilidad de \$0,30 al cabo de dos años. Cada peso invertido en *B* retribuye \$0,50 tres años más tarde.

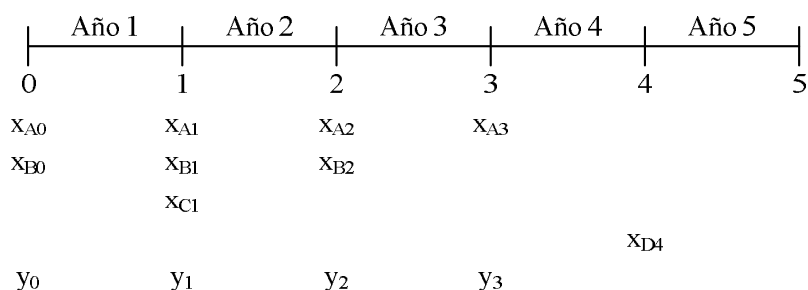
A las opciones *A* y *B*, que estarán disponibles al comienzo de cada uno de los 5 años siguientes, se sumarán en el futuro, *C* y *D*. Cada peso invertido en *C* al comienzo del segundo año retribuye \$0,80 al final del quinto año. Cada peso invertido en *D* al principio del quinto año retribuye \$0,30 al cabo de un año.

¿Qué plan le permitirá al alumno maximizar la cantidad de dinero acumulado al cabo de los 5 años?

Formulación del modelo

x_{ij} : cantidad invertida en la opción i en el instante j ; $i = A, B, C, D$; $j = 0$ (inicio año 1), 1 (inicio año 2), 2 (inicio año 3), 3 (inicio año 4), 4 (inicio año 5)

y_j : cantidad no invertida en el instante j ; $j = 0$ (inicio año 1), 1 (inicio año 2), 2 (inicio año 3), 3 (inicio año 4)



$$\text{Max } z = 1,8x_{C1} + 1,5x_{B2} + 1,3x_{A3} + 1,3x_{D4}$$

s. a

$$\begin{array}{rcl} x_{A0} + x_{B0} + y_0 & & = 30.000 \\ & - y_0 + x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} + y_1 & = 0 \\ -1,3x_{A0} & & - y_1 + x_{A2} + x_{B2} + y_2 = 0 \\ & -1,5x_{B0} & -1,3x_{A1} & - y_2 + x_{A3} + y_3 = 0 \\ & & -1,5x_{B1} & -1,3x_{A2} & - y_3 + x_{D4} = 0 \\ & & & & x_{ij}; y_j \geq 0 \end{array}$$

Ejemplo 1-9 Problema de Transporte

Una empresa distribuidora de agua posee dos depósitos ubicados en diferentes zonas geográficas con los cuales debe dar suministro diario a tres áreas: A_1 , A_2 , y A_3 .

Los costos de bombeo, en pesos por millón de litros de agua, desde cada depósito a las diferentes áreas son los indicados a continuación.

	A_1	A_2	A_3
Depósito 1	14	15	12
Depósito 2	15	12	13

Los depósitos tienen una entrada diaria estimada de 20 y 25 millones de litros de agua respectivamente.

La demanda diaria esperada de cada una de las áreas es de 18, 10 y 12 millones de litros, respectivamente.

La empresa pretende establecer un plan de distribución que minimice los costos de satisfacción de demanda de cada una de las tres áreas.

Formulación del modelo

x_{ij} : millones de litros de agua suministrados diariamente por el depósito i al área j ; $i = 1, 2$; $j = 1 (A_1), 2 (A_2), 3 (A_3)$

$$\text{Min } w = 14x_{11} + 15x_{12} + 12x_{13} + 15x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23}$$

s. a

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 20$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 25$$

$$x_{11} + x_{21} = 18$$

$$x_{12} + x_{22} = 10$$

$$x_{13} + x_{23} = 12$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Ejemplo 1-10 Reducción de pérdidas por corte

Una papelería produce bobinas estándar (rollos de papel) en dos anchos distintos: 3m y 5m, que son cortadas conforme a los anchos demandados por los clientes. Tal operación requiere de una máquina cuyas cuchillas de corte pueden ser ajustadas para cualquier combinación de anchos, siempre que la suma de éstos no exceda los anchos de las bobinas estándar.

No hay límites en los largos de los rollos estándar puesto que, a efectos prácticos, rollos de longitud limitada pueden unirse para obtener los largos solicitados.

La empresa debe cumplimentar los siguientes pedidos.

Orden N°	Ancho [m]	Largo [m]
1	1,4	8.000
2	1,8	12.000
3	2,5	5.000

El objetivo es encontrar el *patrón de corte* que minimice las pérdidas por corte (material desperdiciado).

Formulación del modelo

De acuerdo al ancho de los rollos pedidos, cada bobina estándar puede ser cortada de diferentes maneras (combinaciones). La Figura 1-1 representa una alternativa admisible en la cual con la bobina estándar de 3m se satisface la orden n° 3 y, con la de 5m, las órdenes 1 y 2. Consecuentemente, la bobina de 3m requerirá un largo de 5.000m y, la de 5m, uno de 12.000m.

