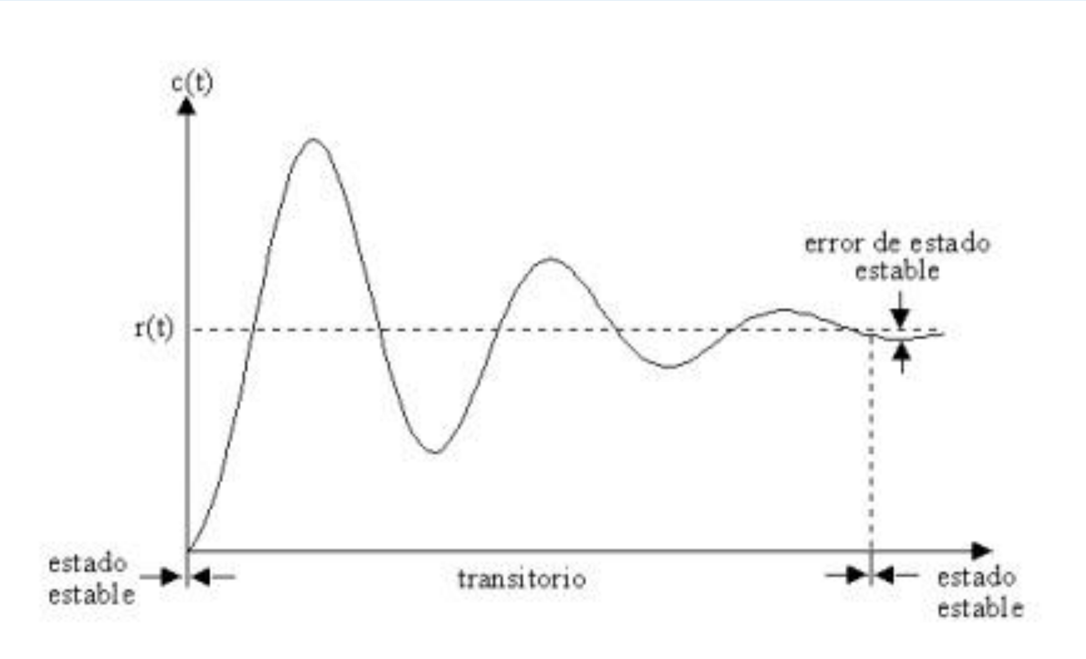
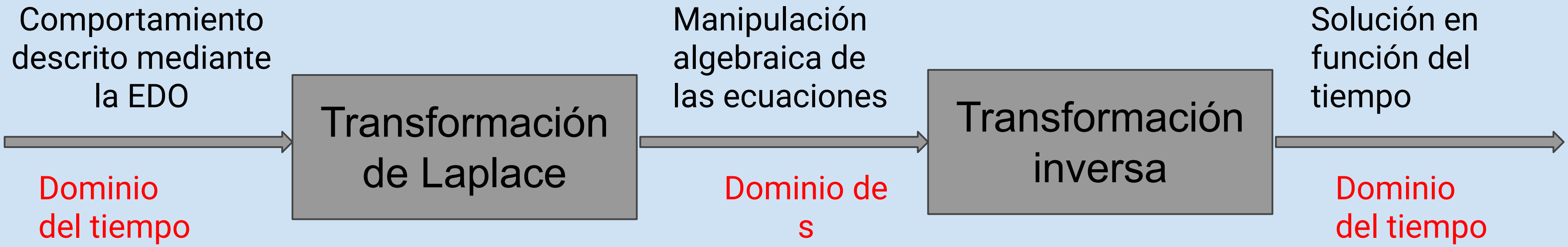
Teoría de Control

Transformada de Laplace



- Tiempo 0: comienza el estado transitorio.
- El E.T. se modeliza mediante Ec. Diferenciales Ordinarias.
- Para resolverlas se utiliza la Transformada de Laplace.

La **transformada de Laplace** es un método que transforma una ecuación diferencial en una ecuación algebraica, la cual es más fácil de resolver.



Teorema de Euler

$$cos\ \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots.$$

$$sen\ \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots.$$

$$cos\ \theta + j\ sen\ \theta = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{(j\theta)^3}{3!} + \ldots$$

Teorema de Euler

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

si hago $x = j\,\theta$

$$1 + j\theta + \frac{j^2\theta^2}{2!} + \frac{j^3\theta^3}{3!} + ...$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Teorema de Euler

Por **Euler**, podemos expresar el seno y el coseno en términos de una función exponencial → trabajamos con potencias de ***e*** en lugar de sen y cos.

