

## 4. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

### 4.1 INTRODUCCIÓN

---

Toda solución a un problema de toma de decisiones se basa en determinados parámetros que se presumen como fijos. En un ambiente real los datos utilizados en el modelo a menudo tienen que estimarse y por lo tanto están sujetos a inexactitudes, o bien pueden cambiar con el tiempo debido a la dinámica del negocio.

Una solución óptima sólo es óptima respecto al modelo específico que se está usando para representar al problema real y, tal solución, se transforma en una guía confiable para la acción únicamente después de que se ha verificado que se comporta con igual propiedad para otras representaciones razonables del problema.

El *análisis de sensibilidad* o *análisis post-óptimo* es un conjunto de actividades que sirven para estudiar y determinar qué tan sensible es la solución a los cambios en las hipótesis. Tales cambios comprenden:

- Cambios en los coeficientes de la función objetivo.
- Cambios en los términos independientes de las restricciones.
- Cambios en los coeficientes tecnológicos.
- Agregado de una nueva variable.
- Agregado de una nueva restricción.

Es importante destacar que el análisis de sensibilidad supone que los coeficientes varían *sólo uno a la vez* manteniendo los restantes parámetros tal cual se plantearon en la forma original.

### 4.2 CAMBIOS EN LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

---

Consideremos el Ejemplo 1-1.

$$\text{Max } z = 20x_1 + 45x_2 \text{ (maximizar contribución marginal)}$$

s. a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 40 \text{ (restricción debida a la disponibilidad diaria de horas de mano de obra)} \\ 3x_1 + 1,5x_2 &\leq 75 \text{ (restricción debida a la disponibilidad diaria de kg de arcilla)} \\ x_2 &\leq 15 \text{ (restricción debida a la máxima demanda diaria de cántaros)} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

en donde

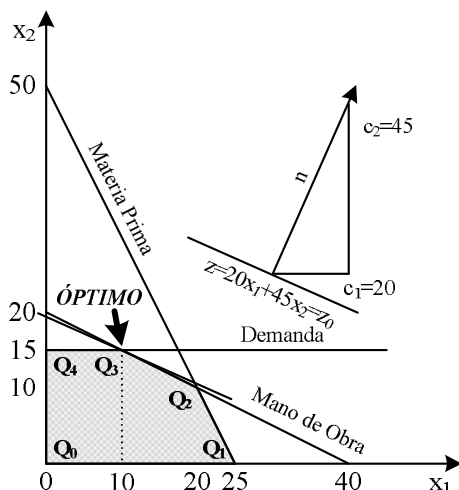
$x_1$  : producción diaria de vasijas (en unidades)

$x_2$  : producción diaria de cántaros (en unidades)

¿Cómo se verá afectada la solución óptima si se producen cambios en los coeficientes de la función económica? Concretamente, ¿dentro de qué rango puede variar la contribución marginal de las vasijas de modo que el plan de producción diario no se vea afectado?

La resolución gráfica de la Figura 4-1 nos muestra que mientras la pendiente del funcional oscile entre la pendiente de la restricción debida a las horas de mano de obra y la correspondiente a la demanda máxima de cántaros, el plan diario de producción se mantendrá óptimo.

Figura 4-1



Punto extremo	$x_1$	$x_2$	$z$
$Q_0$	0	0	0
$Q_1$	25	0	500
$Q_2$	20	10	850
<b><math>Q_3</math></b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>875</b>
$Q_4$	0	15	675

Luego,

$$\left. \begin{array}{l} \text{pendiente del funcional} = -c_1/c_2 = -4/9 \\ \text{pendiente de la restricción de mano de obra} = -1/2 \\ \text{pendiente de la restricción de demanda} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{c_1}{45} \leq 0 \Rightarrow 0 \leq c_1 \leq 22,5$$

por lo tanto, mientras la contribución marginal de las vasijas varíe entre \$0 y \$22,5 el plan de producción actual seguirá siendo óptimo. Lógicamente el valor de  $z^*$  dependerá del valor que asuma  $c_1$ .

Un análisis similar para la contribución marginal de los cántaros nos permitirá concluir que ésta puede oscilar entre \$40 e infinito, sin alterar el punto de óptimo.

Veamos ahora cómo generalizar este estudio cuando se dispone de la solución óptima de un modelo de programación lineal resuelto por el método Simplex. En el Ejemplo 1-1 dicha solución está dada por la tabla siguiente.

Tabla de Óptimo

$c_i$	$A_i$	20	45	0	0	0	$x_i$	$x_i/y_{ij}$ ( $y_{ij} > 0$ )
20	$A_1$	1	0	1	0	-2	10	
0	$A_4$	0	0	-3	1	9/2	45/2	
45	$A_2$	0	1	0	0	1	15	
$z_i$		20	45	20	0	5	$z = 875$	
$c_i - z_i$		0	0	-20	0	-5		

Para una solución óptima tenemos un sistema de desigualdades  $c_j - z_j \leq 0 \forall A_j$  (caso de maximización). Sea  $\Delta c_k$  la cantidad en la cual varía  $c_k$

- a) Si  $x_k$  es una variable no básica el único efecto que se produce es el cambio del valor  $c_k - z_k$  correspondiente a la columna  $A_k$ . Luego, para que la tabla siga siendo la tabla de óptimo,

$$c_k + \Delta c_k - z_k \leq 0 \Rightarrow \Delta c_k \leq -(c_k - z_k)$$

Si  $\Delta c_k \leq -(c_k - z_k)$  la solución actual seguirá siendo óptima. El valor de la función objetivo no cambia puesto que  $x_k = 0$ .

- b) Si  $x_k$  es una variable básica el cambio  $\Delta c_k$  en  $c_k$  afecta a todos los valores  $c_j - z_j$  no básicos. De esta forma, para que la tabla siga siendo óptima,

$$c_j - \sum_{i \in I_B} c_i y_{ij} \leq 0 \quad \forall j \in I_N$$

$$c_j - \left( \sum_{i \in I_B} c_i y_{ij} + \Delta c_k y_{kj} \right) \leq 0 \quad \forall j \in I_N \Rightarrow \Delta c_k y_{kj} \geq c_j - z_j \quad \forall j \in I_N$$

• si  $y_{kj} > 0$ ,  $\Delta c_k \geq (c_j - z_j) / y_{kj}$       • si  $y_{kj} < 0$ ,  $\Delta c_k \leq (c_j - z_j) / y_{kj}$

por lo tanto,

$$\max_{y_{kj} > 0} \frac{c_j - z_j}{y_{kj}} \leq \Delta c_k \leq \min_{y_{kj} < 0} \frac{c_j - z_j}{y_{kj}}$$

Con  $\Delta c_k$  restringida mediante estos límites la base permanece óptima, el punto de óptimo no varía y el nuevo valor de  $z^*$  estará dado por  $z^* = z_{actual} + \Delta c_k x_k$ .

En base a la tabla de óptimo anterior tenemos que

$$\max_{y_{1j} > 0} \frac{c_j - z_j}{y_{1j}} \leq \Delta c_1 \leq \min_{y_{1j} < 0} \frac{c_j - z_j}{y_{1j}}$$

$$\frac{-20}{1} \leq \Delta c_1 \leq \frac{-5}{-2} \Rightarrow 0 \leq c_1 \leq 22,5$$

coincidente con el análisis gráfico efectuado. Análogamente

$$\max_{y_{2j} > 0} \frac{c_j - z_j}{y_{2j}} \leq \Delta c_2 \leq \min_{y_{2j} < 0} \frac{c_j - z_j}{y_{2j}}$$

$$\frac{-5}{1} \leq \Delta c_2 \leq +\infty \Rightarrow 40 \leq c_2 \leq +\infty$$

Notemos que en el ejemplo presentado las variables no básicas en la solución óptima son variables de holgura, no teniendo por tanto mayor sentido estudiar las variaciones en sus coeficientes económicos.

### 4.3 CAMBIOS EN LOS TÉRMINOS INDEPENDIENTES DE LAS RESTRICCIONES

El análisis gráfico de la Figura 4-1 también nos permitirá determinar si un cambio en el término independiente de una restricción hará que la base actual ya no sea la óptima. Por ejemplo ¿para qué valores de  $b_1$ , la base actual se mantiene óptima?

El término independiente correspondiente a la disponibilidad de horas de mano de obra es igual a 40 y cualquier cambio en él equivale a desplazarse paralelamente a la restricción hasta lograr que la misma se satisfaga.

El punto de óptimo  $Q_3$  es aquel para el cual las

restricciones horas de mano de obra y demanda son *activas u obligatorias* y puede expresarse, en términos de las variables concretas y las variables de holgura, como  $Q_3 = (10; 15; 0; 22,5; 0)$ .

