5. DUALIDAD

5.1 EL PROBLEMA DUAL

El fenómeno de dualidad ocurre frecuentemente en economía e ingeniería. En esencia consiste en que, dado un modelo matemático, puede asociarse al mismo más de un problema real.

Aplicada a programación lineal, la dualidad significa que relacionado con cualquier problema de programación lineal, denominado ***problema original*** o ***problema primal***, existe siempre otro problema lineal, llamado ***dual***, y tal relación proporciona importantes interpretaciones económicas y amplía el campo del análisis de sensibilidad. Veamos entonces cómo se construye el programa dual.

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DUAL

Dado un programa primal en su forma canónica,

$$\begin{aligned}&\text{Max } z = cx\\ &\text{s.a}\\ &\quad Ax \leq b\\ &\quad\ \ x \geq 0\end{aligned}$$

el correspondiente programa dual asociado (en su forma canónica) está dado por

$$\begin{aligned}&\text{Min } w = b^T u\\ &\text{s.a}\\ &\quad A^T u \geq c^T\\ &\quad\ \ u \geq 0\end{aligned}$$

Por ejemplo, para el problema del taller de alfarería tendremos

Problema original

$$\begin{aligned}&\text{Max } z = 20x_1 + 45x_2\\ &\text{s. a}\\ &\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 40 \leftrightarrow u_1\\ 3x_1 + 1{,}5x_2 &\leq 75 \leftrightarrow u_2\\ x_2 &\leq 15 \leftrightarrow u_3\end{aligned}\right\}\ \textit{variables duales asociadas}\\ &\quad x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

Problema dual

$$\begin{aligned}&\text{Min } w = 40u_1 + 75u_2 + 15u_3\\ &\text{s. a}\\ &\left.\begin{aligned} u_1 + 3u_2 \qquad\quad &\geq 20 \leftrightarrow x_1\\ 2u_1 + 1{,}5u_2 + u_3 &\geq 45 \leftrightarrow x_2\end{aligned}\right\}\ \textit{variables primales asociadas}\\ &\quad u_1, u_2, u_3 \geq 0\end{aligned}$$

El dual se construye desde el primal (y viceversa) de la forma siguiente:

- Un problema es de maximización y el otro de minimización.
- El problema de maximización tiene restricciones de ≤ y el de minimización de ≥.
- Cada restricción de un problema tiene asociada una variable en el otro problema.
- Los términos independientes de las restricciones del primal son los coeficientes de la función económica del dual.
- La matriz de los coeficientes tecnológicos en un problema es la traspuesta de dicha matriz en el otro problema.

- En ambos problemas las variables son no negativas.

Cada uno de estos problemas es el dual del otro, por lo tanto cualquiera de ellos puede ser tomado como primal y el otro será su dual (se trata de una correspondencia biunívoca). Se demuestra con suma facilidad que ***el dual del problema dual es el primal***.

5.2 TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA DUALIDAD

Dado un programa lineal en su forma canónica y su correspondiente programa dual asociado,

Problema original	Problema dual
$\text{Max } z = cx$	$\text{Min } w = b^T u$
s.a	s.a
$Ax \leq b$	$A^T u \geq c^T$
$x \geq 0$	$u \geq 0$

El teorema enuncia que

> Si el programa primal tiene solución óptima finita, los valores de u que minimizan el dual son los costos marginales del programa original. Además, el valor óptimo de la función objetivo del dual coincide con el valor óptimo de la función objetivo del original $(w^* = z^*)$.

Demostración. Dado el problema original, si éste tiene solución finita, obtenemos z^* como función lineal b.

$$\left.\begin{matrix} z^* = cx^* \\ x^* = x^*(b) \end{matrix}\right\} z^* = f\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

Por ser x^* solución del sistema se verifica que [24]

$$\begin{aligned} &A_1x_1^* + A_2x_2^* + \ldots \qquad + A_jx_j^* + \ldots + A_nx_n^* \leq b \\ &A_1x_1^* + A_2x_2^* + \ldots + A_j(x_j^* + \varepsilon) + \ldots + A_nx_n^* \leq b + \varepsilon A_j \end{aligned} \tag{5-1}$$

con $\varepsilon > 0$.

Hemos pasado a un nuevo sistema en el que el vector de los términos independientes se ha incrementado en εA_j. De (5-1) se deduce que una solución para este sistema es $x = (x_1^*, x_2^*, \ldots, (x_j^* + \varepsilon), \ldots, x_n^*)^T$ y el valor de la función económica en este punto está dado por

$$cx = c_1x_1^* + c_2x_2^* + \ldots + c_jx_j^* + \ldots + c_nx_n^* + \varepsilon c_j = cx^* + \varepsilon c_j = f(b) + \varepsilon c_j \tag{5-2}$$

Sabemos que el valor óptimo de la función económica del nuevo programa será función de $b + \varepsilon A_j$ y que este valor no puede ser superado por el valor que tome la función objetivo en cualquier otro punto. Luego

$$cx \leq f(b + \varepsilon A_j) \tag{5-3}$$

De (5-2) y (5-3) se deduce que

$$f(b) + \varepsilon c_j \leq f(b + \varepsilon A_j) \tag{5-4}$$

[24] En este caso estamos designando con *n* a la cantidad de actividades o variables concretas (recordemos que en su forma estándar designamos con *n* a la cantidad de variables de decisión más las correspondientes holguras).

$f(b+\varepsilon A_j)$ es función de *m* variables (las *m* componentes del vector $b+\varepsilon A_j$). Desarrollando por Taylor el segundo miembro de (5-4) obtenemos

$$f(b+\varepsilon A_j) = f(b) + \varepsilon a_{1j}\frac{\partial f}{\partial b_1} + \ldots + \varepsilon a_{mj}\frac{\partial f}{\partial b_m}$$

$$f(b+\varepsilon A_j) = f(b) + \varepsilon\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial b_i}a_{ij} \tag{5-5}$$

De (5-4) y (5-5) resulta

$$f(b) + \varepsilon c_j \le f(b) + \varepsilon\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial b_i}a_{ij}$$

$$\varepsilon c_j \le \varepsilon\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial b_i}a_{ij} \Rightarrow c_j \le \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial b_i}a_{ij}$$

Ahora bien, por condición de no negatividad $x_j^* + \varepsilon$, que es una componente de la solución, debe ser no negativa. Como $x_j^* \ge 0$

Si $x_j^* = 0$, ε debe ser mayor que cero (como habíamos supuesto) para que resulte $x_j^* + \varepsilon > 0$.

Si $x_j^* > 0$, ε puede ser mayor o menor que cero siempre que $x_j^* + \varepsilon > 0$.

Resumiendo

$$x_j^* = 0 \Rightarrow \varepsilon > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial b_i}a_{ij} \ge c_j$$

$$\tag{5-6}$$

$$x_j^* > 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \varepsilon > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial b_i}a_{ij} \ge c_j \\ \varepsilon < 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial b_i}a_{ij} \le c_j \end{array}\right\} \therefore x_j^* > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial b_i}a_{ij} = c_j$$

Por lo tanto siempre se cumple $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial b_i}a_{ij} \ge c_j$. Es decir siempre se verifica el siguiente sistema

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial f}{\partial b_1}a_{11} + \frac{\partial f}{\partial b_2}a_{21} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial b_m}a_{m1} \ge c_1 \\
\frac{\partial f}{\partial b_1}a_{12} + \frac{\partial f}{\partial b_2}a_{22} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial b_m}a_{m2} \ge c_2 \\
\ldots \qquad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \\
\frac{\partial f}{\partial b_1}a_{1n} + \frac{\partial f}{\partial b_2}a_{2n} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial b_m}a_{mn} \ge c_n
\end{array}$$

además $\frac{\partial f}{\partial b_i} \ge 0$, por ser $f(b)$ una función no decreciente.

Observemos que lo que se ha planteado es el conjunto de restricciones de dual,

$$\begin{matrix} A^T u \geq c^T \\ u \geq \ 0 \end{matrix} \quad \textit{o equivalentemente,} \quad \begin{matrix} u^T A \geq c \\ u \geq 0 \end{matrix}$$

Este sistema admite al menos una solución: la dada por el vector $u^* = \left(\frac{\partial f}{\partial b_1}, \frac{\partial f}{\partial b_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial b_m}\right)^T = \left(u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*\right)^T$. Estas derivadas son los valores implícitos del problema original.

