

## 7. RESOLUCIÓN DE PROGRAMAS LINEALES MEDIANTE SOLVER DE EXCEL

### 7.1 INTRODUCCIÓN

---

La herramienta *Microsoft Excel Solver* permite optimizar modelos lineales y no lineales. Para la resolución de programas lineales y enteros utiliza variantes del método Simplex, mientras que para los problemas no lineales, emplea el código de optimización *GRG2* desarrollado por la Universidad Leon Lasdon de Austin (Texas) y la Universidad Allan Waren (Cleveland).

Básicamente *Solver* opera con dos módulos. El primero, es un programa formulado en *Visual Basic* para Excel que prepara los datos de la hoja de cálculo de modo que puedan ser procesados por el segundo módulo. Este último, no perteneciente a Excel, consta de software independiente residente en la memoria. En él se realiza la optimización y se devuelve la solución al primer programa que actualizará la hoja de cálculo.

*Solver* permite resolver problemas que tengan hasta 200 variables de decisión, 100 restricciones explícitas y 400 simples (cota superior o inferior, o restricciones enteras sobre las variables de decisión).

### 7.2 INGRESO DEL MODELO

---

Trabajaremos sobre el problema planteado en el Ejemplo 1-1.

$$\text{Max } z = 20x_1 + 45x_2$$

s. a

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$3x_1 + 1,5x_2 \leq 75$$

$$x_2 \leq 15$$

$$x_1; x_2 \geq 0$$

Las maneras de presentar el modelo en la hoja de cálculo son de lo más variadas. En general se utilizan rótulos, coeficientes, variables de decisión y fórmulas. Los rótulos facilitan la lectura de otras celdas, los coeficientes son datos numéricos del problema, las variables de decisión son las celdas, inicialmente vacías, que contendrán los valores finales de dichas variables y las fórmulas son las funciones requeridas para representar el objetivo y el lado izquierdo de las restricciones.

Las Figuras 7-1 y 7-2 muestran dos versiones alternativas para el ejemplo planteado. Las fórmulas adicionales de la columna *H* en la Figura 7-2, destinadas al cálculo de holguras, se entenderán sin dificultad cuando veamos los resultados devueltos por *Solver*. Notemos, en la Alternativa 2, que la función objetivo y las restricciones pueden escribirse más fácilmente utilizando la función `=sumaproducto(matriz1;matriz2)` de Excel, es decir, `=sumaproducto(B5:C5;B4:C4)` para el funcional, `=sumaproducto(B7:C7;B4:C4)` para la primera restricción y `=sumaproducto(B8:C8;B4:C4)`, `=sumaproducto(B9:C9;B4:C4)` para las restantes restricciones respectivamente..

Figura 7-1

	A	B	C
1	ALTERNATIVA 1		
2			
3	Valor de X1		
4	Valor de X2		
5	Función Objetivo	= 20*B3+45*B4	
6	Restricción 1	=B3+2*B4	
7	Restricción 2	=3*B3+1,5*B4	
8	Restricción 3	=B4	
9			

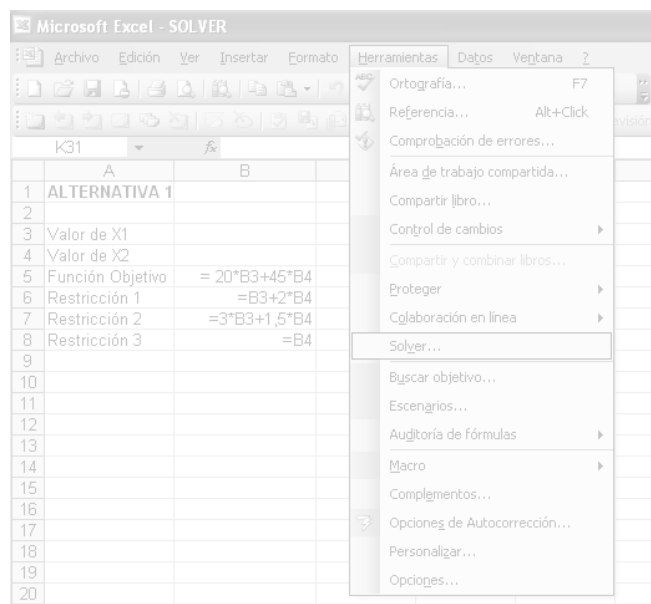
Figura 7-2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	ALTERNATIVA 2							
2								
3		X1	X2					
4								
5	MAX	20	45				=20*B4+45*C4	
6	S.A.:							HOLGURAS
7		1	2	≤	40	RESTRICCIÓN 1	=B4+2*C4	=E7-G7
8		3	1,5	≤	75	RESTRICCIÓN 2	=3*B4+1,5*C4	=E8-G8
9			1	≤	15	RESTRICCIÓN 3	=C4	=E9-G9
10								

