Лабораторная работа 2. Задание 3 - приведение поверхности второго порядка к каноническому виду.

Задание

1. Упростить уравнение поверхности второго порядка в пространстве;
2. Привести к каноническому виду;
3. Построить исходную фигуру и упрощенную;
4. Сравнить вручную найденные собственные числа и собственные вектора со значениями, полученными с помощью встроенных функцийю

Вариант 7

$$8x^2 - 2xy - 4y^2 + 2xz - 2yz + 3z^2 + 7x + 8y + 9z - 10$$

Построение исходной поверхности

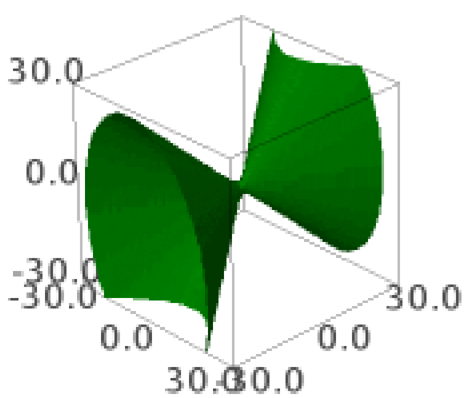
Функция:

```
f(x, y, z) = 8*x**2 - 2*x*y - 4*y**2 + 2*x*z - 2*y*z + 3*z**2 + 7*x + 8*y + 9*z - 10
```

Выведем ее:

$$(x, y, z) \mapsto 8\,x^2 - 2\,xy - 4\,y^2 + 2\,xz - 2\,yz + 3\,z^2 + 7\,x + 8\,y + 9\,z - 10$$

Построим ее график:



Приведем поверхность к каноническому виду

Общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fxy + 2Gyz + 2Hzx + 2Px + 2Qy + 2Rz + D = 0.$

Составим матрицу квадратичной формы A и матрицу квадратичной, линейной форм и свободного члена K:

$$A = \begin{pmatrix} A & F & H \\ F & B & G \\ H & G & C \end{pmatrix} \ K = \begin{pmatrix} A & F & H & P \\ F & B & G & Q \\ H & G & C & R \\ P & Q & R & D \end{pmatrix}$$

```
A = matrix([[8, -1, 1],
           [-1, -4, -1],
           [1, -1, 3]])

K = matrix([[8, -1, 1, 3.5],
            [-1, -4, -1, 4],
            [1, -1, 3, 4.5],
            [3.5, 4, 4.5, -10]])
```

Найдем инварианты:

$I_1 = A + B + C$

$I_2 = \begin{pmatrix} A & F \\ F & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & H \\ H & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & G \\ G & C \end{pmatrix}$

$I_3 = det(A)$

$I_4 = det(K)/I_3$

$K_1 = det(k)$

```
I1 = A.trace()
I2 = A[0:2, 0:2].det() + A[[0, 2], [0, 2]].det() + A[1:3, 1:3].det()
I3 = det(A)
I4 = K.det()/I3
K1 = K.det()
```

Получили следующие результаты:

$$I_1 = 7$$
$$I_2 = -23$$
$$I_3 = -101$$
$$I_4 = -9.94059405940594$$
$$K_1 = 1004.00000000000$$

Сравним полученные инварианты I_1, I_2, I_3 с инвариантами характеристического уровнения $\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$, полеченного с помощью встроенной функции .charpoly()

$x^3 - 7x^2 - 23x + 101$

Они совпадают, значит инварианты получены верно. Теперь найдем корни характеристического уравнения:

```
E = matrix([
    [1, 0, 0],
    [0, 1, 0],
    [0, 0, 1]
])

values = []
for value in solve((A - v * E).det(), v):
    values.append(real_part(n(value.rhs())))
```

$$\lambda_1 = 2.89528375575003$$
$$\lambda_2 = -4.20036065656582$$
$$\lambda_3 = 8.30507690081579$$

Сравним полученные корни характеристического уравнения с корнями, полученными с помощью встроенной функции .eigenvalues():

$[-4.200360656565816?, 2.895283755750026?, 8.30507690081579?]$

Совпадают. Значит теперь на основе корней характеристического уравнения и инвариант можно понять, какая перед нами поверхность. Так как два корня характеристического уравнения имеют один знак, а третий корень и I_4 имеют знак, им противоположный, то общее уравнение поверхности второго порядка определяет однополостный гиперболоид.

Найдем a, b, c:

$a = \sqrt{\frac{-K_1}{I_3\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{-K_1}{I_3\lambda_2}}$, $c = \sqrt{\frac{-K_1}{I_3\lambda_3}}$

```
a = -sqrt(K1/(I3*values[0]))
b = -sqrt(K1/(I3*values[1]))
c = -sqrt(K1/(I3*values[2]))
```

Каноническое уравнение имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$.

```
f_canon(x1, y1, z1) = x1**2 / a**2 + y1**2 / b**2 - z1**2 / c**2 - 1
```

$f = -0.291258624831427\,x_1^2 + 0.422546241347756\,y_1^2 + 0.835470883448600\,z_1^2 - 1$

Построим график канонической функции: