

3. EL MÉTODO SIMPLEX

3.1 DESARROLLO ANALÍTICO

El método Simplex es un procedimiento iterativo que partiendo de un punto extremo se va moviendo sucesivamente hacia otros puntos extremos, mejorando en cada uno de ellos el valor de la función objetivo (o en el peor de los casos, manteniéndolo), hasta llegar al óptimo o a la conclusión que la solución no está acotada.

Tal desplazamiento se hace siempre a través de los lados del polígono o de las aristas del poliedro (es decir, entre vértices adyacentes) en base a la verificación de dos condiciones fundamentales:

- **La condición de factibilidad**, que garantiza que partiendo de una solución básica factible sólo serán generadas sucesivas soluciones básicas factibles.
- **La condición de optimización**, que permite reconocer cuándo se ha llegado al óptimo y asegura que cada nueva solución generada no empeorará el actual valor de la función objetivo.

En la siguiente exposición sobre los fundamentos del método se supondrá que las soluciones básicas factibles son no degeneradas (*hipótesis de no degeneración*). No obstante, como veremos, la no verificación de esta hipótesis no altera la validez de las conclusiones.

Consideremos un programa lineal en su forma estándar

$$\text{Max } z = cx$$

s. a

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

donde A es de orden $m \times n$, con $m < n$, y rango máximo (igual a m). Sean A_j con $j = 1, 2, \dots, n$, los vectores columna de A . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que los m primeros de tales vectores son linealmente independientes, es decir constituyen una base que denominaremos con B (siendo B una matriz cuadrada de orden m).

De esta forma, cualquier A_j no perteneciente a la base puede escribirse como combinación lineal de los vectores de B :

$$A_j = y_{1j}A_1 + y_{2j}A_2 + \dots + y_{mj}A_m \quad (3-1)$$

$A_j \notin B; A_i \in B, y_{ij} \in \mathbb{P}, i = 1, 2, \dots, m$. Designando con Y_j al vector cuyas componentes son $(y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{mj})^T$, la ecuación anterior se traduce a

$$A_j = BY_j$$

puesto que B tiene inversa, resulta

$$Y_j = B^{-1}A_j$$

Conocer el vector Y_j nos permite expresar A_j como combinación lineal de los vectores de B . Notemos que el subíndice j se refiere al vector A_j y el subíndice i se refiere al subíndice del vector básico al cual multiplica y_{ij} en (3-1).

importante

Sabemos que el sistema $Ax = b$ puede expresarse en términos de la base B como⁷

$$Bx_B + Nx_N = b$$

y que B determina una solución básica dada por

$$x_B = B^{-1}b$$

entendiéndose implícitamente que las $n - m$ variables no básicas que constituyen el vector x_N son nulas.

Supongamos que las m variables básicas de x_B son estrictamente positivas, es decir $x = (x_1, x_2, \dots, x_r, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^T$ es una solución básica factible no degenerada, luego

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_r A_r + \dots + x_m A_m = b$$

(3-2)

y el valor de la función objetivo calculada en este punto será $z = cx = c_B x_B + c_N x_N = c_B x_B = z_0$

donde c_B es el vector de los coeficientes económicos que acompañan a las variables básicas y c_N el correspondiente a las no básicas.

Si el punto extremo x no es óptimo, nos moveremos a un punto extremo adyacente con el objeto de mejorar el valor de z .⁸ Tal movimiento se realiza cambiando un vector de la base; para ello removemos una columna de B y la reemplazamos por algún vector de N (matriz correspondiente a la “no base”).

LA CONDICIÓN DE FACTIBILIDAD

Si a (3-2) le restamos (3-1) multiplicada por $\theta_j \geq 0$ obtenemos

$$(x_1 - \theta_j y_{1j})A_1 + (x_2 - \theta_j y_{2j})A_2 + \dots + (x_r - \theta_j y_{rj})A_r + \dots + (x_m - \theta_j y_{mj})A_m + \theta_j A_j = b \quad (3-3)$$

consecuentemente los valores $(x_1 - \theta_j y_{1j}), (x_2 - \theta_j y_{2j}), \dots, (x_r - \theta_j y_{rj}), \dots, (x_m - \theta_j y_{mj}), \theta_j$ con el agregado de $n - m - 1$ ceros, constituyen una solución del sistema $Ax = b$. Si además todas sus componentes son no negativas, es una solución posible.

Si $\theta_j = 0$, la nueva solución coincide con la anterior. Ahora bien, como el número máximo de vectores linealmente independientes es m , para que este punto sea un punto extremo debemos conseguir que alguna de las $(x_i - \theta_j y_{ij})$ se anule y que las restantes sigan siendo no negativas. Esto se logra haciendo

$$\theta_j = \min \left\{ \frac{x_i}{y_{ij}}, \text{ con } y_{ij} > 0, i = 1, 2, \dots, m \right\} \quad (3-4)$$

Supongamos que al menos uno de los y_{ij} es mayor que cero y que el mínimo se produce para $i = r$, o sea $\theta_j = x_r / y_{rj}$, entonces la nueva solución resultará

$$x'_i = x_i - \theta_j y_{ij} = x_i - x_r \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \text{ para todo } i \neq r, i = 1, 2, \dots, m$$

$$x'_r = x_r - \theta_j y_{rj} = x_r - x_r \frac{y_{rj}}{y_{rj}} = 0; \quad x'_j = \theta_j = \frac{x_r}{y_{rj}}; \quad 0 \text{ para las restantes } n - m \text{ variables}$$

⁷ Véase Definición 2-21 en Capítulo 2.

⁸ Para cualquier programa lineal con m restricciones, dos soluciones básicas factibles se dicen adyacentes si sus respectivas variables básicas tienen $m - 1$ variables en común.

que es a su vez, una solución básica factible puesto que satisface el sistema $Ax = b$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m (x_i - x_r \frac{y_{ij}}{y_{rj}}) A_i + \frac{x_r}{y_{rj}} A_j = b \quad (y_{rj} > 0)$$

Se dice entonces, que el vector A_j ingresa a la base y sale A_r . La variable x_r es ahora no básica ($x_r = 0$) y x_j pasa a ser básica con valor $\theta_j = x_r/y_{rj}$.

Observemos que todo $A_j \notin B$ puede reemplazar a cualquier vector A_r de la base para el cual y_{rj} sea distinto de cero, y el nuevo conjunto de vectores seguirá siendo linealmente independiente.⁹

La expresión (3-4) recibe el nombre de **condición de factibilidad** y nos garantiza que cada nueva solución encontrada será una solución básica factible.

Notemos que:

- Si en la (3-4) ninguno de los y_{ij} es mayor que cero, **la solución no está acotada**, es decir, el programa lineal no tiene solución óptima finita. En efecto, si $y_{ij} \leq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$ los valores $(x_1 - \theta_j y_{1j}), (x_2 - \theta_j y_{2j}), \dots, (x_r - \theta_j y_{rj}), \dots, (x_m - \theta_j y_{mj}), \theta_j$ que satisfacen (3-3) serán todos estrictamente positivos y pueden crecer tanto como se desee escogiendo un θ_j lo suficientemente grande.
- Puede haber dos o más columnas de B para las cuales se tiene el mismo valor mínimo dado por (3-4) en cuyo caso, la nueva solución básica factible será **degenerada**. Por ejemplo, si en (3-4) el mínimo se produce para $x_r/y_{rj} = x_t/y_{tj}$ podremos optar por remover la columna A_r o la A_t de la base actual. Si decidimos que A_r abandone la base, A_t integrará la nueva base siendo la variable básica x_t igual a cero.

En estos casos si bien resulta indistinta la elección del vector que abandonará la base, convendremos en hacer salir al de mayor índice.

LA CONDICIÓN DE OPTIMIZACIÓN

Pretendemos ahora que cada nueva solución básica encontrada por el procedimiento anterior sea capaz de mejorar el valor de la función objetivo o, de no ser posible, mantenerlo.

El valor de la función económica para la nueva solución obtenida mediante (3-4) es

$$z = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m c_i (x_i - x_r \frac{y_{ij}}{y_{rj}}) + c_j \frac{x_r}{y_{rj}}. \text{ En esta sumatoria podemos incluir el término } c_r (x_r - x_r \frac{y_{rj}}{y_{rj}}) \text{ ya}$$

que al ser nulo el valor de $x_r - x_r \frac{y_{rj}}{y_{rj}}$, el valor de z no se altera. De este modo,

$$z = \sum_{i=1}^m c_i (x_i - x_r \frac{y_{ij}}{y_{rj}}) + c_j \frac{x_r}{y_{rj}}$$

desarrollando y agrupando términos

$$z = \sum_{i=1}^m c_i x_i + c_j \frac{x_r}{y_{rj}} - \frac{x_r}{y_{rj}} \sum_{i=1}^m c_i y_{ij}$$

⁹ Véase Teorema 2-3 en Capítulo 2.

Capítulo 3

Denominando con z_j a $\sum_{i=1}^m c_i y_{ij}$ y teniendo en cuenta que el valor de z para la solución

básica inicial correspondiente a (3-2) es $z_0 = \sum_{i=1}^m c_i x_i$, la expresión anterior se traduce a

$$z = z_0 + \frac{x_r}{y_{rj}}(c_j - z_j) = z_0 + \theta_j(c_j - z_j) \quad (3-5)$$

if this is bigger than 0, z increase

Lo cual nos indica que el nuevo valor de la función objetivo es el valor original más la cantidad $\theta_j(c_j - z_j)$.

Dado que $\theta_j > 0$, si $c_j - z_j > 0$ resultará $z > z_0$ siendo la nueva solución mejor que la anterior. Lógicamente, si hubiese dos o más vectores no básicos para los cuales $c_j - z_j > 0$, debería ingresar a la base aquél al que corresponda el mayor valor de $\theta_j(c_j - z_j)$. Sin embargo, este último cálculo nos obligaría a determinar θ_j para todos los vectores no básicos con $c_j - z_j > 0$ optándose, a efectos de simplificar la tarea, por ingresar a la base al vector que posea el mayor valor positivo de los $c_j - z_j$. Si este último valor se da para más de un vector puede escogerse indistintamente a cualquiera de ellos como integrante de la nueva base. No obstante, se conviene en hacer entrar al de menor subíndice.

En base a lo expuesto, dada una solución básica factible, siempre que haya un vector A_j no básico con $c_j - z_j > 0$ y al menos un $y_{ij} > 0$ con $i = 1, 2, \dots, m$, existe otro punto extremo para el cual el valor de la función objetivo es la menos tan grande como el valor anterior ($z \geq z_0$).

De esta forma el nuevo punto extremo puede ser usado como solución básica original, repitiendo el procedimiento hasta que la solución no pueda mejorarse más, o sea hasta que $c_j - z_j \leq 0 \forall A_j$ con $j = 1, 2, \dots, n$.

Cuando una solución es degenerada y escogemos un vector A_j para el cual $c_j - z_j > 0$ y al menos un $y_{ij} > 0$, podemos tener o no un aumento en z .

En efecto, al examinar (3-4), $\theta_j = x_r/y_{rj}$ será igual a cero sólo si x_r tiene valor nulo, es decir, si la solución básica original es degenerada. En este caso, la nueva solución básica factible también será degenerada y los valores de las variables comunes a ambas soluciones no cambian ($x'_i = x_i - \theta_j y_{ij} = x_i$ para todo $i \neq r$, $x'_j = \theta_j = x_r/y_{rj} = 0$). Sin embargo, no se puede decir que la nueva solución básica siempre será degenerada si la actual lo es. Si $y_{ij} \leq 0$ para cada x_i igual a cero en la solución actual, ninguna de tales variables es considerada en el cálculo de (3-4), el valor de θ_j será entonces positivo y la nueva solución resultará no degenerada.

En cualquier caso, cuando $(c_j - z_j) > 0$, estamos seguros que z no es menor que z_0 .

La pregunta que surge ahora es ¿si $c_j - z_j \leq 0 \forall A_j$, significa que alcanzamos el óptimo? Es fácil demostrar que, efectivamente, cuando se verifica dicha condición la función objetivo alcanza su valor máximo.

Supongamos que para el sistema $Ax = b$ tenemos una base B y una solución básica factible $x_B = B^{-1}b$; que el valor de la función objetivo para esta solución es z_0 y que $c_j - z_j \leq 0 \forall A_j$ con $j = 1, 2, \dots, n$.

Sea x' cualquier solución factible y z el correspondiente valor de la función objetivo. Para x' se verifica

$$x'_1 A_1 + x'_2 A_2 + \dots + x'_n A_n = b \quad 3-6$$

Sabemos que todo vector A_j de A puede expresarse como combinación lineal de B en la forma $A_j = BY_j = \sum_{i \in I_B} y_{ij} A_i$, siendo I_B el conjunto de subíndices de los vectores de B .

Evidentemente, para un A_j básico y_{ij} será igual a uno si $i = j$ e igual a cero si $i \neq j$.

Sustituyendo en (3-6) obtenemos

$$x'_1 \sum_{i \in I_B} y_{i1} A_i + x'_2 \sum_{i \in I_B} y_{i2} A_i + \dots + x'_n \sum_{i \in I_B} y_{in} A_i = \sum_{j=1}^n x'_j \left(\sum_{i \in I_B} y_{ij} A_i \right) = \sum_{i \in I_B} \left(\sum_{j=1}^n x'_j y_{ij} \right) A_i = b$$

Comparando el último término con el que se obtiene al aplicar la solución básica factible x al sistema, es decir $\sum_{j=1}^n x_j A_j = \sum_{i \in I_B} x_i A_i = b$, resulta inmediato que

$$x_i = \sum_{j=1}^n x'_j y_{ij} \quad \text{para todo } i \in I_B \quad (3-7)$$

Ahora bien, para x' el valor de la función objetivo es $z = \sum_{j=1}^n c_j x'_j$ y, por hipótesis $c_j - z_j \leq 0 \quad \forall A_j$ con $j = 1, 2, \dots, n$, o sea $c_j \leq z_j \quad \forall j$, luego $z = \sum_{j=1}^n c_j x'_j \leq \sum_{j=1}^n z_j x'_j$. Si en esta última expresión reemplazamos z_j por $\sum_{i \in I_B} c_i y_{ij}$ vemos que

$$z \leq \sum_{j=1}^n x'_j \left(\sum_{i \in I_B} c_i y_{ij} \right) = \sum_{i \in I_B} c_i \sum_{j=1}^n x'_j y_{ij}$$

y sustituyendo (3-7)

$$z \leq \sum_{i \in I_B} c_i x_i = z_0$$

Esto demuestra que si se satisface la condición $c_j - z_j \leq 0 \quad \forall A_j$, entonces x es la solución óptima sin tener en cuenta si es o no degenerada. Tal condición recibe el nombre de **condición de optimización**.¹⁰

En síntesis, dada una solución básica factible:

- Si $c_j - z_j \leq 0 \quad \forall A_j$, estamos en el óptimo.
- Si $c_j - z_j > 0$ para algún A_j y el vector Y_j contiene al menos alguna componente positiva, generamos una nueva solución básica.
- Si $c_j - z_j > 0$ para algún A_j y el vector Y_j no contiene ninguna componente positiva, concluimos con una solución no acotada.

Para problemas de minimización tendremos que tener en cuenta que se ha alcanzado el óptimo cuando $c_j - z_j \geq 0 \quad \forall A_j$, los restantes pasos son idénticos.

¹⁰ Observemos que la expresión 3-5 puede también escribirse como $z = z_0 - \theta_j(z_j - c_j)$. De esta forma la condición de optimización se traduciría a $z_j - c_j \geq 0 \quad \forall A_j$ (caso de maximización).

CONVERGENCIA FINITA DEL MÉTODO EN AUSENCIA DE DEGENERACIÓN

Revisar si se da en la clase del 12/04

En ausencia de degeneración la diferencia entre la función objetivo de la solución básica factible inmediata anterior y la actual es $x_j(c_j - z_j) > 0$. De esta forma, z crece estrictamente en cada nuevo punto extremo generado y, puesto que hay sólo un número finito de puntos extremos, el método terminará en un número limitado de pasos (generalmente la cantidad de iteraciones oscila entre una y dos veces el número de restricciones). Concretamente, el supuesto de no degeneración garantiza la convergencia de las soluciones hacia un óptimo o una solución no acotada.

Como se discutiera en párrafos previos, cuando la degeneración se presenta no estamos seguros de que el ingreso a la base de un nuevo vector A_j con $(c_j - z_j) > 0$ mejore el actual valor de z , dado que puede ocurrir que la nueva solución sea también degenerada, en cuyo caso el valor de la función objetivo permanecerá inalterado, o bien, la nueva solución puede resultar no degenerada con la consiguiente mejora de z .

Si la nueva solución es degenerada, al no modificarse el valor de la función objetivo una de las bases puede repetirse lo cual significa que no tendremos la certeza de que la condición de optimización se alcance en un número finito de pasos. Es más, podemos entrar en un *loop* infinito, repitiéndose la misma sucesión de bases, sin cambiar el valor de z , por lo cual el programa se denomina *cíclico*.

Existen procedimientos específicos para evitar la degeneración.¹¹ Sin embargo es de destacar, que la mayoría de las aplicaciones reales que presentan soluciones degeneradas convergen al óptimo. En general el fenómeno cíclico no se observa en la práctica, los programas cíclicos se construyen intencionalmente a los efectos de evidenciar la posibilidad algebraica de su existencia.

3.2 ALGORITMO DEL SIMPLEX

Para resolver un programa lineal mediante el método Simplex los pasos a seguir son:

1. Se expresa el problema en su forma estándar, se busca una solución básica factible inicial y se obtiene $z = cx$.
2. Se calculan los coeficientes y_{ij} que permiten expresar a los vectores no básicos como combinación lineal de los básicos.

Designando con I_N al conjunto de subíndices de los vectores de N y con Y a la matriz compuesta por los vectores Y_j con $j \in I_N$, resulta $Y = B^{-1}N$.

3. Se determinan los $z_j = \sum_{i \in I_B} c_i y_{ij} \forall j \in I_N$.

4. Se calculan las diferencias $c_j - z_j \forall j \in I_N$.

Si $c_j - z_j \leq 0 \forall j \in I_N$ (caso de maximización), **la solución actual es la óptima**.

Notemos que los $c_j - z_j$ correspondientes a los vectores básicos serán siempre nulos, por lo tanto $c_j - z_j \leq 0 \forall j \in I_N \Rightarrow c_j - z_j \leq 0 \forall j$.

Si $c_j - z_j > 0$ para algún A_j con $j \in I_N$ y el vector Y_j no contiene ninguna componente positiva, concluimos que **la solución no está acotada**.

¹¹ Tales procedimientos no serán objeto de nuestro estudio. Puede obtenerse información detallada de los mismos en Bazaraa, M. S., J. J. Jarvis y H. D. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, 2ª ed., New York: John Wiley & Sons, Inc., 1990.

Si $c_j - z_j > 0$ para algún A_j con $j \in I_N$ y el vector Y_j contiene al menos alguna componente positiva, A_j debe ingresar a la base. Si $c_j - z_j > 0$ para más de un A_j , entra a la base el que haga máxima la diferencia $c_j - z_j$; en caso de empate convendremos en escoger el A_j de menor subíndice.

5. Se determina el vector que sale de la base.

Si ingresa A_j , saldrá el vector A_r para el cual resulte

$$\theta_j = \min \left\{ \frac{x_i}{y_{ij}}, \text{ con } y_{ij} > 0, i \in I_B \right\} = \frac{x_r}{y_{rj}}$$

Si el mínimo se da para más de un A_i convendremos en hacer salir al de mayor subíndice.

6. Se obtiene la nueva solución,

$$x'_i = x_i - \theta_j y_{ij} = x_i - x_r \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \text{ para todo } i \neq r, \text{ con } i \in I_B$$

$$x'_r = x_i - \theta_j y_{rj} = x_r - x_r \frac{y_{rj}}{y_{rj}} = 0; \quad x'_j = \theta_j = \frac{x_r}{y_{rj}}; \quad 0 \text{ para las restantes } n - m \text{ variables}$$

Se calcula el z asociado y se vuelve al punto 2.

Ejemplo 3-1 Algoritmo del Simplex

Resolveremos el Ejemplo 3-1 mediante el algoritmo.

1. Se busca una solución básica inicial.

$$\text{Max } z = 20x_1 + 45x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

s. a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 40 \\ 3x_1 + 1.5x_2 + x_4 &= 75 \\ x_2 + x_5 &= 15 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1; 2; \dots; 5 \end{aligned}$$

$$B = (A_3, A_4, A_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad N = (A_1, A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B = (x_3, x_4, x_5)^T = (40; 75; 15)^T; \quad x_N = (x_1, x_2)^T = (0; 0)^T$$

$$z = c_B x_B = (0; 0; 0)(40; 75; 15)^T = 0$$

2. Se calculan los y_{ij} .

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{31} & y_{32} \\ y_{41} & y_{42} \\ y_{51} & y_{52} \end{pmatrix}$$

Capítulo 3

3. Se determinan los z_j .

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum_{i \in I_B} c_i y_{i1} = c_3 y_{31} + c_4 y_{41} + c_5 y_{51} = 0 \\ z_2 &= \sum_{i \in I_B} c_i y_{i2} = c_3 y_{32} + c_4 y_{42} + c_5 y_{52} = 0 \end{aligned} \quad \text{o bien, } (z_1, z_2) = c_B Y = (0; 0; 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0; 0)$$

4. Se calculan las diferencias $c_j - z_j$.

$$c_1 - z_1 = 20 - 0 = 20$$

$$c_2 - z_2 = 45 - 0 = 45 \Rightarrow \text{entra } A_2$$

5. Se determina el vector que sale.

$$\theta_2 = \min_i \left\{ \frac{x_i}{y_{i2}}, \text{ con } y_{i2} > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{x_3}{y_{32}}, \frac{x_4}{y_{42}}, \frac{x_5}{y_{52}} \right\} = \min \left\{ \frac{40}{2}, \frac{75}{3/2}, \frac{15}{1} \right\} = 15 \Rightarrow \text{sale } A_5$$

6. Se calcula la nueva solución, el z asociado y se vuelve al punto 2.

$$x'_2 = \theta_2 = 15; x'_3 = x_3 - \theta_2 y_{32} = 40 - 15 \cdot 2 = 10; x'_4 = x_4 - \theta_2 y_{42} = 75 - 15 \cdot \frac{3}{2} = 105/2$$

$$x'_1 = x_1 = 0; x'_5 = x_5 - \theta_2 y_{52} = 15 - 15 \cdot 1 = 0$$

$$x_B = (x_2, x_3, x_4)^T = (15; 10; 105/2)^T; x_N = (x_1, x_5)^T = (0; 0)^T$$

$$z = c_B x_B = (45; 0; 0)(15; 10; 105/2)^T = 675$$

$$B = (A_2, A_3, A_4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; N = (A_1, A_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Primera iteración

2. Se calculan los y_{ij} .

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$$

$$Y = B^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & -3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{21} & y_{25} \\ y_{31} & y_{35} \\ y_{41} & y_{45} \end{pmatrix}$$

3. Se determinan los z_j .

$$(z_1, z_5) = c_B Y = (45; 0; 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & -3/2 \end{pmatrix} = (0; 45)$$

4. Se calculan las diferencias $c_j - z_j$.

$$c_1 - z_1 = 20 - 0 = 20 \Rightarrow \text{entra } A_1$$

$$c_5 - z_5 = 0 - 45 = -45$$

5. Se determina el vector que sale.

$$\theta_1 = \min \left\{ \frac{x_3}{y_{31}}, \frac{x_4}{y_{41}} \right\} = \min \left\{ \frac{10}{1}, \frac{105/2}{3} \right\} = 10 \Rightarrow \text{sale } A_3 \text{ (observemos que } y_{21} = 0)$$

6. Se calcula la nueva solución, el z asociado y se vuelve al punto 2.

$$x'_1 = \theta_1 = 10; x'_2 = x_2 - \theta_1 y_{21} = 15 - 10 \cdot 0 = 15; x'_4 = x_4 - \theta_1 y_{41} = 105/2 - 10 \cdot 3 = 45/2$$

$$x'_3 = x_3 - \theta_1 y_{31} = 10 - 10 \cdot 1 = 0; x'_5 = 0$$

$$x_B = (x_1, x_2, x_4)^T = (10; 15; 45/2)^T; x_N = (x_3, x_5)^T = (0; 0)^T$$

$$z = c_B x_B = (20; 45; 0)(10; 15; 45/2)^T = 875$$

$$B = (A_1, A_2, A_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; N = (A_3, A_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Segunda iteración

2. Se calculan los y_{ij} .

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 9/2 \end{pmatrix}$$

$$Y = B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 9/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 9/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{13} & y_{15} \\ y_{23} & y_{25} \\ y_{43} & y_{45} \end{pmatrix}$$

3. Se determinan los z_j .

$$(z_3, z_5) = c_B Y = (20; 45; 0) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 9/2 \end{pmatrix} = (20; 5)$$

4. Se calculan las diferencias $c_j - z_j$.

$$c_3 - z_3 = 0 - 20 = -20$$

$$c_5 - z_5 = 0 - 5 = -5$$

Puesto que se verifica la condición de optimización, resulta

$$x_1^* = 10; x_2^* = 15; x_3^* = 0; x_4^* = 22,5; x_5^* = 0; z^* = 875$$

3.3 EL MÉTODO SIMPLEX EN FORMATO TABLA

La tabla Simplex es una representación compacta y ordenada de la información disponible, que facilita la sistematización de los cálculos correspondientes a cada iteración.

Existen distintos formatos de tablas siendo todos ellos variantes muy similares, aceptados y utilizados en la práctica. Adoptaremos el que se describe a continuación y explicaremos su funcionamiento basándonos en el Ejemplo 3-1.

$$\text{Max } z = 20x_1 + 45x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

s. a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 40 \\ 3x_1 + 1,5x_2 + x_4 &= 75 \\ x_2 + x_5 &= 15 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1; 2; \dots; 5 \end{aligned}$$

Tabla 3-1

c_i	A_i	20	45	0	0	0		x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
0	A_3	1	2	1	0	0	40	20
0	A_4	3	3/2	0	1	0	75	50
0	A_5	0	1	0	0	1	15	15
z_j		0	0	0	0	0	$z = 0$	
$c_j - z_j$		20	45	0	0	0		

Inicialmente la tabla presenta, en su cuerpo central, los coeficientes del sistema $Ax = b$ para la solución básica factible original. En correspondencia con dicho sistema, se adicionan:

- En fila 1, los coeficientes de la función objetivo.
- En fila 2, los rótulos de los vectores que integran la matriz A .
- En columna 1, los coeficientes económicos de las variables básicas.
- En columna 2, los rótulos de los vectores básicos.

Observemos que comenzando con una base igual a la matriz identidad, x_B es coincidente con b (penúltima columna de la tabla).

Los restantes valores se calculan a partir de los existentes:

- En la celda inferior derecha se coloca el valor actual de la función objetivo.
 $z = \sum_{i \in I_B} c_i x_i$ se obtiene sumando los productos de los coeficientes de la columna 1 por los respectivos valores de las variables básicas en la penúltima columna. En este primer paso, $z = 0$.
- Las últimas dos filas contendrán los coeficientes z_j y $c_j - z_j$ que nos permitirán la verificación de la condición de optimización.

Los $z_j = \sum_{i \in I_B} c_i y_{ij}$ resultan de efectuar la suma de los productos de los coeficientes de la columna 1 por las respectivas componentes de cada columna A_j (notemos que al ser $B = I$ es $Y = N$). Luego, restando cada z_j al correspondiente c_j ubicado en fila 1 tendremos los valores $c_j - z_j$.