7.3 OPTIMIZACIÓN

Desarrollado el modelo, hacemos clic en *Herramientas* y después en *Solver* (Figura 7.3). Si *Solver* no aparece como opción en el menú, hacemos clic en *Complementos* y lo seleccionamos.

Figura 7-3



Cuando *Solver* se haya cargado en memoria presentará un cuadro de diálogo de *Parámetros de Solver*, semejante al de la Figura 7-4.

Figura 7-4



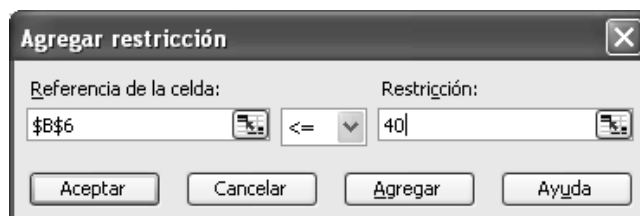
*Solver* emplea la siguiente terminología: la *celda objetivo* equivale a la función objetivo; las *celdas cambiantes*, a las variables de decisión y la *referencia de celda de restricción*, a la función correspondiente al lado izquierdo de una restricción.

En el primer campo del cuadro, denominado *Celda objetivo*, indicamos la celda que contiene la fórmula del funcional, es decir, *B5* para la Alternativa 1 (o *G5* para la Alternativa 2). Si nos posicionamos en la hoja de cálculo y hacemos clic en la celda correspondiente, la referencia se ingresará automáticamente. Luego, especificamos el tipo de optimización a realizar, para este caso, *Máximo*.

En el campo *Cambiando las celdas*, introducimos las celdas que contienen las variables de decisión: *B3:B4* en la Alternativa 1 (o *B4:C4* en la 2). Para ingresar estas celdas, podemos también hacer clic en la hoja de cálculo y arrastrar el cursor marcando *B3* y *B4* (o *B4* y *C4*, si estamos trabajando con la Alternativa 2).

A continuación, tenemos que definir las restricciones. Haciendo clic en el botón *Agregar*, ubicado a la derecha de *Sujetas a las siguientes restricciones*, se visualizará en pantalla un nuevo cuadro de diálogo, según se muestra en la Figura 7-5.

Figura 7-5



Nos posicionamos en *Referencia a celda* y hacemos clic en la celda que contiene el lado izquierdo de la primera restricción de la Alternativa 1 (*B6*), indicamos el tipo de restricción ( $\leq$ ) y completamos con el valor del término independiente. Repetimos esta operación para las dos restricciones restantes y hacemos clic en el botón *Aceptar* del cuadro *Agregar restricción*. El cuadro de *Parámetros de Solver* se verá como el de la Figura 7-6.

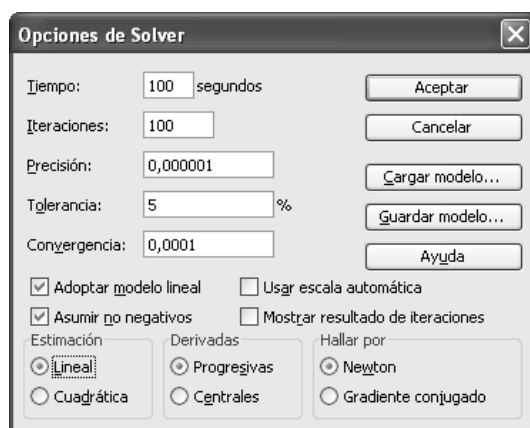
Si hubiésemos escogido la Alternativa 2, podríamos ingresar todas las restricciones en un solo paso. Hacemos clic y arrastramos el cursor sobre el intervalo de celdas que contiene la totalidad de los lados izquierdos de las restricciones (*G7:G9*), seleccionamos luego  $\leq$  e indicamos, por último, el intervalo de celdas que contiene la totalidad de los términos independientes (*E7:E9*).

