

Теоремы об интуиционистском исчислении высказываний

Общие результаты об исчислениях высказываний

	К.И.В.	И.И.В. + алгебры Гейтинга
корректность	да (лекция 1)	да (ДЗ III.10)
непротиворечивость	да (очев.)	да (из непр. КИВ)
полнота	да (лекция 2)	да
разрешимость	да (лекция 2)	да

Алгебра Линденбаума

Определение

Определим предпорядок на высказываниях: $\alpha \preceq \beta := \alpha \vdash \beta$ в интуиционистском исчислении высказываний. Также $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \preceq \beta$ и $\beta \preceq \alpha$.

Определение

Пусть L — множество всех высказываний. Тогда алгебра Линденбаума $\mathcal{L} = L/\approx$.

Теорема

\mathcal{L} — псевдобулева алгебра.

Схема доказательства.

Надо показать, что (\preceq) есть отношение порядка на \mathcal{L} , что $[\alpha \vee \beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha]_{\mathcal{L}} + [\beta]_{\mathcal{L}}$, $[\alpha \& \beta]_{\mathcal{L}} = [\alpha]_{\mathcal{L}} \cdot [\beta]_{\mathcal{L}}$, импликация есть псевдодополнение, $[A \& \neg A]_{\mathcal{L}} = 0$, $[\alpha]_{\mathcal{L}} \rightarrow 0 = [\neg \alpha]_{\mathcal{L}}$. □

Полнота псевдобулевых алгебр

Теорема

Пусть $\llbracket \alpha \rrbracket = [\alpha]_{\mathcal{L}}$. Такая оценка интуиционистского исчисления высказываний алгеброй Линденбаума является согласованной.

Теорема

Интуиционистское исчисление высказываний полно в псевдобулевых алгебрах: если $\models \alpha$ во всех псевдобулевых алгебрах, то $\vdash \alpha$.

Доказательство.

Возьмём в качестве модели исчисления алгебру Линденбаума: $\llbracket \alpha \rrbracket = [\alpha]_{\mathcal{L}}$.

Пусть $\models \alpha$. Тогда $\llbracket \alpha \rrbracket = 1$ во всех псевдобулевых алгебрах, в том числе и $\llbracket \alpha \rrbracket = 1_{\mathcal{L}}$. То есть $[\alpha]_{\mathcal{L}} = [A \rightarrow A]_{\mathcal{L}}$. То есть $A \rightarrow A \approx \alpha$. Значит, в частности, $A \rightarrow A \vdash \alpha$. Значит, $\vdash \alpha$.



Модели Крипке

Определение

Модель Крипке $\langle \mathcal{W}, \preceq, (\Vdash) \rangle$:

- ▶ \mathcal{W} — множество миров, (\preceq) — нестрогий частичный порядок на \mathcal{W} ;
- ▶ $(\Vdash) \subseteq \mathcal{W} \times P$ — отношение вынуждения между мирами и переменными, причём, если $W_i \preceq W_j$ и $W_i \Vdash X$, то $W_j \Vdash X$.

Доопределим вынужденность:

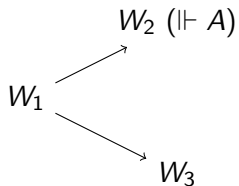
- ▶ $W \Vdash \alpha \ \& \ \beta$, если $W \Vdash \alpha$ и $W \Vdash \beta$;
- ▶ $W \Vdash \alpha \vee \beta$, если $W \Vdash \alpha$ или $W \Vdash \beta$;
- ▶ $W \Vdash \alpha \rightarrow \beta$, если всегда при $W \preceq W_1$ и $W_1 \Vdash \alpha$ выполнено $W_1 \Vdash \beta$
- ▶ $W \Vdash \neg \alpha$, если всегда при $W \preceq W_1$ выполнено $W_1 \not\Vdash \alpha$.

Будем говорить, что $\Vdash \alpha$, если $W \Vdash \alpha$ при всех $W \in \mathcal{W}$. Будем говорить, что $\models_{\kappa} \alpha$, если $\Vdash \alpha$ во всех моделях Крипке.

Исключённое третье

Пример

Покажем, что $\not\models_{\kappa} A \vee \neg A$.