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Teorema de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Sumando obtenemos

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)$$

Restando obtenemos

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

Función de Transferencia

$$F(s)=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)\ldots(s+zn)}{(s+p_1)\ (s+p_2)\ldots.\ (s+pn)}$$

Raíces o Ceros de F(s) $\Rightarrow$ $s= -z_1, -z_2, \ldots., -z_n$

Polos de F(s) $\Rightarrow$ $s= -p_1, -p_2, \ldots., -p_n$

Función de Transferencia

$$G(s)=\frac{k\,(s+2)(s+10)}{s\,(s+1)(s+5)(s+15)^2}$$

Transformada de Laplace

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

Características:

- No contiene información de interés para valores < 0.
- $L\{ a\, f_1(t) + b\, f_2(t) \} = a\, L\{ f_1(t) \} + b\, L\{ f_2(t) \}$ a, b cttes.
- Se reemplaza la variable t por una variable compleja s, para trabajar con ecuaciones algebraicas en lugar de derivadas e integrales.

Transformada de Laplace de Funciones Elementales

f(t) = 1 → Escalón

$$L\{1\} = F(s) = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{f(t) = 1 \rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s}}$$

Transformada de Laplace de Funciones Elementales

f(t) = t → Rampa

$$L\{t\} = F(s) = \int_0^\infty t e^{-st} dt = t \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st}\, dt =$$

$$= \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{1}{s^2}$$

$$f(t) = t \rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s^2}$$

Transformada de Laplace de Funciones Elementales

f(t) = e $^{-t}$ → exponencial

$$L\left\{e^{-t}\right\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-t} e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+1)t}\,dt =$$

$$\frac{-1}{s+1} e^{-(s+1)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s+1}$$

$$f(t) = e^{-t} \rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s+1}$$

Transformada de Laplace de Funciones Elementales

f(t) = sen (kt) → fc. seno

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \text{Sen } kt & t >= 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{k}{s^2+k^2}$$

Transformación de la derivada

$$L\{ f'(t) \} = s\,F(s) - f(0)$$

Donde f(0) es el valor de f(t) en t=0.

Transformación de la derivada segunda

$$L\{ f''(t) \} = s^2 F(s) - s\, f(0) - f'(0)$$

Generalizando:

$$L\{ f^{(n)}(t) \} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s\, f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$$

1.a) $x' + 3x = 0$ $x(0) = 2$

$s.\, x(s) - x(0) + 3\, x\, (s) = 0/s$

$s.\, x(s) - 2 + 3\, x(s) = 0$ $(\, 0/s = 0)$

$x(s)\,(s+3) = 2$

$\mathbf{x(s) = 2/(s+3)}$

Expansión en Fracciones Parciales.

2.a) $x' + x = 1$ $\qquad x(0) = 0$

$$s\,x(s) - x(0) + x(s) = 1/s$$

$$s\,x(s) - 0 + x(s) = 1/s$$

$$x(s)\,(s+1) = 1/s$$

$$\mathbf{x(s) = 1/[s(s+1)]}$$

Expansión en Fracciones Parciales.

$$x(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Fracciones parciales:

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)}$$

Deben ser siempre los numeradores iguales, por lo tanto:

1= $A\ (s+1)\ +\ B(s)$

si $s = -1$:

$1\ =\ A\,(-1\ +\ 1)\ +\ B\,(-1)$

$1\ =\ 0\ +\ (-B)$

B = -1

Expansión en Fracciones Parciales.

si $s = 0$:

$1 = A.(0+1) + B.(0)$

1 = A

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)}$$

nos queda $\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} + \frac{(-1)}{(s+1)}$

$x(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ y

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} + \frac{(-1)}{(s+1)} \rightarrow x(s) = \frac{1}{s} + \frac{(-1)}{(s+1)}$$

Expansión en Fracciones Parciales.

$$x(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)}$$

Aplicando la inversa de la Transformada volvemos al dominio del tiempo:

$$\boxed{X(t) = 1 - e^{-t}}$$

Expansión en Fracciones Parciales cuando f(s) involucra polos múltiples:

3.a) $f(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$

La expansión incluye tres términos. Dividimos en fracciones parciales aumentando el exponente del denominador:

$$\frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3}$$

Trabajando algebraicamente tomamos común denominador $(s+1)^3$ nos queda:

$$\frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3} = \frac{A(s+1)^2 + B(s+1) + C}{(s+1)^3}$$

Expansión en Fracciones Parciales cuando f(s) involucra polos múltiples:

Los denominadores están iguales, debemos trabajar con los numeradores:

$s^2 + 2s + 3 = A\,(s+1)^2 + B\,(s+1) + C$

Si tomamos s= (-1)

$(-1)^2 + 2*(-1) + 3 = A\,(-1+1)^2 + B\,(-1+1) + C$ Los términos resaltados en amarillo dan cero, queda:

$1 + (-2) + 3 = C \rightarrow$ **$C = 2$**

Probamos ahora con s = 0 (siempre vamos a probar con los valores 0,1, -1, etc.)