Figura 7-6



Ahora, haciendo clic en el botón *Opciones* del cuadro de *Parámetros de Solver*, aparecerá en pantalla un nuevo cuadro de diálogo como el indicado en la Figura 7-7. En este cuadro debemos marcar las casillas de *Adoptar modelo lineal*, para indicarle a *Solver* que es un caso de programación lineal, y *Asumir no negativos*, para incluir la restricción de no negatividad de las variables. Si estamos interesados en ver los resultados de las sucesivas iteraciones, podemos tildar la casilla de *Mostrar resultados de iteraciones*.

Figura 7-7



El cuadro contiene además valores predefinidos que, en general, para la mayoría de los programas lineales no necesitan ser modificados, y una serie de opciones y botones que pasaremos por alto, ya que se utilizan para resolver modelos enteros y no lineales, cargar y guardar más de un modelo en cada hoja de cálculo, etc.

Si *Solver* alcanza el valor predefinido en el cuadro *Tiempo* o número de *Iteraciones* antes de encontrar una solución, se detiene y pregunta si deseamos continuar.

Debido a que la precisión aritmética de los cálculos es finita, las restricciones no siempre pueden satisfacerse con exactitud. La *Precisión* es usada para especificar lo cercano que se pretende que el valor de una celda, donde se ha definido una restricción, coincida con el límite impuesto para dicha restricción. Es un número mayor que cero 0 y menor que 1, a mayor precisión menor debe ser este parámetro, es decir, más cercano a cero.

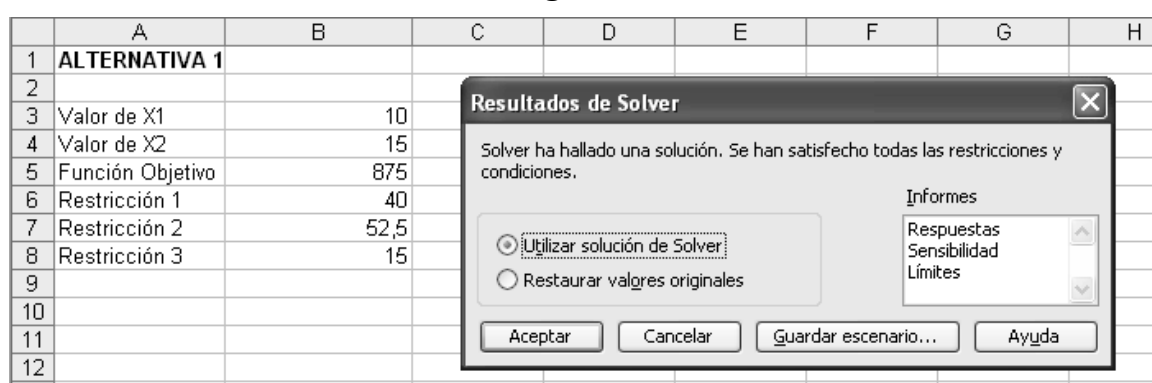
La opción *Tolerancia* sólo se aplica a problemas que usan restricción para números enteros y representa un porcentaje de error permitido en la solución.

Cada cambio que haga *Solver* en las variables de decisión se reflejará en la celda objetivo. Cuando estos cambios en las variables produzcan cambios muy pequeños en la celda objetivo se dice que se está convergiendo al óptimo. Podemos establecer que valor de cambio es el que dará la convergencia final. A mayor exactitud menor debe ser éste.

Haciendo clic en el botón *Aceptar* del cuadro de *Opciones*, volvemos al cuadro de *Parámetros de Solver*. Un nuevo clic en el botón *Resolver* le indicará a *Solver* que inicie el proceso de solución.