Тогда, $W_3 \models \neg A$, но $W_1 \not\models A$ (по определению) и $W_1 \not\models \neg A$ (так как $W_1 \preceq W_2$ и $W_2 \models A$). Значит, $W_1 \not\models A \vee \neg A$.

Корректность моделей Крипке

Лемма

Если $W_1 \Vdash \alpha$ и $W_1 \preceq W_2$, то $W_2 \Vdash \alpha$

Теорема

Пусть $\langle \mathcal{W}, (\preceq), (\Vdash) \rangle$ — некоторая модель Крипке. Тогда она есть корректная модель интуиционистского исчисления высказываний.

Доказательство.

Доказательство для древовидного (\preceq), обобщение на произвольный порядок легко построить.

Заметим, что $V(\alpha) := \{w \in \mathcal{W} \mid w \Vdash \alpha\}$ открыто в топологии для деревьев. Значит, положив $V = \{S \mid S \subseteq \mathcal{W} \text{ \& } S \text{ — открыто}\}$ и $\llbracket \alpha \rrbracket = V(\alpha)$, получим алгебру Гейтинга. □

Табличные модели

Определение

Пусть задано V , значение $T \in V$ («истина»), функция $f_P : P \rightarrow V$, функции $f_{\&}, f_V, f_{\rightarrow} : V \times V \rightarrow V$, функция $f_{\neg} : V \rightarrow V$.

Тогда оценка $\llbracket X \rrbracket = f_P(X)$, $\llbracket \alpha \star \beta \rrbracket = f_{\star}(\llbracket \alpha \rrbracket, \llbracket \beta \rrbracket)$, $\llbracket \neg \alpha \rrbracket = f_{\neg}(\llbracket \alpha \rrbracket)$ — табличная.

Если $\vdash \alpha$ влечёт $\llbracket \alpha \rrbracket = T$ при всех оценках пропозициональных переменных f_P , то $M := \langle V, T, f_{\&}, f_V, f_{\rightarrow}, f_{\neg} \rangle$ — табличная модель.

Определение

Табличная модель конечна, если V конечно.

Теорема

Не существует полной конечной табличной модели для интуиционистского исчисления высказываний

Доказательство нетабличности: α_n

Пусть существует полная конечная табличная модель \mathcal{M} , $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. То есть, если $\models_{\mathcal{M}} \alpha$, то $\vdash \alpha$.

Рассмотрим

$$\alpha_n = \bigvee_{1 \leq p < q \leq n+1} A_p \rightarrow A_q$$

Рассмотрим оценку $f_p : \{A_1 \dots A_{n+1}\} \rightarrow \{v_1 \dots v_n\}$. По принципу Дирихле существуют $p \neq q$, что $\llbracket A_p \rrbracket = \llbracket A_q \rrbracket$. Значит,

$$\llbracket A_p \rightarrow A_q \rrbracket = f_{\rightarrow}(\llbracket A_p \rrbracket, \llbracket A_q \rrbracket) = f_{\rightarrow}(v, v)$$

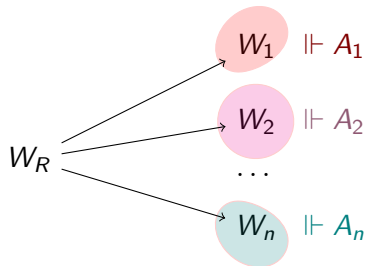
С другой стороны, $\vdash X \rightarrow X$ — поэтому $f_{\rightarrow}(\llbracket X \rrbracket, \llbracket X \rrbracket) = T$, значит,

$$\llbracket A_p \rightarrow A_q \rrbracket = f_{\rightarrow}(v, v) = f_{\rightarrow}(\llbracket X \rrbracket, \llbracket X \rrbracket) = T$$

Аналогично, $\vdash \sigma \vee (X \rightarrow X) \vee \tau$, откуда $\llbracket \alpha_n \rrbracket = \llbracket \sigma \vee (X \rightarrow X) \vee \tau \rrbracket = T$.