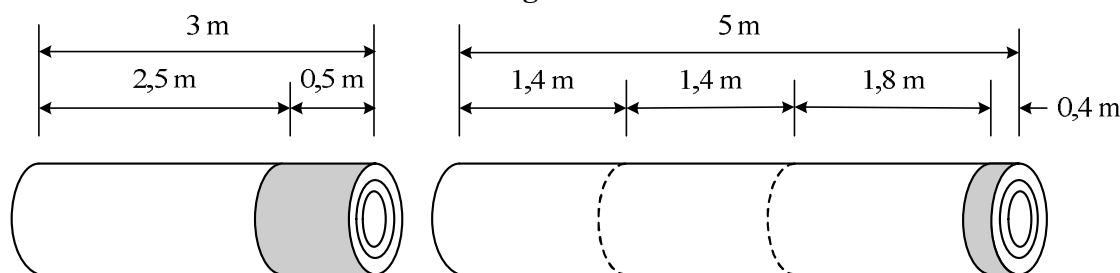
Las pérdidas asociadas serán,

para la bobina estándar de 3m: $0,5 \cdot 5.000 = 2.500\text{m}^2$

para la bobina estándar de 5m: $0,4 \cdot 12.000 + 2,8 \cdot 8.000 = 27.200\text{m}^2$ (el segundo sumando de esta expresión corresponde a la superficie desperdiciada al cortar dos rollos de 1,4m de ancho por 4.000m de largo cada uno)

Pérdida total: $2.500 + 27.200 = 29.700\text{m}^2$

Figura 1-1



Teniendo en cuenta que las combinaciones representan la cantidad de anchos solicitados que se obtienen de cada bobina estándar, las posibilidades son,

		Combinación ij para $i=1$ (bobina de 3 m)			Combinación ij para $i=2$ (bobina de 5 m)					
		11	12	13	21	22	23	24	25	26
Anchos requeridos	1,4	2	0	0	3	2	1	1	0	0
	1,8	0	1	0	0	1	2	0	1	0
	2,5	0	0	1	0	0	0	1	1	2
Pérdida en ancho		0,2	1,2	0,5	0,8	0,4	0	1,1	0,7	0

se formula entonces el siguiente programa lineal.

x_{ij} : largo del rollo i cortado según la combinación ij

s_n : largo que se desperdicia con cada ancho, $n = 1$ (ancho 1,4m), 2 (ancho 1,8m), 3 (ancho 2,5m)

$$\text{Min } z = 0,2x_{11} + 1,2x_{12} + 0,5x_{13} + 0,8x_{21} + 0,4x_{22} + 1,1x_{24} + 0,7x_{25} + 1,4s_1 + 1,8s_2 + 2,5s_3$$

s. a

$$\begin{array}{rcll} 2x_{11} & + 3x_{21} + 2x_{22} & + x_{23} + x_{24} & - s_1 = 8.000 \\ x_{12} & & + x_{22} + 2x_{23} & + x_{25} - s_2 = 12.000 \\ x_{13} & & & + x_{24} + x_{25} + 2x_{26} - s_3 = 5.000 \\ & & & x_{ij}; s_n \geq 0 \end{array}$$

Ejemplo 1-11 Distribución de carga

Delfino S.A., empresa dedicada al transporte marítimo de carga general, cuenta con una dotación de tres embarcaciones de características similares.

Cada barco posee 3 bodegas: una en la proa, otra en el centro y, la última, en la popa. Los límites de capacidad de estas bodegas, tanto en peso como en volumen, se resumen a continuación.

Bodega	Peso [t]	Volumen [m ³]
Proa	3.000	150.000
Centro	4.000	180.000
Popa	2.500	50.000

Además, para mantener la línea de flotación del barco, debe tenerse igual proporción de peso ocupado a capacidad en peso en cada bodega.

La próxima semana sólo una de las embarcaciones estará disponible y se recibirán las siguientes cargas, pudiendo aceptarse la totalidad o parte de ellas.

<i>Carga N°</i>	<i>Peso [t]</i>	<i>Volumen [m³/t]</i>	<i>Utilidad [\$/t]</i>
1	7.000	60	180
2	5.000	50	240
3	3.000	25	150

El objetivo es determinar qué cantidad de carga debe aceptarse y cómo distribuirla en las bodegas, de modo de obtener la máxima utilidad.

Formulación del modelo

x_{ij} : toneladas de carga i a transportar en la bodega j ; $i = 1, 2, 3$; $j = 1$ (proa), 2 (centro), 3 (popa)

$$\text{Max } z = 180(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 240(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 150(x_{31} + x_{32} + x_{33})$$

s. a

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &\leq 3.000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\leq 4.000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &\leq 2.500 \\ 60x_{11} + 50x_{21} + 25x_{31} &\leq 150.000 \\ 60x_{12} + 50x_{22} + 25x_{32} &\leq 180.000 \\ 60x_{13} + 50x_{23} + 25x_{33} &\leq 50.000 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 7.000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 5.000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 3.000 \\ 4.000x_{11} + 4.000x_{21} + 4.000x_{31} - 3.000x_{12} - 3.000x_{22} - 3.000x_{32} &= 0 \\ 2.500x_{12} + 2.500x_{22} + 2.500x_{32} - 4.000x_{13} - 4.000x_{23} - 4.000x_{33} &= 0 \\ x_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$

1.5 PROGRAMAS LINEALES BIDIMENSIONALES. MÉTODO GRÁFICO

Una vez formulado el modelo matemático correspondiente a una situación particular, resulta indispensable arribar a su solución. El **método gráfico** se utiliza para resolver problemas lineales con dos variables. Si bien su aplicación práctica es muy limitada, constituye la herramienta pedagógica indicada para vislumbrar los conceptos fundamentales de la programación lineal.