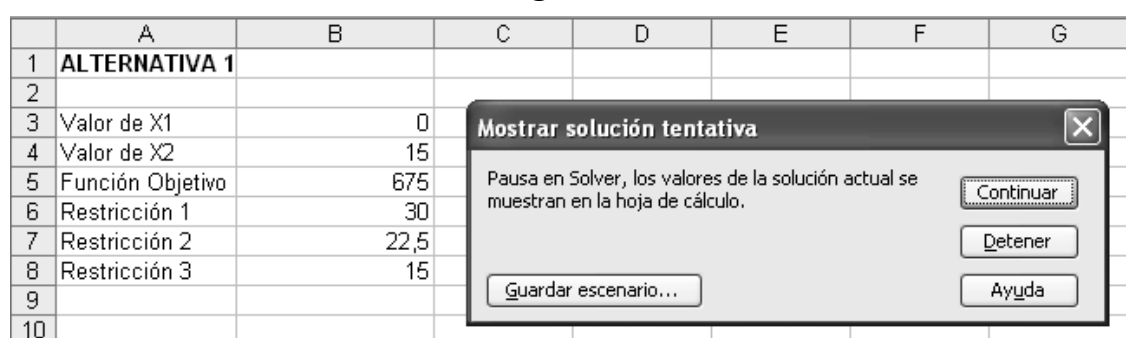
Finalizado dicho proceso se visualizará un nuevo cuadro de diálogo según se indica en la Figura 7-8. Este cuadro nos dice que, para la Alternativa 1, se ha encontrado una solución óptima y se han satisfecho todas las restricciones. En la hoja de cálculo, las celdas *B3* y *B4* contienen los valores de las respectivas variables de decisión. Estos valores aplicados a las fórmulas del funcional y a las restricciones nos devuelven: en *B5*, el valor máximo de 875; en *B7*, un valor de 52,5, el cual nos indica que la segunda restricción es inactiva o no obligatoria (la holgura correspondiente es igual a  $75 - 52,5 = 22,5$ ); y en *B6* y *B8*, los valores respectivos de 40 y 15, señalando estos últimos que ambas restricciones son activas.

Figura 7-8



Si en el cuadro de *Opciones* (Figura 7-7) hubiésemos seleccionado *Mostrar resultados de iteraciones*, por cada iteración realizada *Solver* exhibirá un cuadro similar al de la Figura 7-9, hasta llegar al óptimo.

Figura 7-9



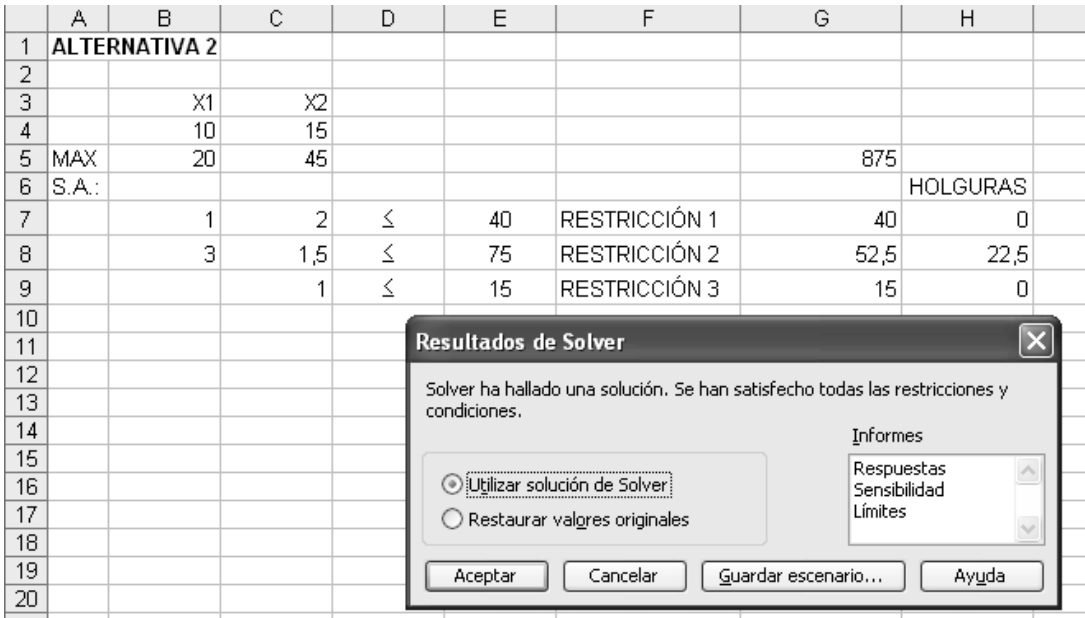
Fácilmente podemos investigar el efecto sobre la función objetivo y las restricciones si, por ejemplo, le damos a  $x_1$  y  $x_2$  nuevos valores. Bastará con posicionarnos sobre la hoja de la Alternativa 1 e introducir dichos valores en las celdas cambiantes. Si en cambio, pretendemos estudiar qué pasa si el término independiente de una o más restricciones altera su valor, tendremos que introducir tales cambios en las restricciones del cuadro de *Parámetros de Solver* y ejecutarlo nuevamente.