En el gráfico observamos que si  $b_1$  cambia, la nueva solución óptima seguirá teniendo como variables básicas a  $x_1, x_2$  y  $x_4$  sólo si se encuentra en la intersección de las rectas horas de mano de obra y demanda (siempre que esta intersección pertenezca al conjunto de soluciones factibles). Así,  $b_1$  puede incrementarse hasta que esta línea de restricción pase por el punto de corte de las rectas de materia prima y demanda (punto  $(17,5; 15)$  en la figura), y puede disminuir hasta tocar el punto  $Q_4$ . Es decir, para  $30 \leq b_1 \leq 47,5$  la base  $(A_1, A_2, A_4)$  se mantendrá óptima. Evidentemente el valor de la nueva solución óptima dependerá del valor asumido por  $b_1$ .

Si  $b_1 < 30$  el punto de óptimo estará en la intersección de la recta de mano de obra y el eje de las ordenadas, por lo que la nueva base será  $(A_2, A_4, A_5)$ . Para  $b_1 > 47,5$  el óptimo se encontrará en el cruce de las rectas de materia prima y demanda siendo  $(A_1, A_2, A_3)$  la correspondiente base.

Razonando en forma análoga tendremos que para  $52,5 \leq b_2 \leq +\infty$  o para  $10 \leq b_3 \leq 20$  la base actual permanecerá óptima.

Dada una solución óptima obtenida mediante el método Simplex tenemos que,  $B^* x_B^* = b \Rightarrow x_B^* = B^{*-1} b$ . Si  $\Delta b_k$  es la cantidad en la cual varía  $b_k$ ,  $x_{B \text{ nueva}}^* = B^{*-1} b_{\text{nuevo}}$  y cada componente de  $x_{B \text{ nueva}}^*$  estará dada por  $x_{i \text{ actual}}^* + r_{ik} \Delta b_k$  con  $i \in I_B$ , siendo  $r_{ik}$  el  $i$ -ésimo elemento en la  $k$ -ésima columna de  $B^{-1}$ . Luego, para que el cambio en  $b_k$  mantenga la base óptima debe resultar

$$x_{i \text{ actual}}^* + r_{ik} \Delta b_k \geq 0 \quad \forall i \in I_B$$

$$\bullet \text{ si } r_{ik} > 0, \Delta b_k \geq -x_{i \text{ actual}}^* / r_{ik} \quad \bullet \text{ si } r_{ik} < 0, \Delta b_k \leq -x_{i \text{ actual}}^* / r_{ik}$$

por lo tanto,

$$\max_{r_{ik} > 0} \frac{-x_{i \text{ actual}}^*}{r_{ik}} \leq \Delta b_k \leq \min_{r_{ik} < 0} \frac{-x_{i \text{ actual}}^*}{r_{ik}}$$

Con  $\Delta b_k$  restringida mediante los límites anteriores la base se mantendrá óptima, los nuevos valores de las variables básicas estarán dados por  $x_{i \text{ actual}}^* + r_{ik} \Delta b_k$  y el valor de la función objetivo será  $z = z_{\text{actual}} + \sum_{i \in I_B} c_i r_{ik} \Delta b_k$ .

En nuestro ejemplo la información de la tabla de óptimo nos permite concluir que:

$$\frac{-10}{1} \leq \Delta b_1 \leq \frac{-45/2}{-3} \Rightarrow 30 \leq b_1 \leq 47,5$$

$$\frac{-45/2}{1} \leq \Delta b_2 \leq +\infty \Rightarrow 52,5 \leq b_2 \leq +\infty$$

$$\max \left( \frac{-45/2}{9/2}, \frac{-15}{1} \right) \leq \Delta b_3 \leq \frac{-10}{-2} \Rightarrow 10 \leq b_3 \leq 20$$

#### 4.4 CAMBIOS EN LOS COEFICIENTES TECNOLÓGICOS

Una variación en un coeficiente tecnológico asociado a una variable básica de la solución óptima puede afectar a toda la tabla, causa por la cual la actual solución puede resultar inadmisibles, no

óptima o no básica. Excepto en algunos casos especiales los citados problemas hacen que sea dificultoso determinar sistemáticamente el efecto de tales cambios sobre el óptimo, siendo recomendable en estas circunstancias volver a resolver el problema.

Nos limitaremos entonces al estudio de variaciones en los coeficientes tecnológicos no básicos.

Para una solución óptima  $c_j - z_j \leq 0 \forall A_j$  (caso de maximización). Frente un cambio en los coeficientes tecnológicos de la variable no básica  $x_k$ , bastará con analizar el correspondiente  $c_k - z_k$ . Sea  $A'_k$  el nuevo vector de coeficientes, tendremos

$$B^{-1}A'_k = Y'_k$$

$$c_B Y'_k = z'_k$$

Luego, si  $c_k - z'_k \leq 0$  la solución actual seguirá siendo óptima. Si  $c_k - z'_k > 0$ ,  $x_k$  ingresa a la base y se continúa iterando en la manera habitual.

#### 4.5 AGREGADO DE UNA NUEVA VARIABLE

Una vez resuelto el problema puede ser de interés conocer el efecto que produciría la introducción de una nueva variable de decisión.

Si consideramos que la nueva variable estaba en el modelo original con todos sus coeficientes tecnológicos iguales a cero y que la misma es no básica en la solución final, el estudio es idéntico al presentado en el caso anterior.

En efecto si  $x_{Nueva}$  se incorpora al modelo con coeficientes tecnológicos dados por el vector  $A_{Nueva}$  y coeficiente económico  $c_{Nueva}$ , el cálculo de  $c_{Nueva} - z_{Nueva} = c_{Nueva} - c_B Y_{Nueva}$  nos permitirá concluir si la solución actual sigue siendo óptima o no.

#### 4.6 AGREGADO DE UNA NUEVA RESTRICCIÓN

Una nueva restricción puede afectar la factibilidad de la solución óptima corriente sólo si es activa. Consecuentemente el primer paso es chequear si dicha solución satisface la restricción. Si esto ocurre la solución óptima actual permanece invariable, caso contrario la nueva restricción debe incorporarse al sistema.

Volviendo al Ejemplo 1-1 supongamos que el encargado del taller de alfarería sabe que en temporada baja de turismo la demanda diaria de vasijas no excede nunca las 8 unidades, lo cual se traduce a  $x_1 \leq 8$ . Un rápido análisis sobre el gráfico de la Figura 1-4 nos revela que la solución actual es inadmisibles y que en el nuevo punto de óptimo  $x_1^* = 8, x_2^* = 15$  y  $z^* = 835$ .

A los efectos de evitar resolver nuevamente el problema cuando se emplea el Simplex, introduciremos la nueva restricción en la tabla de óptimo como se muestra a continuación.

$c_i$	$A_i$	20	45	0	0	0	0	$x_i$	$x_i/y_{ij}$ ( $y_{ij} > 0$ )
		$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_6$		
20	$A_1$	1	0	1	0	-2	0	10	
0	$A_4$	0	0	-3	1	9/2	0	45/2	
45	$A_2$	0	1	0	0	1	0	15	
0	$A_6$	1	0	0	0	0	1	8	
$z_i$									
$c_i - z_i$									

Por supuesto que la tabla anterior ya no es una tabla Simplex dado que  $A_1$ ,  $A_4$  y  $A_2$  son vectores básicos y sus correspondientes coeficientes en la restricción adicional deben ser nulos. Realizando operaciones elementales sobre el cuerpo central de la tabla obtenemos :

$c_i$	$A_i$	20	45	0	0	0	0		$x_i/y_{ij}$ ( $y_{ij} > 0$ )
20	$A_1$	1	0	1	0	-2	0	10	
0	$A_4$	0	0	-3	1	9/2	0	45/2	
45	$A_2$	0	1	0	0	1	0	15	
0	$A_6$	0	0	-1	0	2	1	-2	
$z_i$		20	45	20	0	5	0		
$c_i - z_i$		0	0	-20	0	-5	0		

Como puede apreciarse se verifica la condición de optimización pero la solución actual es no factible. En estos casos para obtener el nuevo óptimo se emplea la tabla precedente como tabla de inicio para la aplicación del método **Dual Simplex** que estudiaremos en el próximo capítulo.

### Ejemplo 4-1 Análisis de sensibilidad

En su pequeño taller Agnes confecciona dos modelos de jeans: *Oxford* y *clásico*. Para ello cuenta con dos costureras: Luisa y Thelma. Luisa está dispuesta a trabajar hasta 40 horas por semana a \$5 por hora. La disponibilidad máxima de Thelma es de 50 horas por semana y se le pagan \$6 por hora.

Cada jeans *Oxford* se vende a \$25 y requiere: \$5 de materia prima, 1 hora de trabajo de Luisa y 2 horas de trabajo de Thelma. El precio de venta de cada jeans *clásico* es de \$22 y sus requerimientos son: \$4 de materia prima, 2 horas de trabajo de Luisa y 1 hora de trabajo de Thelma.

Agnes pretende encontrar un plan de producción que maximice su contribución marginal.

