

Математическая логика  
*КТ ИТМО, осень 2023 года*

Что такое «правильное рассуждение»?

Логика. Аристотель: 384-322 гг. до н.э.

# Математический анализ

# Формализация матанализа

- ▶ Ньютон, Лейбниц — неформальная идея
- ▶ Коши — последовательности вместо бесконечно-малых, пределы
- ▶ Вейерштрасс — вещественные числа
- ▶ Кантор — теория множеств

# Наивная теория множеств

## Парадокс бородбрея (Рассела)

- ▶ На некотором острове живёт бородбрей, который бреет всех, кто не бреется сам. Бреется ли сам бородбрей?
- ▶ Если

$$X = \{x \mid x \notin x\}$$

то что можно сказать про

$$X \in X$$

- ▶ ▶ Пусть  $X \in X$ . Тогда  $X : X \notin X$
- ▶ ▶ Пусть  $X \notin X$ . Тогда  $X$  должен принадлежать  $X$
- ▶ Не совсем парадокс: откуда мы знаем, что  $X$  существует? А откуда мы знаем, что вещественные числа существуют?

# Программа Гильберта



# Высказывание

Высказывание — это строка, сформированная по следующим правилам.

- ▶ Атомарное высказывание — пропозициональная переменная:  $A, B', C_{1234}$
- ▶ Составное высказывание: если  $\alpha$  и  $\beta$  — высказывания, то высказываниями являются:
  - ▶ Отрицание:  $(\neg\alpha)$
  - ▶ Конъюнкция:  $(\alpha \& \beta)$  *или*  $(\alpha \wedge \beta)$
  - ▶ Дизъюнкция:  $(\alpha \vee \beta)$
  - ▶ Импликация:  $(\alpha \rightarrow \beta)$  *или*  $(\alpha \supset \beta)$

Пример:

$$(((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C)) \vee (C \rightarrow A))$$

## Соглашения о записи (метаязык)

- ▶ Метаварьиные:

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots$$

Если  $\alpha$  — высказывание, то  $(\neg\alpha)$  — высказывание

- ▶ Метаварьиные для пропозициональных переменных:

$$X, Y_n, Z'$$

Пусть дана пропозициональная переменная  $X$ , тогда  $(X \ \& \ (\neg X))$  — высказывание

## Способы упростить запись

- ▶ Приоритет связок: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация
- ▶ Ассоциативность: левая для конъюнкции и дизъюнкции, правая для импликации

Пример:

$$((((A \rightarrow B) \& Q) \vee (((\neg B) \rightarrow B) \rightarrow C)) \vee (C \rightarrow (C \rightarrow A)))$$

можем записать так:

$$(A \rightarrow B) \& Q \vee ((\neg B \rightarrow B) \rightarrow C) \vee (C \rightarrow C \rightarrow A)$$

# Теория моделей

Оценка высказываний: как их понимать?

## Неформальный пример: $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

Давайте попробуем оценить высказывание  $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$ .

Если из  $A$  следует  $B$ , то из  $B$  следует  $A$ .

Наверное, в общем случае это неверно. Например, пусть:

1.  $A$  означает «у меня есть кот»;
2.  $B$  означает «у меня есть животное».

Тогда:

1.  $A \rightarrow B$  выполнена всегда;
2.  $B \rightarrow A$  может не выполняться: скажем, у меня есть собака, но нет кота.

## Оценка высказываний

Высказывание  $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$  ложно, если, например:

- ▶  $A$  — «у меня есть кот»;
- ▶  $B$  — «у меня есть животное»;
- ▶ у меня есть собака, но нет кота.

Иначе:  $A$  ложно,  $B$  истинно, тогда высказывание ложно.

Чтобы задать оценку высказываний:

- ▶ Зафиксируем множество истинностных значений  $V = \{И, Л\}$
- ▶ Определим функцию оценки переменных (*интерпретацию*)  $f : P \rightarrow V$  ( $P$  — множество пропозициональных переменных).

Если  $\llbracket A \rrbracket = Л$  и  $\llbracket B \rrbracket = И$ , то  $\llbracket (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \rrbracket = Л$

## Указание функции оценки (метаязык)

- ▶ Синтаксис для указания функции оценки переменных

$$\llbracket \alpha \rrbracket^{X_1:=v_1, \dots, X_n:=v_n}$$

- ▶ Это всё метаязык — потому полагаемся на здравый смысл

$$\llbracket A \& B \& (C \rightarrow C) \rrbracket^{A:=I, B:=\llbracket \neg A \rrbracket}$$

## Оценим высказывания рекурсивно

- ▶ Переменные

$$\llbracket X \rrbracket = f(X) \qquad \llbracket X \rrbracket^{X:=a} = a$$

- ▶ Отрицание

$$\llbracket \neg \alpha \rrbracket = \begin{cases} Л, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = И \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$

- ▶ Конъюнкция

$$\llbracket \alpha \& \beta \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket = И \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$$