Hemos demostrado entonces que los precios sombra del original constituyen una solución del dual. Debemos demostrar ahora que esta solución es la óptima y que el máximo de la función objetivo del original coincide con el mínimo de la función objetivo del dual.

Por otra parte, dado el problema original, existe un conjunto de soluciones, K, que satisface el sistema de restricciones $Ax \leq b$, con $x \geq 0$. Asociado a este problema existe otro: $A^T u \geq c^T$, con $u \geq 0$, o bien, $u^T A \geq c$, con $u \geq 0$, que posee un conjunto de soluciones, K', no vacío, pues como se vio admite por lo menos una solución.

Si a la expresión $u^T A \geq c$ la pos-multiplicamos por x tenemos $cx \leq (u^T A)x$, pero

$$cx \leq (u^T A)x = u^T (Ax) \leq u^T b \tag{5-7}$$

relación que se satisface $\forall x \in K$ y $\forall u \in K'$, en particular para x^* y u^*. Por lo tanto

$$cx^* \leq (u^{*T} A)x^* = u^{*T} (Ax^*) \leq u^{*T} b \tag{5-8}$$

pero

$$(u^{*T} A)x^* = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{i1}\right) x_1^* + \dots + \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij}\right) x_j^* + \dots + \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{in}\right) x_n^*$$

donde x_j^* puede ser igual a cero, en cuyo caso el sumando se anula, o bien x_j^* puede ser mayor que cero, en cuyo caso $\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} = c_j$ por (5-6).

En consecuencia

$$(u^{*T} A)x^* = c_1 x_1^* + \dots + c_j x_j^* + \dots + c_n x_n^* = cx^* \tag{5-9}$$

Además

$$u^{*T} (Ax^*) = u_1^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j^*\right) + u_2^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j^*\right) + \dots + u_m^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j^*\right)$$

u_j^* (valor implícito del original) puede ser igual a cero, en cuyo caso el sumando se anula, o bien u_j^* puede ser mayor que cero, en cuyo caso en el original hay utilización plena de los recursos, por lo tanto $a_{i1} x_1^* + a_{i2} x_2^* + \dots + a_{in} x_n^* = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$. Luego

$$u^{*T} (Ax^*) = u_1^* b_1 + u_2^* b_2 + \dots + u_m^* b_m = u^{*T} b \tag{5-10}$$

De (5-8), (5-9) y (5-10) se deduce que

$$cx^* = u^{*^T} b \tag{5-11}$$

Es decir, el óptimo de la función económica del original coincide con el valor de la función económica del dual en u^*. Por (5-7) $cx \le u^T b \;\; \forall\, x \in K$ y $\forall\, u \in K'$, en particular

$$\left.\begin{array}{r} cx^* \le u^T b \;\forall\; u \in K' \\ \textit{y de (5-11)}\;\; cx^* = u^{*^T} b \end{array}\right\} \therefore\; u^{*^T} b \le u^T b \;\forall\; u \in K'$$

lo cual significa que valorizando la función económica del dual en cualquiera de los puntos u que lo satisfacen, se obtienen valores mayores que en u^*. Luego u^* es el punto de óptimo del dual.

Observemos que para un programa de minimización en su forma canónica

$$\begin{array}{l} \text{Min } w = cx \\ \text{s.a} \\ \qquad Ax \ge b \\ \qquad\;\; x \ge 0 \end{array}$$

partiendo de la correspondiente (5-1), las (5-6) resultarán

$$x_j^* = 0 \Rightarrow \varepsilon > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} \le c_j$$

$$x_j^* > 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \varepsilon > 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} \ge c_j \\ \varepsilon < 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} \le c_j \end{array}\right\} \therefore\; x_j^* > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial b_i} a_{ij} = c_j$$

y, con un razonamiento análogo al anterior, llegaríamos a la equivalente conclusión.

5.3 EL DUAL DE UN PRIMAL CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD

Sea el siguiente programa lineal.

$$\begin{array}{l} \text{Max } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ \text{s. a} \\ \qquad \begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & \le 5 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = 2 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \ge 0 \end{array} \end{array}$$

Expresando el problema en su forma canónica resulta,

$$\begin{array}{l} \text{Max } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ \text{s. a} \\ \qquad \begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & \le\;\; 5 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & \le\;\; 2 \\ -2x_1 & +x_2 & -3x_3 & \le -2 \\ & & x_1, x_2, x_3 & \ge\;\; 0 \end{array} \end{array}$$

El correspondiente programa dual será entonces

$$\begin{aligned}
&\text{Min } w = 5u_1 + 2(u_2 - u_3) \\
&\text{s. a} \\
&\quad u_1 + 2(u_2 - u_3) \geq 5 \\
&\quad 2u_1 - (u_2 - u_3) \geq 12 \\
&\quad u_1 + 3(u_2 - u_3) \geq 4 \\
&\quad u_1, u_2, u_3 \geq 0
\end{aligned}$$

El término $u_2 - u_3$ se repite en la función objetivo y en las restricciones, por lo tanto haciendo $u_2' = u_2 - u_3$ el correspondiente problema dual será

$$\begin{aligned}
&\text{Min } w = 5u_1 + 2u_2' \\
&\text{s. a} \\
&\quad u_1 + 2u_2' \geq 5 \\
&\quad 2u_1 - u_2' \geq 12 \\
&\quad u_1 + 3u_2' \geq 4 \\
&\quad u_1 \geq 0 \quad u_2' \textit{ irrestricta en signo}
\end{aligned}$$

En forma general cuando el programa primal está en su forma estándar, el programa dual asociado está dado por

Problema original	Problema dual
$\text{Max } z = cx$	$\text{Min } w = b^T u$
s.a	s.a
$Ax = b$	$A^T u \geq c^T$
$x \geq 0$	u *no restringida*

Así, frente a un problema con inecuaciones y ecuaciones, el dual se construye directamente a partir del primal, teniendo en cuenta que cada restricción de igualdad da lugar a una variable irrestricta en signo en el dual. Evidentemente, para una variable no restringida en el original la correspondiente restricción en el dual será de igualdad. Este análisis completa lo que ya adelantáramos en el apartado 4.7 del capítulo anterior.

5.4 DISTINTAS ALTERNATIVAS DE CONSTRUCCIÓN DEL DUAL

Basándonos en la forma canónica de los programas primal y dual podremos estudiar las diferentes alternativas que se pueden presentar. La tabla adjunta muestra las reglas para obtener el dual de cualquier modelo lineal.

Primal	cx	Max	Min	Max	Min	Max	Max
	Ax	$\leq b$	$\leq b$	$\geq b$	$\geq b$	$\leq b$	$= b$
	x	≥ 0	≥ 0	≥ 0	≥ 0	*irresticta*	≥ 0
Dual	$b^T u$	Min	Max	Min	Max	Min	Min
	$A^T u$	$\geq c^T$	$\leq c^T$	$\geq c^T$	$\leq c^T$	$= c^T$	$\geq c^T$
	u	≥ 0	≤ 0	≤ 0	≥ 0	≥ 0	*irresticta*

5.5 LA SOLUCIÓN COMPLETA DEL DUAL EN LA TABLA ÓPTIMA DEL PRIMAL

Retomemos el Ejemplo 1-1.

Problema original

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 20x_1 + 45x_2\\
&\text{s.a}\\
&\quad x_1 + 2x_2 \leq 40\\
&\quad 3x_1 + 1{,}5x_2 \leq 75\\
&\quad x_2 \leq 15\\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Problema dual

$$\begin{aligned}
&\text{Min } w = 40u_1 + 75u_2 + 15u_3\\
&\text{s.a}\\
&\quad u_1 + 3u_2 \geq 20\\
&\quad 2u_1 + 1{,}5u_2 + u_3 \geq 45\\
&\quad u_1, u_2, u_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Sabemos que la tabla de óptimo para el primal es

		20	45	0	0	0		
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij}>0$)
20	A_1	1	0	1	0	–2	10	
0	A_4	0	0	–3	1	9/2	45/2	
45	A_2	0	1	0	0	1	15	
z_j		20	45	20	0	5	z = 875	
$c_j - z_j$		0	0	–20	0	–5		

por consiguiente, la solución óptima del dual será

$$u_1^* = 20; u_2^* = 0; u_3^* = 5;\ w^* = 875$$

Lógicamente reemplazando estos valores en el problema dual en su forma estándar obtendremos $u_4^* = 0$ y $u_5^* = 0$.

