TEORIA DE CONTROL

Sistemas de 1° Orden

Función de Transferencia

Ecuación Diferencial

$$a_0 \frac{\partial^n y}{\partial t^n} + a_1 \frac{\partial^{n-1} y}{\partial t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{\partial y}{\partial t} + a_n y = b_0 \frac{\partial^m x}{\partial t^m} + b_1 \frac{\partial^{m-1} x}{\partial t^{m-1}} + \cdots + b_{n-1} \frac{\partial x}{\partial t} + b_n x$$

$n \geq m$

$L\{\}$

$$X(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s) \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \qquad Y(s) = X(s)G(s)$$

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}\, s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, s + a_n} = k\, \frac{(s+z_1)(s+z_2) \ldots \ldots (s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2) \ldots \ldots (s+p_n)}$$

$-z_i$: ceros de $G(s)$

$-p_i$: polos de $G(s)$

Sistemas de 1° Orden

1) $\boldsymbol{x - y = \tau \frac{\partial y}{\partial t}}$

x: temperatura ambiente

y: temperatura sensor

$\frac{\partial y}{\partial t}$*representa un cambio (variación de temperatura)*

2) $x_s - y_s = 0$

- *Variables de desviación*
  $X(t) = x(t) - x_s$
  $Y(t) = y(t) - y_s$
- $\frac{\partial (y-y_s)}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t}$

Sistemas de 1° Orden

- *Restando 1) – 2):*

$$(x(t) - x_s) - (y(t) - y_s) = \tau \frac{\partial (y(t) - y_s)}{\partial t}$$

$$X(t) - Y(t) = \tau \frac{\partial Y(t)}{\partial t}$$

- *Aplicando Transformada de Laplace*

$$X(s) - Y(s) = \tau[sY(s) - Y(0)]$$
$$Y(0) = 0$$

$$X(s) - Y(s) = \tau s Y(s)$$
$$Y(s)(1 + \tau s) = X(s)$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}}$$

$$G(s) = \left.\frac{Y(s)}{X(s)}\right|_{CI=0} = \frac{1}{\tau s + 1}$$

Sistemas de 1° Orden

Función de transferencia Sistema de Primer Orden

$$X(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

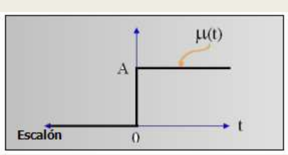
$$X(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{\tau s+1}} \longrightarrow Y(s)$$

Respuestas de Sistemas de 1° Orden

$$X(t) \xrightarrow{L\{\,\}} X(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{\tau s+1}} \longrightarrow Y(s) \xrightarrow{L^{-1}\{\,\}} Y(t)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)} \qquad Y(s)=X(s)G(s)$$

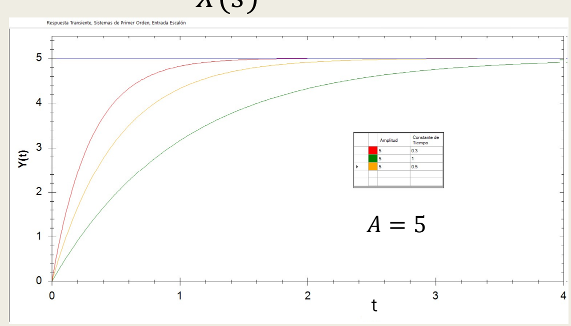
Entrada Escalón



$X(t)=A\mu(t)$

$$Y(s)=\frac{A}{s}\frac{1}{(\tau s+1)}$$

$$\boxed{Y(t)=A\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad t\geq 0}$$



Respuestas de Sistemas de 1° Orden

- *Problema*

La constante de tiempo de un sensor de temperatura es de 0.1 min. El sensor es puesto en un líquido con 100° de temperatura. En estado estacionario el sensor registra 90°.

Se pide:

Determinar el tiempo necesario para que alcance 98°.

$\tau = 0.1$

$y_s = 90°$

$A = 10°$

$Y(t) = 98° - 90° = 8°$

$$Y(t) = A\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

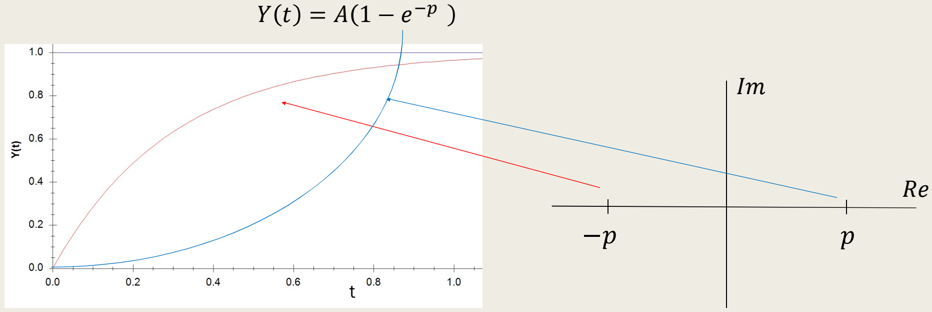
$$t = 0.161min$$

Respuestas de Sistemas de 1° Orden

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{p} + 1\right)} \qquad G(s) = \frac{p}{(s+p)}$$

