Теоремы Гёделя о неполноте арифметики

Основные свойства исчислений: Ф.А.

	К.И.В.	И.И.В.	К.И.П.	Ф.А. + кл. модель
корректность	да	да	да (лекция 5)	да (сейчас)
непротиворечивость	да	да	да (лекция 6)	верим (т. Гёделя №2)
полнота	да	да	да (лекция 6)	нет (т. Гёделя №1)
разрешимость	да	да	нет (лекция 7)	нет (док-во т. Тарского)

Классическая модель Ф.А.

А как определять «нестандартные» предикаты и функции (Q_1', $c(p, q)$ и т.п.)? Для простоты разрешим только нелогические функциональные и предикатные символы ($=$, $+$, $\cdot$, 0, $'$).

Определение

Классическая модель формальной арифметики: $D = \mathbb{N}_0$, оценки предикатных и функциональных символов — естественные.

Теорема

Формальная арифметика корректна

Доказательство.

Свойства аксиом $A1 \dots A8$ очевидны.
Доказательство схемы аксиом индукции:

$$\psi(0) \,\&\, (\forall x.\psi(x) \to \psi(x')) \to \psi(x)$$

Индукция по структуре формулы ψ, затем математическая индукция по x. $\square$

Схема аксиом индукции чуть подробнее

Индукция по структуре формулы ψ в

$$\psi(0) \,\&\, (\forall x.\psi(x) \rightarrow \psi(x')) \rightarrow \psi(x)$$

Для примера база:

$$\theta_0(0) = \theta_1(0) \,\&\, (\forall x.\theta_0(x) = \theta_1(x) \rightarrow \theta_0(x') = \theta_1(x')) \rightarrow \theta_0(x) = \theta_1(x)$$

Докажем индукцией по x.

1. $x := 0$. Тогда либо $[\![\theta_0(0) = \theta_1(0)]\!] =$ Л, либо $[\![\theta_0(x) = \theta_1(x)]\!]^{x:=0} =$ И
2. $x := s$. Тогда s раз применяем переход

$$[\![\theta_0(x) = \theta_1(x) \rightarrow \theta_0(x') = \theta_1(x')]\!]^{x:=\overline{0\dots s}} = \text{И}$$

отсюда

$$[\![\theta_0(x') = \theta_1(x')]\!]^{x:=s} = [\![\theta_0(x) = \theta_1(x)]\!]^{x:=s+1} = \text{И}$$

Можно ли верить этому доказательству (доказываем индукцию через индукцию)?

Самоприменимость

Определение

Пусть ξ — формула с единственной свободной переменной x_1. Тогда:
$\langle\ulcorner\xi\urcorner, p\rangle \in W_1$, если $\vdash \xi(\overline{\ulcorner\xi\urcorner})$ и p — номер доказательства.

Определение

Отношение W_1 рекурсивно, поэтому выражено в Ф.А. формулой ω_1 со свободными переменными x_1 и x_2, причём:

1. $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}, \overline{p})$, *если p — гёделев номер доказательства самоприменения φ;*
2. $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}, \overline{p})$ *иначе.*

Определение

Определим формулу $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$.

Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Определение

Если для любой формулы $\phi(x)$ *из* $\vdash \phi(0), \vdash \phi(\overline{1}), \vdash \phi(\overline{2}), \dots$ *выполнено* $\nvdash \exists x.\neg\phi(x)$, *то теория омега-непротиворечива.*

Теорема

Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

- *Если формальная арифметика непротиворечива, то* $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.
- *Если формальная арифметика* ω*-непротиворечива, то* $\nvdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner\xi\urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ.

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Противоречие.
- Пусть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.
  - Но найдётся ли натуральное число p, что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{0})$, $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{1})$, $\ldots$ По ω-непротиворечивости $\nvdash \exists p.\neg\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.

  Значит, найдётся натуральное p, что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. То есть, $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$. То есть, p — доказательство самоприменения W_1: $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Противоречие.

$\square$

Почему теорема о неполноте?

