О равенствах

С целью уменьшения нагрузки на символ $(=)$ договоримся об альтернативных символах:

символ	использование
$(=)$	▶ равенство в предметных языках ▶ равенство чисел, значений в метаязыке (при наличии традиции): $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
$(:=)$	▶ введение обозначений: *пусть* $\Xi := \{x_1, x_2, x_3\}$ ▶ указание значений для модели: $[\![A \to A]\!]^{A:=И}$
$(\equiv)$	▶ Равенство строк после подстановки метапеременных: *пусть дано доказательство* $\delta_1, \dots, \delta_n$, *причём* $\delta_n \equiv \alpha \to \beta$

Интуиционистская логика

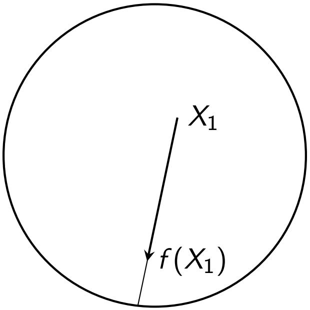
Доказательства чистого существования

Теорема (Брауэра о неподвижной точке)

Любое непрерывное отображение f шара в $\mathbb{R}^n$ на себя имеет неподвижную точку

Доказательство.

Не существует непрерывного отображения шара на границу (без доказательства), однако:



□

Один из примеров подробно

Теорема

Существует пара иррациональных чисел a и b, такая, что a^b — рационально.

- 2^5, 3^3, 7^{10}, $\sqrt{2}^2$ — рациональны;
- $2^{\sqrt{2}}$, e^π — иррациональны (как это доказать?);

Один из примеров подробно

Теорема

Существует пара иррациональных чисел a и b, такая, что a^b — рационально.

Доказательство.

Рассмотрим $a = b = \sqrt{2}$ и рассмотрим a^b. Возможны два варианта:

1. $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — рационально;
2. $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — иррационально; отлично, тогда возьмём $a_1 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и получим

$$a_1^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

$\square$

Интуиционизм

"Over de Grondslagen der Wiskunde" (Брауэр, 1907 г.)
Основные положения:

1. Математика не формальна.
2. Математика независима от окружающего мира.
3. Математика не зависит от логики — это логика зависит от математики.

BHK-интерпретация логических связок

BHK — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

- $\alpha \mathbin{\&} \beta$ построено, если построены α и β
- $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β, и мы знаем, что именно
- $\alpha \rightarrow \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β
- $\perp$ — конструкция, не имеющая построения
- $\neg\alpha$ построено, если построено $\alpha \rightarrow \perp$

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Возьмём за α нерешённую проблему, например, $P = NP$

Авторам в данный момент не известно, выполнено $P = NP$ или же $P \neq NP$.

Отличия импликации

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \to B) \lor (B \to C) \lor (C \to A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- A — 16.09.2023 в Санкт-Петербурге идёт дождь;
- B — 16.09.2023 в Санкт-Петербурге светит солнце;
- C — во 2 семестре староста группы 3239 получил «отлично» по матанализу.

Импликацию можно понимать как «формальную» и как «материальную».

- Материальная импликация $A \to B$ — надо посмотреть в окно.
- Формальная импликация $A \to B$ места не имеет (причинно-следственной связи нет).

Формализация

Формализация интуиционистской логики возможна, но интуитивное понимание — основное.

Определение

Аксиоматика интуиционистского исчисления высказываний в гильбертовском стиле: аксиоматика КИВ, в которой 10 схема аксиом

$$\textit{(10)} \quad \neg\neg\alpha \to \alpha$$

заменена на

$$\textit{(10и)} \quad \alpha \to \neg\alpha \to \beta$$

Немного об общей топологии.

Топологическое пространство

Определение

Топологическим пространством называется упорядоченная пара $\langle X, \Omega \rangle$, *где* X — *некоторое множество, а* $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$, *причём:*

1. $\varnothing, X \in \Omega$
2. *если* $A_1, \ldots, A_n \in \Omega$, *то* $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \Omega$;
3. *если* $\{A_\alpha\}$ — *семейство множеств из* Ω, *то и* $\bigcup_\alpha A_\alpha \in \Omega$.