La Figura 7-10 exhibe la solución óptima para el modelo desarrollado en la Alternativa 2. Las fórmulas ingresadas en la columna *H* para el cálculo de holguras contienen ahora sus respectivos valores finales.

Un aspecto importante a tener en cuenta en la construcción del modelo, es la comparación de los valores que pueden llegar a asumir las diferentes celdas. Para que *Solver* funcione correctamente la diferencia entre el valor más grande de una celda y el más pequeño de otra, no debe superar 6 órdenes de magnitud.

La razón de esta comparación es que los errores de redondeo y truncamiento acumulados durante la optimización pueden ocasionar que *Solver* produzca soluciones no válidas o mensajes poco confiables. El inconveniente se resuelve cambiando en el modelo la escala de medición de los valores muy grandes o los muy pequeños.

Figura 7-10



7.4 INFORMES

Hallada la solución óptima podemos solicitar hasta tres tipos de informes que se exhibirán en hojas separadas del libro.

El informe de *Respuestas* de la Figura 7-11 contiene las diferentes celdas con sus valores finales. Se incluye además el estado de cada restricción (*Obligatorio* indica que el recurso asociado a la restricción está utilizado a pleno; *Opcional* es sinónimo de recurso ocioso) y el valor de la holgura bajo el nombre *Divergencia*.

El análisis de sensibilidad para los coeficientes de la función objetivo y los términos independientes de las restricciones se muestra en el informe de la Figura 7-12 (*Gradiente reducido* es sinónimo de costo reducido). Los valores  $1E+30$  ( $10^{30}$ ) correspondientes al incremento permisible en el coeficiente económico de  $x_2$  y al incremento permisible en el término independiente de la segunda restricción, indican que tales incrementos son infinitos.

El informe de *Límites* de la Figura 7-13 nos dice cuánto puede aumentar o disminuir el valor de cada celda cambiante sin transgredir las restricciones del problema y manteniendo el resto de las celdas cambiantes en su valor óptimo.

En las Figuras 7-14 a 7-16 se presentan los informes correspondientes a la Alternativa 2. Comparando la Figura 7-10 con la Figura 7-14 vemos que en la primera está toda la información incluida en la segunda. Es decir, cuando el modelo está un poco más desarrollado el informe de respuestas resulta innecesario.

Figura 7-11

Microsoft Excel 11.0 Informe de respuestas

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$B\$5	Función Objetivo	0	875

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$B\$3	Valor de X1	0	10
\$B\$4	Valor de X2	0	15

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
\$B\$6	Restricción 1	40	\$B\$6<=40	Obligatorio	0
\$B\$7	Restricción 2	52,5	\$B\$7<=75	Opcional	22,5
\$B\$8	Restricción 3	15	\$B\$8<=15	Obligatorio	0

Figura 7-12

Microsoft Excel 11.0 Informe de sensibilidad						
Celdas cambiantes						
Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Disminución permisible
\$B\$3	Valor de X1	10	0	20	2,5	20
\$B\$4	Valor de X2	15	0	45	1E+30	5
Restricciones						
Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Disminución permisible
\$B\$6	Restricción 1	40	20	40	7,5	10
\$B\$7	Restricción 2	52,5	0	75	1E+30	22,5
\$B\$8	Restricción 3	15	5	15	5	5

Figura 7-13

Microsoft Excel 11.0 Informe de límites					
Celda objetivo					
Celda	Nombre	Igual			
\$B\$5	Función Objetivo	875			
Celdas cambiantes			Límite inferior	Celda objetivo	Límite superior
Celda	Nombre	Igual			
\$B\$3	Valor de X1	10	0	675	10
\$B\$4	Valor de X2	15	0	200	15

Figura 7-14

Microsoft Excel 11.0 Informe de respuestas

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$G\$5	MAX	0	875

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$B\$4	X1	0	10
\$C\$4	X2	0	15

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
\$G\$7	RESTRICCIÓN 1	40	\$G\$7<=\$E\$7	Obligatorio	0
\$G\$8	RESTRICCIÓN 2	52,5	\$G\$8<=\$E\$8	Opcional	22,5
\$G\$9	RESTRICCIÓN 3	15	\$G\$9<=\$E\$9	Obligatorio	0