Определение

Семантически полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.
Синтаксически полная теория — теория, в которой для каждой формулы α выполнено $\vdash \alpha$ или $\vdash \neg\alpha$.

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью семантически неполна.

Доказательство.

Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.
Рассмотрим $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \equiv \forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}), p$: нет числа p, что p — номер доказательства $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть, $[\![\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}), p)]\!] =$ И. То есть, $\models \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. $\square$

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$\theta_1 \le \theta_2 \equiv \exists p.p + \theta_1 = \theta_2 \qquad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \le \theta_2 \,\&\, \neg\theta_1 = \theta_2$

Определение

Пусть $\langle \ulcorner\xi\urcorner, p\rangle \in W_2$, *если* $\vdash \neg\xi(\overline{\ulcorner\xi\urcorner})$. *Пусть* ω_2 *выражает* W_2 *в формальной арифметике.*

Теорема

Рассмотрим $\rho(x_1) = \forall p.\omega_1(x_1, p) \to \exists q.q \le p \,\&\, \omega_2(x_2, q)$. *Тогда* $\not\vdash \rho(\overline{\ulcorner\rho\urcorner})$ *и* $\not\vdash \neg\rho(\overline{\ulcorner\rho\urcorner})$. $\rho(\overline{\ulcorner\rho\urcorner})$: *«Меня легче опровергнуть, чем доказать»*

Формальное доказательство

Неполнота варианта теории, изложенной выше, формально доказана на Coq, Russell O'Connor, 2005:

“My proof, excluding standard libraries and the library for Pocklington's criterion, consists of 46 source files, 7 036 lines of specifications, 37 906 lines of proof, and 1 267 747 total characters. The size of the gzipped tarball (gzip -9) of all the source files is 146 008 bytes, which is an estimate of the information content of my proof.”

```
Theorem Incompleteness : forall T : System,
  Included Formula NN T ->
  RepresentsInSelf T ->
  DecidableSet Formula T ->
  exists f : Formula,
  Sentence f/\(SysPrf T f \/ SysPrf T (notH f) -> Inconsistent LNN T).
```

Consis

Лемма

$\vdash 1 = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vdash \alpha$ *при любом* α.

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ *формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение Proof:* $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in Proof$*, если* p *— гёделев номер доказательства* ξ.
Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p . \psi(x, p)$

Определение

Формулой Consis назовём формулу $\neg\pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

Неформальный смысл: «формальная арифметика непротиворечива»

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$». То есть, $\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$, — и это можно доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Однако если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. $\square$

Слишком много неформальности

Рассмотрим такой особый Consis$'$:

$$\begin{array}{l}\pi'(x) := \exists p.\psi(x,p)\ \&\ \neg\psi(\overline{\ulcorner 1=0 \urcorner}, p)\\ \text{Consis}' := \pi'(\overline{\ulcorner 1=0 \urcorner})\end{array}$$

Заметим:

1. Если ФА непротиворечива, то $[\![\pi'(x)]\!] = [\![\pi(x)]\!]$:
   - если $x \neq \ulcorner 1 = 0 \urcorner$ и $[\![\psi(x,p)]\!] =$ И, то $[\![\psi(\overline{\ulcorner 1=0 \urcorner}, p)]\!] =$ Л
   - если $x = \ulcorner 1 = 0 \urcorner$, то $\psi(\overline{\ulcorner 1=0 \urcorner}, p) =$ Л при любом p.
2. Но $\vdash$ Consis$'$.

Условия выводимости Гильберта-Бернайса-Лёба

Определение

Будем говорить, что формула ψ, выражающая отношение Proof, формула π и формула Consis соответствуют условиям Гильберта-Бернайса-Лёба, если следующие условия выполнены для любой формулы α:

1. $\vdash \alpha$ *влечет* $\vdash \pi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner})$
2. $\vdash \pi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \rightarrow \pi(\overline{\ulcorner \pi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \urcorner})$
3. $\vdash \pi(\overline{\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner}) \rightarrow \pi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \rightarrow \pi(\overline{\ulcorner \beta \urcorner})$

Первая теорема Гёделя о неполноте ещё раз

Лемма

Лемма об автоссылках. Для любой формулы $\phi(x_1)$ можно построить такую замкнутую формулу α (не использующую неаксиоматических предикатных и функциональных символов), что $\vdash \phi(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}) \leftrightarrow \alpha$.