Доказательство нетабличности: противоречие

Однако, в такой модели $\not\models \alpha_n$:



Если $q > 1$, то $W_1 \not\models A_q$ и $W_1 \not\models A_1 \rightarrow A_q$

Если $q > 2$, то $W_2 \not\models A_q$ и $W_2 \not\models A_2 \rightarrow A_q$

$W_n \not\models A_{n+1}$; $W_n \not\models A_n \rightarrow A_{n+1}$

Если $p < q$, то $W_p \not\models A_q$ и $W_p \not\models A_p \rightarrow A_q$

Если $p < q$, то $W_p \not\models A_p \rightarrow A_q$, то есть $W_R \not\models A_p \rightarrow A_q$.

Отсюда: $W_R \not\models \bigvee_{p < q} A_p \rightarrow A_q$, $W_R \not\models \alpha_n$, потому что $\not\models \alpha_n$ и $\not\models \alpha_n$.

Дизъюнктивность ИИВ

Определение

Исчисление дизъюнктивно, если при любых α и β из $\vdash \alpha \vee \beta$ следует $\vdash \alpha$ или $\vdash \beta$.

Определение

Решётка гёделева, если $a + b = 1$ влечёт $a = 1$ или $b = 1$.

Теорема

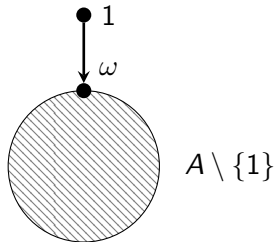
Интуиционистское исчисление высказываний дизъюнктивно

«Гёделеви́зация» (операция $\Gamma(\mathcal{A})$)

Определение

Для алгебры Гейтинга $\mathcal{A} = \langle A, (\preceq) \rangle$ определим операцию «гёделеви́зации»:
 $\Gamma(\mathcal{A}) = \langle A \cup \{\omega\}, (\preceq_{\Gamma(\mathcal{A})}) \rangle$, где отношение $(\preceq_{\Gamma(\mathcal{A})})$ — минимальное отношение порядка, удовлетворяющее условиям:

- ▶ $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} b$, если $a \preceq_{\mathcal{A}} b$ и $a, b \notin \{\omega, 1\}$;
- ▶ $a \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} \omega$, если $a \neq 1$;
- ▶ $\omega \preceq_{\Gamma(\mathcal{A})} 1$



Теорема

$\Gamma(\mathcal{A})$ — гёделева алгебра.

Доказательство.

Проверка определения алгебры Гейтинга и наблюдение: если $a \preceq \omega$ и $b \preceq \omega$, то $a + b \preceq \omega$. □

Оценка $\Gamma(\mathcal{L})$

Теорема

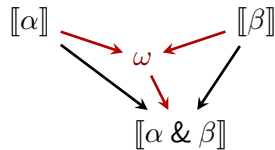
Рассмотрим оценку $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{L}}$. Тогда она является согласованной с ИИВ.

Индукция по структуре формулы и перебор операций. Рассмотрим ($\&$).

Неформально: почти везде $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \cdot \llbracket \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{L}} \cdot \llbracket \beta \rrbracket_{\mathcal{L}}$, поскольку $\llbracket \sigma \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \neq \omega$,

... но нет ли случаев, когда

$\omega = \text{наиб}\{x \mid x \preceq \llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \& x \preceq \llbracket \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})}\}$?



Чтобы убедиться, что всегда $\llbracket \alpha \& \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = \llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} \cdot \llbracket \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})}$, надо показать:

- ▶ $[\alpha \& \beta]$ — из множества нижних граней: $\alpha \& \beta \vdash \alpha$ и $\alpha \& \beta \vdash \beta$;
 - ▶ $[\alpha \& \beta]$ — наибольшая нижняя грань: $x \preceq [\alpha]$ и $x \preceq [\beta]$ влечёт $x \preceq [\alpha \& \beta]$
- Разбор случаев ($x \in \mathcal{L}$, $x = \omega$). $\omega \preceq [\alpha]$ и $\omega \preceq [\beta]$ влечёт $[\alpha] = [\beta] = 1$, отсюда $[\alpha \& \beta] = [\alpha] \cdot [\beta] = 1$

Гомоморфизм алгебр

Определение

Пусть \mathcal{A}, \mathcal{B} — алгебры Гейтинга. Тогда $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ — гомоморфизм, если $g(a \star b) = g(a) \star g(b)$, $g(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{B}}$ и $g(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$.