- Plantee el correspondiente programa lineal y obtenga la tabla de óptimo del Simplex sin pasar por las tablas anteriores.
- Analice para qué valores del precio de venta de los jeans *Oxford* se mantiene el plan de producción hallado en el punto a).
- Si Luisa estuviese dispuesta a trabajar hasta 60 horas por semana ¿cuál sería el plan de producción y su correspondiente contribución?
- Agnes está considerando la posibilidad de incorporar un nuevo modelo de jeans que insumiría, por unidad, \$3 de materia prima, 2 horas de Luisa y 2 horas de Thelma. ¿Cuál debería ser el precio de venta para que resultara conveniente su confección?

a)

$$\text{Max } z = 3x_1 + 2x_2$$

s.a

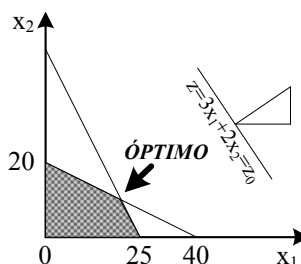
$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$2x_1 + x_2 \leq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$x_j$  : unidades semanales del modelo  $j$ ;

$j = 1$  (*Oxford*),  $2$  (*clásico*)



El gráfico indica que la solución se encuentra en la intersección de las rectas  $x_1 + 2x_2 = 40$  y  $2x_1 + x_2 = 50$ , resolviendo el sistema tenemos  $x_1^* = 20$  y  $x_2^* = 10$ , por lo tanto  $z^* = 80$ . Llevando el programa a su forma estándar resulta inmediato que  $x_3^* = 0$  y  $x_4^* = 0$ .

Para obtener la correspondiente tabla de óptimo calculamos la inversa de la base.

$$(A_1, A_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Luego,

$c_i$	$A_i$	3	2	0	0	$x_i$
3	$A_1$	1	0	-1/3	2/3	20
2	$A_2$	0	1	2/3	-1/3	10
$z_i$		3	2	1/3	4/3	$z = 80$
$c_i - z_i$		0	0	-1/3	-4/3	

b) Variación en  $c_1$

$c_1$  corresponde a una variable básica, entonces

$$\max_{y_{1j} > 0} \frac{c_j - z_j}{y_{1j}} \leq \Delta c_1 \leq \min_{y_{1j} < 0} \frac{c_j - z_j}{y_{1j}}$$

$$\frac{-4/3}{2/3} \leq \Delta c_1 \leq \frac{-1/3}{-1/3} \Rightarrow -2 \leq \Delta c_1 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq c_1 \leq 4$$

Observemos que hubiésemos obtenido idéntico resultado basándonos en el análisis gráfico. En efecto, mientras la pendiente del funcional oscile entre la pendiente de la restricción debida a las horas disponibles de Thelma y la correspondiente a las horas disponibles de Luisa, el plan semanal de producción se mantendrá óptimo. Es decir,  $-2 \leq -c_1/2 \leq -1/2 \Rightarrow 1 \leq c_1 \leq 4$ . El precio de venta de los jeans *Oxford* podrá oscilar entonces entre \$23 y \$26 y el valor de  $z^*$  dependerá del valor que asuma  $c_1$ .

c) Variación en  $b_1$

$$\max_{r_{i1} > 0} \frac{-x_{i\text{actual}}^*}{r_{i1}} \leq \Delta b_1 \leq \min_{r_{ik} < 0} \frac{-x_{i\text{actual}}^*}{r_{i1}}$$

donde  $r_{i1}$  el  $i$ -ésimo elemento en la columna 1 de  $B^{-1}$ .

$$\frac{-10}{2/3} \leq \Delta b_1 \leq \frac{-20}{-1/3} \Rightarrow -15 \leq \Delta b_1 \leq 60 \Rightarrow 25 \leq b_1 \leq 100$$

Para  $25 \leq b_1 \leq 100$  la base actual se mantiene óptima. Si  $b_1 = 60$  la nueva solución es

$$x_B^* = B^{-1}b_{\text{Nueva}} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 + 20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - (1/3)20 \\ x_2 + (2/3)20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40/3 \\ 70/3 \end{pmatrix}$$

$$x_1^* = 13,33, x_2^* = 23,33, x_3^* = 0, x_4^* = 0 \text{ y } z^* = 86,66.$$

A igual conclusión hubiéramos arribado analizando el gráfico. Si  $b_1$  cambia, la nueva solución óptima seguirá teniendo como variables básicas a  $x_1$  y  $x_2$  sólo si se encuentra en la intersección de las rectas correspondientes a la carga horaria de ambas costureras (siempre que esta intersección pertenezca al conjunto de soluciones posibles). Así,  $b_1$  puede incrementarse hasta que esta línea de restricción pase por el punto  $(0; 50)$ , y puede disminuir hasta que la misma toque el punto  $(25; 0)$ . De esta forma, para  $25 \leq b_1 \leq 100$  la base  $(A_1, A_2)$  se mantendrá óptima y solución óptima dependerá del valor asumido por  $b_1$  (en este caso  $b_1 = 60$ ).

Ahora bien, dado que el nuevo plan de producción debe estar en términos valores enteros, redondeando obtenemos  $x_1^* = 14, x_2^* = 22, x_3^* = 2$  (horas ociosas de Luisa),  $x_4^* = 0$  y  $z^* = 86$ .

Otras posibilidades hubiesen sido  $(x_1^* = 14, x_2^* = 23), (x_1^* = 13, x_2^* = 24)$  sin embargo tales puntos no satisfacen las restricciones (no pertenecen a la región factible).<sup>18</sup>

d) Agregado de una nueva variable

Para que el nuevo modelo tenga posibilidad de integrar la base óptima  $(c_{\text{Nuevo}} - z_{\text{Nuevo}})$  debe ser no negativo. Luego

$$y_{i\text{Nuevo}} = B^{-1}A_{\text{Nuevo}} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow z_{\text{Nuevo}} = c_i y_{i\text{Nuevo}} = (3, 2) \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = 10/3$$

$$c_{\text{Nuevo}} - z_{\text{Nuevo}} \geq 0 \Rightarrow c_{\text{Nuevo}} \geq 10/3$$

$$c_{\text{Nuevo}} = \text{Precio Venta} - \text{Costo Materia Prima} - \text{Costo Costureras} = \text{Precio Venta} - 25$$

en consecuencia el precio de venta del nuevo modelo deberá ser mayor o igual a \$28,33.

## 4.7 LOS VALORES IMPLÍCITOS

Cada restricción de un programa lineal tiene un valor asociado, denominado **valor implícito** o **precio dual**, que indica la variación que sufriría el valor óptimo de la función económica, si se incrementara en una unidad el término independiente de la restricción, manteniendo fijos los restantes términos independientes y suponiendo que dicho cambio mantiene la base óptima.

Sabemos que  $z^* = c_B x_B^* = c_B B^{*-1} b$  es decir,  $z^*$  es función lineal de  $b$ . Luego,  $\frac{\partial z^*}{\partial b} = c_B B^{*-1}$ . En particular, el valor implícito de la  $i$ -ésima restricción será  $\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = (c_B B^{*-1})_i$  siendo  $(c_B B^{*-1})_i$  el  $i$ -ésimo elemento de  $c_B B^{*-1}$ .

El resultado precedente nos dice que los valores implícitos de cada restricción son los valores  $z_j$  de la *tabla de óptimo* correspondientes a las columnas de la base inicial identidad.<sup>19</sup> Para entender la importancia y características de este concepto trabajaremos sobre algunos ejemplos.

Analicemos nuevamente el Ejemplo 1-1.

$$\text{Max } z = 20x_1 + 45x_2 \text{ (maximizar contribución marginal)}$$

s. a

$$x_1 + 2x_2 \leq 40 \text{ (restricción debida a la disponibilidad de horas de mano de obra)}$$

$$3x_1 + 1,5x_2 \leq 75 \text{ (restricción debida a la disponibilidad de materia prima)}$$

$$x_2 \leq 15 \text{ (restricción debida a la demanda máxima de cántaros)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Tabla de Óptimo

$c_i$	$A_i$	20	45	0	0	0	$x_i$	$x_i/y_{ij}$ ( $y_{ij} > 0$ )
		$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$		
20	$A_1$	1	0	1	0	-2	10	
0	$A_4$	0	0	-3	1	9/2	45/2	
45	$A_2$	0	1	0	0	1	15	
$z_j$		20	45	20	0	5	$z = 875$	
$c_i - z_j$		0	0	-20	0	-5		

<sup>18</sup> Véase apartado 1.9 en Capítulo 1.

<sup>19</sup> Véase *Cómo identificar  $B^{-1}$  en una tabla Simplex*, apartado 3.3 en Capítulo 3.



