自适应滤波

数字自适应滤波器：根据输入信号自动调整自身参数，改变输入信号的频谱。

在 n 时刻，有：

- N 阶滤波器的参数 ($N \times 1$ 向量)：$\mathbf{w}(n) = [w_0(n), w_1(n), \ldots, w_{N-1}(n)]^{\mathrm{T}}$
- 滤波器的输入 ($N \times 1$ 向量)：$\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n-1), \ldots, x(n-N+1)]^{\mathrm{T}}$
- 滤波器的输出 (标量)：$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i(n)x(n-i) = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{x}(n)$
- 期望输出 (标量)：$d(n)$
- 误差信号 (标量)：$e(n) = d(n) - y(n) = d(n) - \mathbf{w}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{x}(n)$

维纳滤波

维纳滤波器 (Wiener filter) 的目标函数定义为均方误差，因此维纳滤波器又被称为最小二乘滤波器或最小平方滤波器。其目标函数为：

$$
\begin{aligned}
J(\mathbf{w}) &= E\Big\{e^2(n)\Big\} \\
&= E\Big\{\big[d(n) - y(n)\big]^2\Big\} \\
&= E\Big\{d^2(n)\Big\} + E\Big\{y^2(n)\Big\} - 2E\Big\{d(n)y(n)\Big\} \\
&= E\Big\{d^2(n)\Big\} + E\Big\{\big(\sum_{i=0}^{N-1} w_i(n)x(n-i)\big)^2\Big\} - 2E\Big\{\sum_{i=0}^{N-1} w_i(n)x(n-i)d(n)\Big\}
\end{aligned}
$$

即维纳滤波器通过最小化均方误差，求解滤波器的参数。目标函数对滤波器参数求导，令导数为 0，即可解得对应的滤波器参数。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial J(\mathbf{w})}{\partial w_j(n)} &= \frac{\partial\Bigg(E\Big\{d^2(n)\Big\} + E\Big\{\big(\sum_{i=0}^{N-1} w_i(n)x(n-i)\big)^2\Big\} - 2E\Big\{\sum_{i=0}^{N-1} w_i(n)x(n-i)d(n)\Big\}\Bigg)}{\partial w_j(n)} \\
&= \frac{\partial E\Big\{\big(\sum_{i=0}^{N-1} w_i(n)x(n-i)\big)^2\Big\}}{\partial w_j(n)} - \frac{\partial 2E\Big\{\sum_{i=0}^{N-1} w_i(n)x(n-i)d(n)\Big\}}{\partial w_j(n)} \\
&= 2E\Big\{\big(\sum_{i=0}^{N-1} w_i(n)x(n-i)\big)x(n-j)\Big\} - 2E\Big\{x(n-j)d(n)\Big\} \\
&= 2\sum_{i=0}^{N-1} E\Big\{x(n-i)x(n-j)\Big\}w_i(n) - 2E\Big\{x(n-j)d(n)\Big\}
\end{aligned}
$$

即：

$$
\begin{aligned}
\frac{J(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}(n)} &= 2E\Big\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(n)\Big\}\mathbf{w}(n) - E\Big\{\mathbf{x}(n)d(n)\Big\} \\
&= 2(\mathbf{R}\mathbf{w} - \mathbf{r})
\end{aligned}
$$

令导数为 0，解得 $\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R^{-1}r}$

> 由于要求输入信号 $\mathbf{x}(n)$ 真实的自相关矩阵，需要得到半无限时间区间内的全部观察数据的条件很难满足，同时它也不能用于噪声为非平稳的随机过程的情况，对于向量情况应用也不方便。因此，维纳滤波在实际问题中应用不多。

LMS

自适应滤波器根据目标函数决定如何更改滤波器的系数，从而减小下一次迭代的成本。

用瞬时梯度， 代替数学期望：

$$\begin{aligned}\hat{\nabla} &= \frac{\partial \left| d(n) - \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}(n) \right|^2}{\partial \mathbf{w}} \\ &= -2\big(d(n) - \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}(n)\big)\mathbf{x}(n) \\ &= -2e(n)\mathbf{x}(n)\end{aligned}$$