Similarmente, resolviendo el dual resultará la siguiente tabla de óptimo

		40	75	15	0	0		
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij}>0$)
40	A_1	1	3	0	–1	0	20	
15	A_3	0	–9/2	1	2	–1	5	
z_j		40	105/2	15	–10	–15	w = 875	
$c_j - z_j$		0	22,5	0	10	15		

y la solución óptima del primal estará dada por

$$x_1^* = 10; x_2^* = 15;\ z^* = 875$$

luego, despejando, $x_3^* = 0; x_4^* = 22{,}5$ y $x_5^* = 0$.

Notemos que en este caso el dual tiene menos restricciones que su primal. Si tenemos en cuenta que el número de iteraciones para alcanzar la solución depende en general del número de restricciones, resultará más ventajoso encarar la resolución del dual.

Si bien el procedimiento antes empleado para el cálculo de los valores de las holguras/excesos del problema dual es absolutamente válido, veremos a continuación que estos valores también se encuentran en la tabla de óptimo del problema original.

Cuando a un programa lineal en forma canónica lo llevamos a su forma estándar obtenemos

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = cx\\
&\text{s.a}\\
&\quad Ax = b\\
&\quad x \geq 0
\end{aligned}$$

Ahora la matriz A contiene la submatriz identidad correspondiente a las variables de holgura, el vector x incorpora dichas variables y al vector c se le agregan los coeficientes económicos de las mismas (valores nulos). Para el problema del Ejemplo 1-1 resulta

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 20x_1 + 45x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
&\text{s.a} \\
&\quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 40 \\
&\quad 3x_1 + 1{,}5x_2 + x_4 = 75 \\
&\quad x_2 + x_5 = 15 \\
&\quad x_j \geq 0 \quad j = 1; 2; \ldots; 5
\end{aligned}$$

Transformando cada una de las restricciones en dos inecuaciones de tipo $\leq$, el programa dual estará dado por

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 20x_1 + 45x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
&\text{s.a} \\
&\quad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 40 \\
&\quad -x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -40 \\
&\quad 3x_1 + 1{,}5x_2 + x_4 \leq 75 \\
&\quad -3x_1 - 1{,}5x_2 - x_4 \leq -75 \\
&\quad x_2 + x_5 \leq 15 \\
&\quad -x_2 - x_5 \leq -15 \\
&\quad x_j \geq 0 \quad j = 1; 2; \ldots; 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Min } w = 40u_1 - 40u_2 + 75u_3 - 75u_4 + 15u_5 - 15u_6 \\
&\text{s.a} \\
&\quad u_1 - u_2 + 3u_3 - 3u_4 \geq 20 \\
&\quad 2u_1 - 2u_2 + 1{,}5u_3 - 1{,}5u_4 + u_5 - u_6 \geq 45 \\
&\quad u_1 - u_2 \geq 0 \\
&\quad u_3 - u_4 \geq 0 \\
&\quad u_5 - u_6 \geq 0 \\
&\quad u_i \geq 0 \quad i = 1; 2; \ldots; 6
\end{aligned}$$

Redesignando con $u_1 = u_1 - u_2, u_2 = u_3 - u_4$ y $u_3 = u_5 - u_6$ tendremos

Problema original

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 20x_1 + 45x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
&\text{s.a} \\
&\left.\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + x_3 = 40 \leftrightarrow u_1 \\
&3x_1 + 1{,}5x_2 + x_4 = 75 \leftrightarrow u_2 \\
&x_2 + x_5 = 15 \leftrightarrow u_3
\end{aligned}\right\} \text{variables duales asociadas} \\
&x_j \geq 0 \quad j = 1; 2; \ldots; 5
\end{aligned}$$

Problema dual

$$\begin{aligned}
&\text{Min } w = 40u_1 + 75u_2 + 15u_3 \\
&\text{s.a} \\
&\left.\begin{aligned}
&u_1 + 3u_2 \geq 20 \leftrightarrow x_1 \\
&2u_1 + 1{,}5u_2 + u_3 \geq 45 \leftrightarrow x_2 \\
&u_1 \geq 0 \leftrightarrow x_3 \\
&u_2 \geq 0 \leftrightarrow x_4 \\
&u_3 \geq 0 \leftrightarrow x_5
\end{aligned}\right\} \text{variables primales asociadas}
\end{aligned}$$

El conjunto de restricciones del dual puede escribirse entonces como $A^T u \geq c^T$ y, en su forma estándar, $A^T u - s = c^T$ donde s es un vector de n componentes (en este caso $s = (s_1, s_2, \ldots, s_5)^T$) correspondientes a las variables de exceso de cada restricción.

En el óptimo $A^T u^* - s^* = c^T$ (observemos la validez de (5-6) y de las restantes deducciones del apartado 5.2).

$A^T u^* - s^* = c^T$, o bien, ${u^*}^T A - {s^*}^T = c \Rightarrow {u^*}^T A - c = {s^*}^T$. Si en esta última expresión discriminamos las componentes básicas y no básicas de A, c y s^*, resulta

$$\begin{aligned}
&{u^*}^T A - c = {s^*}^T \\
&{u^*}^T (B|N) - (c_B|c_N) = \left({s_B^*}^T \middle| {s_N^*}^T\right)
\end{aligned}$$

O bien,

$$\begin{cases} {u^*}^T B - c_B = {s_B^*}^T \\ {u^*}^T N - c_N = {s_N^*}^T \end{cases} \text{y, dado que } {u^*}^T = c_B B^{-1}, \begin{cases} {s_B^*}^T = 0 \\ {s_N^*}^T = c_B B^{-1} N - c_N = z_N - c_N = -(c_N - z_N) \end{cases}$$

Luego, $s_j^* = -(c_j - z_j) \forall j \in I_N$. Además teniendo en cuenta que $-(c_B - z_B) = 0,$ y que ${s_B^*}^T = 0$, concluimos que:

$$s_j^* = -(c_j - z_j) \forall j = 1, 2, ..., n$$

Mediante un desarrollo similar al precedente se deduce que si el problema original es de minimización con restricciones del tipo ≥, los valores óptimos de las variables de holgura duales estarán dados por:

$$s_j^* = (c_j - z_j) \forall j = 1, 2, ..., n$$

Volviendo a nuestro ejemplo, el último renglón de la tabla de óptimo del original nos indica que: $u_4^* = 0,\ u_5^* = 0,\ u_6^* = 20,\ u_7^* = 0$ y $u_8^* = 5$ (hemos redesignado con $u_4^*,\ u_5^*,\ u_6^*,\ u_7^*$ y u_8^* a $s_1^*,\ s_2^*,\ s_3^*,\ s_4^*$ y s_5^*, respectivamente). Lógicamente como $u_6^*,\ u_7^*$ y u_8^* son las variables de exceso del dual correspondientes a las condiciones de no negatividad, sus valores coincidirán con $u_1^*,\ u_2^*$ y u_3^*, respectivamente.

Si en cambio hubiésemos resuelto el programa dual, de su tabla de óptimo obtendríamos $x_3^* = 0,\ x_4^* = 22{,}5,\ x_5^* = 0,\ x_6^* = x_1^* = 10$ y $x_7^* = x_2^* = 15.$

Resumiendo: ***dados un programa primal y su correspondiente dual, la tabla de óptimo de uno cualquiera de ellos nos revelará la solución óptima del otro***. Ejemplificamos esta propiedad para los problemas 1-1 y 3-2.