$$Y(t) = A(1 - e^{-p}\ )$$

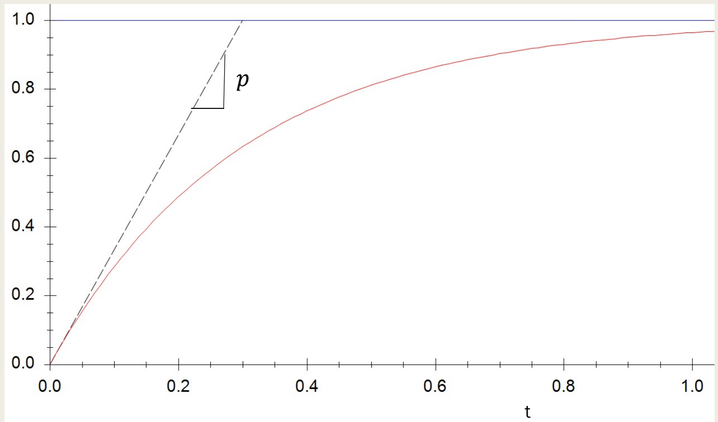
$A = 1$



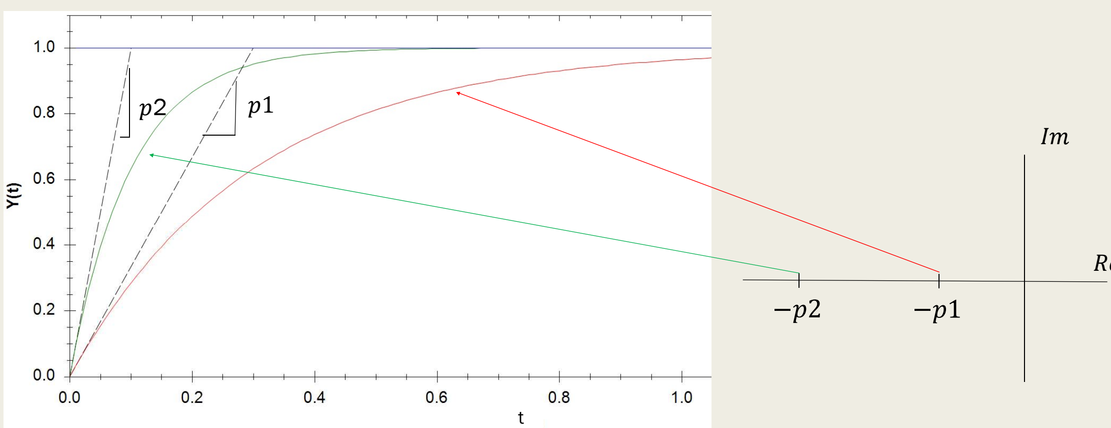
Respuestas de Sistemas de 1° Orden

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}$$

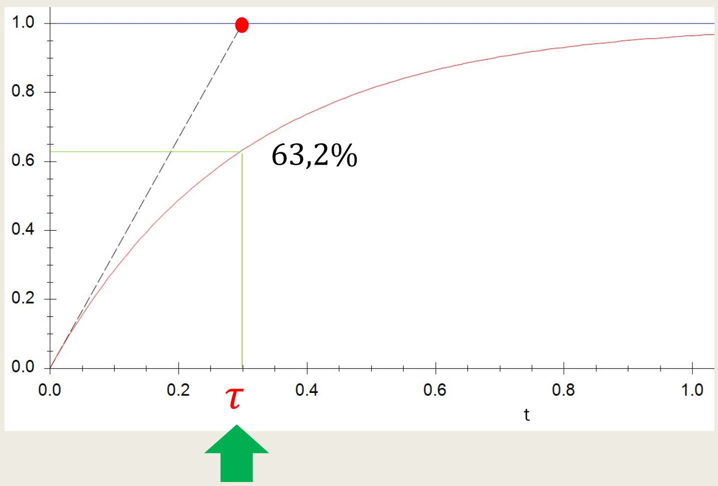
$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.pe^{-pt}\right|_{t=0} = p$$