Veamos entonces cómo resolver gráficamente el problema planteado en el Ejemplo 1-1.

$$\text{Max } z = 20x_1 + 45x_2 \text{ (maximizar contribución marginal)}$$

s. a

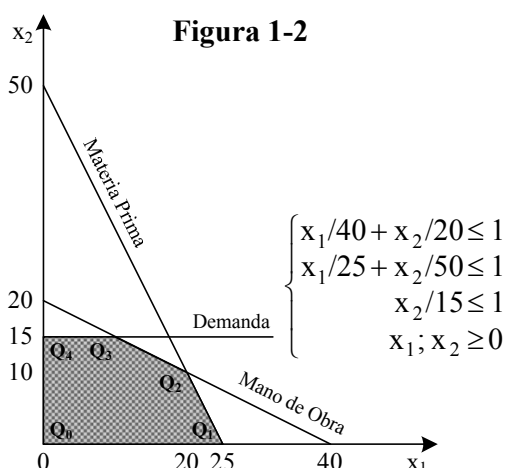
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 40 \text{ (restricción debida a la mano de obra)} \\ 3x_1 + 1,5x_2 &\leq 75 \text{ (restricción debida a la materia prima)} \\ x_2 &\leq 15 \text{ (restricción debida a la demanda)} \\ x_1; x_2 &\geq 0 \text{ (condición de no negatividad de las variables)} \end{aligned}$$

x_1 : producción diaria de vasijas (en unidades)

x_2 : producción diaria de cántaros (en unidades)

Sabemos que toda inecuación lineal con dos variables representa un semiplano. Comenzaremos por determinar la región del plano que satisface todas las restricciones, teniendo en cuenta que la condición de no negatividad de las variables limita las posibles soluciones al primer cuadrante.

La tarea se facilita si expresaremos las restricciones en su *forma segmentaria*. Recordemos además que para definir el semiplano indicado por una inecuación, se efectúa un sencillo chequeo consistente en verificar si un punto cualquiera forma parte de dicho semiplano. Concretamente, reemplazamos por el punto $(0; 0)$ en la inecuación y determinamos su cumplimiento. En caso afirmativo, deducimos que el semiplano correspondiente es aquel que contiene al origen de coordenadas.



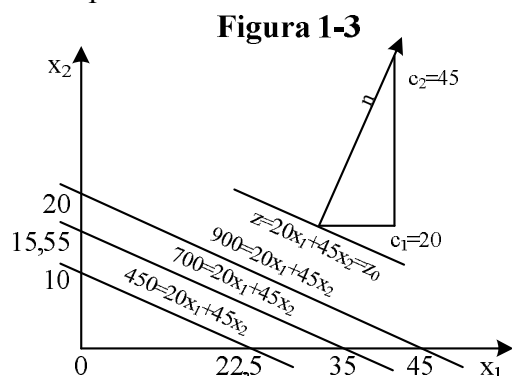
Los puntos contenidos por el polígono o conjunto convexo $Q_0Q_1Q_2Q_3Q_4$ (área sombreada en la Figura 1-2), tanto en los bordes como en su interior, constituyen la **región factible**: Cualquier punto de la región factible satisface todas las restricciones y la condición de no negatividad.

Se llama **conjunto convexo** a un sector del plano tal que para dos puntos cualesquiera del mismo, el segmento que los une está íntegramente incluido en el sector. Como casos particulares, un conjunto convexo puede quedar reducido a una recta, a una semirrecta, a un segmento, a un punto o al conjunto vacío.

Los segmentos que delimitan un conjunto convexo son sus bordes o lados y, la intersección de ellos, sus vértices llamados también **puntos extremos**. Un conjunto convexo puede ser cerrado o abierto respecto a cada lado o vértice según se incluya éste o no en la solución. Puede ser acotado o no acotado según su área sea o no finita.

Volviendo a nuestro ejemplo, podríamos escoger cualquier plan de producción con valores de x_1 y x_2 pertenecientes a la región factible. Ahora bien, de todos los planes de producción posibles (**soluciones posibles o admisibles**), nos interesa aquél que maximice la función $z = 20x_1 + 45x_2$.

Cuando z asume un valor prefijado z_0 , el lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas verifican $z = z_0$, es la recta de ecuación $z_0 = 20x_1 + 45x_2$. Al variar z_0 se obtienen rectas paralelas de pendiente $-4/9$ y ordenada al origen $z_0/45$. De esta forma podemos ver la función z como una familia de rectas paralelas. Para cada recta z_0 será el término independiente. Las rectas reciben el nombre de **rectas de isobeneficio** o **líneas de nivel** puesto que, sobre una cualquiera de ellas, todos sus puntos tendrán la misma contribución marginal total z_0 .



Dado que toda recta de la forma $c_1x_1 + c_2x_2 = z$ tiene asociada un vector n , normal a ella, de componentes $(c_1; c_2)$, podemos determinar fácilmente la dirección de la familia de rectas de nivel (Figura 1-3).

La recta de máxima ordenada al origen (estamos maximizando la distancia de la recta al origen de coordenadas) que contenga al menos un punto de la región factible, nos dará el valor óptimo de la función objetivo.