Problema original

$$\text{Max } z = 20x_1 + 45x_2$$

s. a

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 40 \leftrightarrow u_1 \\ 3x_1 + 1{,}5x_2 &\le 75 \leftrightarrow u_2 \\ x_2 &\le 15 \leftrightarrow u_3 \end{aligned}\right\} \textit{variables duales asociadas}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Problema dual

$$\text{Min } w = 40u_1 + 75u_2 + 15u_3$$

s. a

$$\left.\begin{aligned} u_1 + 3u_2 &\ge 20 \leftrightarrow x_1 \\ 2u_1 + 1{,}5u_2 + u_3 &\ge 45 \leftrightarrow x_2 \end{aligned}\right\} \textit{variables primales asociadas}$$

$$u_1, u_2, u_3 \ge 0$$

Tabla de Óptimo Problema Original

c_i	A_i	20	45	0	0	0	x_i	x_i/y_{ij}
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5		$(y_{ij}>0)$
20	A_1	1	0	1	0	–2	10	
0	A_4	0	0	–3	1	9/2	45/2	
45	A_2	0	1	0	0	1	15	
z_j		20	45	20	0	5	z = 875	
$c_j - z_j$		0	0	–20	0	–5		
		$-u_4^*$	$-u_5^*$	$-u_1^*$	$-u_2^*$	$-u_3^*$		

Tabla de Óptimo Problema Dual

		40	75	15	0	0		
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i	x_i/y_{ij} $(y_{ij}>0)$
40	A_1	1	3	0	–1	0	20	
15	A_3	0	–9/2	1	2	–1	5	
z_j		40	105/2	15	–10	–15	w = 875	
$c_j - z_j$		0	22,5	0	10	15		
		x_3^*	x_4^*	x_5^*	x_1^*	x_2^*		

Problema original

$$\text{Min } w = 0{,}32x_1 + 0{,}7x_2 + 1{,}2x_3$$

s. a

$$\left.\begin{aligned} 0{,}38x_1 + 0{,}001x_2 + 0{,}002x_3 &\geq 0{,}8 \leftrightarrow \boldsymbol{u_1} \\ 0{,}09x_2 + 0{,}5x_3 &\geq 22 \leftrightarrow \boldsymbol{u_2} \end{aligned}\right\} \textit{variables duales asociadas}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Problema dual

$$\text{Max } z = 0{,}8u_1 + 22u_2$$

s. a

$$\left.\begin{aligned} 0{,}38u_1 &\leq 0{,}32 \leftrightarrow \boldsymbol{x_1} \\ 0{,}001u_1 + 0{,}09u_2 &\leq 0{,}7 \leftrightarrow \boldsymbol{x_2} \\ 0{,}002u_1 + 0{,}5u_2 &\leq 1{,}2 \leftrightarrow \boldsymbol{x_3} \end{aligned}\right\} \textit{variables primales asociadas}$$
$$u_1, u_2 \geq 0$$

Tabla de Óptimo Problema Original

		0,32	0,7	1,2	0	0		
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i	x_i/y_{ij} $(y_{ij}>0)$
0,32	A_1	1	0,0015	0	–2,63	0,011	1,874	
1,2	A_3	0	0,18	1	0	–2	44	
z_j		0,32	0,216	1,2	–0,84	–2,4	w = 53,4	
$c_j - z_j$		0	0,484	0	0,84	2,4		
		u_3^*	u_4^*	u_5^*	u_1^*	u_2^*		

Tabla de Óptimo Problema Dual

		0,8	22	0	0	0		
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i	x_i/y_{ij} $(y_{ij}>0)$
0,8	A_1	1	0	2,632	0	0	0,84	
0	A_4	0	0	–0,002	1	–0,18	0,48	
22	A_2	0	1	–0,011	0	2	2,4	
z_j		0,8	22	1,874	0	44	z = 53,4	
$c_j - z_j$		0	0	–1,874	0	–44		
		$-x_4^*$	$-x_5^*$	$-x_1^*$	$-x_2^*$	$-x_3^*$		

HOLGURAS COMPLEMENTARIAS

Hemos visto cómo las variables de holgura (o exceso) del problema original se relacionan con las variables concretas del problema dual y las concretas del original se relacionan con las de exceso (u holgura) del dual. Para el caso del taller de alfarería (Ejemplo 1-1),

Primal			*Dual*	
x_3^* :	*sobrante horas diarias mano de obra*	↔	u_1^* :	*Costo marginal hora de mano de obra*
x_4^* :	*sobrante kg diarios materia prima*	↔	u_2^* :	*Costo marginal kg de materia prima*
x_5^* :	*cantidad cántaros no producidos que satisfarían la demanda máxima diaria*	↔	u_3^* :	*valor marginal de cada cántaro*
x_1^* :	*producción diaria vasijas*	↔	u_4^* :	*costo reducido de cada vasija*
x_2^* :	*producción diaria cántaros*	↔	u_5^* :	*costo reducido de cada cántaro*

Análogamente, para el problema del Ejemplo 3-2 tendremos,

Primal			*Dual*	
x_4^* :	*kg excedentes de calcio por sobre el mínimo exigido*	$\leftrightarrow$	u_1^* :	*valor marginal kg de calcio*
x_5^* :	*kg excedentes de proteínas por sobre el mínimo exigido*	$\leftrightarrow$	u_2^* :	*valor marginal kg de proteínas*
x_1^* :	*kg de CO_3Ca en la ración*	$\leftrightarrow$	u_3^* :	*costo reducido kg de CO_3Ca*
x_2^* :	*kg de maíz en la ración*	$\leftrightarrow$	u_4^* :	*costo reducido kg de maíz*
x_3^* :	*kg de harina de soja en la ración*	$\leftrightarrow$	u_5^* :	*costo reducido kg harina de soja*

En síntesis:

Variables holgura/exceso primal ⟷ *Variables concretas dual*

Variables concretas primal ⟷ *Variables holgura/exceso dual*

De esta forma, en el óptimo, siempre que en la *k-ésima* restricción de uno de los problemas (primal/dual) la variable de holgura o de exceso tome un valor distinto de cero, la *k-ésima* variable del otro problema desaparece de la base. Por otra parte, si la *k-ésima* variable de uno de los dos problemas es mayor que cero, en la *k-ésima* restricción del otro problema se verifica la igualdad (la variable de holgura o exceso de esa restricción es igual a cero).

A esto se denomina ***condición de holguras complementarias***.

Ejemplo 5-1 ***El dual de un primal con múltiples soluciones óptimas***

Dado el siguiente programa lineal,

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = 1.000x_1 + 1.000x_2\\
&\text{s.a}\\
&\qquad\qquad x_2 \geq 5\\
&\qquad x_1 \qquad \leq 20\\
&\qquad\qquad x_2 \leq 10\\
&\qquad x_1 + x_2 \leq 28\\
&(-2/3)x_1 + x_2 \leq 1\\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

a) Plantee el correspondiente programa dual.
b) Determine la solución de ambos problemas.
c) Determine la solución de ambos problemas sin utilizar el método Simplex.

a) Problema dual

$$\begin{aligned}
&\text{Min } w = -5u_1 + 20u_2 + 10u_3 + 28u_4 + u_5\\
&\text{s.a}\\
&\quad u_2 + u_4 - (2/3)u_5 \geq 1.000\\
&-u_1 + u_3 + u_4 + u_5 \geq 1.000\\
&\qquad u_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, 5
\end{aligned}$$

b) Resolvemos el dual (es el que presenta menor cantidad de restricciones) tomando como base inicial *(A_2, A_3)*.

		−5	20	10	28	1	0	0		
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	x_i	x_i/y_{ij}
20	A_2	0	1	0	1	−2/3	−1	0	1.000	1.000
10	A_3	−1	0	1	1	1	0	−1	1.000	1.000
z_j		−10	20	10	30	−10/3	−20	−10	w = 30.000	
$c_j - z_j$		5	0	0	−2	13/3	20	10		

		−5	20	10	28	1	0	0		
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	x_i	x_i/y_{ij}
20	A_2	1	1	−1	0	−5/3	−1	1	0	
28	A_4	−1	0	1	1	1	0	−1	1.000	
z_j		−8	20	8	28	−16/3	−20	−8	w = 28.000	
$c_j - z_j$		3	0	2	0	19/3	20	8		

La solución óptima es $u^* = (0; 0; 0; 1.000; 0; 0; 0)^T$; $w^* = 28.000$, *solución degenerada*. El último renglón de esta tabla nos indica que $x^* = (20; 8; 3; 0; 2; 0; 19/3)^T$; $z^* = 28.000.$

Observemos que, en el óptimo, los valores de x_1^* y x_2^* son los z_j correspondientes a la base inicial identidad, es decir z_1 y z_2 (coincidentes con $c_6 - z_6$ y $c_7 - z_7$).