Respuestas de Sistemas de 1° Orden



Respuestas de Sistemas de 1° Orden



$t = ?$

$1 = pt$

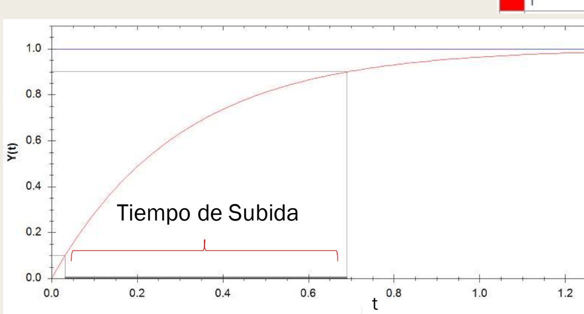
$t = \dfrac{1}{p}$ $\qquad \tau = \dfrac{1}{p}$

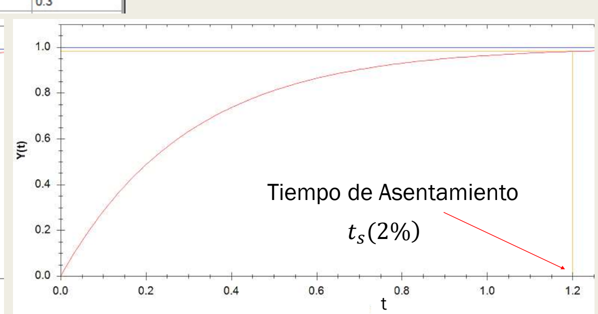
τ: Constante de Tiempo

$G(s) = \dfrac{1}{\tau s + 1}$ $\qquad G(s) = \dfrac{1}{\left(\dfrac{s}{p} + 1\right)}$

Medidas de Desempeño (1° orden)

	Amplitud	Constante de Tiempo
	1	0.3





Medidas de Desempeño

		Tiempo de Subida	Tiempo de asentamiento
▸		0.66	1.2

Medidas de Desempeño (1° orden)

- Calcular tiempo de subida y tiempo de asentamiento (1%) de:
  - $G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{p}+1\right)}$

$t_s(1\%) = ?$
$Y(\tau) = A(1 - e^{-pt})$
$Y(\tau) = A(1 - e^{-pt_s})$
$0.99A = A(1 - e^{-p\ \ s})$

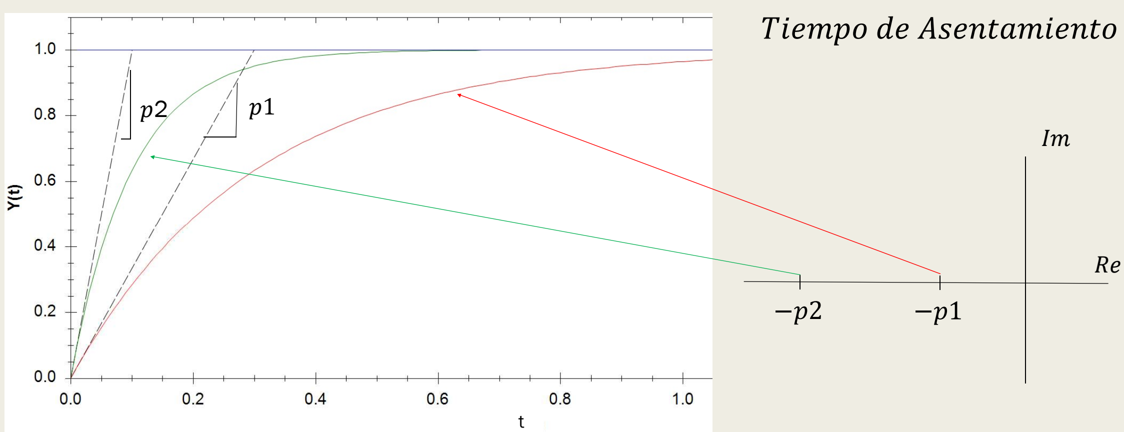
$$t_s(1\%) = \frac{4.6}{p}$$

$$t_s(2\%) = \frac{4}{p}$$

p ⬆ t_s ⬇

Respuestas de Sistemas de 1° Orden

Tiempo de Asentamiento



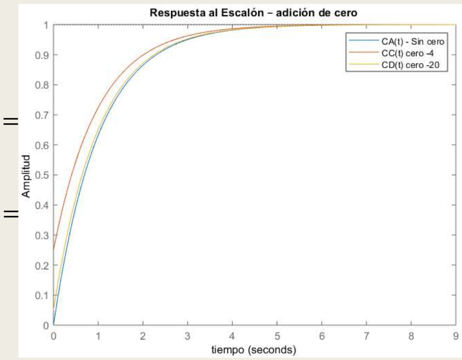
Efecto adición de un cero

$$G(s) = k\frac{\left(\frac{s}{z}+1\right)}{\left(\frac{s}{p}+1\right)} = \frac{kp}{z}\frac{(s+z)}{(s+p)}$$

$$Y(s) = \frac{kp}{z}\frac{(s+z)}{(s+p)}\frac{1}{s} = \frac{c_1}{s} \frac{c_2}{+(s+p)}$$