La Tabla 3-1 nos indica que debe ingresar a la base el vector A_2 .

- La última columna está destinada a la obtención de los cocientes x_i/y_{ij} que posibilitarán la determinación del vector que sale de la base (condición de factibilidad).
Dividimos cada x_i de la penúltima columna por el correspondiente $y_{ij} > 0$ en la columna del vector que entra a la base (en este caso A_2). Seleccionando el mínimo de tales cocientes, en la última columna, sabremos cuál es el vector saliente.
En Tabla 3-1 vemos que sale A_5 .

Primera iteración

La sencillez de los cálculos precedentes reside en la base inicial igual a la matriz identidad. Como expresáramos anteriormente, al ser $B = I$ resulta $Y = N$.

La nueva base estará ahora constituida por los vectores A_2 , A_3 y A_4 . Si lográramos convertir esta base en una matriz identidad, el proceso de cálculo sería idéntico al descrito. Para ello bastará con transformar el sistema de ecuaciones de Tabla 3-1 en un sistema equivalente que

contenga $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en A_2 . Utilizaremos el método de eliminación de *Gauss–Jordan*.¹²

En la intersección de la columna del vector que entra a la base con la fila del vector que sale, se encuentra el elemento pivote (el que queremos que asuma el valor 1). Si entra A_k y sale A_r , el pivote será y_{rk} . Luego:

Dividimos la ecuación “ r ” por y_{rk} .

Para $i = 1, 2, \dots, m$, con $i \neq r$, actualizamos la i -ésima ecuación sumándole $-y_{ik}$ veces la nueva r -ésima ecuación.

En nuestro ejemplo el pivote es $y_{52} = 1$, por tanto la tercera ecuación de la Tabla 3-2 será idéntica a la tercera ecuación de la Tabla 3-1. Luego,

A la primera ecuación de Tabla 3-1 le restamos la tercera ecuación de Tabla 3-2 multiplicada por 2.

A la segunda ecuación de Tabla 3-1 le restamos la tercera ecuación de Tabla 3-2 multiplicada por 1,5.

Actualizamos la Tabla 3-2 con los rótulos correspondientes a los vectores básicos (A_2 sustituye a A_5) y los respectivos coeficientes económicos de las variables básicas (c_2 sustituye a c_5), y efectuamos los restantes cálculos.

Tabla 3-2

c_i	A_i	20	45	0	0	0	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5		
0	A_3	1	0	1	0	-2	10	10
0	A_4	3	0	0	1	-3/2	105/2	35/2
45	A_2	0	1	0	0	1	15	
z_i		0	45	0	0	45	$z = 675$	
$c_i - z_i$		20	0	0	0	-45		

En la Tabla 3-2 vemos que entra A_1 y sale A_3 . Los cálculos necesarios para la transformación del sistema de ecuaciones de la Tabla 3-1 al equivalente de la Tabla 3-2 pueden simplificarse aún más procediendo como se indica a continuación.

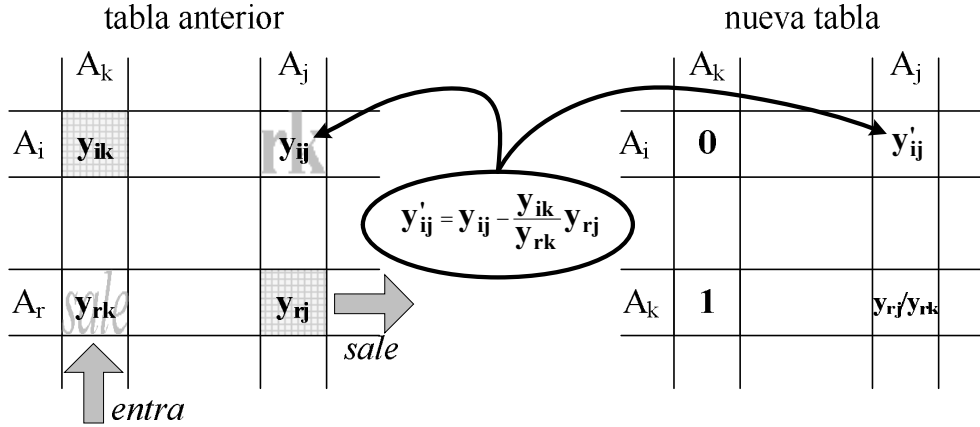
En una tabla cualquiera identificamos el elemento pivote. Si entra A_k y sale A_r , el pivote será y_{rk} . Dividimos la fila (ecuación) asociada a A_r por y_{rk} y completamos los restantes ceros correspondientes al vector A_k . Los demás valores de la nueva tabla se obtienen operando directamente sobre la tabla anterior, aplicando la siguiente regla práctica.

Para obtener el valor de un y_{ij} de la nueva tabla trazamos, en la tabla anterior, un rectángulo que tenga por vértices los coeficientes y_{ij} , y_{rk} (elemento pivote, en el vértice opuesto por la diagonal), y_{ik} y y_{rj} (Figura 3-1).

¹² Véase Ejemplo 2-1 en Capítulo 2.

El valor buscado será entonces igual al valor anterior menos el producto de los vértices en la diagonal opuesta al pivote dividido el pivote. Es decir, $y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj}$.

Figura 3-1



Así por ejemplo, el valor del coeficiente y_{31} en la Tabla 3-2 será igual a $y'_{31} = y_{31} - \frac{y_{32}}{y_{52}} y_{51} = 1 - \frac{2}{1} 0 = 1$. En forma similar, $y'_{45} = y_{45} - \frac{y_{42}}{y_{52}} y_{55} = 0 - \frac{1,5}{1} 1 = -1,5$.

El procedimiento precedente se basa en las denominadas **fórmulas de cambio de base** que se desarrollan a continuación.

En una iteración dada cualquier vector no básico puede escribirse como $A_j = \sum_{i \in I_B} y_{ij} A_i$. Si en dicha iteración hemos determinado que entra A_k y sale A_r , A_k verificará la relación $A_k = \sum_{\substack{i \in I_B \\ i \neq r}} y_{ik} A_i + y_{rk} A_r$. Luego, dado que $y_{rk} > 0$, resulta

$$A_r = \frac{1}{y_{rk}} A_k - \sum_{\substack{i \in I_B \\ i \neq r}} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} A_i \quad (3-8)$$

con lo cual se tienen los y_{ir} que permiten expresar al vector A_r en función de la nueva base. Ahora, si queremos representar A_j en términos de la nueva base, bastará con reemplazar el vector A_r por su equivalente expresión. En efecto,

$$\begin{aligned} A_j &= \sum_{i \in I_B} y_{ij} A_i = \sum_{\substack{i \in I_B \\ i \neq r}} y_{ij} A_i + y_{rj} A_r = \sum_{\substack{i \in I_B \\ i \neq r}} y_{ij} A_i + y_{rj} \left(\frac{1}{y_{rk}} A_k - \sum_{\substack{i \in I_B \\ i \neq r}} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} A_i \right) \\ A_j &= \sum_{\substack{i \in I_B \\ i \neq r}} \left(y_{ij} - y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right) A_i + \frac{y_{rj}}{y_{rk}} A_k \end{aligned} \quad (3-9)$$

Las fórmulas 3-8 y 3-9 demuestran la validez del procedimiento aplicado.

Observemos que la regla práctica se utiliza también para calcular los nuevos valores de las variables básicas puesto que,

$$x'_i = x_i - x_r \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \text{ para todo } i \in I_B \text{ con } i \neq k; \quad x'_k = \frac{x_r}{y_{rk}}$$

Análogamente, dicha regla puede emplearse para valuar los nuevos $c_j - z_j$. En efecto, en la próxima tabla, para todo A_j no básico resultará

$$\begin{aligned}(c_j - z_j)' &= c_j - \left(\sum_{\substack{i \in IB \\ i \neq k}} c_i y'_{ij} + c_k y'_{kj} \right) = c_j - \left(\sum_{\substack{i \in IB \\ i \neq k}} c_i \left(y_{ij} - y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right) + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \right) \\ &= c_j - \left(\sum_{\substack{i \in IB \\ i \neq k}} c_i y_{ij} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \sum_{\substack{i \in IB \\ i \neq k}} c_i y_{ik} + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \right) = c_j - \left(z_j + \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (c_k - z_k) \right)\end{aligned}$$

por lo cual se verifica

$$(c_j - z_j)' = (c_j - z_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (c_k - z_k) \text{ para todo } j \in I_N$$

Segunda iteración

A partir de la Tabla 3-2, repitiendo los pasos descritos, obtenemos la Tabla 3-3. La misma corresponde a la solución óptima ya que $c_j - z_j \leq 0 \forall A_j$.

Tabla 3-3

c_i	A_i	20	45	0	0	0	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5		
20	A_1	1	0	1	0	-2	10	
0	A_4	0	0	-3	1	9/2	45/2	
45	A_2	0	1	0	0	1	15	
z_j		20	45	20	0	5	$z = 875$	
$c_j - z_j$		0	0	-20	0	-5		

¿CÓMO IDENTIFICAR B^{-1} EN UNA TABLA SIMPLEX?