Por otra parte, si en la primera tabla sale A_2 en vez de A_3 resulta

		−5	20	10	28	1	0	0		
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	x_i	x_i/y_{ij}
28	A_4	0	1	0	1	−2/3	−1	0	1.000	
10	A_3	−1	−1	1	0	5/3	1	−1	0	
z_j		−10	18	10	28	−2	−18	−10	w = 28.000	
$c_j - z_j$		5	2	0	0	3	18	10		

Ahora $u^* = (0; 0; 0; 1.000; 0; 0; 0)^T$; $w^* = 28.000$ *solución degenerada* y para el primal, $x^* = (18; 10; 5; 2; 0; 0; 3)^T$; $z^* = 28.000.$ Lógicamente si hubiésemos encarado la resolución del dual las conclusiones serían idénticas. En este caso la tabla de óptimo es:

		1.000	1.000	0	0	0	0	0		
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	x_i	x_i/y_{ij}
1.000	A_1	1	0	0	1	0	0	0	20	
1.000	A_2	0	1	0	−1	0	1	0	8	
0	A_3	0	0	1	−1	0	1	0	3	
0	A_5	0	0	0	1	1	−1	0	2	
0	A_7	0	0	0	5/3	0	−1	1	19/3	
z_j		1.000	1.000	0	0	0	1.000	0	z = 28.000	
$c_j - z_j$		0	0	0	0	0	−1.000	0		

Luego, $x^* = (20; 8; 3; 0; 2; 0; 19/3)^T$; $z^* = 28.000$ y, en base al último renglón de esta tabla, $u^* = (0; 0; 0; 1.000; 0; 0; 0)^T$; $w^* = 28.000.$ Vemos además que hay múltiples soluciones, $(c_4 - z_4 = 0)$, por lo tanto haciendo entra a A_4 se obtiene

		1.000	1.000	0	0	0	0	0		
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	x_i	x_i/y_{ij}
1.000	A_1	1	0	0	0	−1	1	0	18	
1.000	A_2	0	1	0	0	1	0	0	10	
0	A_3	0	0	1	0	1	0	0	5	
0	A_4	0	0	0	1	1	−1	0	2	
0	A_7	0	0	0	0	−5/3	2/3	1	3	
z_j		1.000	1.000	0	0	0	1.000	0	z = 28.000	
$c_j - z_j$		0	0	0	0	0	−1.000	0		

La familia de tales soluciones estará dada por:

$$x^* = \lambda(20; 8; 3; 0; 2; 0; 19/3)^T + (1-\lambda)(18; 10; 5, 2; 0; 0;3)^T; \mathit{0 \le \lambda \le 1}$$

Los resultados anteriores ponen en evidencia la siguiente generalización.

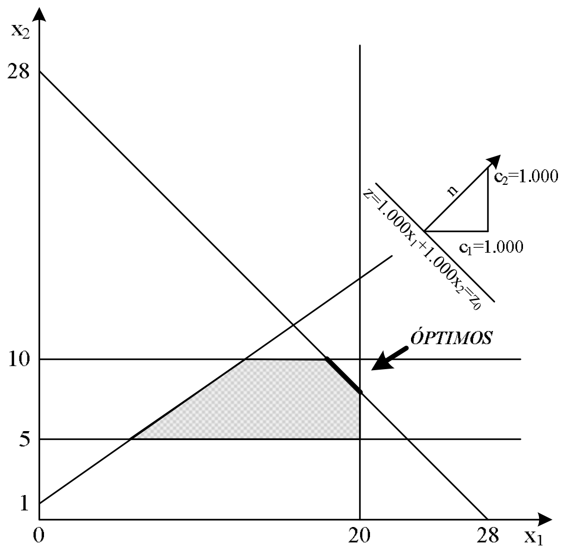
> Si uno de los problemas (primal o dual) tiene múltiples soluciones óptimas, el otro problema tiene solución óptima degenerada.
>
> Si uno de los problemas (primal o dual) tiene solución óptima degenerada, el otro problema tiene múltiples soluciones óptimas.

c) Aplicaremos el método gráfico.

$$\text{Max } z = 1.000x_1 + 1.000x_2$$

s. a

$$\begin{array}{rcl} & x_2 \ge & 5 \\ x_1 & & \le 20 \\ & x_2 \le & 10 \\ x_1 & + x_2 \le & 28 \\ (-2/3)x_1 & + x_2 \le & 1 \\ & x_1, x_2 \ge & 0 \end{array}$$



Soluciones alternativas

$$x^* = \lambda(20; 8; 3; 0; 2; 0; 19/3)^T$$
$$+ (1-\lambda)(18; 10; 5, 2; 0; 0; 3)^T; \mathit{0 \le \lambda \le 1}$$

$$z^* = 28.000$$

A partir de $x^* = (20; 8; 3; 0; 2; 0; 19/3)^T$

$$u_1^* = z_3^*, x_3^* = 3 \Rightarrow u_1^* = 0$$
$$u_2^* = z_4^*, x_4^* = 0 \Rightarrow u_2^* = ...$$
$$u_3^* = z_5^*, x_5^* = 2 \Rightarrow u_3^* = 0$$
$$u_4^* = z_6^*, x_6^* = 0 \Rightarrow u_4^* = ...$$
$$u_5^* = z_7^*, x_7^* = 19/3 \Rightarrow u_5^* = 0$$

Tomando el dual como original,

$$x_1^* = z_6^*, x_1^* = 20 \Rightarrow u_6^* = 0$$
$$x_2^* = z_7^*, x_2^* = 8 \Rightarrow u_7^* = 0$$

Despejando del dual, $u_2^* = 0; u_4^* = 1.000$

$$\boxed{\begin{array}{l} u^* = (0; 0; 0; 1.000; 0; 0; 0)^T \quad \textit{degenerada} \\ w^* = 28.000 \end{array}}$$

A partir de $x^* = (18; 10; 5; 2; 0; 0; 3)^T$

$$u_1^* = z_3^*, x_3^* = 5 \Rightarrow u_1^* = 0$$
$$u_2^* = z_4^*, x_4^* = 2 \Rightarrow u_2^* = 0$$
$$u_3^* = z_5^*, x_5^* = 0 \Rightarrow u_3^* = ...$$
$$u_4^* = z_6^*, x_6^* = 0 \Rightarrow u_4^* = ...$$
$$u_5^* = z_7^*, x_7^* = 3 \Rightarrow u_5^* = 0$$

Tomando el dual como original,

$$x_1^* = z_6^*, x_1^* = 18 \Rightarrow u_6^* = 0$$
$$x_2^* = z_7^*, x_2^* = 10 \Rightarrow u_7^* = 0$$

Despejando del dual, $u_3^* = 0; u_4^* = 1.000$

$$\boxed{\begin{array}{l} u^* = (0; 0; 0; 1.000; 0; 0; 0)^T \quad \textit{degenerada} \\ w^* = 28.000 \end{array}}$$

Ejemplo 5-2 ***El dual de un primal con solución óptima no acotada: propiedades primal-dual***

En el Ejemplo 3-16 resolvimos en formato tabla el siguiente problema lineal, concluyendo que su solución no estaba acotada.

$$\text{Max } z = 40x_1 + 80x_2$$
$$\text{s.a}$$
$$\begin{aligned} 3x_1 + \quad 5x_2 &\geq 15 \\ x_1 - \quad 2x_2 &\leq 4 \\ -4x_1 + \quad 3x_2 &\leq 12 \\ x_1; x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si planteamos su dual

$$\text{Min } w = -15u_1 + 4u_2 + 12u_3$$
$$\text{s.a}$$
$$\begin{aligned} -3u_1 \quad + u_2 \ - 4u_3 &\geq 40 \\ -5u_1 + -2u_2 \ + 3u_3 &\geq 80 \\ u_1,\ u_2, u_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

aplicando el método de las dos fases obtenemos

		0	0	0	0	0	1	1		
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	x_i	x_i/y_{ij}
1	A_6	–3	1	–4	–1	0	1	0	40	
1	A_7	–5	–2	3	0	–1	0	1	80	
z_j		–8	–1	–1	–1	–1	1	1	f = 120	
$c_j - z_j$		8	1	1	1	1	0	0		

lo cual nos indica que el dual no tiene soluciones factibles (se ha llegado al óptimo con ambas ficticias integrando la base con valor no nulo). Tal resultado no responde a un caso particular sino que constituye una propiedad de las relaciones primal-dual.

En efecto, por (5-7), $cx \leq u^T b.$ Luego si cx^* no está acotada el dual no tiene soluciones factibles ya que de existir una solución posible, u, resultaría $u^T b \geq cx^*$, lo cual constituye un absurdo.

Si en cambio, el dual no tiene soluciones factibles puede ocurrir que la función objetivo del primal no esté acotada o que este último no posea soluciones factibles.

Si uno de los problemas (primal o dual) tiene una solución óptima no acotada, el otro problema no tiene soluciones factibles.