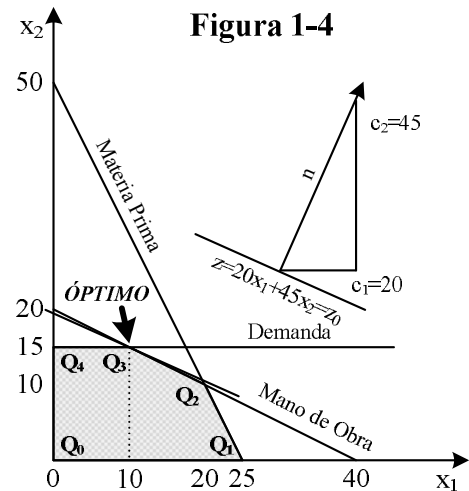
La Figura 1-4 muestra que el punto de óptimo es Q_3 . Sólo resta hallar sus coordenadas, que se obtienen resolviendo el sistema,

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 40 \\ x_2 = 15 \end{array} \right\} \text{resultando } x_1^* = 10 \text{ y } x_2^* = 15. \text{ Luego, } z^* = 20 \cdot 10 + 45 \cdot 15 = 875$$

El programa óptimo de producción diaria indica que deben fabricarse 10 vasijas y 15 cántaros, siendo la contribución marginal de \$875.

En base a lo expuesto, la resolución gráfica consistirá en:

1. Dibujar un plano coordenado y asociar un eje a cada variable del modelo.
2. Representar las restricciones en el plano.
3. Identificar la región factible.
4. Determinar la dirección de las líneas de nivel y su sentido de crecimiento o decrecimiento.
5. Identificar gráficamente la solución óptima.



El método que acabamos de describir recibe el nombre de **método de las rectas de nivel**. Éste nos permite observar que, si el problema tiene solución, el óptimo se alcanzará en al menos un punto extremo (vértice) del conjunto convexo de soluciones posibles. Podríamos entonces, obtener las coordenadas de todos vértices y evaluar la función objetivo en cada uno de ellos. La solución óptima corresponderá al punto extremo que nos de el máximo (o mínimo, si el objetivo es de minimización) valor del funcional. Tal procedimiento recibe el nombre de **método de los vértices**.

1.6 TIPOS DE SOLUCIÓN

Conforme al tipo de solución que presenten, los programas lineales se clasifican en **factibles** o no **factibles**. Un problema factible es aquel cuyo conjunto de soluciones admisibles es no vacío. En caso contrario, se denomina no factible. A su vez, la **solución óptima** de un problema factible puede ser **única** (como la del Ejemplo 1-1) **múltiple** o **no acotada**.

A continuación se ejemplifican diferentes tipos de solución.

Ejemplo 1-12 Problema con solución única

$$\text{Min } w = 2x_1 + 8x_2$$

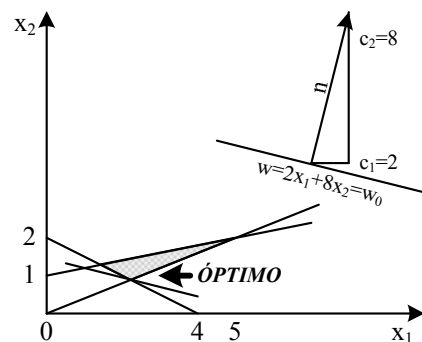
s. a

$$2x_1 + 4x_2 \geq 8$$

$$2x_1 - 5x_2 \leq 0$$

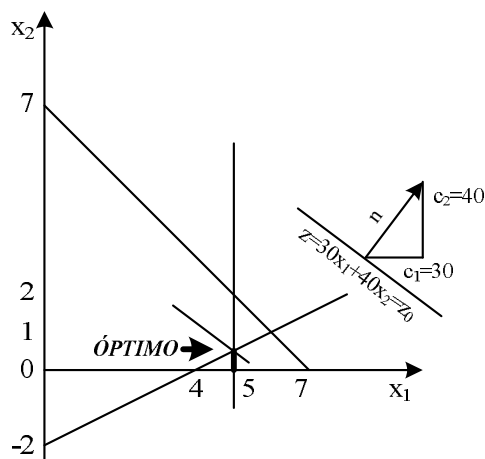
$$-x_1 + 5x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$\text{Solución Óptima : } x_1^* = 20/9, x_2^* = 8/9, w^* = 104/9$$

Ejemplo 1-13 Problema con solución única (caso en que la región factible es un segmento)



$$\text{Max } z = 30x_1 + 40x_2$$

s. a

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 4$$

$$x_1 = 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solución Óptima : $x_1^* = 5$, $x_2^* = 1/2$, $z^* = 170$

Ejemplo 1-14 Problema con múltiples soluciones

$$\text{Min } w = 10x_1 + 20x_2$$

s. a

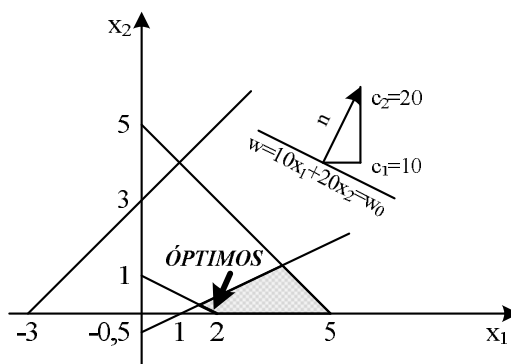
$$-x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