Teniendo en cuenta el método para obtener la inversa de una matriz descrito en el Ejemplo 2-2 del Capítulo 2 y observando que el proceso de transformar la base de las sucesivas tablas en una matriz identidad es equivalente a premultiplicar dicha base por B^{-1} en la tabla inicial, resulta evidente que: *la inversa de la base aparecerá siempre en todas las tablas debajo de las variables que se toman como base inicial.*

Así por ejemplo, de Tabla 3-2 $(A_3, A_4, A_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y, de Tabla 3-3

$$(A_1, A_4, A_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.4 COEFICIENTES DE SUSTITUCIÓN Y COSTOS REDUCIDOS

Para cualquier solución básica factible las variables básicas pueden representarse en términos de las no básicas como se indica a continuación.

$$Bx_B + Nx_N = b$$

$$\begin{aligned}x_B &= B^{-1}b - B^{-1}N x_N \\&= B^{-1}b - Y x_N \\&= B^{-1}b - \sum_{j \in I_N} Y_j x_j\end{aligned}$$

De esta forma, la variación que sufrirán las variables básicas frente al ingreso de una variable no básica cualquiera x_j estará dada por $\frac{\partial x_B}{\partial x_j} = -Y_j$. Concretamente, si las m variables

básicas de x_B son x_1, x_2, \dots, x_m , el ratio esperado de cambio de cada una de ellas cuando la variable no básica x_j se incrementa en una unidad será $\frac{\partial x_1}{\partial x_j} = -y_{1j}, \frac{\partial x_2}{\partial x_j} = -y_{2j}, \dots, \frac{\partial x_m}{\partial x_j} = -y_{mj}$.

Los y_{ij} que componen el cuerpo de la tabla se denominan **tasas marginales** (o **coeficientes**) **de sustitución**.¹³

Si x_j ingresa a la base el nuevo valor de la función objetivo estará dado por

$$z = z_0 + x_j(c_j - z_j)$$

luego, la variación en z frente a incrementos unitarios en la variable x_j será

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = c_j - z_j$$

Los valores $c_j - z_j$ correspondiente a las variables no básicas reciben el nombre de **costos reducidos**.

Para ejemplificar los conceptos precedentes volvamos a la Tabla 3-2. La columna A_1 nos dice que por cada vasija que se fabrique x_3 y x_4 disminuirán en 1 y 3 unidades respectivamente, en tanto que x_2 no experimentará variación alguna (una unidad de x_1 sustituye a 1 unidad de x_3 , 3 de x_4 y 0 de x_2). A su vez,

si x_1 se incrementa en 1 unidad, z se incrementa en \$20 pero:

x_3 disminuye en 1 unidad $\Rightarrow z$ disminuye en $\$0 \cdot 1 = \0

x_4 disminuye en 3 unidades $\Rightarrow z$ disminuye en $\$0 \cdot 3 = \0

x_2 disminuye en 0 unidades $\Rightarrow z$ disminuye en $\$45 \cdot 0 = \0

en consecuencia, por cada vasija que se fabrique el incremento efectivo en z será

$$\Delta z = c_1 - \sum_{i \in I_B} c_i y_{i1} = 20 - 0 = \$20$$

Un razonamiento similar sobre la columna A_5 de la Tabla 3-3 nos permitiría concluir que por cada unidad de x_5 que ingrese a la base z^* disminuirá en \$5.

3.5 LAS VARIABLES FICTICIAS

Hemos visto que el punto de partida para la aplicación del Simplex es una solución básica factible. Sin duda, la mejor base inicial es la matriz identidad.

¹³ Si la tabla corresponde a una solución básica factible degenerada, cuando alguna de las variables no básicas se incrementa (manteniendo las restantes variables no básicas a nivel cero), al menos una de las variables básicas puede asumir valores negativos destruyéndose la factibilidad de la solución. En tal caso los respectivos coeficientes de sustitución no son practicable puesto que conducirían a soluciones inadmisibles.

En el ejemplo anterior, dado que el problema original estaba en forma canónica con todos sus términos independientes no negativos, la conversión a formato estándar (mediante el agregado de las variables de holgura) nos proporcionó una solución de arranque inmediata con $B = I$. No obstante, tal situación no siempre ocurre.

Cuando las restricciones del modelo son ecuaciones o desigualdades de \geq con términos independientes no negativos, la determinación de una solución básica inicial deja de ser inmediata. En estos casos, para obtener una solución básica de arranque con base igual a la matriz identidad se introducen en el programa lineal las denominadas **variables ficticias** o **artificiales**.

Veamos, en su forma estándar, el programa planteado en el Ejemplo 1-13.

$$\text{Max } z = 30x_1 + 40x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

s. a

$$x_1 + x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 7$$

$$x_1 - 2x_2 + 0x_3 - 1x_4 = 4$$

$$x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 5$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 4$$

Como puede apreciarse, no disponemos de una solución básica factible que resulte inmediata. Agregamos entonces al sistema de restricciones anterior las variables ficticias x_5 y x_6 de modo que A_5 y A_6 junto con A_3 , completen la matriz identidad.

$$x_1 + x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 7$$

$$x_1 - 2x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 4$$

$$x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 5$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6$$

Así, tenemos un **modelo aumentado** que difiere del original en las variables artificiales. Para el nuevo modelo el punto $x = (0; 0; 7; 0; 4; 5)^T$ es una solución básica factible. El “artificio” de introducir las variables ficticias para generar la solución inicial recibe el nombre de **técnica de la base artificial**.

Las variables ficticias carecen de significado físico o real y, lógicamente, si el problema original tiene solución, en la misma deberán ser nulas.

Para resolver modelos lineales a los cuales se les han adicionado variables ficticias pueden emplearse dos métodos: el de **penalización** o el de **las dos fases**. Ambos utilizan el método Simplex con algunas variantes en el inicio.

Observación. Es evidente que la base inicial igual a la matriz identidad provista por las variables de holgura y/o ficticias proporciona una solución muy alejada de la que nos dará el z óptimo, sin embargo dicha solución tiene la ventaja de permitir sistematizar los cálculos.

EL MÉTODO DE PENALIZACIÓN

Consiste sencillamente en resolver mediante el método Simplex el modelo aumentado, penalizando en la función objetivo a cada variable ficticia con un coeficiente económico, generalmente denotado por M , que garantice su nulidad en la solución final.

Si el objetivo es maximizar, dicho coeficiente será igual a $-M$, en tanto que para minimización será igual a M . En ambos casos M es positivo y, en concepto, mucho más grande que el mayor valor absoluto de los coeficientes económicos de las variables reales del modelo.

De esta forma el Simplex, en la búsqueda de mejores soluciones, hará que las variables ficticias abandonen la base en las sucesivas iteraciones.

Durante la resolución puede ocurrir que:

- Se verifique la condición de optimización y la base final no esté integrada por ninguna variable ficticia, en cuyo caso habremos encontrado la solución óptima del problema original.
- Se verifique la condición de optimización y la base final esté integrada por alguna o algunas variables ficticias con valor nulo, en cuyo caso habremos encontrado la solución óptima del problema original y la misma es una solución degenerada.
- Se verifique la condición de optimización y la base final esté integrada por al menos una variable ficticia con valor estrictamente positivo, en cuyo caso el problema original es no factible.
- Se concluye que la solución no está acotada en cuyo caso:
Si todas las variables ficticias son nulas, la solución del problema original no está acotada.
Si al menos una variable ficticia es distinta de cero, el problema original es no factible.

Ejemplo 3-2 Método de penalización

Un criadero de pollos sabe que la ración diaria a suministrar al comedero debe contener, al menos, 0,8kg de calcio y 22kg de proteínas como mínimo.

Los ingredientes disponibles para preparar dicha ración son: carbonato de calcio (CO_3Ca), maíz y harina de soja; cuyos costos y contenidos por kilogramo se dan en la siguiente tabla.

	Calcio	Proteínas	Costo
CO_3Ca	0,380		0,32
Maíz	0,001	0,09	0,70
Soja	0,002	0,50	1,20

Se desea determinar la ración de costo mínimo.

Formulación del modelo y resolución aplicando el método de penalización.

x_j : kg del ingrediente j que componen la ración diaria; $j = 1$ (CO_3Ca), 2 (maíz), 3 (harina de soja)

$$\text{Min } w = 0,32x_1 + 0,7x_2 + 1,2x_3$$

s. a

$$0,38x_1 + 0,001x_2 + 0,002x_3 \geq 0,8$$

$$0,09x_2 + 0,5x_3 \geq 22$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Min } w = 0,32x_1 + 0,7x_2 + 1,2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

s. a

$$0,38x_1 + 0,001x_2 + 0,002x_3 - 1x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 = 0,8$$

$$0,09x_2 + 0,5x_3 + 0x_4 - 1x_5 + 0x_6 + 1x_7 = 22$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 7$$

c_i	A_i	0,32	0,7	1,2	0	0	M	M	x_i	x_i/y_{ij}
M	A_6	0,38	0,001	0,002	-1	0	1	0	0,8	400
M	A_7	0	0,09	0,5	0	-1	0	1	22	44
z_i		0,38M	0,091M	0,502M	-M	-M	M	M	$w = 22,8M$	
$c_j - z_j$		0,32-0,38M	0,7-0,091M	1,2-0,502M	M	M	0	0		

c_i	A_i	0,32	0,7	1,2	0	0	M	M	x_i	x_i/y_{ij}
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7		
M	A_6	0,38	0,0006	0	-1	0,004	1	-0,004	0,712	1,874
1,2	A_3	0	0,18	1	0	-2	0	2	44	
z_j		0,38M	$0,216 + 0,0006M$	1,2	-M	$-2,4 + 0,004M$	M	$2,4 - 0,004M$	$w = 52,8 + 0,712M$	
$c_j - z_j$		$0,32 - 0,38M$	$0,484 - 0,0006M$	0	M	$2,4 - 0,004M$	0	$-2,4 + 1,004M$		

c_i	A_i	0,32	0,7	1,2	0	0	M	M	x_i	x_i/y_{ij}
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7		
0,32	A_1	1	0,0015	0	-2,63	0,011	2,63	-0,011	1,874	
1,2	A_3	0	0,18	1	0	-2	0	2	44	
z_j		0,32	0,216	1,2	-0,84	-2,4	0,84	2,4	$w = 53,4$	
$c_j - z_j$		0	0,484	0	0,84	2,4	$-0,84 + M$	$-2,4 + M$		

Al ser $c_j - z_j > 0$ para cada variable no básica, esta última tabla nos da la solución óptima.