Si un de los problemas (primal o dual) no tiene soluciones factibles, el otro problema no tiene soluciones factibles o bien la función objetivo no está acotada.

5.6 INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DEL DUAL

Resultaría lógico pensar que más allá de la relación entre los resultados del programa primal y su correspondiente dual, debería existir un vínculo entre los dos problemas reales, de los cuales ambos programas lineales no son más que sus representaciones. Trataremos entonces de establecer dicho vínculo.

Dado el siguiente problema original

$$\text{Max } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s. a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = 1, 2, ..., n$$

$$x_j \ge 0 \quad j = 1, 2, ..., m$$

Este programa podría corresponder a un problema real en el que una organización dispone de una serie de recursos limitados asignables a un número finito de actividades. Se pretende determinar a qué nivel debe operar cada actividad de manera de maximizar el beneficio z.

Las x_j son las unidades de los bienes producidos en un cierto período de tiempo y las b_i son las unidades de recurso i disponibles en dicho período. Las a_{ij} son las unidades de recurso i insumidas por cada unidad del bien j.

Si consideramos ahora el programa dual asociado

$$\text{Min } w = \sum_{i=1}^{m} b_i u_i$$

s. a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \ge c_j \quad j = 1, 2, ..., m$$

$$u_i \ge 0 \quad i = 1, 2, ..., n$$

dado que los c_j son \$/unidad del bien j, los $a_{ij}u_i$ deben ser también \$/unidad del bien j, por lo tanto los u_i representan \$/unidad del recurso i; $w = b^T u$ es entonces, el valor total de los recursos disponibles.

Una restricción cualquiera del dual puede escribirse como $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \ge c_j$, donde $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i$ es el valor de los recursos utilizados para producir una unidad del bien j.

Es lógico aceptar que con cada asignación de recursos se corresponda un sistema de valores de los mismos. Cada valor de un recurso nada tiene que ver con su precio de mercado, simplemente es la resultante del aprovechamiento que la organización hace de dicho recurso. Ya demostramos que los valores de u que minimizan el dual son los costos marginales del problema original. Además cada precio sombra puede interpretarse como el beneficio que deja de percibir la organización por no disponer de una unidad más del recurso correspondiente; $z^* = w^*$ indica que el beneficio máximo coincide con el mínimo valor de los recursos. Por otra parte, si fuese posible incrementar, o disminuir, la disponibilidad del recurso i en una unidad sin cambiar la solución óptima del dual, el beneficio máximo se incrementaría, o disminuiría, en u_i.

Volvamos ahora a las restricciones del dual. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \ge c_j$ expresa que el valor de los recursos utilizados para producir una unidad del bien j debe ser por lo menos igual al beneficio unitario de dicho bien, de lo contrario no se estaría haciendo el mejor aprovechamiento de estos recursos. Notemos además que si en el óptimo se da la relación de igual x_j será mayor que cero, si en cambio en el óptimo vale la relación de mayor, x_j será nula.

Económicamente esto significa que,

> Siempre que una actividad opere a nivel estrictamente positivo, el costo marginal de los recursos que consume debe ser igual al beneficio que proviene de dicha actividad. De lo contrario no conviene en absoluto iniciar la actividad.

Veamos cómo podrían interpretarse los conceptos precedentes en el problema del Ejemplo 1-1.

$$\text{Max } z = 20x_1 + 45x_2 \textit{ (contribución marginal)}$$

$$\text{s.a}$$

$$\begin{aligned} x_1 + \quad 2x_2 &\le 40 \textit{ (disponibilidad de horas de mano de obra)} \\ 3x_1 + 1{,}5x_2 &\le 75 \textit{ (disponibilidad de materia prima)} \\ x_2 &\le 15 \textit{ (demanda máxima de cántaros)} \\ x_1 ; x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Supongamos que el dueño del taller de alfarería pudiese contratar un seguro para sus ingresos con las siguientes características.

u_1: monto en \$ que deberá pagar la compañía de seguros por cada hora de mano de obra perdida.
u_2: monto en \$ que deberá pagar la compañía de seguros por cada kilogramo de arcilla perdido.
u_3: monto en \$ que deberá pagar la compañía de seguros por cada decremento de una unidad en la demanda máxima de cántaros.

De esta forma, la compañía de seguros intentará minimizar el monto total a pagar al dueño del taller, es decir minimizar $40u_1 + 75u_2 + 15u_3$. Sin embargo, el dueño del taller fijará las condiciones para que la compañía cubra todos sus ingresos netos en caso de no poder fabricar sus productos. Así, el problema de la compañía es

$$\text{Min } w = 40u_1 + 75u_2 + 15u_3$$

$$\text{s.a}$$

$$\begin{aligned} u_1 + 3u_2 \qquad &\ge 20 \textit{ (contribución marginal de cada vasija)} \\ 2u_1 + 1{,}5u_2 + u_3 &\ge 45 \textit{ (contribución marginal de cada cántaro)} \\ u_1, u_2, u_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Ya sabemos que el problema del taller de alfarería y su correspondiente programa dual presentan el mismo valor óptimo ($z^* = w^*$); a esto se denomina ***equilibrio económico*** entre ambos problemas.

Una interpretación similar puede hacerse para el caso en que el primal esté dado por

$$\text{Min } w = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_j \ge 0 \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

Volvamos al Ejemplo 3-2

$$\text{Min } w = 0{,}32x_1 + 0{,}7x_2 + 1{,}2x_3 \textit{ (costo de la ración diaria)}$$

s. a

$$\begin{aligned} 0{,}38x_1 + 0{,}001x_2 + 0{,}002x_3 &\geq 0{,}8 \textit{ (requerimiento mínimo de calcio)} \\ 0{,}09x_2 \quad + 0{,}5x_3 &\geq 22 \textit{ (requerimiento mínimo de proteínas)} \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

En el problema primal el vector *b* representa los nutrientes mínimos que debe contener la ración diaria a suministrar al comedero. Cada a_{ij} es el contenido de nutriente *i* por kg de ingrediente *j*.

Su programa dual asociado es

$$\text{Max } z = 0{,}8u_1 + 22u_2$$

s. a

$$\begin{aligned} 0{,}38u_1 \qquad\qquad &\leq 0{,}32 \textit{ (costo del kg de } CO_3Ca\textit{)} \\ 0{,}001u_1 + 0{,}09u_2 &\leq 0{,}7 \textit{ (costo del kg de maíz)} \\ 0{,}002u_1 \quad + 0{,}5u_2 &\leq 1{,}2 \textit{ (costo del kg de harina de soja)} \\ u_1, u_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Analizando este problema, vemos que las unidades de u_i son \$/kg del nutriente *i* (es decir, \$/unidad del nutriente *i*). Por lo tanto, la función económica del dual pretende maximizar el valor de los nutrientes requeridos en la ración diaria.

Para cada restricción, $\sum_{i=1}^{2} a_{ij}u_i$ será el valor de los nutrientes que intervienen en cada unidad (kg) del ingrediente *j*. Este valor debe ser menor o igual al costo del ingrediente. Como es de esperar, la dieta óptima contendrá sólo aquellos ingredientes para los cuales el valor de los nutrientes sea igual a su costo.

En este caso podríamos pensar que una empresa de productos alimentarios para aves desea suministrar al criadero gránulos de calcio y gránulos de proteínas.[25] La empresa debe convencer a los responsables del criadero de que compren sus productos en reemplazo de la ración que actualmente están utilizando. Para ello, el precio de venta de los gránulos debe resultar competitivo con respecto al de los ingredientes que intervienen en dicha ración.

Si u_1 y u_2 son los precios de venta por kilogramo de los gránulos de calcio y los de proteínas respectivamente, el objetivo de la empresa es fijar tales precios de manera que, resultando competitivos para el criadero, maximicen sus beneficios.

Cada kilogramo de CO_3Ca aportaba a la ración 0,38kg de calcio y 0kg de proteínas. El precio que debería pagar el criadero para obtener estas mismas cantidades de nutrientes en gránulos sería $0{,}38u_1 + 0u_2$. Para que la compra de gránulos resulte atractiva para el criadero debe ocurrir que $0{,}38u_1 + 0u_2 \leq 0{,}32$.

Razonando en forma idéntica con respecto a los restantes ingredientes (maíz y harina de soja) obtendríamos $0{,}001u_1 + 0{,}09u_2 \leq 0{,}7$ y $0{,}002u_1 + 0{,}5u_2 \leq 1{,}2$.