Множество Ω *называется топологией. Элементы* Ω *называются открытыми множествами.*

Определение

$\mathcal{B}$ — *база топологического пространства* $\langle X, \Omega \rangle$ ($\mathcal{B} \subseteq \Omega$), *если всевозможные объединения множеств (в т.ч. пустые) из* $\mathcal{B}$ *дают* Ω.

Примеры топологических пространств

Определение

Евклидово пространство (евклидова топология) на $\mathbb{R}$*: база топологии* $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Определение

Дискретная топология: $\langle X, \mathcal{P}(X)\rangle$ *— все множества открыты.*

Определение

Топология стрелки: $\langle \mathbb{R}, \{(x, +\infty) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}\rangle$ *— открыты все положительные лучи.*

Метрические пространства

Определение

Метрикой на X назовём множество, на котором определена функция расстояния $d : X^2 \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $d(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(неравенство треугольника)*

Определение

Открытым ε-шаром с центром в точке $x \in X$ назовём $O_\varepsilon(x) = \{t \in X \mid d(x, t) < \varepsilon\}$.

Определение

Если X — некоторое множество и d — метрика на X, то будем говорить, что топологическое пространство, задаваемое базой $\mathcal{B} = \{O_\varepsilon(x) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^+, x \in X\}$, порождено метрикой d.

Непрерывность

Определение

Функция $f : X \to Y$ *непрерывна, если прообраз любого открытого множества открыт.*

Пример

Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *всегда непрерывна (при дискретной топологии на* $\mathbb{N}$*), поскольку любое множество в* $\mathbb{N}$ *открыто.*

Компактность

Определение

Будем говорить, что множество компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие

Пример

Множество $\{0, 1\}$ *в дискретной топологии компактно.*

Пример

Интервал $(0, 1)$ *в* $\mathbb{R}$ *не компактен — например, рассмотрим покрытие* $\{(\varepsilon, 1) \mid \varepsilon \in (0, 1)\}$

Подпространства и связные множества

Определение

Пространство $\langle X_1, \Omega_1 \rangle$ *— подпространство пространства* $\langle X, \Omega \rangle$, *если* $X_1 \subseteq X$ *и* $\Omega_1 = \{A \cap X_1 | A \in \Omega\}$.

Пример

$[0,1]$ *с евклидовой топологией на отрезке — подпространство* $\mathbb{R}$. $[0, 0.5)$ *открыто в* $[0,1]$, *так как* $[0, 0.5) = (-0.5, 0.5) \cap [0,1]$.

Определение

Пространство $\langle X, \Omega \rangle$ *связно, если нет* $A, B \in \Omega$, *что* $A \cup B = X$, $A \cap B = \varnothing$ *и* $A, B \neq \varnothing$.

Пример

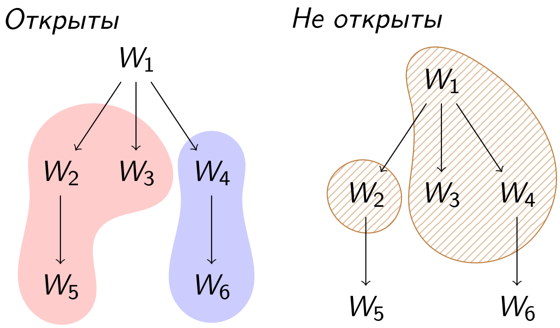
Пространство $(0,1] \cup [2,3)$ *в* $\mathbb{R}$ *несвязно: возьмём* $A = (0,1]$ *и* $B = [2,3)$.
Дискретное топологическое пространство $\langle X, \mathcal{P}(X) \rangle$ *несвязно при* $|X| > 1$: *пусть* $a \in X$, *тогда* $A = \{a\}$ *и* $B = X \setminus A$.

Топология на деревьях

Определение

Пусть некоторый лес задан конечным множеством вершин V и отношением $(\preceq)$, связывающим предков и потомков ($a \preceq b$, если b — потомок a). Тогда подмножество его вершин $X \subseteq V$ назовём открытым, если из $a \in X$ и $a \preceq b$ следует, что $b \in X$.

Пример



Связность деревьев

Лемма

Лес связен (является одним деревом) тогда и только тогда, когда соответствующее ему топологическое пространство связно.

Доказательство.