Si denominando con  $u_i^*$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$  a los valores implícitos correspondientes a las  $m$  restricciones de un programa lineal, conforme a la tabla anterior tendremos que:  $u_1^* = \frac{\partial z^*}{\partial b_1} = z_3 = 20$ ,  $u_2^* = \frac{\partial z^*}{\partial b_2} = z_4 = 0$  y  $u_3^* = \frac{\partial z^*}{\partial b_3} = z_5 = 5$ .

Las horas disponibles de mano de obra son un recurso escaso (están utilizadas a pleno,  $x_3^* = 0$ ),  $u_1^* = 20$  nos revela que disponer de una hora adicional de este recurso hará que  $z^*$  se incremente en \$20.<sup>20</sup>

Observemos además que en el óptimo el costo reducido de  $x_3$  es  $\frac{\partial z^*}{\partial x_3} = (c_3 - z_3)^* = 0 - z_3^* = -z_3^* = -20$  por lo que si incrementamos  $x_3$  en una unidad  $z^*$  disminuirá en \$20. Asimismo, pretender incrementar  $x_3$  equivale a restarle capacidad al recurso  $b_1$  ya que, en la situación actual, el hecho que  $x_3$  asuma un valor positivo significa reducir a  $40 - x_3$  las horas diarias de mano de obra destinadas a las actividades  $x_1$  y  $x_2$ . De esta forma cualquier incremento en  $x_3$  equivale a un decremento en  $b_1$ . Luego  $u_1^* = \frac{\partial z^*}{\partial b_1} = -\frac{\partial z^*}{\partial x_3} = z_3^* = 20$ .

Cuando el término independiente de una restricción de  $\leq$  representa la cantidad disponible de un determinado recurso, el valor implícito se denomina también **precio sombra**, **costo marginal** o **costo de oportunidad del recurso asociado a la restricción** (ya que existe la oportunidad de mejorar el valor de  $z^*$  al aumentar la disponibilidad del recurso).

Los costos de oportunidad se utilizan frecuentemente para saber cuál es la cantidad máxima que estaríamos dispuestos a pagar por una unidad adicional de un determinado recurso.

Concretamente, en nuestro ejemplo, ¿cuánto estaríamos dispuestos a pagar por una hora adicional de mano de obra?

Dado que el costo marginal de dicho recurso es \$20, podríamos pagar hasta \$20, por encima de su valor actual. Lógicamente en el límite el aumento de  $z$  será nulo.

Pero cuidado, si deseamos incrementar la cantidad de horas de mano de obra lo primero que debemos hacer es realizar el análisis de sensibilidad para saber si dicho incremento pertenece al intervalo de variación permitida. Si esto ocurre el precio sombra mantendrá su valor, en caso contrario puede cambiar.

Mediante un razonamiento análogo podremos concluir que un incremento en  $b_2$  no variará el valor actual de  $z$  (la materia prima es un recurso ocioso,  $x_4^* = 22,5$ ).

En cuanto a la tercera restricción,  $u_3^* = 5$  nos dice que un incremento de una unidad en la demanda máxima de cántaros producirá una mejora de \$5 en el funcional. En este caso, a diferencia de los anteriores, la restricción no se debe a los recursos disponibles sino a un requisito o requerimiento a satisfacer. El valor implícito, en vez de costo marginal (o de oportunidad) asociado a la restricción, se denomina entonces **valor marginal** asociado al requerimiento.

Vayamos ahora al Ejemplo 3-2.

<sup>20</sup> En este caso el valor implícito puede interpretarse también como el beneficio que deja de percibir la organización por no disponer de una unidad más del recurso correspondiente.

$$\text{Min } w = 0,32x_1 + 0,7x_2 + 1,2x_3 \text{ (minimizar costo)}$$

s. a

$$0,38x_1 + 0,001x_2 + 0,002x_3 \geq 0,8 \text{ (restricción debida al requerimiento mínimo de calcio)}$$

$$0,09x_2 + 0,5x_3 \geq 22 \text{ (restricción debida al requerimiento mínimo de proteínas)}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

**Tabla de Óptimo**

$c_i$	$A_i$	0,32	0,7	1,2	0	0	$x_i$	$x_i/y_{ij}$
0,32	$A_1$	1	0,0015	0	-2,63	0,011	1,874	
1,2	$A_3$	0	0,18	1	0	-2	44	
$z_j$		0,32	0,216	1,2	-0,84	-2,4	$w = 53,4$	
$c_i - z_i$		0	0,484	0	0,84	2,4		

En base a la tabla y teniendo en cuenta el efecto espejo, los valores implícitos son los respectivos  $z_j$  correspondientes a las variables de exceso, multiplicados por  $-1$ .<sup>21</sup> El valor

marginal  $u_1^* = \frac{\partial z^*}{\partial b_1} = -z_4 = 0,84$  nos muestra que al incrementar en una unidad (1kg) el

requerimiento mínimo de calcio (manteniendo fijo el requisito mínimo de proteínas y suponiendo que dicho cambio mantiene la base óptima), el valor actual de  $w$  sufrirá un aumento de \$0,84 (es decir  $w$  empeorará). En forma similar, por cada kg adicional de proteínas  $w$  se

incrementará en \$2,4 ( $u_2^* = \frac{\partial z^*}{\partial b_2} = -z_5 = 2,4$ ).

Por último veamos el Ejemplo 1-13.

$$\text{Max } z = 30x_1 + 40x_2$$

s. a

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 4$$

$$x_1 = 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**Tabla de Óptimo**

$c_i$	$A_i$	30	40	0	0	-M	-M	$x_i$	$x_i/y_{ij}$ ( $y_{ij} > 0$ )
0	$A_3$	0	0	1	-1/2	1/2	-3/2	3/2	
30	$A_1$	1	0	0	0	0	1	5	
40	$A_2$	0	1	0	1/2	-1/2	1/2	1/2	
$z_j$		30	40	0	20	-20	50	$z = 170$	
$c_i - z_i$		0	0	0	-20	20-M	-50-M		

Para este problema  $u_1^* = z_3 = 0$  revela que al incrementar en una unidad el término independiente de la primera restricción, el valor del funcional no experimentará variación alguna mientras que, si adicionamos una unidad a  $b_2$  el valor de  $z$  disminuirá en 20 unidades ( $u_2^* = -z_4 = -20$ ).

<sup>21</sup> Véase *Efecto espejo*, apartado 3-5 en Capítulo 3.

En cuanto al valor implícito de la tercera restricción, al no producirse el efecto espejo, a menos que conservemos en las sucesivas iteraciones la información del vector correspondiente a la respectiva variable artificial, no sabremos cuál es. La tabla de óptimo del Ejemplo 3-2 nos indica que dicho valor es  $u_3^* = \frac{\partial z^*}{\partial b_3} = z_6 = 50$ , por lo que un aumento de una unidad en el término independiente de esta restricción provocará un incremento de 50 unidades en  $z$ .

Es importante resaltar que todo lo dicho hasta aquí es válido sólo si el incremento en el término independiente bajo análisis, mantiene la base actual óptima.

Los ejemplos precedentes nos permiten visualizar que el signo de un valor implícito depende de:

- La condición de optimización.
- El tipo de restricción.

La condición de optimización garantiza que estamos en el óptimo si  $c_j - z_j \leq 0 \forall A_j$ , en problemas de maximización, o si  $c_j - z_j \geq 0 \forall A_j$ , en aquellos de minimización.

El tipo de restricción ( $\leq, \geq, =$ ) evidencia la necesidad o no de incorporar holguras y/o excesos para expresar el programa en su forma estándar.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que los valores implícitos de cada restricción son los  $z_j$  de la tabla de óptimo correspondientes a las columnas de la base inicial identidad podemos concluir que:

En problemas de maximización una restricción de  $\leq$  tendrá un valor implícito  $\geq 0$ , en consecuencia ante un incremento unitario en el término independiente,  $z$  no decrecerá (mantendrá el valor actual o mejorará).

En efecto, la restricción de  $\leq$  tendrá una holgura asociada cuyo  $z_j$  en la tabla de óptimo es el valor implícito correspondiente a la restricción. Además, el  $c_j$  de la holgura es nulo y puesto que estamos en el óptimo,  $c_j - z_j \leq 0$ . Resulta inmediato entonces que  $z_j$  debe ser  $\geq 0$ .

Razonando en forma análoga,

En problemas de maximización una restricción de  $\geq$  tendrá un valor implícito  $\leq 0$ , en consecuencia ante un incremento unitario en el término independiente,  $z$  no crecerá (mantendrá el valor actual o empeorará).

En problemas de minimización una restricción de  $\leq$  tendrá un valor implícito  $\leq 0$ , en consecuencia ante un incremento unitario en el término independiente,  $w$  no crecerá (mantendrá el valor actual o mejorará).

En problemas de minimización una restricción de  $\geq$  tendrá un valor implícito  $\geq 0$ , en consecuencia ante un incremento unitario en el término independiente,  $w$  no decrecerá (mantendrá el valor actual o empeorará).