Теорема

Существует такая замкнутая формула γ, что если Ф.А. непротиворечива, то $\nvdash \gamma$, а если Ф.А. ω-непротиворечива, то и $\nvdash \neg\gamma$.

Доказательство.

Рассмотрим $\phi(x_1) \equiv \neg\pi(x_1)$. Тогда по лемме об автоссылках существует γ, что $\vdash \gamma \leftrightarrow \neg\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})$.

- Предположим, что $\vdash \gamma$. Тогда $\vdash \gamma \rightarrow \neg\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})$, то есть $\nvdash \gamma$
- Предположим, что $\vdash \neg\gamma$. Тогда $\vdash \pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})$, то есть $\vdash \exists p.\psi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}, p)$. Тогда по ω-непротиворечивости найдётся p, что $\vdash \psi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}, \overline{p})$, то есть $\vdash \gamma$.

$\square$

Доказательство второй теоремы Гёделя

1. Пусть γ таково, что $\vdash \gamma \leftrightarrow \neg\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})$.
2. Покажем $\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \vdash \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$.
   - 2.1 По условию 2, $\vdash \pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \rightarrow \pi(\overline{\ulcorner\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})\urcorner})$. По теореме о дедукции $\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \vdash \pi(\overline{\ulcorner\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})\urcorner})$;
   - 2.2 Так как $\vdash \pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \rightarrow \neg\gamma$, то по условию 1 $\vdash \pi(\overline{\ulcorner\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \rightarrow \neg\gamma\urcorner})$;
   - 2.3 По условию 3, $\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \vdash \pi(\overline{\ulcorner\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})\urcorner}) \rightarrow \pi(\overline{\ulcorner\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \rightarrow \neg\gamma\urcorner}) \rightarrow \pi(\overline{\ulcorner\neg\gamma\urcorner})$;
   - 2.4 Таким образом, $\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \vdash \pi(\overline{\ulcorner\neg\gamma\urcorner})$;
   - 2.5 Однако $\vdash \gamma \rightarrow \neg\gamma \rightarrow 1 = 0$. Условие 3 (применить два раза) даст $\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \vdash \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0\urcorner})$.
3. $\neg\pi(\overline{\ulcorner 1 = 0\urcorner}) \rightarrow \neg\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})$ (т. о дедукции, контрапозиция).
4. $\vdash \neg\pi(\overline{\ulcorner 1 = 0\urcorner}) \rightarrow \gamma$ (определение γ).

Расширение на другие теории

Определение

Теория $\mathcal{S}$ — расширение теории $\mathcal{T}$, если из $\vdash_{\mathcal{T}} \alpha$ следует $\vdash_{\mathcal{S}} \alpha$

Определение

Теория $\mathcal{S}$ — рекурсивно-аксиоматизируемая, если найдётся теория $\mathcal{S}'$ с тем же языком, что:

1. *$\vdash_{\mathcal{S}} \alpha$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{\mathcal{S}'} \alpha$;*
2. *Множество аксиом теории $\mathcal{S}'$ рекурсивно.*

Теорема

Если $\mathcal{S}$ — непротиворечивое рекурсивно-аксиоматизируемое расширение формальной арифметики, то в ней можно доказать аналоги теорем Гёделя о неполноте арифметики.