Figura 7-15

Microsoft Excel 11.0 Informe de sensibilidad						
Celdas cambiantes						
Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Disminución permisible
\$B\$4	X1	10	0	20	2,5	20
\$C\$4	X2	15	0	45	1E+30	5
Restricciones						
Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Disminución permisible
\$G\$7	RESTRICCIÓN 1	40	20	40	7,5	10
\$G\$8	RESTRICCIÓN 2	52,5	0	75	1E+30	22,5
\$G\$9	RESTRICCIÓN 3	15	5	15	5	5

Figura 7-16

Microsoft Excel 11.0 Informe de límites						
Celda objetivo						
Celda	Nombre	Igual				
\$G\$5	MAX	875				
Celdas cambiantes			Límite inferior	Celda objetivo	Límite superior	Celda objetivo
Celda	Nombre	Igual				
\$B\$4	X1	10	0	675	10	875
\$C\$4	X2	15	0	200	15	875



### Ejemplo 7-1 Interpretación de resultados

Dados el programa lineal correspondiente al Ejemplo 6-1 y su respectiva solución suministrada por *Solver*, interprete el resultado obtenido.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		X1	X2	X3					
2									
3	MAX.	2	1	0,5				=2*\$B\$2+\$C\$2+0,5*\$D\$2	
4	S.A.:								HOLGURAS
5		1	-1	1	≤	10	RESTRICCIÓN 1	=B\$2-\$C\$2+\$D\$2	=F5-H5
6		2	-1	2	≤	40	RESTRICCIÓN 2	=2*\$B\$2-\$C\$2+2*\$D\$2	=F6-H6
7									

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		X1	X2	X3					
2		30	20	0					
3	MAX.	2	1	0,5					80
4	S.A.:								HOLGURAS
5		1	-1	1	≤	10	RESTRICCIÓN 1	10	0
6		2	-1	2	≤	40	RESTRICCIÓN 2	40	0
7									

**Resultados de Solver**

Los valores de las celdas fijas no convergen.

☒ Utilizar solución de Solver  
☐ Restaurar valores originales

Aceptar   Cancelar   Guardar escenario...   Ayuda

Informes

Respuestas  
 Sensibilidad  
 Límites

La ventana precedente nos indica que la solución del problema ingresado no está acotada. Los valores de las variables de decisión, las variables de holgura y la función objetivo suministrados por *Solver* son los correspondientes a la última iteración alcanzada por el método Simplex que permite concluir que la función objetivo puede mejorarse indefinidamente.

### Ejemplo 7-2 Interpretación de resultados

Dados el programa lineal correspondiente al Ejemplo 6-2 y su respectiva solución suministrada por *Solver*, interprete el resultado obtenido.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		X1	X2					
2								
3	MAX.	3	2				=3*\$B\$2+2*\$C\$2	
4	S.A.:							HOLGURAS
5		2	1	≤	2	RESTRICCIÓN 1	=2*\$B\$2+\$C\$2	=E5-G5
6		3	4	≥	12	RESTRICCIÓN 2	=3*\$B\$2+4*\$C\$2	=E6-G6
7								

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		X1	X2						
2		0	2						
3	MAX.	3	2				4		
4	S.A.:							HOLGURAS	
5		2	1	≤	2	RESTRICCIÓN 1	2		0
6		3	4	≥	12	RESTRICCIÓN 2	8		4
7									

**Resultados de Solver**

Solver no ha encontrado una solución válida.

☒ Utilizar solución de Solver  
☐ Restaurar valores originales

Aceptar   Cancelar   Guardar escenario...   Ayuda

Informes

Respuestas  
 Sensibilidad  
 Límites

En este caso el problema ingresado no es factible. En la Fase I del método de las Dos Fases se ha verificado la condición de optimización y el valor de la función objetivo es distinto de cero. Los valores de las variables de decisión, las variables de holgura y la función objetivo suministrados por *Solver* son los correspondientes al óptimo de la Fase I.

### Ejemplo 7-3 Interpretación de resultados

El Consejo Agrario de la provincia de La Rioja está tramitando la venta de tierras fiscales, destinadas a la explotación agropecuaria, en los sectores noreste y suroeste de dicha provincia. En cada sector están disponibles 100.000 hectáreas. Tres consorcios agrícolas (1, 2 y 3) son los interesados. El *consorcio 1* ha ofrecido \$1.000 por cada hectárea en el noreste y \$2.000 por hectárea en el suroeste. El *consorcio 2* ha ofrecido \$900 por hectárea en el noreste y \$2.200 en el suroeste. El *consorcio 3* ha ofrecido \$1.100 por hectárea en el noreste y \$1.900 en el suroeste. Por disposiciones gubernamentales ninguno de los tres consorcios recibirá más del 40% del total de las tierras.