1. Лес связен: пусть не так и найдутся открытые непустые A, B, что $A \cup B = V$ и $A \cap B = \varnothing$. Пусть $v \in V$ — корень дерева и пусть $v \in A$ (для определённости). Тогда $A = \{x \mid v \preceq x\}$ и $B = \varnothing$.
2. Пусть лес топологически связен, но есть несколько разных корней $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Возьмём $A_i = \{x \mid v_i \preceq x\}$. Тогда все A_i открыты, непусты, дизъюнктны и $V = \cup A_i$.

□

Пишем скобки или нет?

Вы как пишете: $\sin x$ или $\sin(x)$?

```
int main () {
    return sizeof 0;
}
```

Соглашение о записи:

$$\mathrm{sizeof}\ \varnothing = \mathrm{sizeof}(\varnothing) = 0$$

но:

$$\mathrm{sizeof}\{\varnothing\} = \mathrm{sizeof}(\{\varnothing\}) = 1$$

Минимальные и максимальные элементы

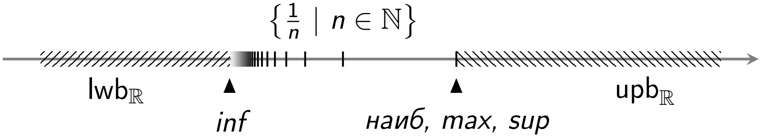
Определение

Множество нижних граней $X \subseteq \mathcal{U}$: $\mathrm{lwb}_{\mathcal{U}} X = \{y \in \mathcal{U} \mid y \preceq x$ *при всех* $x \in X\}$.
Множество верхних граней $X \subseteq \mathcal{U}$: $\mathrm{upb}_{\mathcal{U}} X = \{y \in \mathcal{U} \mid x \preceq y$ *при всех* $x \in X\}$.

Определение

минимальный $(m \in X)$: *нет меньшего*	*при всех* $y \in X$, $y \preceq m$ *влечёт* $y = m$
максимальный $(m \in X)$: *нет большего*	*при всех* $y \in X$, $m \preceq y$ *влечёт* $y = m$
наименьший $(m \in X)$: *меньше всех*	*при всех* $y \in X$ *выполнено* $m \preceq y$
наибольший $(m \in X)$: *больше всех*	*при всех* $y \in X$ *выполнено* $y \preceq m$
инфимум: наибольшая нижняя грань	$\inf_{\mathcal{U}} X = \text{наиб}(\mathrm{lwb}_{\mathcal{U}} X)$
супремум: наименьшая верхняя грань	$\sup_{\mathcal{U}} X = \text{наим}(\mathrm{upb}_{\mathcal{U}} X)$

Пример



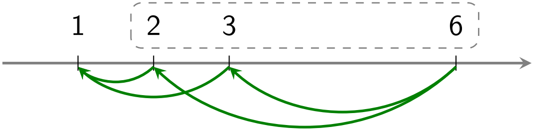
Пример: делимость

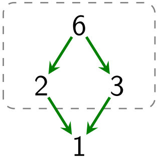
На $\mathbb{N}$ положим $a \preceq b$, если $b \mathrel{\vdots} a$.

Пример

Множество $\{2, 3, 6\}$

Минимальные:	*2,3*	$2 \mathrel{\vdots} x$ *влечёт* $x = 1$ *или* $x = 2$, *то же про 3*
Наименьший:	*отсутствует*	$2 \not\preceq 3$ и $3 \not\preceq 2$
Инфимум:	*1*	$1 \preceq x$ *при всех* $x \in \mathbb{N}$





Пример

Рассмотрим $X = \{1; 1.4; 1.41; 1.414; 1.4142; \ldots\}$ — *множество десятичных приближений* $\sqrt{2}$, $\preceq \, = \, \leqslant$. *Тогда* $\operatorname{upb}_{\mathbb{Q}} X$ *состоит из рациональных чисел, бо́льших* $\sqrt{2}$. *При этом* $\sqrt{2} \notin \operatorname{upb}_{\mathbb{Q}} X$, *а значит* $\sup_{\mathbb{Q}} X$ *не определён.*

Пример: внутренность множества

Определение (внутренность множества)

Рассмотрим $\langle X, \Omega \rangle$ *и возьмём* $(\subseteq)$ *как отношение частичного порядка на* $\mathcal{P}(X)$*.*
Тогда $A^\circ := \inf_\Omega(\{A\})$*.*

Теорема

A° *определена для любого* A*.*

Доказательство.