Cuando una restricción del programa lineal original es una ecuación, el valor implícito puede ser positivo, negativo, o nulo. Si bien este caso lo analizaremos en detalle en el próximo capítulo, el siguiente ejemplo gráfico lo pondrá en evidencia.

Sean tres programas lineales de maximización cuyas funciones objetivo se detallan a continuación.

Problema I:  $\text{Max } z = x_1 + x_2$

Problema II:  $\text{Max } z = 2x_1 + x_2$

Problema III:  $\text{Max } z = x_1 + 3x_2$

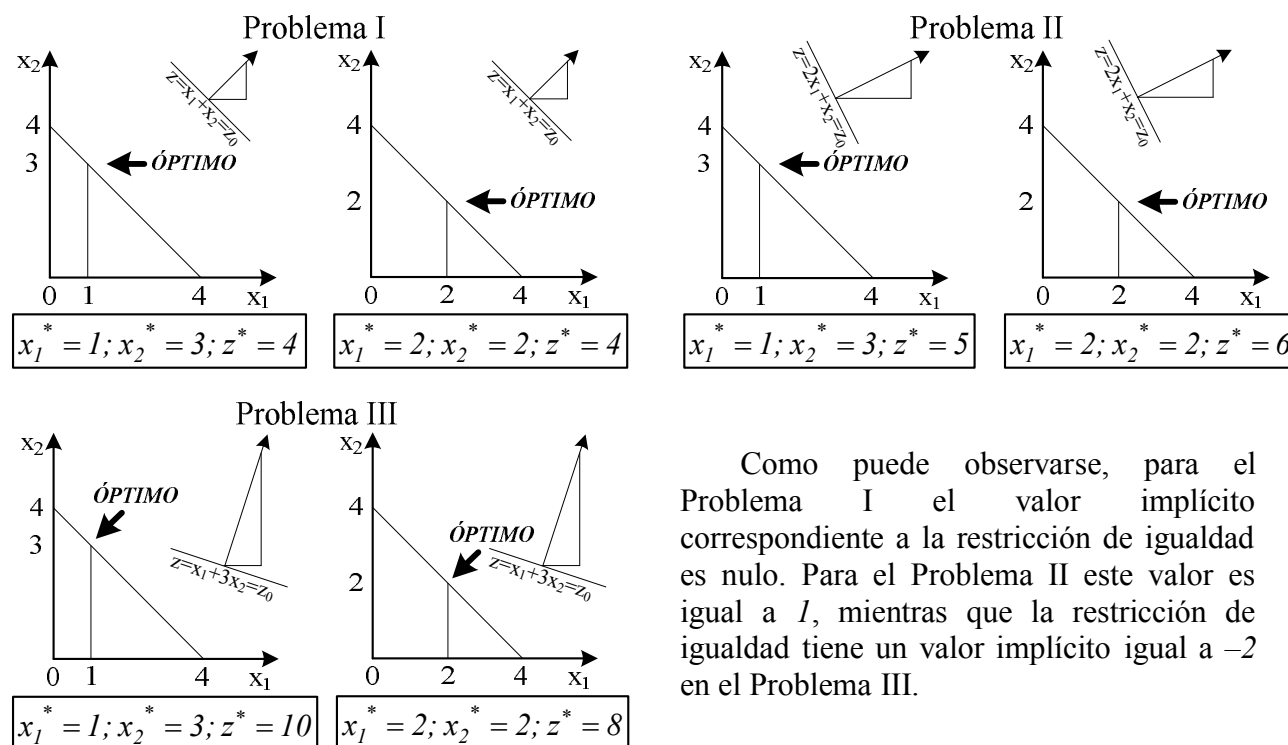
Los tres programas tienen la misma región factible dada por:

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Calcularemos el óptimo de cada uno de ellos y examinaremos el efecto en  $z^*$  al incrementar en una unidad el término independiente de la segunda restricción.



Como puede observarse, para el Problema I el valor implícito correspondiente a la restricción de igualdad es nulo. Para el Problema II este valor es igual a 1, mientras que la restricción de igualdad tiene un valor implícito igual a -2 en el Problema III.

Finalmente cabe acotar que si una solución óptima es degenerada una variación en  $b_i$  puede causar que la base actual no sea factible ( $\partial z^* / \partial b_i$  puede no ser derivable en algunos puntos) en cuyo caso los valores implícitos dejan de ser válidos.

## 4.8 LOS COSTOS REDUCIDOS

En el óptimo, los costos reducidos brindan información sobre los cambios que pueden sufrir los  $c_j$  de las variables no básicas. En efecto, para cualquier variable no básica su costo reducido indica la cantidad en la cual hay que mejorar el coeficiente económico de dicha variable de modo que ésta tenga oportunidad de integrar una nueva solución óptima. (Si la solución óptima actual es degenerada puede ocurrir que la variable integre la nueva solución óptima con valor nulo).

## 4.9 USO DE LOS RESULTADOS DE SENSIBILIDAD PARA CAMBIOS MÚLTIPLES

Los intervalos de sensibilidad calculados según lo expuesto en los apartados 4.2 y 4.3 se basan en el supuesto de "sólo un cambio a la vez". Expondremos a continuación las denominadas **reglas 100%**.

Tales reglas nos permitirán saber qué sucede si más de un coeficiente económico, o un término independiente, varían dentro de sus respectivos intervalos de sensibilidad.<sup>22</sup>

### REGLA 100% PARA CAMBIOS MÚLTIPLES EN LOS $c_j$

Si queremos determinar los incrementos permisibles simultáneos de más de un coeficiente económico los pasos a seguir son:

1. Para cada coeficiente afectado calculamos su variación (diferencia entre el nuevo valor y el valor actual). Si  $c_k$  es el coeficiente original de la función objetivo correspondiente a  $x_k$ , denominaremos con  $\Delta c_k$  al cambio en  $c_k$ .
2. Para cada variable  $x_k$ , definimos la razón  $r_k$  en la forma siguiente.

$$\text{Si } \Delta c_k \geq 0, \quad r_k = \Delta c_k / I_k$$

$$\text{Si } \Delta c_k \leq 0, \quad r_k = \Delta c_k / D_k$$

con

$I_k$  : máximo incremento permitido en  $c_k$  que mantiene la base actual óptima (obtenido del correspondiente intervalo de sensibilidad).

$D_k$  : máximo decremento permitido en  $c_k$  que mantiene la base actual óptima (obtenido del correspondiente intervalo de sensibilidad).

Si  $c_k$  no cambia,  $r_k = 0$ . De esta manera  $r_k$  mide la razón del cambio actual en  $c_k$ , respecto del máximo cambio permitido en  $c_k$  que mantendrá la base óptima.

3. Efectuamos la sumatoria de los  $r_k$  con  $k = 1, 2, \dots, n$  y multiplicamos por 100 para obtener el cambio porcentual total.

Si el resultado obtenido no excede el 100%, entonces la solución sigue siendo óptima (el valor de la función objetivo cambiará de acuerdo a los coeficientes afectados).

Cabe destacar que la condición  $\sum_{k=1}^n r_k \leq 1$  es una condición *suficiente* (no *necesaria*), ya que

si se viola, la solución puede cambiar o puede seguir siendo óptima.

Supongamos entonces que queremos saber qué sucede con la solución óptima del Ejemplo 1-1 si, simultáneamente, se produce un aumento de \$2 en la contribución marginal de las vasijas y una disminución de \$3 en la de los cántaros.

Conforme a los resultados del análisis de sensibilidad efectuado en la sección 4.2 sabemos que para  $-20 \leq \Delta c_1 \leq 2,5$  (manteniendo fijo  $c_2$ ) el punto de óptimo actual no sufrirá alteración alguna, ocurriendo lo mismo para  $-5 \leq \Delta c_2 \leq +\infty$  (manteniendo fijo  $c_1$ ). Luego,

$$r_1 = 2/2,5 \text{ y } r_2 = -3/-5 \Rightarrow r_1 + r_2 = 1,40$$

puesto que  $140\% > 100\%$  no podemos asegurar que  $x^*$  siga siendo el óptimo.

Observemos que si cambiara un solo coeficiente de la función objetivo  $x^*$  seguirá siendo el óptimo si  $r_k \leq 1$  (o equivalentemente  $r_k \leq 100\%$ ). La regla 100% es una generalización de esta idea.

<sup>22</sup> El lector interesado en la demostración de las *reglas 100%* puede consultar Bradley, S., A. Hax y T. Magnanti, *Applied Mathematical Programming*, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1977.