Lógicamente los precios de los gránulos deben ser positivos ($u_1, u_2 \geq 0$).

[25] En la realidad el calcio y las proteínas no se consiguen en estado puro. Hemos planteado el supuesto de los gránulos al sólo efecto de analizar la vinculación económica entre los programas primal y dual.

Ahora bien, suponiendo que el criadero acceda a emplear los gránulos comprará exactamente las necesidades mínimas de ambos nutrientes, esto es, 0,8kg de gránulos de calcio y 22kg de gránulos de proteínas. Los ingresos diarios de la empresa serán entonces $0,8u_1 + 22u_2$.

Así, para establecer sus precios de venta la empresa debería resolver el programa dual.

5.7 ANÁLISIS PARAMÉTRICO Y DUALIDAD

Ya sabemos que todo problema de programación lineal tiene un problema dual asociado que contiene exactamente los mismos valores paramétricos. Veamos entonces cómo efectuar la parametrización en los términos independientes haciendo uso de las propiedades primal-dual.

Supongamos que estamos interesados en estudiar el comportamiento de la solución óptima cuando en el Ejemplo 1-1 b_1 varía entre 0 y $+\infty$.

Expresando a b_1 como $b_1(\lambda) = 40(1+\lambda)$, tendremos

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = 20x_1 + 45x_2 \\ &\text{s.a} \\ &x_1 + 2x_2 \le 40(1+\lambda) \\ &3x_1 + 1{,}5x_2 \le 75 \\ &x_2 \le 15 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Luego, el programa dual asociado estará dado por

$$\begin{aligned} &\text{Min } w = 40(1+\lambda)u_1 + 75u_2 + 15u_3 \\ &\text{s.a} \\ &u_1 + 3u_2 \ge 20 \\ &2u_1 + 1{,}5u_2 + u_3 \ge 45 \\ &u_1, u_2, u_3 \ge 0 \end{aligned}$$

con lo cual el estudio de la variación en b_1 en el problema original se traduce a un análisis paramétrico en los coeficientes económicos del programa dual. Para $\lambda = 0$ la tabla de óptimo es:

		$40(1+\lambda)$	75	15	0	0		x_i/y_{ij}
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i	$(y_{ij}>0)$
$40(1+\lambda)$	A_1	1	3	0	–1	0	20	
15	A_3	0	–9/2	1	2	–1	5	
z_j		$40(1+\lambda)$	$105/2+120\lambda$	15	$-10-40\lambda$	–15	$w = 875+800\lambda$	
$c_j - z_j$		0	$22{,}5-120\lambda$	0	$10+40\lambda$	15		

Si $c_2 - z_2 \ge 0 \Rightarrow \lambda \le 0{,}1875$ y $c_4 - z_4 \ge 0 \Rightarrow \lambda \ge -0{,}25$ esta tabla es la de óptimo. Si $\lambda < -0{,}25$ ingresa A_4 y sale A_3.

		$40(1+\lambda)$	75	15	0	0		x_i/y_{ij}
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i	$(y_{ij}>0)$
$40(1+\lambda)$	A_1	1	3/4	1/2	0	–1/2	22,5	
0	A_4	0	–9/4	1/2	1	–1/2	2,5	
z_j		$40(1+\lambda)$	$30+30\lambda$	$20+20\lambda$	0	$-20-20\lambda$	$w = 900+900\lambda$	
$c_j - z_j$		0	$45-30\lambda$	$-5-20\lambda$	0	$20+20\lambda$		

La nueva tabla es óptima para $-1 \le \lambda < -0{,}25$. Nos resta estudiar qué suceda para $\lambda > 0{,}1875$.

Volviendo a la primera tabla vemos que si $\lambda > 0{,}1875$. ingresa A_2 y sale A_1.

		40(1+λ)	75	15	0	0		x_i/y_{ij}
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i	(y_{ij}>0)
75	A_2	1/3	1	0	–1/3	0	20/3	
15	A_3	3/2	0	1	1/2	–1	35	
z_j		47,5	75	15	–17,5	–15	w = 1.025	
$c_j - z_j$		–7,5+40λ	0	0	17,5	15		

Para $\lambda > 0{,}1875$ esta última tabla es óptima.

Puesto que hemos cubierto el intervalo de variación de $\lambda\,(-1 \le \lambda < +\infty)$, tomamos el programa dual como original y, haciendo uso de las relaciones entre ambos problemas, obtenemos el siguiente cuadro de resultados.

λ	–1	-0,25	0,1875	+∞
b_1	0	30	47,5	+∞
x_1	0	10+40λ	17,5	
x_2	20+20λ	15	15	
x_3	0	0	-7,5+λ	
x_4	45-30λ	22,5+120λ	0	
x_5	-5-20λ	0	0	
z	900+900λ	875+800λ	1.025	

Ejemplo 5-3 ***Análisis paramétrico en los términos independientes***

Resolveremos los siguiente programa lineal para $0 \le \lambda \le +\infty$.

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ &\text{s.a} \\ &\quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 30 - \lambda \\ &\quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 45 - 2\lambda \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Tabla de Óptimo (λ = *0*)

		4	7	3	0	0		
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i	x_i/y_{ij}
4	A_1	1	0	2/3	2/3	–1/3	5	
7	A_2	0	1	2/3	–1/3	2/3	20	
z_j		4	7	22/3	1/3	10/3	z = 160	
$c_j - z_j$		0	0	–13/3	–1/3	–10/3		

El correspondiente problema dual es

$$\begin{aligned} &\text{Min } w = (30-\lambda)u_1 + (45-2\lambda)u_2 \\ &\text{s.a} \\ &2u_1 + u_2 \ge 4 \\ &u_1 + 2u_2 \ge 7 \\ &2u_1 + 2u_2 \ge 3 \\ &u_1, u_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Si $\lambda = 0 \rightarrow u_1^* = 1/3, u_2^* = 10/3 \Rightarrow u_3^* = 0, u_4^* = 0, u_5^* = 13/3$. Luego obtenemos la tabla de óptimo y comenzamos el análisis.

$$B = (A_1, A_2, A_5) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & -1 \end{pmatrix}$$

		30	45	0	0	0		
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i	x_i/y_{ij}
30	A_1	1	0	–2/3	1/3	0	1/3	
45	A_2	0	1	1/3	–2/3	0	10/3	
0	A_5	0	0	–2/3	–2/3	1	13/3	
z_j		0	45	–5	–20	0	w = 160	
$c_j - z_j$		0	0	5	20	0		

		30–λ	45–2λ	0	0	0		
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i	x_i/y_{ij}
30–λ	A_1	1	0	–2/3	1/3	0	1/3	
45–2λ	A_2	0	1	1/3	–2/3	0	10/3	
0	A_5	0	0	–2/3	–2/3	1	13/3	
z_j		30–λ	45–2λ	–5	–20+λ	0	w = 160–7λ	
$c_j - z_j$		0	0	5	20–λ	0		

Para $\lambda \leq 20$ esta tabla es óptima. Si $\lambda > 20$ ingresa A_4 y sale A_1.

		30–λ	45–2λ	0	0	0		
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i	x_i/y_{ij}
0	A_4	3	0	–2	1	0	1	
45–2λ	A_2	2	1	–1	0	0	4	
0	A_5	2	0	–2	0	1	5	
z_j		90–4λ	45–2λ	–45+2λ	0	0	w = 180 –8λ	
$c_j - z_j$		–60+3λ	0	45–2λ	0	0		

Para $20 \leq \lambda \leq 22{,}5$ la tabla actual es óptima. Si $\lambda > 22{,}5$ la solución no está acotada. Si analizamos el original vemos que para $\lambda = 22{,}5$ la solución es degenerada y para $\lambda > 22{,}5$ el programa no es factible (por propiedad del primal-dual).

Resumen de cuadros

λ $-\infty$	20	22,5	$+\infty$
b_1 $-\infty$	10	7,5	$+\infty$
b_2 $-\infty$	5	0	$+\infty$
x_1	5	45-2λ	Programa no Factible
x_2	20-λ	0	
x_3	0	0	
x_4	0	-60+3λ	
x_5	0	0	
z	160-7λ	180-8λ	

5.8 EL MÉTODO DUAL SIMPLEX

Cuando utilizamos el método Simplex para resolver un problema primal de maximización en su forma canónica, partimos de una solución básica factible y generamos sucesivos puntos extremos hasta arribar a la solución óptima (si existe), es decir, mantenemos la factibilidad mientras se busca la optimización.