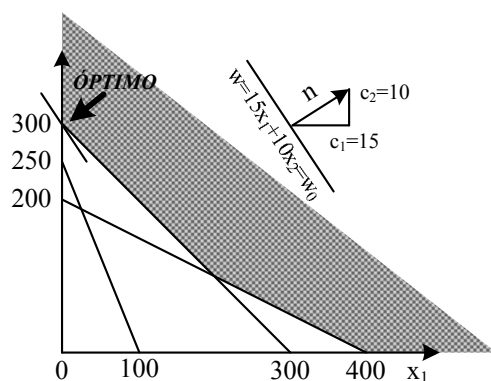
$$0,5x_1 - x_2 \geq 0,5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



La función objetivo alcanza el valor mínimo en los vértices $(1,5; 0,25)$ y $(2; 0)$ y, por consiguiente, en todos los puntos del segmento por ellos determinado. Hay **infinitas soluciones**, múltiples soluciones, o **soluciones alternativas** y, para todas ellas, $w^* = 10$. Observemos que el funcional es paralelo a una de las restricciones.

Ejemplo 1-15 Problema con solución única (caso en que la región factible no está acotada)



$$\text{Min } w = 15x_1 + 10x_2$$

s. a

$$x_1 + x_2 \geq 300$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 400$$

$$5x_1 + 2x_2 \geq 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solución Óptima : $x_1^* = 0$, $x_2^* = 300$, $w^* = 3.000$

Ejemplo 1-16 Problema con solución no acotada

$$\text{Max } z = 40x_1 + 80x_2$$

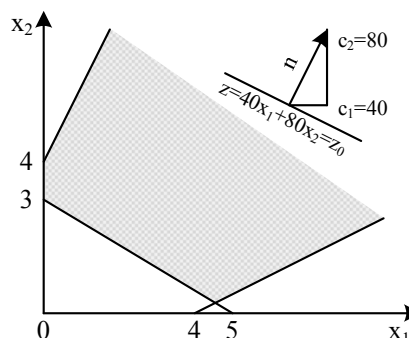
s. a

$$3x_1 + 5x_2 \geq 15$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 4$$

$$-4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

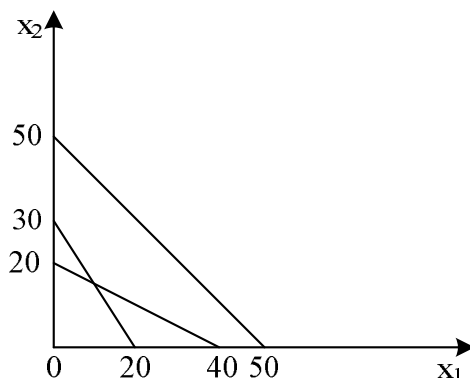


La solución no está acotada puesto que la función objetivo puede mejorarse indefinidamente para valores crecientes de x_1 y x_2 .

Generalmente, la causa de un programa con solución no acotada es un error en la formulación del mismo.

Es importante observar la diferencia existente entre una región factible no acotada y una solución no acotada.

Ejemplo 1-17 Problema no factible



$$\text{Max } w = 105x_1 + 78x_2$$

s. a

$$x_1 + x_2 \geq 50$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Ningún valor de las variables satisface simultáneamente todas las restricciones, es decir, el sistema de restricciones es incompatible. No existe región factible.

1.7 FORMAS DE PRESENTACIÓN DEL MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Cuando el número de variables de un programa lineal es igual a tres, la solución gráfica es aún posible aunque francamente, poco recomendable. En este caso, cada inequación determina un semiespacio, y la intersección de todos los semiespacios es el poliedro que constituye la región factible. La función objetivo nos define una familia de planos paralelos entre sí. El valor óptimo de dicha función estará dado por aquel plano de máxima (o mínima) distancia al origen de coordenadas, que contenga al menos un punto de la región factible.

Lógicamente si la cantidad de variables es superior a tres, el método gráfico es impracticable.

Ya hemos visto que el modelo matemático para el problema general de programación lineal puede presentar restricciones de \leq , \geq o $=$. No obstante, a la hora de encarar la resolución analítica de programas reales es deseable que las restricciones se transformen en ecuaciones, dando lugar a la denominada *forma estándar* de la programación lineal.

Las características de la forma estándar son:

- La función económica es de maximización o minimización.
- Todas las restricciones son ecuaciones.
- El término independiente de cada ecuación es no negativo.
- Todas las variables son no negativas.

Otra manera de presentar el modelo de programación lineal es la **forma canónica**. Tal formato es particularmente útil para el desarrollo de la teoría de dualidad y la interpretación de la solución obtenida.

Un programa lineal está en su forma canónica si,

- La función económica es de maximización.
- Todas las restricciones son inecuaciones del tipo \leq .
- Todas las variables son no negativas.

o bien, cuando:

- La función económica es de minimización.
- Todas las restricciones son inecuaciones del tipo \geq .
- Todas las variables son no negativas.