Определение

Будем говорить, что оценка $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{A}}$ согласована с $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{B}}$ и гомоморфизмом g , если $g(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ и $g(\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}}) = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}}$.

Доказательство дизъюнктивности ИИВ

Определение ($\mathcal{G} : \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{L}$)

$$\mathcal{G}(a) = \begin{cases} a, & a \neq \omega \\ 1, & a = \omega \end{cases}$$

Лемма

\mathcal{G} — гомоморфизм $\Gamma(\mathcal{L})$ и \mathcal{L} , причём оценка $\llbracket \cdot \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})}$ согласована с \mathcal{G} и $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{L}}$.

Теорема

Если $\vdash \alpha \vee \beta$, то либо $\vdash \alpha$, либо $\vdash \beta$.

Доказательство.

Пусть $\vdash \alpha \vee \beta$. Тогда $\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ (так как данная оценка согласована с ИИВ).

Тогда $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ или $\llbracket \beta \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$ (так как $\Gamma(\mathcal{L})$ гёделева).

Пусть $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = 1$, тогда $\mathcal{G}(\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})}) = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{L}} = 1$, тогда $\vdash \alpha$ (по полноте \mathcal{L}). □

Построение дистрибутивных подрешёток

Определение

Решётка $\mathcal{L}' = \langle L', \preceq \rangle$ — подрешётка решётки $\mathcal{L} = \langle L, \preceq \rangle$, если $L' \subseteq L$, $(\preceq') \subseteq (\preceq)$ и при $a, b \in L'$ выполнено $a +_{\mathcal{L}'} b = a +_{\mathcal{L}} b$ и $a \cdot_{\mathcal{L}'} b = a \cdot_{\mathcal{L}} b$.

Лемма

Существует дистрибутивная подрешётка \mathcal{L}' , содержащая a_1, \dots, a_n , что $|L'| \leq 2^{2^n}$.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{L}' = \langle \{\varphi(a_1, \dots, a_n) \mid \varphi \text{ составлено из } (+) \text{ и } (\cdot)\}, (\preceq) \rangle$. Заметим, что если $p, q \in L'$, то $p \star_{\mathcal{L}} q \in L'$ (так как $\varphi_p(\vec{a}) \star \varphi_q(\vec{a}) = \psi(\vec{a})$). Также ясно, что если $\sup_L \{p, q\} \in L'$ (или $\inf_L \{p, q\} \in L'$), то $p \star_{\mathcal{L}} q = p \star_{\mathcal{L}'} q$. Значит, \mathcal{L}' также дистрибутивна. Построим «ДНФ»:

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = \sum_{K \in \text{ДНФ}(\varphi)} \prod_{i \in K} a_i$$

Всего не больше 2^n возможных компонент и 2^{2^n} возможных формул $\varphi(\vec{a})$. □

Разрешимость ИИВ

Теорема

Если $\not\models \alpha$ в ИИВ, то существует \mathcal{G} , что $\mathcal{G} \not\models \alpha$, причём $|\mathcal{G}| \leq 2^{2^{|\alpha|+2}}$.

Доказательство.

Если $\not\models \alpha$, то по полноте найдётся алгебра Гейтинга \mathcal{H} , что $\mathcal{H} \not\models \alpha$.

Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — подформулы α . Пусть \mathcal{G} — дистрибутивная подрешётка \mathcal{H} , построенная по $\llbracket \varphi_1 \rrbracket, \dots, \llbracket \varphi_n \rrbracket, 0$ и 1 .

Очевидно, что \mathcal{G} — алгебра Гейтинга, и можно показать, что $\mathcal{G} \not\models \alpha$ (псевдодополнения не обязаны сохраниться). Тогда по лемме, $|\mathcal{G}| \leq 2^{2^{n+2}}$. □

Теорема

ИИВ разрешимо.

Доказательство.

По формуле α построим все возможные алгебры Гейтинга \mathcal{G} размера не больше $2^{2^{|\alpha|+2}}$, если $\mathcal{G} \models \alpha$, то $\vdash \alpha$. □