- ▶ Дизъюнкция

$$\llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket = \begin{cases} Л, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket = Л \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$

- ▶ Импликация

$$\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = \begin{cases} Л, & \text{если } \llbracket \alpha \rrbracket = И, \llbracket \beta \rrbracket = Л \\ И, & \text{иначе} \end{cases}$$



# Тавтологии

Если  $\alpha$  истинна при любой оценке переменных, то она *общезначима* (является *тавтологией*):

$$\models \alpha$$

Выражение  $A \rightarrow A$  — тавтология. Переберём все возможные значения единственной переменной  $A$ :

$$\begin{aligned}\llbracket A \rightarrow A \rrbracket^{A:=И} &= И \\ \llbracket A \rightarrow A \rrbracket^{A:=Л} &= И\end{aligned}$$

Выражение  $A \rightarrow \neg A$  тавтологией не является:

$$\llbracket A \rightarrow \neg A \rrbracket^{A:=И} = Л$$

## Ещё определения

- ▶ Если  $\alpha$  истинна при любой оценке переменных, при которой истинны высказывания  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , будем говорить, что  $\alpha$  — *следствие* этих высказываний:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_n \models \alpha$$

- ▶ Истинна при какой-нибудь оценке — *выполнима*.
- ▶ Не истинна ни при какой оценке — *невыполнима*.
- ▶ Не истинна при какой-нибудь оценке — *опровержима*.

# Теория доказательств

- ▶ Из чего состоит доказательство (неформально):
  1. Аксиомы — утверждения, от которых отталкиваемся.
  2. Правила вывода — способы делать умозаключения, переходить от одних утверждений к другим.
- ▶ Давайте определим формально, что такое аксиомы и правила вывода, и затем дадим формальное определение доказательству как таковому.

# Схемы высказываний: определение

## Определение (схема высказывания)

*Строка, строящаяся по правилам для построения высказываний, с одним отличием — вместо пропозициональных переменных можно указывать маленькие греческие буквы.*

*По-простому: схемы высказываний — высказывания с метаварiableными*

## Пример

- ▶  $(A \rightarrow \alpha) \vee (\beta \rightarrow B)$
- ▶  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
- ▶  $A \vee B \ \& \ A$

# Схемы высказываний: определение

## Определение

*Будем говорить, что высказывание  $\sigma$  строится (иначе: задаётся) по схеме  $\mathcal{W}$ , если существует такая замена метаварiableных  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  в высказывании на какие-либо выражения  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , что после её проведения получается высказывание  $\sigma$ :*

$$\sigma = \mathcal{W}[\varphi_1 := \varphi_1][\varphi_2 := \varphi_2] \dots [\varphi_n := \varphi_n]$$

*Заметьте, здесь  $\varphi_i$  — мета-метаварiableные для метаварiableных, а  $\mathcal{W}$  — мета-метаварiableная для схем.*

## Схемы высказываний: примеры

Схема

$$A \rightarrow \alpha \vee B \vee \alpha$$

задаёт, к примеру, следующие высказывания:

- ▶  $A \rightarrow X \vee B \vee X$ , при  $\alpha := X$ .
- ▶  $A \rightarrow (M \rightarrow N) \vee B \vee (M \rightarrow N)$ , при  $\alpha := M \rightarrow N$ .

и **HE** задаёт следующие высказывания:

- ▶  $A \rightarrow X \vee B \vee Y$  — все вхождения  $\alpha$  должны заменяться одинаково во всём выражении.
- ▶  $(A \rightarrow (M \rightarrow N) \vee B \vee M) \rightarrow N$  — структура скобок должна сохраняться.

# Аксиомы исчисления высказываний

## Определение

*Назовём следующие схемы высказываний схемами аксиом исчисления высказываний:*

- (1)  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
- (2)  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
- (3)  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \& \beta$
- (4)  $\alpha \& \beta \rightarrow \alpha$
- (5)  $\alpha \& \beta \rightarrow \beta$
- (6)  $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
- (7)  $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
- (8)  $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
- (9)  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg \beta) \rightarrow \neg \alpha$
- (10)  $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$

*Все высказывания, которые задаются схемами аксиом, назовём аксиомами исчисления высказываний.*

# Правило вывода Modus Ponens

Первый, упомянувший правило — Теофраст (древнегреческий философ, IV-III век до н.э.).

Переход по следствию: «сейчас сентябрь; если сейчас сентябрь, то сейчас осень; следовательно, сейчас осень».

Если имеет место  $\alpha$  и  $\alpha \rightarrow \beta$ , то имеет место  $\beta$ .

$$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$



# Доказательство

## Определение (доказательство в исчислении высказываний)

Доказательством (выводом) назовём конечную последовательность высказываний  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ , причём каждое  $\delta_i$  либо:

- ▶ является аксиомой — существует замена метаварiable для какой-либо схемы аксиом, позволяющая получить формулу  $\delta_i$ , либо
- ▶ получается из  $\delta_1, \dots, \delta_{i-1}$  по правилу *Modus Ponens* — существуют такие индексы  $j < i$  и  $k < i$ , что  $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_i$ .