A los efectos de simplificar escritura suele utilizarse la **expresión matricial**. Si denominamos con,

- c : vector de los coeficientes de la función objetivo (vector fila de n elementos: c_1, c_2, \dots, c_n)
- x : vector de las variables de decisión (vector columna de n elementos: x_1, x_2, \dots, x_n)
- b : vector de los términos independientes (lado derecho) de las restricciones (vector columna de m elementos: b_1, b_2, \dots, b_m)
- A : matriz de los coeficientes tecnológicos a_{ij} , $i = 1; 2; \dots; m, j = 1; 2; \dots; n$ (matriz de orden $m \times n$)
- A_j : j -ésimo vector columna de la matriz A , ($j = 1; 2; \dots; n$)
- 0 : vector nulo (vector columna de n elementos iguales a cero)

las formas estándar y canónica antes descritas quedarán representadas por,

	Problema de maximización	Problema de minimización
Forma estándar	$\begin{aligned} \text{Max } z = cx & \quad \text{Max } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. a} & \quad \text{s. a} \\ Ax = b & \quad \text{o bien,} \quad \sum_{j=1}^n x_j A_j = b \\ x \geq 0 & \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ b \geq 0 & \quad b \geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Min } w = cx & \quad \text{Min } w = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. a} & \quad \text{s. a} \\ Ax = b & \quad \text{o bien,} \quad \sum_{j=1}^n x_j A_j = b \\ x \geq 0 & \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ b \geq 0 & \quad b \geq 0 \end{aligned}$
Forma canónica	$\begin{aligned} \text{Max } z = cx & \quad \text{Max } z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. a} & \quad \text{s. a} \\ Ax \leq b & \quad \text{o bien,} \quad \sum_{j=1}^n x_j A_j \leq b \\ x \geq 0 & \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Min } w = cx & \quad \text{Min } w = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. a} & \quad \text{s. a} \\ Ax \geq b & \quad \text{o bien,} \quad \sum_{j=1}^n x_j A_j \geq b \\ x \geq 0 & \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$

Para expresar cualquier modelo lineal a formato estándar o canónico, suele ser necesario efectuar algunas de las siguientes transformaciones.

Convertir desigualdades en igualdades

Las inecuaciones pueden transformarse fácilmente en ecuaciones introduciendo el concepto de **variables de holgura** o **variables de exceso**. Estas variables intervendrán en la función económica con coeficientes nulos y, al igual que las variables de decisión, serán no negativas.

Volviendo al Ejemplo 1-1 podemos observar que el correspondiente programa lineal se halla en su forma canónica. Si quisiéramos llevarlo a la forma estándar, bastará con adicionar una variable de holgura a cada restricción, resultando:

$\begin{aligned} \text{Max } z &= 20x_1 + 45x_2 \\ \text{s. a} \\ x_1 + 2x_2 &\leq 40 \\ 3x_1 + 1,5x_2 &\leq 75 \\ x_2 &\leq 15 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$		$\begin{aligned} \text{Max } z &= 20x_1 + 45x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s. a} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 40 \\ 3x_1 + 1,5x_2 + x_4 &= 75 \\ x_2 + x_5 &= 15 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1; 2; \dots; 5 \end{aligned}$
--	--	--

Las variables de holgura asumen además, un importante significado. En nuestro ejemplo, x_3 puede interpretarse como la cantidad a fabricar de cierta pieza ficticia, que requiere sólo una unidad del recurso *horas diarias de mano de obra*. Análogamente, x_4 será la cantidad a producir de otra pieza ficticia, que insume sólo una unidad del recurso *kilogramos diarios de arcilla*; en tanto que, x_5 representará las unidades demandadas de un tercer producto ficticio que no consume recurso alguno.

Evidentemente la utilidad que aporta cada pieza ficticia a la función económica, es nula.

De esta forma x_3 y x_4 cuantificarán las cantidades sobrantes (cantidades no utilizadas) de los recursos *horas diarias de mano de obra* y *kilogramos diarios de arcilla*, respectivamente, que se tendrán al ejecutar la solución óptima. La holgura x_5 será igual a la cantidad de cántaros no producidos que satisfarían la demanda máxima.

En base a lo expuesto y sabiendo que para el programa óptimo de producción $x_1^* = 10$ *vasijas* y $x_2^* = 15$ *cántaros*, podemos concluir que el recurso *horas diarias de mano de obra* está utilizado a pleno ($x_3^* = 0$), quedan ociosos 22,5 *kilogramos diarios de arcilla* ($x_4^* = 22,5$) y la cantidad de cántaros coincide con la *demanda máxima estimada* ($x_5^* = 0$).

Para convertir en ecuación una restricción del tipo \geq se resta en el lado izquierdo de la desigualdad una variable, no negativa, llamada variable de exceso. Esta variable representa la cantidad en la cual el valor de lado izquierdo excede al del derecho, cuando se ejecuta la solución óptima. Por ejemplo, en el caso particular del problema de dieta enunciado en el Ejemplo 1-3, la segunda restricción expresa que la cantidad diaria de proteínas suministradas a un paciente debe ser no inferior a 65 gramos.

$$\begin{aligned} 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 13x_4 + 32x_5 + 14x_6 &\geq 65 \\ 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 13x_4 + 32x_5 + 14x_6 - x_7 &= 65 \end{aligned}$$

La variable x_7 indicará entonces la cantidad de proteínas en exceso, por sobre el mínimo exigido, que contendrá la dieta óptima.