$s^2 + 2s + 3 = A\,(s+1)^2 + B\,(s+1) + C$

$(0)^2 + 2*0 + 3 = A\,(0+1)^2 + B\,(0+1) + C$

$0 + 0 + 3 = A + B + C$ Como el valor de C ya lo tenemos, reemplazamos:

$3 = A + B + 2 \rightarrow$ **$A + B = 1$ (1)**

Expansión en Fracciones Parciales cuando f(s) involucra polos múltiples:

Probamos ahora con s = 1

$s^2 + 2s + 3 = A(s+1)^2 + B(s+1) + C$

$(1)^2 + 2 * 1 + 3 = A(1+1)^2 + B(1+1) + C$

$1 + 2 + 3 = 4A + 2B + C$ Reemplazamos C:

$6 = 4A + 2B + 2$ Reordenamos:

$4 = 4A + 2B$. Dividimos por 2 a ambos lados:

$2 = 2A + B$ (2)

De (1) y (2) despejamos, nos queda **A=1** y **B = 0**

$$f(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3}$$

Expansión en Fracciones Parciales cuando f(s) involucra polos múltiples:

$$f(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3}$$

A= 1 ; B= 0; C= 2

$$f(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{0}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

Ahora debemos aplicar transformada inversa….

Expansión en Fracciones Parciales cuando f(s) involucra polos múltiples:

$$f(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{0}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3}$$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

$$f(t) = L^{(-1)}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + L^{(-1)}\left\{\frac{0}{(s+1)^2}\right\} + L^{(-1)}\left\{\frac{2}{(s+1)^3}\right\}$$

$$f(t) = e^{-t} + 0 + t^2 e^{-t} \longrightarrow \boxed{f(t) = e^{-t} + t^2 e^{-t}}$$

Teorema del Valor Final

Relaciona el comportamiento en estado estable de f(t) con el comportamiento de s.F(s) en la vecindad de s=0.

Este teorema se aplica ⇔ existe el lim f(t) cuando $t \rightarrow \infty$.

Si todos los polos de s.F(S) se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s, existe el lim f(t) cuando $t \rightarrow \infty$.
Pero si s.F(s) tiene polos en el eje Imaginario o en el semiplano derecho de s, f(t) contendrá funciones de tiempo oscilantes o exponencialmente crecientes y no existirá el lim f(t) cuando $t \rightarrow \infty$.

Si F(s) es la Transformada de Laplace de f(t) y existe el $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ entonces:

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s.F(s)}$$

Teorema del Valor Final

4. Determinar $f(t = \infty)$

a) $$F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = ?$$

Teorema del Valor Final

Polo de s . F(s).

$$s.\,F(s) = s\,.\ \frac{1}{s\,(s+1)}$$

El polo se encuentra en el semiplano izquierdo $\rightarrow$ existe $\lim_{t \to \infty} f(t) \Rightarrow$ el T.V.F. es aplicable.

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s\to 0} s.\,F(s) = \lim_{s\to 0} s\,.\ \frac{1}{s\,(s+1)} = \lim_{s\to 0}\cdot \frac{1}{(s+1)} = 1$$

Esto se verifica fácilmente: $f(t) = 1 - e^{-t}$ para $t > 0$

Teorema del Valor Inicial

Nos permite encontrar el valor de f(t) en $t = 0^+$ directamente a partir de la transformada de f(t).

Si $\exists \lim_{s\to\infty} s.\,F(s)$, entonces **$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} s.\,F(s)$**

$$L\{f'(t)\} = s.F(s) - f(0^+)$$

$$\lim_{s\to\infty} \int_{0\leftarrow} f'(t)\, e^{-st}\, dt = \lim_{s\to\infty} [s.F(s) - f(0^+)] = 0$$

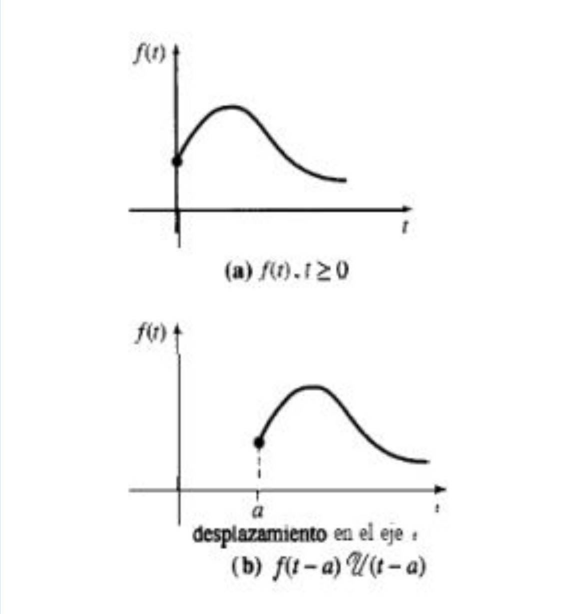
En este caso no estamos limitados a las posiciones de los polos de s.F(s) -> el TVI es válido para la fc sen.