- Formule el modelo lineal que permita obtener la asignación más conveniente y obtenga, su solución mediante *Solver*.
- ¿En cuánto debería el *consorcio 2* mejorar su oferta para tener participación en las tierras del noreste?
- Si el Consejo dispusiese de 20.000 hectáreas más en el suroeste ¿a cuánto ascendería el ingreso total?

#### a) Formulación del modelo

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Xij: ha en el sector i otorgadas al consorcio j, i = (1 (NE), 2 (SO)), j = (1, 2, 3)										
2											
3		X11	X12	X13	X21	X22	X23				
4											
5	MAX	1000	900	1100	2000	2200	1900			Función Objetivo	=SUMAPRODUCTO(B5:G5;B4:G4)
6	S. A:										
7		1	1	1				≤	100000	ha disponibles NE	=SUMAPRODUCTO(B7:D7;B4:D4)
8					1	1	1	≤	100000	ha disponibles SO	=SUMAPRODUCTO(E8:G8;E4:G4)
9		1			1			≤	80000	ha asignadas consorcio 1	=SUMAPRODUCTO(B9:G9;B4:G4)
10			1			1		≤	80000	ha asignadas consorcio 2	=SUMAPRODUCTO(B10:G10;B4:G4)
11				1			1	≤	80000	ha asignadas consorcio 3	=SUMAPRODUCTO(B11:G11;B4:G4)
12											

#### Solución

##### Microsoft Excel 11.0 Informe de respuestas

##### Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$K\$5	Función Objetivo	0	324000000

##### Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$B\$4	X11	0	20000
\$C\$4	X12	0	0
\$D\$4	X13	0	80000
\$E\$4	X21	0	20000
\$F\$4	X22	0	80000
\$G\$4	X23	0	0

##### Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
\$K\$7	ha disponibles NE	100000	\$K\$7<=\$I\$7	Obligatorio	0
\$K\$8	ha disponibles SO	100000	\$K\$8<=\$I\$8	Obligatorio	0
\$K\$9	ha asignadas consorcio 1	40000	\$K\$9<=\$I\$9	Opcional	40000
\$K\$10	ha asignadas consorcio 2	80000	\$K\$10<=\$I\$10	Obligatorio	0
\$K\$11	ha asignadas consorcio 3	80000	\$K\$11<=\$I\$11	Obligatorio	0

El informe suministrado por *Solver* indica que de las 100.000ha disponibles en el NE se asignarán 20.000 ha al *consorcio 1* y 80.000ha al *consorcio 3*. De las 100.000ha restantes en el SE, 20.000 se le otorgarán al *consorcio 1* y 80.000 al *consorcio 2*.

Con la ejecución de este plan de distribución se obtendrán \$324.000.000.

b) Análisis de sensibilidad

**Microsoft Excel 11.0 Informe de sensibilidad**

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coefficiente objetivo	Aumento permisible	Disminución permisible
\$B\$4	X11	20000	0	1000	100	300
\$C\$4	X12	0	-300	900	300	1E+30
\$D\$4	X13	80000	0	1100	1E+30	100
\$E\$4	X21	20000	0	2000	200	200
\$F\$4	X22	80000	0	2200	1E+30	200
\$G\$4	X23	0	-200	1900	200	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Disminución permisible
\$K\$7	ha disponibles NE	100000	1000	100000	40000	20000
\$K\$8	ha disponibles SO	100000	2000	100000	40000	20000
\$K\$9	ha asignadas consorcio 1	40000	0	80000	1E+30	40000
\$K\$10	ha asignadas consorcio 2	80000	200	80000	20000	40000
\$K\$11	ha asignadas consorcio 3	80000	100	80000	20000	40000

El costo reducido de  $x_{12}$  establece que el *consorcio 2* deberá incrementar su oferta en al menos \$300, es decir  $c_{12} \geq 1.200$ .

c) En base al informe anterior, un aumento de 20.000ha en el término independiente de la segunda restricción, mantiene la base óptima. Dado que el correspondiente precio sombra es de \$2.000, el ingreso total ascendería a \$364.000.000 ( $324.000.000 + 2.000 \cdot 20.000 = 364.000.000$ ).