Reemplazar variables irrestrictas en signo y variables no positivas

La restricción de no negatividad de las variables es una condición natural en la mayoría de los problemas reales. No obstante, en ciertos casos se presentan variables que pueden asumir un valor negativo, nulo o positivo, es decir, variables irrestrictas en signo (variables que cuantifican temperatura, niveles de stock, etc.).

A los efectos de encarar la resolución analítica del modelo de programación lineal, cualquier variable irrestricta en signo debe reemplazarse por la diferencia de dos variables no negativas.

Así por ejemplo, si la variable x_5 es irrestricta la sustituiremos por $x_{51} - x_{52} = x_5$, siendo x_{51} y $x_{52} \geq 0$. Al obtener la solución óptima: si $x_{51} > x_{52}$, x_5 será positiva. Si $x_{51} < x_{52}$, x_5 será negativa. Si $x_{51} = x_{52}$, x_5 será nula.

En forma similar, si un problema presenta variables no positivas (≤ 0), éstas también deberán reemplazarse. Por ejemplo, si $x_7 \leq 0$ se la sustituye por $x_7' = -x_7$, con $x_7' \geq 0$.

Reemplazar términos independientes negativos

Si el término independiente de una ecuación fuese negativo bastará con multiplicar ambos lados de la misma por -1 .

Cambiar el objetivo

La minimización (maximización) de una función $w = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ es equivalente a la maximización (minimización) de la función $z = -w = -f(x_1; x_2; \dots; x_n)$. La transformación no cambia el valor absoluto de la función, sino su signo ($w = -z$) en tanto que, el valor óptimo de las variables será el mismo en ambos casos.

Invertir el sentido de una desigualdad

Para invertir el sentido de una desigualdad bastará con multiplicar por -1 ambos lados de la misma. Por ejemplo, $7x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 84$ es equivalente a $-7x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -84$.

Reemplazar una igualdad por dos desigualdades

Toda expresión de igualdad (ecuación) puede ser sustituida por dos desigualdades, de sentido opuesto, de la misma expresión. Así por ejemplo:

$$7x_1 - x_2 + 2x_3 = 84 \quad \text{puede reemplazarse por} \quad \begin{aligned} 7x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 84 \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 &\geq 84 \end{aligned}$$

A continuación se ejemplifican distintas transformaciones que permiten expresar un modelo en un formato determinado.

Ejemplo 1-18 Transformación de modelos

Expresar el siguiente modelo lineal en sus formas estándar y canónica.

$$\text{Min } w = x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 6x_4$$

s. a

$$-2x_1 + 9x_2 + 9x_3 - 4x_4 \geq -7$$

$$6x_1 - 9x_2 + 4x_3 - 7x_4 \leq 21$$

$$6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 3$$

$$7x_1 + 11x_2 + 9x_3 - 21x_4 \geq 0$$

$$x_1; x_3 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0; \quad x_4 \text{ irrestricta en signo}$$

Transformaciones necesarias para expresar el programa en su forma estándar:

Multiplicamos la primera restricción por -1 y agregamos la holgura x_5 .

$$\begin{aligned} -2x_1 + 9x_2 + 9x_3 - 4x_4 &\geq -7 \\ 2x_1 - 9x_2 - 9x_3 + 4x_4 + x_5 &= 7 \end{aligned}$$

Sumamos al lado izquierdo de la segunda restricción la holgura x_6 .

$$\begin{aligned} 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 - 7x_4 &\leq 21 \\ 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 - 7x_4 + x_6 &= 21 \end{aligned}$$

Restamos al lado izquierdo de la cuarta restricción la variable de exceso x_7 .

$$\begin{aligned} 7x_1 + 11x_2 + 9x_3 - 21x_4 &\geq 0 \\ 7x_1 + 11x_2 + 9x_3 - 21x_4 - x_7 &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazamos la variable x_2 por $x_2' = -x_2$, con $x_2' \geq 0$. Reemplazamos la variable x_4 por $x_{41} - x_{42} = x_4$, siendo x_{41} y $x_{42} \geq 0$.

$$\text{Min } w = x_1 - 2x_2' - 4x_3 - 6x_{41} + 6x_{42} + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

s. a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 9x_2' - 9x_3 + 4x_{41} - 4x_{42} + x_5 &= 7 \\ 6x_1 + 9x_2' + 4x_3 - 7x_{41} + 7x_{42} + x_6 &= 21 \\ 6x_1 + 2x_2' + 6x_3 + 4x_{41} - 4x_{42} &= 3 \\ 7x_1 - 11x_2' + 9x_3 - 21x_{41} + 21x_{42} - x_7 &= 0 \\ x_1; \quad x_2'; \quad x_3; \quad x_{41}; \quad x_{42}; \quad x_5; \quad x_6; \quad x_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

Transformaciones necesarias para expresar el programa en su forma canónica:

Multiplicamos la segunda restricción por -1 .

$$\begin{aligned} 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 - 7x_4 &\leq 21 \\ -6x_1 + 9x_2 - 4x_3 + 7x_4 &\geq -21 \end{aligned}$$

Reemplazamos la tercera ecuación por dos desigualdades.