Notemos que al ser M positivo y muy grande, toda variable ficticia que en una iteración cualquiera salga de la base no volverá a ingresar nunca más (para dicha variable $c_j - z_j = M - z_j > 0$). Por tal motivo las variables artificiales pueden eliminarse a medida que abandonan la base, es decir, no resulta necesaria su inclusión en las subsiguientes iteraciones.

EFEECTO ESPEJO

Un detalle importante que se observa en las tres tablas anteriores es que los vectores A_4 y A_5 correspondientes a las variables de exceso son iguales a los vectores A_6 y A_7 , correspondientes a las variables artificiales, multiplicados por -1 , ocurriendo lo mismo con sus respectivos z_j . Esta característica se denomina *efecto espejo* y se presenta en los modelos siempre que se adicionan variables artificiales en las restricciones de tipo \geq con términos independientes no negativos.

En base a lo anterior, si así lo dispusiésemos, podríamos eliminar de la tabla las columnas de las variables artificiales dado que la información en ellas contenida aparece en las columnas de las variables de exceso a las cuales sustituyeron en la base inicial, multiplicada por -1 .

Ejemplo 3-3 Método de penalización

Considerando el Ejemplo 1-13 tendremos

$$\text{Max } z = 30x_1 + 40x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 - Mx_6$$

s. a

$$x_1 + x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 7$$

$$x_1 - 2x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 4$$

$$x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 5$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6$$

c_i	A_i	30	40	0	0	-M	-M	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6		
0	A_3	1	1	1	0	0	0	7	7
-M	A_5	1	-2	0	-1	1	0	4	4
-M	A_6	1	0	0	0	0	1	5	5
z_j		-2M	2M	0	M	-M	-M	$z = -9M$	
$c_j - z_j$		30+2M	40-2M	0	-M	0	0		

c_i	A_i	30	40	0	0	$-M$	$-M$	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
0	A_3	0	3	1	1	-1	0	3	1
30	A_1	1	-2	0	-1	1	0	4	
$-M$	A_6	0	2	0	1	-1	1	1	1/2
z_j		30	$-60-2M$	0	$-30-M$	$30+M$	$-M$	$z = 120-M$	
$c_j - z_j$		0	$100+2M$	0	$30+M$	$-30-2M$	0		

c_i	A_i	30	40	0	0	$-M$	$-M$	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
0	A_3	0	0	1	$-1/2$	$1/2$	$-3/2$	$3/2$	
30	A_1	1	0	0	0	0	1	5	
40	A_2	0	1	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	
z_j		30	40	0	20	-20	50	$z = 170$	
$c_j - z_j$		0	0	0	-20	$20-M$	$-50-M$		

Puesto que $c_j - z_j < 0$ para cada variable no básica, la última tabla nos da la solución óptima.

EL MÉTODO DE LAS DOS FASES

En su desarrollo original el método de penalización fue concebido como un método de aplicación manual. Su principal desventaja radica en la implementación computacional.

En efecto, al asignar un valor grande a M los c_j de las variables de decisión resultan insignificantes frente a los z_j que contienen términos en M lo cual, sumado a los errores de redondeo inherentes a cualquier computador, puede causar que la solución resulte insensible a los valores de los coeficientes económicos originales, es decir, se corre el riesgo que tales coeficientes sean tratados como si tuviesen igual valor en la función objetivo.

El método de las dos fases evita las dificultades anteriores dividiendo el problema en dos etapas:

En la **Fase I** se resuelve el modelo aumentado reemplazando la función objetivo del problema original por la suma de las variables ficticias. *La nueva función objetivo será siempre de minimización.*

Si el problema original tiene solución factible, el mínimo valor de la función objetivo del modelo ampliado será igual a cero, lo que indica que la o las variables ficticias son nulas. En caso contrario el problema original es no factible.

En la **Fase II**, se utiliza la solución óptima de la Fase I como solución de comienzo para el problema original. Para ello, a partir de la tabla de óptimo anterior construimos una nueva tabla eliminando las columnas correspondientes a las variables ficticias, reemplazando los c_j por los coeficientes económicos de la función objetivo del problema original y recalculando los valores z_j , $c_j - z_j$ y z . A partir de allí continuamos con la resolución del Simplex en la forma usual.

Durante la resolución puede ocurrir que:

- En la Fase I se verifique la condición de optimización y el valor de la función objetivo sea distinto de cero. En este caso, como ya se indicara, el problema original es no factible.
- En la Fase I se verifique la condición de optimización y la base final no esté integrada por ninguna variable ficticia, en cuyo caso se continúa con la Fase II según lo explicado previamente.

- En la Fase I se verifique la condición de optimización y la base final esté integrada por al menos una variable ficticia con valor nulo. En este caso, procedemos de la siguiente forma.

Si x_f es una variable ficticia básica y x_j una variable no básica y no ficticia del modelo con $y_{jf} \neq 0$, se utiliza y_{jf} como pivote para ingresar a la base a x_j , es decir reemplazamos x_f por x_j (notemos que aquí y_{jf} puede ser negativo ya que al ser $x_i = 0$, resulta $x_i/y_{ij} = 0$). Cuando mediante este proceso podemos intercambiar todas las variables artificiales básicas, se genera una *solución básica factible inicial degenerada* para el modelo original y se continúa con la Fase II en la manera habitual.

Si x_f es una variable ficticia básica y todos los y_{jf} correspondientes a las variables no básicas y no ficticias del modelo son nulos, x_f seguirá integrando la base con valor nulo durante la Fase II.

Para cualquier cambio de base en el que entre A_e y salga A_s , $x'_f = x_f - x_s \frac{y_{fe}}{y_{se}}$ seguirá

siendo nula puesto que $y_{fe} = 0$ y $x_f = 0$, por lo que **la restricción asociada a x_f es analíticamente redundante**.¹⁴ Se eliminan entonces de la tabla la columna y la fila correspondientes a x_f , y se continúa con la Fase II en la forma habitual.

Ejemplo 3-4 Método de las dos fases

Aplicaremos el método al Ejemplo 1-13.

$$\text{Max } z = 30x_1 + 40x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

s. a

$$x_1 + x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 7$$

$$x_1 - 2x_2 + 0x_3 - 1x_4 = 4$$

$$x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 5$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 4$$

Fase I

$$\text{Min } f = x_5 + x_6$$

s. a

$$x_1 + x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 7$$

$$x_1 - 2x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 4$$

$$x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 5$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6$$

c_i	A_i	0	0	0	0	1	1	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
0	A_3	1	1	1	0	0	0	7	7
1	A_5	1	-2	0	-1	1	0	4	4
1	A_6	1	0	0	0	0	1	5	5
z_j		2	-2	0	-1	1	1	$f = 9$	
$c_j - z_j$		-2	2	0	1	0	0		

¹⁴ Véase el apartado 1-8 en Capítulo 1.

c_i	A_i	0	0	0	0	1	1	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
0	A_3	0	3	1	1	-1	0	3	1
0	A_1	1	-2	0	-1	1	0	4	
1	A_6	0	2	0	1	-1	1	1	1/2
z_j		0	2	0	1	-1	1	$f = 1$	
$c_i - z_j$		0	-2	0	-1	2	0		

c_i	A_i	0	0	0	0	1	1	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
0	A_3	0	0	1	-1/2	1/2	-3/2	3/2	
0	A_1	1	0	0	0	0	1	5	
0	A_2	0	1	0	1/2	-1/2	1/2	1/2	
z_j		0	0	0	0	0	0	$f = 0$	
$c_i - z_j$		0	0	0	0	1	1		

Fase II

c_i	A_i	30	40	0	0	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
0	A_3	0	0	1	-1/2	3/2	
30	A_1	1	0	0	0	5	
40	A_2	0	1	0	1/2	1/2	
z_j		30	40	0	20	$z = 170$	
$c_i - z_j$		0	0	0	-20		

La solución óptima es $x^* = (5; 0,5; 1,5; 0)^T$; $z^* = 170$.

Notemos que podríamos haber prescindido de la última tabla de la Fase I. En efecto, en la segunda tabla vemos que x_6 abandona la base por lo que estamos en condiciones de asegurar que la próxima tabla será la de óptimo de la Fase I (todas las ficticias resultarán no básicas y por lo tanto f^* tendrá valor nulo).