Desde el punto de vista de la dualidad siempre que en las tablas del primal exista al menos un $c_j - z_j > 0$, las soluciones del problema dual serán no factibles. *El dual se vuelve factible cuando el primal alcanza el óptimo*.

Surge entonces la posibilidad de emplear otro procedimiento iterativo, similar al Simplex, que comience con una solución básica óptima ($c_j - z_j \leq 0\ \forall\ A_j$) pero *no factible* y, en las subsiguientes tablas, conserve siempre los coeficientes $c_j - z_j$ no positivos hasta lograr la factibilidad, en cuyo caso estaremos en el óptimo. Este nuevo algoritmo fue desarrollado por C. E. Lemke en 1954 y se conoce con el nombre de ***método Dual Simplex***. Las ventajas de su aplicación con respecto al Simplex son el prescindir de variables ficticias y requerir un menor número de iteraciones. Como contrapartida, no siempre resulta sencillo disponer de una solución básica inicial no factible e inmejorable.

Por otra parte el Dual Simplex facilita el análisis post-óptimo en lo referente a cambios en los términos independientes y agregado de nuevas restricciones.

ALGORITMO DEL DUAL SIMPLEX

Para resolver un programa lineal mediante el método Dual Simplex los pasos a seguir son

1. Convertir todas las restricciones a ≤ y llevar el problema a su forma estándar. Disponer de una *solución básica inicial inmejorable* ($c_j - z_j \leq 0\ \forall\ A_j$ en caso maximización; $c_j - z_j \geq 0\ \forall\ A_j$ en caso de minimización).
2. Si $x_i \geq 0\ \ \forall\ i \in I_B$, ***la solución actual es la óptima***. En caso contrario, ir al punto 3.
3. Escoger como variable que *sale*, x_r, a la que posea el menor valor negativo (tanto para maximización como para minimización). Los empates pueden romperse arbitrariamente.
4. La variable que *entra*, x_k, será la que satisfaga la siguiente condición

   $$\left|\frac{c_k - z_k}{y_{rk}}\right| = \min\left\{\left|\frac{c_j - z_j}{y_{rj}}\right|, \textit{con } y_{rj} < 0\right\} \textit{(para maximización o minimización)}$$

   Si no hay ningún $y_{rj} < 0$ el problema es *no factible*.
5. Utilizar operaciones elementales para convertir la variable que entra en una variable básica en el renglón pivote. Ir la punto 2.

Ejemplo 5-4 ***El algoritmo Dual Simplex***

Resolveremos el siguiente programa lineal.

$$\begin{aligned} &\text{Min } w = x_1 + 3x_2 \\ &\text{s.a} \\ &\quad x_1 + x_2 \leq 8 \\ &\quad x_1 \qquad \geq 3 \\ &\qquad\quad x_2 \geq 5 \end{aligned}$$

1. Convertimos las restricciones a ≤, llevamos el problema a su forma estándar y obtenemos una solución básica inicial inmejorable.

$$\text{Min } w = x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

s.a

$$\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = & 8 \\ -x_1 & & & +x_4 & & = & -3 \\ & -x_2 & & & +x_5 & = & -5 \\ & & & x_1, x_2, x_3, & x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

		1	3	0	0	0	
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i
0	A_3	1	1	1	0	0	8
0	A_4	–1	0	0	1	0	–3
0	A_5	0	–1	0	0	1	–5
z_j		0	0	0	0	0	
$c_j - z_j$		1	3	0	0	0	

$c_j - z_j \geq 0 \ \forall \ A_j$.

2. Puesto que x_4 y $x_5 < 0$, pasamos a 3.
3. Determinamos la variable que sale de la base.

   $-5 < -3 \Rightarrow$ sale x_5
4. Seleccionamos la variable entrante.

   Dado que el único $y_{5j} < 0$ es $y_{52} = -1$, entra x_2.

		1	3	0	0	0	
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i
0	A_3	1	1	1	0	0	8
0	A_4	–1	0	0	1	0	–3
0	A_5	0	–1	0	0	1	–5
z_j		0	0	0	0	0	
$c_j - z_j$		1	3	0	0	0	

5. Utilizamos operaciones elementales para convertir la variable que entra en una variable básica en el renglón pivote.

		1	3	0	0	0	
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i
0	A_3	1	0	1	0	1	3
0	A_4	–1	0	0	1	0	–3
3	A_2	0	1	0	0	–1	5
z_j		0	3	0	0	–3	
$c_j - z_j$		1	0	0	0	3	

Primera iteración

2. $x_4 < 0$, por lo tanto pasamos a 3.
3. Sale x_4.
4. El único $y_{4j} < 0$ es $y_{41} = -1$, entra x_1.
5. Mediante operaciones elementales obtenemos la siguiente tabla.

		1	3	0	0	0	
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i
0	A_3	0	0	1	1	1	0
1	A_1	1	0	0	–1	0	3
3	A_2	0	1	0	0	–1	5
z_j		1	3	0	–1	–3	w = 18
$c_j - z_j$		0	0	0	1	3	

La solución es óptima, $x_1^* = 3; x_2^* = 5; x_3^* = 0; x_4^* = 0; x_5^* = 0; z^* = 18$ (degenerada).

Ejemplo 5-5 *El algoritmo Dual Simplex: agregado de una nueva restricción*

En el apartado 4.6 del capítulo anterior vimos que si al problema del taller de alfarería (Ejemplo 1-1) se le añade la restricción $x_1 \leq 8$, la solución óptima previamente obtenida es inadmisible. Además, con el propósito de evitar resolver nuevamente el problema, introdujimos la nueva restricción en la tabla de óptimo y mediante operaciones elementales obtuvimos la siguiente tabla, dejando pendiente su tratamiento en espera del método Dual Simplex.

		20	45	0	0	0	0	
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	x_i
20	A_1	1	0	1	0	–2	0	10
0	A_4	0	0	–3	1	9/2	0	45/2
45	A_2	0	1	0	0	1	0	15
0	A_6	0	0	–1	0	2	1	–2
z_j		20	45	20	0	5	0	
$c_j - z_j$		0	0	–20	0	–5	0	

Estamos ahora en condiciones de abordar la solución. El Dual Simplex nos dice que debe salir x_6 y entra a la base x_3, resultando

		20	45	0	0	0	0	
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	x_i
20	A_1	1	0	0	0	0	1	8
0	A_4	0	0	0	1	–3/2	–3	57/2
45	A_2	0	1	0	0	1	0	15
0	A_3	0	0	1	0	–2	–1	2
z_j		20	45	0	0	45	20	z = 835
$c_j - z_j$		0	0	0	0	–45	–20	

La solución óptima es, $x_1^* = 8; x_2^* = 15; x_3^* = 2; x_4^* = 28{,}5; x_5^* = 0; x_6^* = 0; z^* = 835.$

Ejemplo 5-6 *El algoritmo Dual Simplex: cambio en el vector b de las restricciones*

Supongamos que para el problema del Ejemplo 1-1 se dispondrá, en las próximas semanas, sólo de 25 horas diarias de mano de obra. ¿Cuál será entonces el plan óptimo de producción?

En la sección 4.3 vimos que mientras $30 \leq b_1 \leq 47{,}5$ la base óptima no cambia. Luego si $b_1 = 25$ la solución básica deja de ser factible. En efecto,

$$x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 9/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 25 \\ 75 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ 67{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow \textit{solución básica inadmisible}$$

Así, la tabla de arranque del Dual Simplex será

		20	45	0	0	0	
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i
20	A_1	1	0	1	0	–2	–5
45	A_2	0	1	0	0	1	15
0	A_4	0	0	–3	1	9/2	135/2
z_j		20	45	20	0	5	
$c_j - z_j$		0	0	–20	0	–5	

Hacienda salir a x_1 e ingresando a x_5 se obtiene

		20	45	0	0	0	
c_i	A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	x_i
0	A_5	–1/2	0	–1/2	0	1	5/2
45	A_2	1/2	1	1/2	0	0	25/2
0	A_4	9/4	0	–3/4	1	0	225/4
z_j		45/2	45	45/2	0	0	z =
$c_j - z_j$		–5/2	0	–45/2	0	0	562,5

y la solución óptima es $x_1^* = 0; x_2^* = 12,5; x_3^* = 0; x_4^* = 56,25; x_5^* = 2,5; z^* = 562,5.$