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\geq 3 \\ -6x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 &\geq -3 \end{aligned}$$

Reemplazamos la variable x_2 por $x_2' = -x_2$, con $x_2' \geq 0$. Reemplazamos la variable x_4 por $x_{41} - x_{42} = x_4$, siendo x_{41} y $x_{42} \geq 0$.

$$\text{Min } w = x_1 - 2x_2' - 4x_3 - 6x_{41} + 6x_{42}$$

s. a

$$\begin{aligned} -2x_1 - 9x_2' + 9x_3 - 4x_{41} + 4x_{42} &\geq -7 \\ -6x_1 - 9x_2' - 4x_3 + 7x_{41} - 7x_{42} &\geq -21 \\ 6x_1 + 2x_2' + 6x_3 + 4x_{41} - 4x_{42} &\geq 3 \\ -6x_1 - 2x_2' - 6x_3 - 4x_{41} + 4x_{42} &\geq -3 \\ 7x_1 - 11x_2' + 9x_3 - 21x_{41} + 21x_{42} &\geq 0 \\ x_1; \quad x_2'; \quad x_3; \quad x_{41}; \quad x_{42} &\geq 0 \end{aligned}$$

1.8 TIPOS DE RESTRICCIONES

Una restricción es **activa** u **obligatoria** si, al reemplazar los valores óptimos de las *variables de decisión* en la misma, su lado izquierdo resulta igual al término independiente. Geométricamente es aquella que pasa por el punto de óptimo, es decir, su holgura (o exceso), si la hubiera, resulta nula.

Una restricción es **pasiva** o **no obligatoria** si, al reemplazar los valores óptimos de las *variables de decisión* en la misma, su lado izquierdo no es igual al término independiente, por lo que la correspondiente holgura (o exceso) asume un valor positivo, o bien cuando su lado izquierdo es igual al término independiente pero la restricción es **redundante**.

Una restricción pasiva puede ser: **necesaria** o **redundante**. Es necesaria si su supresión modifica la región factible. En caso contrario, es redundante.

La redundancia puede ser de tipo geométrico o de tipo analítico. Una restricción pasiva es **redundante geométricamente** cuando no toca la región factible. En cambio, es **redundante analíticamente** cuando toca la región factible en uno de sus vértices, lo cual significa que puede expresarse como una combinación lineal de las otras restricciones del modelo que pasan por dicho vértice.

Las restricciones redundantes podrían eliminarse, sin embargo generalmente se conservan porque son difíciles de detectar y porque una restricción redundante en un período de planificación, puede no serlo en otro período posterior si cambian algunos parámetros del modelo. El único inconveniente es que aumentan la dimensión del problema.

El siguiente ejemplo ilustra la anterior clasificación.

Ejemplo 1-19 Clasificación de restricciones

$$\text{Max } z = 40x_1 + 30x_2$$

s. a

$$3x_1 + 4x_2 \leq 24 \quad (1)$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 2 \quad (2)$$

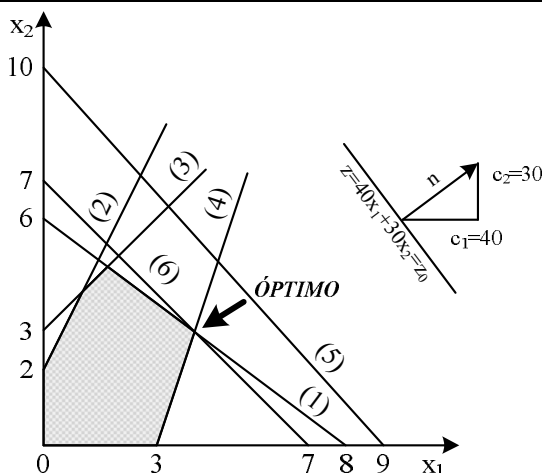
$$-x_1 + x_2 \leq 3 \quad (3)$$

$$3x_1 - x_2 \leq 9 \quad (4)$$

$$10x_1 + 9x_2 \leq 90 \quad (5)$$

$$x_1 + x_2 \leq 7 \quad (6)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



La solución óptima es:

$$x_1^* = 4, \quad x_2^* = 3, \quad z^* = 250$$

La gráfica nos muestra que:

Las restricciones (1) y (4) son activas y las restantes, pasivas.

Las restricciones (2) y (3) son pasivas necesarias.

La restricción (5) es geométricamente redundante.

La restricción (6) es analíticamente redundante. Puede obtenerse sumando la restricción (1) multiplicada por $4/15$ y la (4) multiplicada por $1/15$.

1.9 PROGRAMAS LINEALES CON SOLUCIÓN REDONDEADA

El modelo de programación lineal considera que todas las variables son continuas. Sin embargo en muchas aplicaciones se requiere que todas, o algunas, de las variables de decisión asuman valores enteros como puede apreciarse en los Ejemplos 1-1, 1-4, 1-5, 1-6 etc.

En tales casos se admite el redondeo de la solución siempre que el mismo no tenga importancia significativa en la práctica. Esto es, puede no haber diferencia significativa tanto en la función objetivo como en las restricciones, ante el hecho que una variable asuma el valor 14.145 en vez del valor óptimo 14.145,39. Más aún si tenemos en cuenta que la mayoría de los parámetros del modelo son estimaciones y no valores exactos.

En general, el redondeo es aceptable cuanto más grandes son los valores de las variables de decisión en la solución óptima. Cuando estos valores son pequeños, redondear a enteros puede producir una solución no factible o muy alejada de la óptima. Estas situaciones se representan mediante un modelo matemático ligeramente diferente denominado *Programación Entera*.