En nuestro ejemplo, 2,5 y  $+\infty$  son los máximos incrementos permitidos para  $c_1$  y  $c_2$ , respectivamente, basados en el análisis de sensibilidad. La expresión,

$$\frac{\Delta c_1}{2,5} + \frac{\Delta c_2}{+\infty} \leq 1 \quad (a)$$

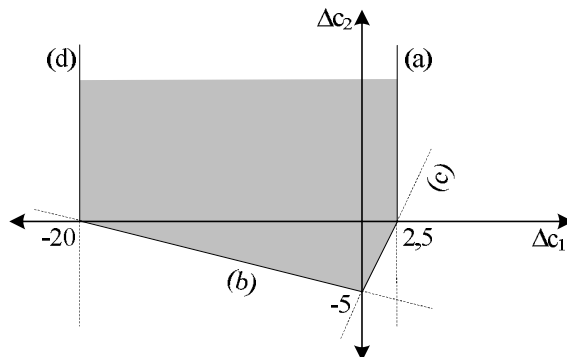
indica que siempre que  $c_1$  y  $c_2$  aumenten en  $\Delta c_1$  y  $\Delta c_2$ , respectivamente, mientras esta desigualdad continúe,  $x^*$  permanece sin cambios. Aplicando la regla a las tres restantes combinaciones posibles de cambio en  $c_1$  y  $c_2$ , obtenemos

$$\frac{\Delta c_1}{-20} + \frac{\Delta c_2}{-5} \leq 1 \quad (b)$$

$$\frac{\Delta c_1}{2,5} + \frac{\Delta c_2}{-5} \leq 1 \quad (c)$$

$$\frac{\Delta c_1}{-20} + \frac{\Delta c_2}{+\infty} \leq 1 \quad (d)$$

La figura siguiente ilustra la región de sensibilidad para los cambios simultáneos en  $c_1$  y  $c_2$  como resultado de la aplicación de la regla.



Desde el punto de vista geométrico, el conjunto convexo (en este caso no acotado) de la figura es *sólo un subconjunto* de una región de sensibilidad más amplia para los cambios posibles en ambos coeficientes económicos (cambios fuera de los intervalos de sensibilidad calculados en 4-2 y 4-3). Por lo tanto, permanecer dentro de la región sombreada en la figura es sólo una condición suficiente (no necesaria) para que  $x^*$  siga siendo el óptimo.

Pueden obtenerse resultados similares para cambios simultáneos de los términos independientes.

### REGLA 100% PARA CAMBIOS MÚLTIPLES EN $b$

Si los cambios afectan solamente a los términos independientes de las restricciones (a algunos o a todos), los pasos a seguir son:

1. Para cada coeficiente afectado calculamos su variación (diferencia entre el nuevo valor y el valor actual). Si  $b_k$  es el término independiente correspondiente a la restricción  $k$ , denominaremos con  $\Delta b_k$  al cambio en  $b_k$ .
2. Para cada  $b_k$ , definimos la razón  $r_k$  en la forma siguiente.  
Si  $\Delta b_k \geq 0$ ,  $r_k = \Delta b_k / I_k$

Si  $\Delta b_k \leq 0$ ,  $r_k = \Delta b_k / D_k$

con

$I_k$  : máximo incremento permitido en  $b_k$  que mantiene la base actual óptima (obtenido del correspondiente intervalo de sensibilidad).

$D_k$  : máximo decremento permitido en  $b_k$  que mantiene la base actual óptima (obtenido del correspondiente intervalo de sensibilidad).

Si  $b_k$  no cambia,  $r_k = 0$ . De esta manera  $r_k$  mide la razón del cambio actual en  $b_k$ , respecto del máximo cambio permitido en  $b_k$  que mantendrá la base óptima.

3. Efectuamos la sumatoria de los  $r_k$  con  $k = 1, 2, \dots, m$  y multiplicamos por 100 para obtener el cambio porcentual total.

Si el resultado obtenido no excede el 100%, entonces la base actual sigue siendo óptima y valores implícitos permanecen sin cambios. El nuevo valor de la función objetivo es la suma de los cambios individuales debidos a cada restricción afectada, multiplicados por los

correspondientes valores implícitos. La condición  $\sum_{k=1}^m r_k \leq 1$  es una condición *suficiente* (no *necesaria*), ya que si se viola, los precios sombra pueden cambiar o seguir iguales.

Veamos el efecto que provoca en el Ejemplo 1-1 disponer, simultáneamente, de 46 horas de mano de obra y 85kg de arcilla, por día.

Los resultados de la sección 4.3 nos muestran que para  $-10 \leq \Delta b_1 \leq 7,5$  (manteniendo fijo  $b_2$ ) y para  $-22,5 \leq \Delta b_2 \leq +\infty$  (manteniendo fijo  $b_1$ ), la base actual seguirá siendo óptima. De esta forma,

$$r_1 = 6/7,5 \text{ y } r_2 = 10 / +\infty \Rightarrow r_1 + r_2 = 0,8 + 0 = 0,8$$

$80\% < 100\%$ , en consecuencia los cambios mantienen la base óptima. Dado que el costo marginal de  $b_1$  es igual \$20 y el de  $b_2$  igual a \$0, el incremento en  $z$  estará dado por  $6 \cdot 20 + 10 \cdot 0 = 120$  es decir el nuevo  $z^*$  será igual a  $875 + 120 = 925$ . Los valores de las variables básicas pueden calcularse mediante  $B^{*-1} b_{\text{nuevo}}$ .

Por último es conveniente aclarar que si bien las reglas del 100% pueden extenderse a programas lineales de cualquier magnitud, a medida que aumenta la dimensión del problema la región de sensibilidad se reduce y los resultados obtenidos no son tan útiles para la gestión. En tales casos el análisis paramétrico que veremos a continuación es la herramienta adecuada.

#### 4.10 ANÁLISIS PARAMÉTRICO

Hasta aquí hemos visto cómo examinar cambios *discretos* en los distintos coeficientes de un programa lineal. En efecto, mediante el análisis de sensibilidad podemos responder preguntas del tipo *¿qué sucede si...?*, siempre y cuando tales cambios mantengan la base actual óptima.

Otro punto de vista para el análisis post-óptimo es hacer variar uno o más parámetros en forma *continua* sobre algún intervalo, o algunos intervalos, para ver cómo varía la solución óptima. Este estudio recibe el nombre de **programación lineal paramétrica**.

Llevaremos a cabo el análisis únicamente en relación con los dos casos más usuales: *los coeficientes económicos* y *los términos independientes*, siendo posible un análisis paramétrico en relación con otros coeficientes del modelo.

## ANÁLISIS PARAMÉTRICO EN LOS COEFICIENTES ECONÓMICOS

Volviendo al Ejemplo 1-1 nuestro propósito es ahora estudiar el comportamiento de la solución óptima cuando  $c_2$  varía entre  $0$  y  $+\infty$ .

Podemos expresar a  $c_2$  como función de un cierto parámetro  $\lambda$ , por ejemplo  $c_2 = c_2(\lambda) = c_2 + c_2\lambda$ .<sup>23</sup> Luego el procedimiento consistirá en:

1. Obtener la tabla de óptimo para  $\lambda = 0$ .
2. Calcular el intervalo de variación de  $\lambda$  que mantiene óptima la tabla precedente. Los extremos de este intervalo determinan los valores de  $\lambda$  para los cuales cambia la solución.
3. Obtener las nuevas tablas para cada uno de los extremos del intervalo anterior.
4. Repetir los pasos 2. y 3. hasta cubrir los límites objeto del estudio.

En el ejemplo  $c_2 = 45 \Rightarrow c_2(\lambda) = 45(1 + \lambda)$ . Pretender estudiar cómo cambia la solución óptima cuando  $0 \leq c_2(\lambda) \leq +\infty$  es equivalente a analizar qué pasa con la misma cuando  $-1 \leq \lambda \leq +\infty$ . Para  $\lambda = 0$  la tabla de óptimo es

$c_i$	$A_i$	20	45	0	0	0	$x_i$	$x_i/y_{ij}$ ( $y_{ij} > 0$ )
		$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$		
20	$A_1$	1	0	1	0	-2	10	
0	$A_4$	0	0	-3	1	9/2	45/2	
45	$A_2$	0	1	0	0	1	15	
$z_i$		20	45	20	0	5	$z = 875$	
$c_i - z_i$		0	0	-20	0	-5		

Expresando a  $c_2$  en función de  $\lambda$ ,

$c_i$	$A_i$	20	$45(1+\lambda)$	0	0	0	$x_i$	$x_i/y_{ij}$ ( $y_{ij} > 0$ )
		$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$		
20	$A_1$	1	0	1	0	-2	10	
0	$A_4$	0	0	-3	1	9/2	45/2	
$45(1+\lambda)$	$A_2$	0	1	0	0	1	15	
$z_i$		20	$45(1+\lambda)$	20	0	$5+45\lambda$	$z = 875+675\lambda$	
$c_i - z_i$		0	0	-20	0	$-5-45\lambda$		

Mientras  $-5 - 45\lambda \leq 0 \Rightarrow \lambda \geq -1/9$  esta tabla se mantendrá óptima. Es decir para  $\lambda \geq -1/9 \Rightarrow c_2 \geq 40$ ,  $x_1^* = 10$ ;  $x_2^* = 15$ ;  $x_3^* = 0$ ;  $x_4^* = 22,5$ ;  $x_5^* = 0$ ;  $z^* = 200 + 15c_2$ .