Teorema de la Integración Real

Si f(t) es de orden exponencial, ∃ la L de ∫ f(t) dt.

$$L\{ \int f(t)\, dt\} = \frac{F(s)}{s}$$

Traslación de una función

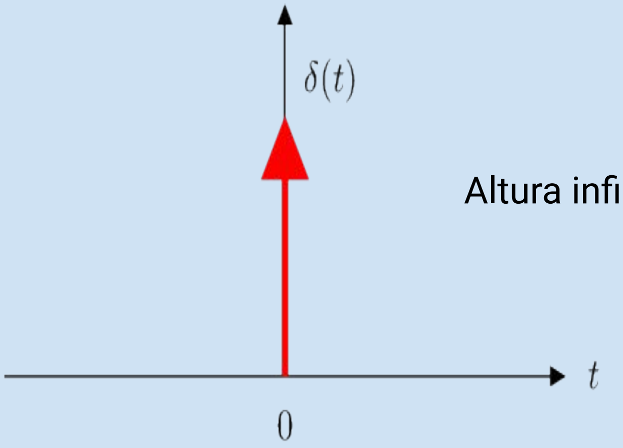


$f(t - t_0)$ es $f(t)$ trasladada t_0 veces en el tiempo.

Si $L\{f(t)\}=F(s)$ $\quad$ $L\{f(t - t_0)\}= e^{-st0}F(s)$

Es la misma transformada que la función sin retardo, multiplicada por e^{-st0}

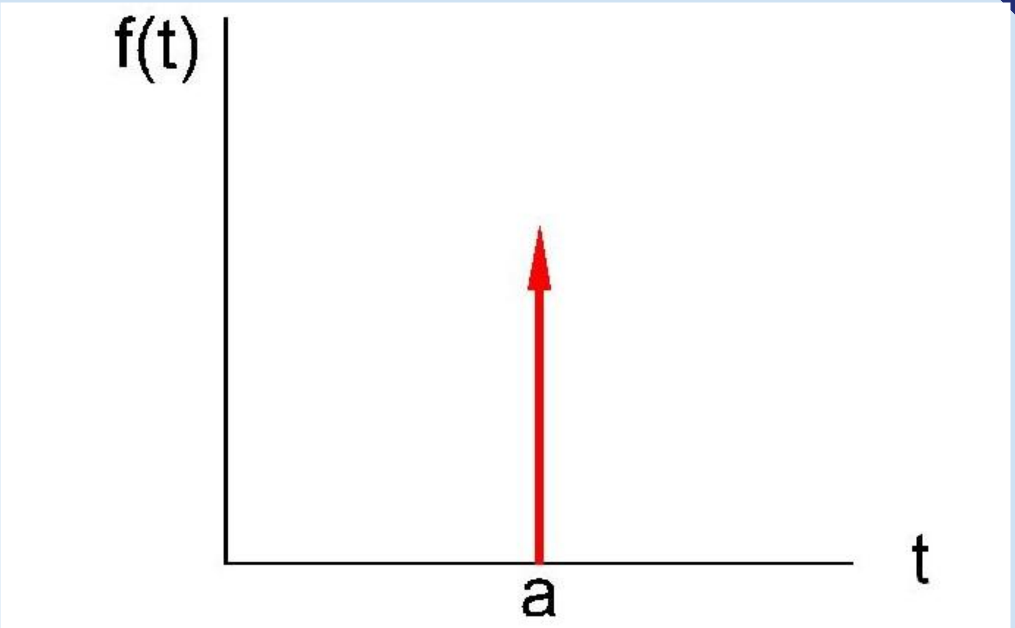
Transformada de la función impulso



Altura infinita en el origen

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \Longrightarrow L\{\delta(t)\} = 1$$

Transformada de la función impulso trasladada



$$\delta\,(t\text{-}a) = \begin{cases} 0, & t \neq a \\ \infty, & t = a \end{cases} \Longrightarrow L\,\{\delta\,(t\text{-}a)\} = 1.\ e^{-as} = e^{-as}$$