Сужение: система Робинсона

Определение

Теория первого порядка, использующая нелогические функциональные символы 0, $(+)$ *и* $(\cdot)$, *нелогический предикатный символ* $(=)$ *и следующие нелогические аксиомы, называется системой Робинсона.*

$a = a$	$a = b \rightarrow b = a$
$a = b \rightarrow b = c \rightarrow a = c$	$a = b \rightarrow a' = b'$
$a' = b' \rightarrow a = b$	$\neg 0 = a'$
$a = b \rightarrow a + c = b + c \,\&\, c + a = c + b$	$a = b \rightarrow a \cdot c = b \cdot c \,\&\, c \cdot a = c \cdot b$
$\neg a = 0 \rightarrow \exists b.a = b'$	$a + 0 = a$
$a + b' = (a + b)'$	$a \cdot 0 = 0$
$a \cdot b' = a \cdot b + a$	

Система Робинсона неполна: аксиомы — в точности утверждения, необходимые для доказательства теорем Гёделя. Система Робинсона не имеет схем аксиом.

Арифметика Пресбургера

Определение

Теория первого порядка, использующая нелогические функциональные символы 0, 1, $(+)$, *нелогический предикатный символ* $(=)$ *и следующие нелогические аксиомы, называется арифметикой Пресбургера.*

$$
\begin{array}{l}
\neg(0 = x + 1) \\
x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y \\
x + 0 = x \\
x + (y + 1) = (x + y) + 1 \\
(\varphi(0) \,\&\, \forall x.\varphi(x) \rightarrow \varphi(x + 1)) \rightarrow \forall y.\varphi(y)
\end{array}
$$

Теорема

Арифметика Пресбургера разрешима и синтаксически и семантически полна.

Невыразимость доказуемости

Определение

$Th_{\mathcal{S}} = \{\ulcorner\alpha\urcorner \mid\ \vdash_{\mathcal{S}} \alpha\}$; $Tr_{\mathcal{S}} = \{\ulcorner\alpha\urcorner \mid [\![\alpha]\!]_{\mathcal{S}} = \textit{И}\}$

Лемма

Пусть $D(\ulcorner\alpha\urcorner) = \ulcorner\alpha(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner})\urcorner$ для любой формулы $\alpha(x)$. Тогда D представима в формальной арифметике.

Теорема

Если расширение Ф.А. $\mathcal{S}$ непротиворечиво и D представима в нём, то $Th_{\mathcal{S}}$ невыразимо в $\mathcal{S}$

Доказательство.

Пусть $\delta(a, p)$ представляет D, и пусть $\sigma(x)$ выражает множество $\mathrm{Th}_{\mathcal{S}}$ (рассматриваемое как одноместное отношение).
Пусть $\alpha(x) := \forall p.\delta(x, p) \to \neg\sigma(p)$. Верно ли, что $\ulcorner\alpha\urcorner \in \mathrm{Th}$? $\square$

Неразрешимость формальной арифметики

Теорема

Если формальная арифметика непротиворечива, то формальная арифметика неразрешима

Доказательство.

Пусть формальная арифметика разрешима. Значит, есть рекурсивная функция $f(x)$: $f(x) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathrm{Th}_{\Phi.\mathrm{A}.}$. То есть, $\mathrm{Th}_{\Phi.\mathrm{A}.}$ выразимо в формальной арифметике.

По теореме о невыразимости доказуемости, $\mathrm{Th}_{\Phi.\mathrm{A}.}$ невыразимо в формальной арифметике. Противоречие. $\square$

Теорема Тарского

Теорема (Тарского о невыразимости истины)

Не существует формулы $\varphi(x)$, что $[\![\varphi(x)]\!] = И$ (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда $x \in Tr_{\Phi A}$.

Доказательство.

Пусть теория $\mathcal{S}$ — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что $\mathrm{Th}_{\mathcal{S}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{S}} = \mathrm{Tr}_{\Phi\mathrm{A}}$. То есть $\mathrm{Tr}_{\Phi\mathrm{A}}$ невыразимо в $\mathcal{S}$.

Пусть φ таково, что $[\![\varphi(x)]\!] = \mathrm{И}$ при $x \in \mathrm{Tr}$. Тогда $\vdash \varphi(x)$, если $x \in \mathrm{Tr}$ и $\vdash \neg\varphi(x)$, если $x \notin \mathrm{Tr}$.

Тогда Tr выразимо в $\mathcal{S}$. Противоречие. □

Однако, если взять $D = \mathbb{R}$, истина становится выразима (алгоритм Тарского).