Comenzamos entonces directamente la Fase II con el ingreso de x_2 y la salida de x_6 .

3.6 TIPOS DE SOLUCIÓN

A continuación resolveremos algunos modelos sencillos a los efectos de analizar distintas situaciones y tipos de solución que se pueden presentar durante la ejecución del método Simplex.

Ejemplo 3-5 Problema con múltiples soluciones óptimas

Veamos el Ejemplo 1-14.

$$\text{Min } w = 10x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

s. a

$$-x_1 + x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 3$$

$$x_1 + x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 + 0x_6 = 2$$

$$0,5x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 1x_6 = 0,5$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6$$

Fase I

$$\text{Min } f = x_7 + x_8$$

s. a

$$-x_1 + x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 = 3$$

$$x_1 + x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 + 0x_6 + 1x_7 + 0x_8 = 2$$

$$0,5x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 1x_6 + 0x_7 + 1x_8 = 0,5$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 8$$

c_i	A_i	0	0	0	0	0	0	1	1	x_i	x_i/y_{ij}
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8		
0	A_3	-1	1	1	0	0	0	0	0	3	
0	A_4	1	1	0	1	0	0	0	0	5	5
1	A_7	1	2	0	0	-1	0	1	0	2	2
1	A_8	1/2	-1	0	0	0	-1	0	1	1/2	1
z_j		3/2	1	0	0	-1	-1	1	1	$f = 5/2$	
$c_i - z_j$		-3/2	-1	0	0	1	1	0	0		

c_i	A_i	0	0	0	0	0	0	1	1	x_i	x_i/y_{ij}
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8		
0	A_3	0	-1	1	0	0	-2	0	2	4	
0	A_4	0	3	0	1	0	2	0	-2	4	4/3
1	A_7	0	4	0	0	-1	2	1	-2	1	1/4
0	A_1	1	-2	0	0	0	-2	0	2	1	
z_j		0	4	0	0	-1	-2	1	-2	$f = 1$	
$c_i - z_j$		0	-4	0	0	1	2	0	3		

Fase II

c_i	A_i	10	20	0	0	0	0	x_i	x_i/y_{ij}
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6		
0	A_3	0	0	1	0	-1/4	-3/2	17/4	
0	A_4	0	0	0	1	3/4	1/2	13/4	
20	A_2	0	1	0	0	-1/4	1/2	1/4	
10	A_1	1	0	0	0	-1/2	-1	3/2	
z_j		10	20	0	0	-10	0	$w = 20$	
$c_i - z_j$		0	0	0	0	10	0		

La solución óptima es $x^* = (1,5; 0,25; 4,25; 3,25; 0; 0)^T$; $w^* = 20$.

Inspeccionando la tabla de óptimo vemos que $c_6 - z_6 = 0$, por lo tanto existe una solución básica alternativa que se obtiene ingresando el vector A_6 .

c_i	A_i	10	20	0	0	0	0	x_i	x_i/y_{ij}
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6		
0	A_3	0	3	1	0	-1	0	5	
0	A_4	0	-1	0	1	1	0	3	
0	A_6	0	2	0	0	-1/2	1	1/2	
10	A_1	1	2	0	0	-1	0	2	
z_j		10	20	0	0	-10	0	$w = 20$	
$c_i - z_j$		0	0	0	0	10	0		

La nueva solución óptima es $x^* = (2; 0; 5; 3; 0; 0,5)^T$; $w^* = 20$.

Dadas dos soluciones básicas óptimas cualquier combinación convexa de ellas nos permite obtener las múltiples (infinitas) soluciones no básicas que también serán óptimas.¹⁵ Matemáticamente la familia de estas soluciones estará dada por:

$$x^* = \lambda(3/2; 1/4; 17/4; 13/4; 0; 0)^T + (1-\lambda)(2; 0; 5; 3; 0; 1/2)^T; 0 \leq \lambda \leq 1$$

Ejemplo 3-6 Problema con solución no acotada

Resolveremos el Ejemplo 1-16.

$$\text{Max } z = 40x_1 + 80x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

s. a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 15 \\ x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 &= 4 \\ -4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 12 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned}$$

Fase I

$$\text{Min } f = x_6$$

s. a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 &= 15 \\ x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 &= 4 \\ -4x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 &= 12 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6 \end{aligned}$$

c_i	A_i	0	0	0	0	0	1	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
1	A_6	3	5	-1	0	0	1	15	3
0	A_4	1	-2	0	1	0	0	4	
0	A_5	-4	3	0	0	1	0	12	4
z_i		3	5	-1	0	0	1		
$c_i - z_i$		-3	-5	1	0	0	0		$f = 15$

Fase II

c_i	A_i	40	80	0	0	0	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
80	A_2	3/5	1	-1/5	0	0	3	
0	A_4	11/5	0	-2/5	1	0	10	
0	A_5	-29/5	0	3/5	0	1	3	5
z_i		48	80	-16	0	0		
$c_i - z_i$		-8	0	16	0	0		$z = 240$

c_i	A_i	40	80	0	0	0	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
80	A_2	-4/3	1	0	0	1/3	4	
0	A_4	-5/3	0	0	1	2/3	12	
0	A_3	-29/3	0	1	0	5/3	5	
z_i		-320/3	80	0	0	80/3		
$c_i - z_i$		440/3	0	0	0	-80/3		$z = 320$

Puesto que $y_{il} < 0 \quad \forall i \in I_B$ concluimos que la solución no está acotada.¹⁶

¹⁵ Véase la solución gráfica del Ejemplo 1-14 en el Capítulo 1.

¹⁶ Véase la solución gráfica del Ejemplo 1-16 en el Capítulo 1.

Ejemplo 3-7 Problema con solución básica factible degenerada y óptimo no degenerado

Sea el siguiente programa lineal y su correspondiente solución gráfica.

$$\text{Max } z = 2x_1 + x_2$$

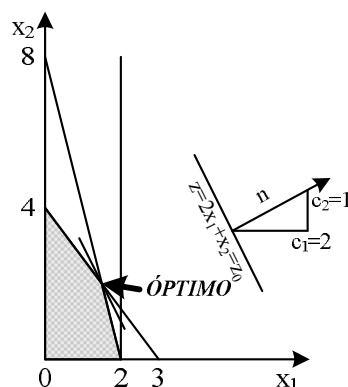
s. a

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$4x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Resolviendo por tabla tendremos.

c_i	A_i	2	1	0	0	0	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
0	A_3	4	3	1	0	0	12	3
0	A_4	4	1	0	1	0	8	2
0	A_5	1	0	0	0	1	2	2
z_j		0	0	0	0	0	$z = 0$	
$c_i - z_i$		2	1	0	0	0		

Dado que el mínimo de los x_i/y_{i1} (con $y_{i1} > 0$) se produce para $x_4/y_{41} = x_5/y_{51}$ podremos optar por remover la columna A_4 o la A_5 de la base actual. Conforme a lo convenido hacemos salir al vector de mayor subíndice, es decir A_5 . Notemos además que al ingresar x_1 con valor $\theta_1 = x_5/y_{51} = 2$ se anularán simultáneamente x_5 y x_4 por lo que tendremos una solución degenerada.

c_i	A_i	2	1	0	0	0	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
0	A_3	0	3	1	0	-4	4	4/3
0	A_4	0	1	0	1	-4	0	0
2	A_1	1	0	0	0	1	2	
z_j		2	0	0	0	2	$z = 4$	
$c_i - z_i$		0	1	0	0	-2		

Al ser $\theta_2 = x_4/y_{42} = 0$ la próxima solución seguirá siendo degenerada y z mantendrá su valor.

c_i	A_i	2	1	0	0	0	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
0	A_3	0	0	1	-3	8	4	1/2
1	A_2	0	1	0	1	-4	0	
2	A_1	1	0	0	0	1	2	2
z_j		2	1	0	1	-4	$z = 4$	
$c_i - z_i$		0	0	0	-1	4		

$\theta_5 = x_3/y_{35} = 1/2$ por lo tanto el problema sale de su estado degenerado.

c_i	A_i	2	1	0	0	0	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
0	A_5	0	0	1/8	-3/8	1	1/2	
1	A_2	0	1	1/2	-1/2	0	2	
2	A_1	1	0	-1/8	3/8	0	3/2	
z_j		2	1	1/4	1/4		$z = 5$	
$c_i - z_i$		0	0	-1/4	-1/4			

La solución óptima es $x^* = (1,5; 2; 0; 0; 0,5)^T$; $z^* = 5$. Como mencionáramos en el desarrollo teórico, en las distintas aplicaciones que se presentan puede ocurrir que al cabo de algunas iteraciones la solución degenerada resulte la óptima o bien, como acabamos de ver, se salga de la degeneración y la solución óptima sea no degenerada.

Por último cabe acotar que cuando más restricciones que las necesarias determinan un punto extremo, el mismo es degenerado. En efecto, en la solución gráfica de este ejemplo podemos observar que las restricciones $x_2 \geq 0$, $4x_1 + x_2 \leq 8$ y $x_2 \leq 2$ pasan por el punto $(2; 0)$ que queda determinado con sólo dos de ellas.