Пример:

$A \rightarrow (A \rightarrow A),$   
 $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A),$   
 $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A),$   
 $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A),$   
 $A \rightarrow A$

## Доказательство подробнее

Почему это доказательство? То же подробнее:

$$(1) \quad A \rightarrow (A \rightarrow A) \quad \text{Сх. акс. 1}$$

$$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \quad [\alpha, \beta := A]$$

$$(2) \quad (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) \quad \text{Сх. акс. 2}$$

$$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \quad [\alpha, \gamma := A; \beta := A \rightarrow A]$$

$$(3) \quad (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) \quad \text{М.Р. 1,2}$$

$$\frac{A \rightarrow (A \rightarrow A) \quad (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)}{(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)}$$

$$(4) \quad A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A) \quad \text{Сх. акс. 1}$$

$$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \quad [\alpha := A, \beta := A \rightarrow A]$$

$$(5) \quad A \rightarrow A \quad \text{М.Р. 4,3}$$

$$\frac{A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A) \quad (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)}{A \rightarrow A}$$

## Дополнительные определения

### Определение (доказательство формулы $\alpha$ )

— такое доказательство (вывод)  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ , что  $\alpha \equiv \delta_n$ .

Формула  $\alpha$  доказуема (выводима), если существует её доказательство.

Обозначение:

$$\vdash \alpha$$

### Определение (вывод формулы $\alpha$ из гипотез $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ )

— такая последовательность  $\delta_1, \dots, \delta_n$ , причём каждое  $\delta_i$  либо:

- ▶ является аксиомой;
- ▶ либо получается по правилу *Modus Ponens* из предыдущих;
- ▶ либо является одной из гипотез: существует  $t : \delta_i \equiv \gamma_t$ .

Формула  $\alpha$  выводима из гипотез  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ , если существует её вывод.

Обозначение:

$$\gamma_1, \dots, \gamma_k \vdash \alpha$$

# Корректность и полнота

## Определение (корректность теории)

*Теория корректна, если любое доказуемое в ней утверждение общезначимо. То есть,  $\vdash \alpha$  влечёт  $\models \alpha$ .*

## Определение (полнота теории)

*Теория полна, если любое общезначимое в ней утверждение доказуемо. То есть,  $\models \alpha$  влечёт  $\vdash \alpha$ .*

# Корректность исчисления высказываний

## Лемма (корректность)

Если  $\vdash \alpha$ , то  $\models \alpha$

## Доказательство.

Индукция по длине вывода  $n$ . Для каждого высказывания  $\delta_n$  из вывода разбор случаев:

1. Аксиома — убедиться, что все аксиомы общезначимы.
2. Modus Ponens  $j, k$  — убедиться, что если  $\models \delta_j$  и  $\models \delta_j \rightarrow \delta_n$ , то  $\models \delta_n$ .



## Общезначимость схемы аксиом №9

Общезначимость схемы аксиом — истинность каждой аксиомы, задаваемой данной схемой, при любой оценке:

$$\llbracket (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha \rrbracket = \text{И}$$

Построим таблицу истинности формулы в зависимости от оценки  $\alpha$  и  $\beta$ :

$\llbracket \alpha \rrbracket$	$\llbracket \beta \rrbracket$	$\llbracket \neg\alpha \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket$	$\llbracket \alpha \rightarrow \neg\beta \rrbracket$	$\llbracket (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha \rrbracket$	$\llbracket (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha \rrbracket$
Л	Л	И	И	И	И	И
Л	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	И
И	И	Л	И	Л	И	И

## Общезначимость заключения правила Modus Ponens

Пусть в выводе есть формулы  $\delta_j$ ,  $\delta_k = \delta_j \rightarrow \delta_n$ ,  $\delta_n$  (причём  $j < n$  и  $k < n$ ).

Фиксируем какую-нибудь оценку. По индукционному предположению,  $\delta_j$  и  $\delta_j \rightarrow \delta_n$  общезначимы. Поэтому при данной оценке  $\llbracket \delta_j \rrbracket = \text{И}$  и  $\llbracket \delta_j \rightarrow \delta_n \rrbracket = \text{И}$ .

Построим таблицу истинности для импликации:

$\llbracket \delta_j \rrbracket$	$\llbracket \delta_n \rrbracket$	$\llbracket \delta_j \rightarrow \delta_n \rrbracket$
Л	Л	И
Л	И	И
И	Л	Л
И	И	И

Из таблицы видно, что  $\llbracket \delta_n \rrbracket = \text{Л}$  только если  $\llbracket \delta_j \rightarrow \delta_n \rrbracket = \text{Л}$  или  $\llbracket \delta_j \rrbracket = \text{Л}$ . Значит, это невозможно, и  $\llbracket \delta_n \rrbracket = \text{И}$