$c_1 =$

$c_2 =$

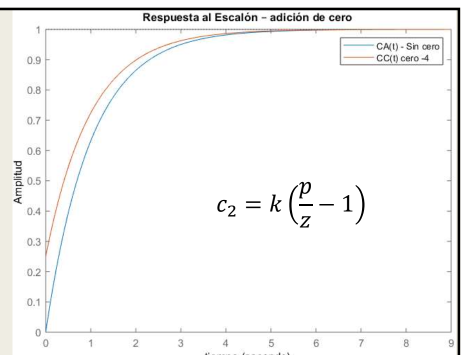


Sin ceros $c_2 = -k$

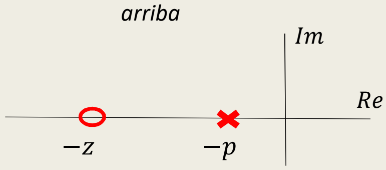
Si $z \to -\infty$ $\quad \frac{p}{z} \to 0 \quad c_2 \to -k$

*Respuesta similar a la que teníamos sin cero, decimos en este caso que el **cero está dominado**.*

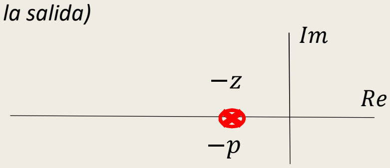
Efecto adición de un cero

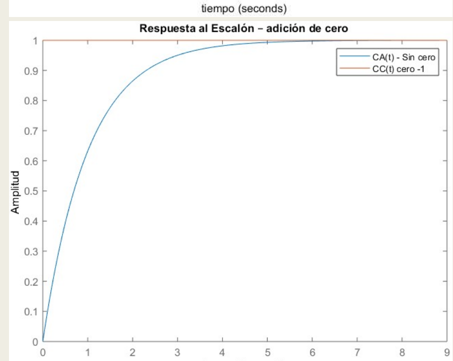


Si $-z \to -p^{-}$ $\quad \frac{p}{z} > 0$ *tenemos la misma exponencial como resultado pero arranca más arriba*



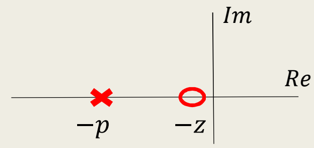
Si $-z = -p$ *la respuesta es un escalón (la entrada es = a la salida)*





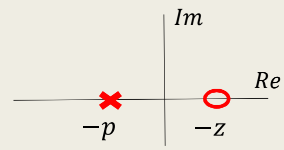
Efecto adición de un cero

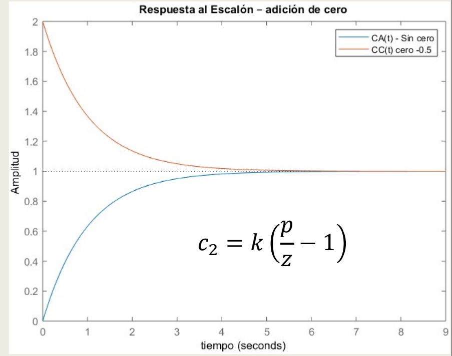
Si $-z > -p \; y \; -z < 0 \quad k\left(\frac{p}{z} - 1\right) > 0$ *Sobreimpulso*



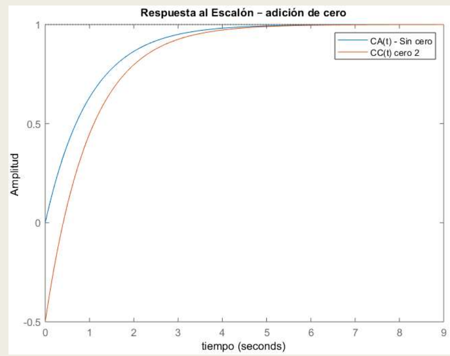
Si $-z > 0 \quad k\left(\frac{p}{z} - 1\right) < 0$ *Subimpulso*

Cero de FNM





$$c_2 = k\left(\frac{p}{z} - 1\right)$$



Efecto adición de un cero. Ejercicio

Dados $G(s) = k\dfrac{\left(\frac{s}{z} + 1\right)}{\left(\frac{s}{1} + 1\right)}$

Obtener Y(t) en forma manual y con Matlab variando los ceros en base a los casos indicados en el gráfico de salidas.