Ejemplo 3-8 Problema con redundancia analítica

Recordemos que una restricción es analíticamente redundante cuando puede expresarse como una combinación lineal de las otras restricciones del modelo. Veamos el siguiente ejemplo.

$$\text{Max } z = 3x_1 + x_2 + x_3$$

s. a

$$2x_1 + 2x_3 = 6$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_2 + 2x_3 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Fase I

$$\text{Min } f = x_4 + x_5 + x_6$$

s. a

$$2x_1 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 6$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 2$$

$$2x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 5$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6$$

c_i	A_i	0	0	0	1	1	1	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
	A_1	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6		
1	A_4	2	0	2	1	0	0	6	3
1	A_5	-1	2	1	0	1	0	2	2
1	A_6	0	2	2	0	0	1	5	5/2
z_i		1	4	5	1	1	1	$f = 13$	
$c_i - z_i$		-1	-4	-5	0	0	0		

c_i	A_i	0	0	0	1	1	1	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
	A_1	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6		
1	A_4	4	-4	0	1	-2	0	2	1/2
0	A_3	-1	2	1	0	1	0	2	
1	A_6	2	-2	0	0	-2	1	1	1/2
z_i		6	-6	0	1	-4	1	$f = 3$	
$c_i - z_i$		-6	6	0	0	5	0		

c_i	A_i	0	0	0	1	1	1	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
	A_1	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6		
1	A_4	0	0	0	1	2	-2	0	0
0	A_3	0	1	1	0	0	1/2	5/2	
0	A_1	1	-1	0	0	-1	1/2	1/2	
z_i		0	0	0	1	2	-2	$f = 0$	
$c_i - z_i$		0	0	0	0	-1	3		

Si bien f ha alcanzado su valor óptimo no se ha verificado la condición de optimización.

c_i	A_i	0	0	0	1	1	1	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
1	A_5	0	0	0	1/2	1	-1	0	
0	A_3	0	1	1	0	0	1/2	5/2	
0	A_1	1	-1	0	1/2	0	-1/2	1/2	
z_j		0	0	0	1/2	1	-1	$f = 0$	
$c_j - z_j$		0	0	0	1/2	0	2		

Hemos llegado al óptimo de la Fase I, x_5 integra la base con valor cero y el coeficiente y_{52} es nulo (x_2 es la única variable no básica y no ficticia en la tabla), por lo tanto la restricción asociada a x_5 es analíticamente redundante (en efecto, la segunda restricción del modelo es una combinación lineal de la tercer restricción menos la primera multiplicada por $1/2$).

Eliminamos la fila y la columna correspondiente a x_5 y continuamos con la Fase II en la forma habitual.

Fase II

c_i	A_i	3	1	1	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
1	A_3	0	1	1	5/2	
3	A_1	1	-1	0	1/2	
z_j		3	2	1	$z = 14$	
$c_j - z_j$		0	-1	0		

La solución óptima es $x^* = (0,5; 0; 2,5)^T$; $z^* = 14$.

Ejemplo 3-9 Problema con redundancia analítica y solución óptima degenerada

Sea el siguiente programa lineal y su correspondiente solución gráfica.

$$\text{Max } z = 2x_1 + x_2$$

s. a

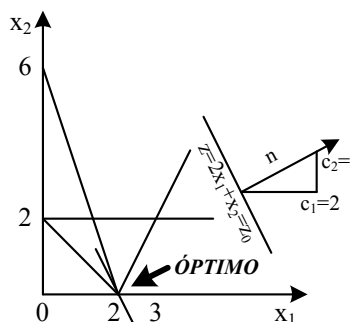
$$x_1 + x_2 = 2$$

$$2x_1 - x_2 = 4$$

$$3x_1 + x_2 = 6$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Fase I

$$\text{Min } f = x_4 + x_5 + x_6$$

s. a

$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 2$$

$$2x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 4$$

$$3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 6$$

$$x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 2$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6$$

c_i	A_i	0	0	0	1	1	1		x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	x_i	
1	A_4	1	2	0	1	0	0	2	2
1	A_5	2	-1	0	0	1	0	4	2
1	A_6	3	1	0	0	0	1	6	2
0	A_3	0	1	1	0	0	0	2	
z_i		6	2	0	1	1	1	$f = 12$	
$c_i - z_i$		-6	-2	0	0	0	0		

c_i	A_i	0	0	0	1	1	1		x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	x_i	
1	A_4	0	5/3	0	1	0	-1/3	0	
1	A_5	0	-5/3	0	0	1	-2/3	0	
0	A_1	1	1/3	0	0	0	1/3	2	
0	A_3	0	1	1	0	0	0	2	
z_i		0	0	0	1	1	-1	$f = 0$	
$c_i - z_i$		0	0	0	0	0	2		

Hemos llegado al óptimo de la Fase I y las variables ficticias x_4 y x_5 integran la base con valor nulo. Podemos reemplazar A_4 por A_2 (A_2 es no básico y no ficticio) utilizando como pivote $y_{42} = 5/3$ (también hubiésemos podido reemplazar A_5 por A_2 utilizando como pivote $y_{42} = -5/3$).

c_i	A_i	0	0	0	1	1	1		x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	x_i	
0	A_2	0	1	0	3/5	0	-1/5	0	
1	A_5	0	0	0	1	1	-1	0	
0	A_1	1	0	0	-1/5	0	3/5	2	
0	A_3	0	0	1	-3/5	0	1/5	2	
z_i		0	0	0	1	1	-1	$f = 0$	
$c_i - z_i$		0	0	0	0	0	2		

La variable ficticia x_5 es básica a nivel cero. Dado que ya no es posible efectuar un cambio de base, x_5 seguirá siendo nula por lo que su respectiva restricción asociada es analíticamente redundante (la segunda restricción del modelo se obtiene como diferencia entre las restricciones tercera y primera). Eliminamos la fila y la columna correspondiente a x_5 .

Fase II

c_i	A_i	2	1	0		x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
		A_1	A_2	A_3	x_i	
1	A_2	0	1	0	0	
2	A_1	1	0	0	2	
0	A_3	0	0	1	2	
z_i		2	1	0	$z = 4$	
$c_i - z_i$		0	0	0		

La solución óptima es $x^* = (2; 0; 2)^T$; $z^* = 4$.

Ejemplo 3-10 Problema no factible

Resolveremos el Ejemplo 1-17.

$$\text{Max } w = 105x_1 + 78x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

s. a

$$x_1 + x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 50$$

$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 40$$

$$3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 60$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 5$$

Fase I

$$\text{Min } f = x_6$$

s. a

$$x_1 + x_2 - 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 = 50$$

$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 40$$

$$3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 60$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, 6$$

c_i	A_i	0	0	0	0	0	1	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6		
1	A_6	1	1	-1	0	0	1	50	50
0	A_4	1	2	0	1	0	0	40	40
0	A_5	3	2	0	0	1	0	60	20
z_j		1	1	-1	0	0	1	$f = 50$	
$c_j - z_j$		-1	-1	1	0	0	0		

Dado que $c_1 - z_1 = c_2 - z_2 = -1$, en base a lo convenido optamos por introducir el vector A_2 .

c_i	A_i	0	0	0	0	0	1	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6		
1	A_6	0	1/3	-1	0	-1/3	1	30	90
0	A_4	0	4/3	0	1	-1/3	0	20	15
0	A_1	1	2/3	0	0	1/3	0	20	30
z_j		0	1/3	-1	0	-1/3	1	$f = 30$	
$c_j - z_j$		0	-1/3	1	0	1/3	0		

c_i	A_i	0	0	0	0	0	1	x_i	x_i/y_{ij} ($y_{ij} > 0$)
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6		
1	A_6	0	0	-1	-1/4	-1/4	1	25	
0	A_2	0	1	0	3/4	-1/4	0	15	
0	A_1	1	0	0	-1/2	1/2	0	10	
z_j		0	0	-1	-1/4	-1/4	1	$f = 25$	
$c_j - z_j$		0	0	1	1/4	1/4	0		

Se ha llegado al óptimo de la Fase I y x_6 integra la base con valor mayor que cero, en consecuencia el problema original es no factible.¹⁷

3.7 MÉTODOS DE PUNTO INTERIOR PARA PROGRAMAS LINEALES

En 1984 el matemático hindú *Narendra Karmarkar* de *AT&T Bell Laboratories*, publicó un artículo presentando esquemáticamente un algoritmo de puntos interiores para la resolución de programas lineales de gran tamaño. Cuatro años después la comunidad científica logró un conocimiento general del método, iniciándose así el área de los métodos de punto interior, y AT&T desarrolló en sus laboratorios una versión para su distribución comercial bajo el nombre *AT&T KORBX Linear Programming System*.

El Método de Karmarkar, al igual que el Simplex, es un procedimiento iterativo pero a diferencia de éste se mueve a través de los *puntos interiores* de la región factible hasta obtener la mejor solución en un punto extremo o en un punto perteneciente a una arista de dicha región, logrando para problemas de gran dimensión una significativa reducción en el tiempo de cálculo con respecto al Simplex. Sin embargo, tal ventaja no se extiende a programas lineales de menor tamaño.

¹⁷ Véase la solución gráfica del Ejemplo 1-17 en el Capítulo 1.

Capítulo 3

Para problemas que puedan resolverse en una computadora personal o un ordenador portátil mediante software de aplicación, el Simplex sigue siendo la mejor opción. A modo de ejemplo, *LINDO* (*Linear, Interactive and Discrete Optimizer*) desarrollado por *LINDO Systems, Inc.* permite manejar problemas de hasta 64.000 restricciones y 100.000 variables.