因此，标准时域LMS算法的更新公式为：

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + 2\mu \mathbf{x}(n) e(n)$$

- 维纳滤波：对于每个时刻，维纳滤波器根据所有历史信号，重新计算最优的滤波器参数。
- LMS 滤波：对于每个时刻，LMS 滤波器根据当前时刻的信号，更新当前时刻的滤波器参数。对于非平稳信号，也能动态地跟踪信号的变化。

例子

系统辨识

计算房间的冲激响应 (得到的冲激响应函数，可以用来给音频加混响)：

- N 阶滤波器模拟房间的冲激响应：$\mathbf{w}(n)$
- 输入信号：$\mathbf{x}(n)$
- 滤波器的输出：$y(n)$
- 期望输出 (即经过房间后接收到的真实信号)：$d(n)$

当滤波器参数收敛后，滤波器的输出 $y(n)$ 就会逼近期望输出 $d(n)$，滤波器即可看成是房间冲激响应的近似。

预测

信号的当前值用作自适应滤波器的期望输出，信号的历史值作为滤波器的输入。

- 输入信号：$\mathbf{x}(n-1)$
- 期望输出：$d(x) = x(n)$

当滤波器参数收敛后，输入 $\mathbf{x}(n)$ 即可得到下一时刻的预测值 $x(n+1)$。

噪声消除

在噪声环境中，目标信号为 $\mathbf{s}(n)$，滤波器接收到的信号有：

- $\mathbf{s}(n) + \mathbf{n}_0(n)$
- $\mathbf{n}_1(n)$

其中 $\mathbf{n}_0(n)$ 和 $\mathbf{n}_1(n)$ 是与目标信号无关的环境噪声。由于传感器位置的不同，$\mathbf{n}_0(n)$ 和 $\mathbf{n}_1(n)$ 不完全相同，但是它们是相关的。因此需要设计滤波器，根据 $\mathbf{n}_1(n)$ 把 $\mathbf{n}_0(n)$ 虑掉。

- 输入信号：$\mathbf{n}_1(n)$
- 期望输出：$d(n) = s(n) + n_0(n)$
- 滤波器参数：$\mathbf{w}(n)$
- 滤波器的输出：$y(n) = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}(n)\mathbf{n}_1(n)$
- 误差信号：$e(n) = s(n) + n_0(n) - y(n)$

均方误差为：

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}) &= E\{e^2(n)\} \\ &= E\left\{\left[s(n) + n_0(n) - y(n)\right]^2\right\} \\ &= E\{s^2(n)\} + E\left\{\left(n_0(n) - y(n)\right)^2\right\} - 2E\left\{s(n)\left(n_0(n) - y(n)\right)\right\} \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{s}(n)$ 与 $\mathbf{n}_0(n), \mathbf{n}_1(n)$ 无关，所以 $\mathbf{s}(n)$ 与 $\mathbf{y}(n)$ 也无关，则 $E\left\{s(n)\left(n_0(n) - y(n)\right)\right\} = 0$，得：

$$\min E\{e^2(n)\} = E\{s^2(n)\} + \min E\left\{\left(n_0(n) - y(n)\right)^2\right\}$$

当滤波器参数收敛后，滤波器的输出 $y(n)$ 则会逼近 $n_0(n)$。因为 $e(n) = s(n) + n_0(n) - y(n)$，所以：

$$\min E\left\{\left(n_0(n) - y(n)\right)^2\right\} = \min E\left\{\left(e(n) - s(n)\right)^2\right\}$$

上式表明，在最小均方误差的意义下，$y(n)$ 最接近 $n_0(n)$，等效于 $e(n)$ 最接近 $s(n)$。误差信号即为抵消噪声分量后的目标信号，直接输出误差信号即可。

参考文献

[1] 维纳滤波 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%BB%B4%E7%BA%B3%E6%BB%A4%E6%B3%A2

[2] 衡霞, and 刘志镜. "基于自适应滤波的语音增强和噪声消除." *微机发展* 14.1 (2004): 96-98.