Si  $\lambda < -1/9$  debe entrar  $A_5$  y sale  $A_4$  (naturalmente si  $\lambda = -1/9$  habrá una solución básica óptima alternativa).

$c_i$	$A_i$	20	$45(1+\lambda)$	0	0	0	$x_i$	$x_i/y_{ij}$ ( $y_{ij} > 0$ )
		$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$		
20	$A_1$	1	0	-1/3	4/9	0	20	
0	$A_5$	0	0	-2/3	2/9	1	5	
$45(1+\lambda)$	$A_2$	0	1	2/3	-2/9	0	10	
$z_i$		20	$45(1+\lambda)$	$70/3+30\lambda$	$-10/9-10\lambda$	0	$z = 850+450\lambda$	
$c_i - z_i$		0	0	$-70/3-30\lambda$	$10/9+10\lambda$	0		

<sup>23</sup> Limitaremos nuestro análisis al estudio de variaciones lineales. Si las variaciones son no lineales seguimos estando frente a un problema de programación lineal pero el análisis se torna bastante complicado.



Si  $c_3 - z_3 \leq 0 (\Rightarrow -70/3 - 30\lambda \leq 0 \Rightarrow \lambda \geq -7/9)$  y  $c_4 - z_4 \leq 0 (\Rightarrow 10/9 + 10\lambda \leq 0 \Rightarrow \lambda \leq -1/9)$  esta tabla es la de óptimo, lo cual se traduce a, para  $-7/9 \leq \lambda \leq -1/9$ ,  $x_1^* = 20; x_2^* = 10; x_3^* = 0; x_4^* = 0; x_5^* = 5; z^* = 400 + 10c_2$ .

Evidentemente si  $\lambda < -7/9$  ingresa  $A_3$  y sale  $A_2$  (para  $\lambda = -7/9$  habrá una solución básica óptima alternativa)

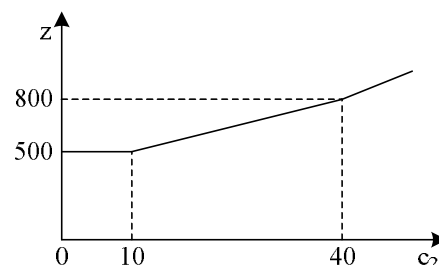
$c_i$	$A_i$	20	$45(1+\lambda)$	0	0	0	$x_i$	$x_i/y_{ij}$ ( $y_{ij} > 0$ )
20	$A_1$	1	$1/2$	0	$1/3$	0	25	
0	$A_5$	0	1	0	0	1	15	
0	$A_3$	0	$3/2$	1	$-1/3$	0	15	
$z_i$		20	10	0	$20/3$	0	$z = 500$	
$c_i - z_i$		0	$35+45\lambda$	0	$-20/3$	0		

Por lo tanto para  $35 + 45\lambda \leq 0 \Rightarrow \lambda \leq -7/9$ ,  $x_1^* = 25; x_2^* = 0; x_3^* = 15; x_4^* = 0; x_5^* = 15$  y  $z^* = 500$ .

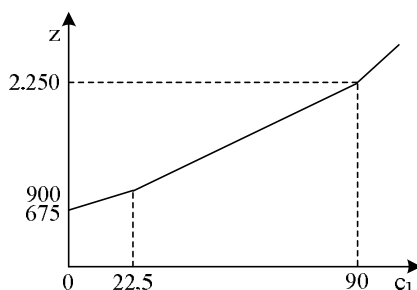
Puesto que hemos cubierto el intervalo de variación objeto de nuestro estudio ( $-1 \leq \lambda \leq +\infty$ ) damos por concluido el análisis.

El siguiente cuadro, de gran valor para la toma de decisiones, y el gráfico adjunto resumen los resultados obtenidos.

$\lambda$	$-\infty$	$-7/9$	$-1/9$	$+\infty$
$c_2$	$-\infty$	10	40	$+\infty$
$x_1$	25	20	10	
$x_2$	0	10	15	
$x_3$	15	0	0	
$x_4$	0	0	22,5	
$x_5$	15	5	0	
$z$	500	$400+10c_2$	$200+15c_2$	



Un análisis similar para  $c_1$  arrojaría los siguientes resultados.



$\lambda$	$-\infty$	$-1$	$1/8$	$7/2$	$+\infty$
$c_1$	$-\infty$	0	22,5	90	$+\infty$
$x_1$	0	10	20	25	
$x_2$	15	15	10	0	
$x_3$	10	0	0	15	
$x_4$	52,5	22,5	0	0	
$x_5$	0	0	5	15	
$z$	675	$675+10c_1$	$450+20c_1$	$25c_1$	

Como expresáramos al comienzo de esta sección, la programación lineal paramétrica nos permite además investigar el efecto sobre la solución óptima cuando varía más de un coeficiente de la función objetivo en un cierto intervalo. Generalizando el estudio anterior de modo que contemple la variación de uno o más coeficientes tendremos que, considerando que el efecto de los cambios en  $c$  está dado por la siguiente función

$$c(\lambda) = c_1(1 + u_1\lambda) + c_2(1 + u_2\lambda) + \dots + c_n(1 + u_n\lambda) \text{ con } u_1, u_2, \dots, u_n \text{ constantes conocidas}$$

utilizando el método Simplex podemos resolver el problema dándole a  $\lambda$  un valor perteneciente a su intervalo de variación. Obtenido el óptimo comienza entonces el análisis paramétrico.

## Capítulo 4

Puesto que  $c_j = c_j + u_j \lambda$ , es posible representar, para cualquier base, los términos  $c_j - z_j$  como una función lineal de  $\lambda$  en la forma  $c_j - z_j = m_j \lambda + h_j$ , donde  $m_j$  y  $h_j$  son constantes resultantes del cálculo anterior.

Sabemos que las variaciones en  $c$  sólo afectan a los  $c_j - z_j$ , por lo tanto la solución antes obtenida seguirá siendo óptima si  $c_j - z_j = m_j \lambda + h_j \leq 0 \quad \forall j$ , de esta forma

$$\bullet \text{ si } m_j > 0, \lambda \leq -h_j / m_j \quad \bullet \text{ si } m_j < 0, \lambda \geq -h_j / m_j$$

Luego el intervalo de variación de  $\lambda$  para el cual la solución se mantiene óptima va a estar dado por

$$\max_{m_j < 0} \frac{-h_j}{m_j} \leq \lambda \leq \min_{m_j > 0} \frac{-h_j}{m_j}$$

Para  $\lambda < \max_{m_j < 0} \frac{-h_j}{m_j}$  la nueva solución se obtendrá introduciendo el vector para el cual resulte  $c_j - z_j = \max_{m_j < 0} \frac{-h_j}{m_j}$ . En forma similar para  $\lambda > \min_{m_j > 0} \frac{-h_j}{m_j}$  ingresará a la base el vector cuyo  $c_j - z_j = \min_{m_j > 0} \frac{-h_j}{m_j}$ .

### Ejemplo 4-2 Análisis paramétrico en los coeficientes económicos

Resolveremos el siguiente programa lineal paramétrico para  $-\infty \leq \lambda \leq +\infty$ .

$$\text{Max } z = (1 + 3\lambda)x_1 + (2 + \lambda)x_2$$

s. a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Para  $\lambda = 0$  la correspondiente tabla de óptimo es

$c_i$	$A_i$	1	2	0	0	$x_i$	$x_i/y_{ij}$ ( $y_{ij} > 0$ )
		$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$		
2	$A_2$	1	1	1	0	4	
0	$A_4$	1	0	-1	1	2	
$z_j$		2	2	2	0	$z = 8$	
$c_j - z_j$		-1	0	-2	0		

Sustituyendo  $c_1$  por  $1 + 3\lambda$  y  $c_2$  por  $2 + \lambda$ , se tiene

**Tabla 4-1**

$c_i$	$A_i$	$1+3\lambda$	$2+\lambda$	0	0	$x_i$	$x_i/y_{ij}$ ( $y_{ij} > 0$ )
		$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$		
$2+\lambda$	$A_2$	1	1	1	0	4	
0	$A_4$	1	0	-1	1	2	
$z_j$		$2+\lambda$	$2+\lambda$	$2+\lambda$	0	$z = 8+4\lambda$	
$c_j - z_j$		$-1+2\lambda$	0	$-2-\lambda$	0		

Si  $c_1 - z_1 \leq 0 (\Rightarrow -1 + 2\lambda \leq 0 \Rightarrow \lambda \leq 1/2)$  y  $c_3 - z_3 \leq 0 (\Rightarrow -2 - \lambda \leq 0 \Rightarrow \lambda \geq -2)$  esta tabla es la de óptimo, lo cual se traduce a, para  $-2 \leq \lambda \leq 1/2$ ,  $x_1^* = 0; x_2^* = 4; x_3^* = 0; x_4^* = 2; z^* = 8 + 4\lambda$ .

Si  $\lambda > 1/2$  ingresa  $A_1$  y sale  $A_4$ .

**Tabla 4-2**

$c_i$	$A_i$	$1+3\lambda$	$2+\lambda$	$0$	$0$	$x_i$	$x_i/y_{ij}$ ( $y_{ij} > 0$ )
		$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$		
$2+\lambda$	$A_2$	$0$	$1$	$2$	$-1$	$2$	
$1+3\lambda$	$A_1$	$1$	$0$	$-1$	$1$	$2$	
$z_j$		$1+3\lambda$	$2+\lambda$	$3-\lambda$	$-1+2\lambda$	$z = 6+8\lambda$	
$c_j - z_j$		$0$	$0$	$-3+\lambda$	$1-2\lambda$		

En base a esta tabla, para  $-3 + \lambda \leq 0 \Rightarrow \lambda \leq 3$  y  $1 - 2\lambda \leq 0 \Rightarrow \lambda \geq 1/2$  la solución óptima está dada por  $x_1^* = 2; x_2^* = 2; x_3^* = 0; x_4^* = 0; z^* = 6 + 8\lambda$ . Ahora, si  $\lambda \geq 3$  los vectores entrante y saliente son  $A_3$  y  $A_2$ , respectivamente.

**Tabla 4-3**

$c_i$	$A_i$	$1+3\lambda$	$2+\lambda$	$0$	$0$	$x_i$	$x_i/y_{ij}$ ( $y_{ij} > 0$ )
		$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$		
$0$	$A_3$	$0$	$1/2$	$1$	$-1/2$	$1$	
$1+3\lambda$	$A_1$	$1$	$1/2$	$0$	$1/2$	$3$	
$z_j$		$1+3\lambda$	$1/2+(3/2)\lambda$	$0$	$1/2+(3/2)\lambda$	$z = 3+9\lambda$	
$c_j - z_j$		$0$	$3/2-(1/2)\lambda$	$0$	$-1/2-(3/2)\lambda$		

La Tabla 4-3 nos indica que para  $\lambda \geq 3$  resulta  $x_1^* = 3; x_2^* = 0; x_3^* = 1; x_4^* = 0; z^* = 3 + 9\lambda$ .

Nos resta estudiar entonces qué suceda para  $\lambda < -2$ . Volviendo a la Tabla 4-1 vemos que si  $\lambda < -2$  ingresa  $A_3$  y sale  $A_2$ , obteniéndose

**Tabla 4-4**

$c_i$	$A_i$	$1+3\lambda$	$2+\lambda$	$0$	$0$	$x_i$	$x_i/y_{ij}$ ( $y_{ij} > 0$ )
		$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$		
$0$	$A_3$	$1$	$1$	$1$	$0$	$4$	
$0$	$A_4$	$2$	$1$	$0$	$1$	$6$	
$z_j$		$0$	$0$	$0$	$0$	$z = 0$	
$c_j - z_j$		$1+3\lambda$	$2+\lambda$	$0$	$0$		

Conforme a esta tabla si  $\lambda < -2$  la solución óptima será  $x_1^* = 0; x_2^* = 0; x_3^* = 4; x_4^* = 6; z^* = 0$ .

Dado que contamos con las sucesivas soluciones óptimas para  $-\infty \leq \lambda < +\infty$  damos por finalizado el análisis. A continuación se resumen los resultados obtenidos.

$\lambda$	$-\infty$	$-2$	$0,5$	$3$	$+\infty$
$c_1$	$-\infty$	$-5$	$2,5$	$10$	$+\infty$
$c_2$	$-\infty$	$0$	$2,5$	$5$	$+\infty$
$x_1$	$0$	$0$	$2$	$3$	
$x_2$	$0$	$4$	$2$	$0$	
$x_3$	$4$	$0$	$0$	$1$	
$x_4$	$6$	$2$	$0$	$0$	
$z$	$0$	$8+4\lambda$	$6+8\lambda$	$3+9\lambda$	

## ANÁLISIS PARAMÉTRICO EN LOS TÉRMINOS INDEPENDIENTES

Vamos a estudiar ahora el comportamiento de la solución óptima cuando en el Ejemplo 1-1,  $b_1$  varía entre 0 y  $+\infty$ .

En base al análisis gráfico efectuado en el apartado 4-3 sabemos que:

Para  $0 \leq b_1 \leq 30$  la base óptima es  $(A_2, A_4, A_5)$ .

Para  $30 \leq b_1 \leq 47,5$  la base óptima es  $(A_1, A_2, A_4)$ .

Para  $b_1 \geq 47,5$  la base óptima es  $(A_1, A_2, A_3)$ .

(notemos que en los extremos de tales intervalos la solución será degenerada)

Si expresamos a  $b_1$  como función lineal de un parámetro  $\lambda$ , por ejemplo  $b_1(\lambda) = 40 + \lambda$ ,

Para  $\lambda$  entre  $-10$  y  $7,5$  ( $\Rightarrow$  para  $30 \leq b_1 \leq 47,5$ ),  $x_B^* = (A_1, A_4, A_2)^{-1}(40 + \lambda, 75, 15)^T$ .

Dado que

$$(A_1, A_4, A_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resulta  $x_1^* = 10 + \lambda$ ,  $x_2^* = 15$ ,  $x_4^* = 22,5 - 3\lambda$  y  $z^* = 875 + 20\lambda$ .

Observemos que para  $\lambda = 0$  la solución óptima es  $x^* = (10; 15; 0; 22,5; 0)^T$  y  $z^* = 875$ . Luego, aplicando las fórmulas del punto 4-3 para  $\lambda$  entre  $-10$  y  $7,5$  los nuevos valores de las variables básicas (coincidentes con los recién calculados) están dados por  $x_{i_{actual}}^* + r_{i1}\lambda$  y  $z^* = z_{actual} + \sum_{i \in I_B} c_i r_{ik} \lambda$ . Además en la sección 4-7 vimos

que mientras  $30 < b_1 < 47,5$  el costo marginal de cada hora de mano de obra es de \$20. Lógicamente este costo marginal refleja cómo cambia  $z^*$  en función de  $b_1$ .

Para  $\lambda$  entre  $-40$  y  $-10$  ( $\Rightarrow 0 \leq b_1 \leq 30$ ),  $x_B^* = (A_2, A_4, A_5)^{-1}(40 + \lambda, 75, 15)^T$ . En este caso.

$$(A_2, A_4, A_5)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -3/4 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

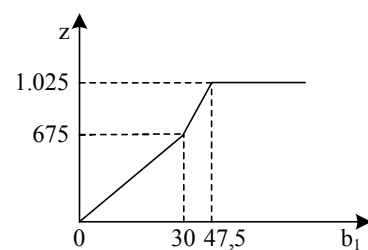
luego,  $x_2^* = 20 + 0,5\lambda$ ,  $x_4^* = 45 - 0,75\lambda$ ,  $x_5^* = -5 - 0,5\lambda$  y  $z^* = 900 + 22,5\lambda$ .

Por ejemplo, para  $\lambda = -20$ ,  $x^* = (0; 10; 0; 60; 5)^T$  y  $z^* = 450$ . El costo marginal de  $b_1$  es ahora \$22,5.

Para  $\lambda \geq 7,5$  ( $\Rightarrow b_1 \geq 47,5$ ) un análisis similar a los anteriores nos indicará que  $x_1^* = 17,5$ ,  $x_2^* = 15$  y  $z^* = 1.025$ , en tanto que  $x_3^* = -7,5 + \lambda$ . Notemos que al ser  $x_3^*$  una variable básica el costo marginal de  $b_1$  es nulo.

El siguiente cuadro resume los resultados obtenidos.

$\lambda$	$-40$	$-10$	$7,5$	$+\infty$
$b_1$	$0$	$30$	$47,5$	$+\infty$
$x_1$	$0$	$10+\lambda$	$17,5$	
$x_2$	$20+0,5\lambda$	$15$	$15$	
$x_3$	$0$	$0$	$-7,5+\lambda$	
$x_4$	$45-0,75\lambda$	$22,5-3\lambda$	$0$	
$x_5$	$-5-0,5\lambda$	$0$	$0$	
$z$	$900+22,5\lambda$	$875+20\lambda$	$1.025$	



Evidentemente cuando la dimensión del problema aumenta la imposibilidad de contar con una solución gráfica dificulta el estudio precedente. En el capítulo próximo veremos que todo programa lineal tiene un programa dual asociado y que ambos programas poseen ciertas relaciones. Tales relaciones nos permitirán realizar el análisis paramétrico de los términos independientes mediante la parametrización de los coeficientes económicos del problema dual.