Пусть $V = \mathrm{lwb}_\Omega\{A\} = \{Q \in \Omega \mid Q \subseteq A\}$. Тогда $\inf_\Omega\{A\} = \bigcup V$.
Напомним, $\inf_\mathcal{U} T = \text{наиб}(\mathrm{lwb}_\mathcal{U} T)$.

1. Покажем принадлежность: $\bigcup V \subseteq A$ и $\bigcup V \in \Omega$ как объединение открытых.
2. Покажем, что все из V меньше или равны: пусть $X \in V$, то есть $V = \{X, \dots\}$, тогда $X \subseteq X \cup \dots$, тогда $X \subseteq \bigcup V$

□

Решётка

Определение

Решёткой называется упорядоченная пара: $\langle X, (\preceq)\rangle$*, где* X *— некоторое множество, а* $(\preceq)$ *— частичный порядок на* X*, такой, что для любых* $a, b \in X$ *определены* $a + b = \sup\{a, b\}$ *и* $a \cdot b = \inf\{a, b\}$*.*

То есть, $a + b$ — наименьший элемент c, что $a \preceq c$ и $b \preceq c$.

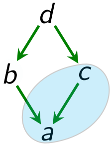
Пример

$\langle \Omega, (\subseteq)\rangle$ *— решётка.* $\langle \mathbb{N} \setminus \{1\}, (\vdots)\rangle$ *— не решётка.*

Псевдодополнение

Псевдодополнением $a \to b$ называется наибольший из $\{x \mid a \cdot x \preceq b\}$.

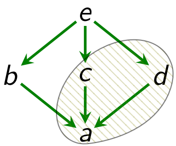
Пример



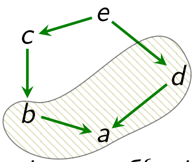
$$a \cdot b = a$$
$$b \cdot b = b$$
$$c \cdot b = a$$
$$d \cdot b = b$$

Здесь $b \to c = \textit{наиб}\{x \mid b \cdot x \preceq c\} = \textit{наиб}\{a, c\} = c$

Пример (нет псевдодополнения: диамант и пентагон)



$b \to c = \textit{наиб}\{a, c, d\}$



$c \to b = \textit{наиб}\{a, b, d\}$

Особые решётки

Определение

Дистрибутивной решёткой называется такая, что для любых a, b, c *выполнено* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Определение

Импликативная решётка — такая, в которой для любых элементов есть псевдодополнение.

Лемма

Любая импликативная решётка — дистрибутивна.

Ноль и один

Определение

0 — наименьший элемент решётки, а 1 — наибольший элемент решётки

Лемма

В любой импликативной решётке $\langle X, (\preceq) \rangle$ есть 1

Доказательство.

Рассмотрим $a \to a$, тогда $a \to a = \text{наиб}\{c \mid a \cdot c \preceq a\} = \text{наиб} X = 1$. $\square$

Определение

Импликативная решётка с 0 — псевдобулева алгебра (алгебра Гейтинга). В такой решётке определено $\sim a := a \to 0$

Определение

Булева алгебра — псевдобулева алгебра, в которой $a + \sim a = 1$ *для всех* a.

Булева алгебра является булевой алгеброй в смысле решёток

Доказательство.

Символы булевой алгебры: $(\&), (\vee), (\neg)$, Л, И.
Символы решёток: $(+), (\cdot), (\rightarrow), (\sim), 0, 1$
Упорядочивание: Л $\le$ И.

1. $a \,\&\, b = \min(a, b)$, $a \vee b = \max(a, b)$ (анализ таблицы истинности), отсюда $a \cdot b = a \,\&\, b$ и $a + b = a \vee b$.
2. $a \rightarrow b = \neg a \vee b$, так как:
$$a \rightarrow b = \text{наиб}\{c | c \,\&\, a \le b\} = \begin{cases} \neg a, & b = \text{Л} \\ \text{И}, & b = \text{И} \end{cases}$$
3. $0 = \min\{\text{И}, \text{Л}\} = \text{Л}$, $1 = \max\{\text{И}, \text{Л}\} = \text{И}$, $\sim a = a \rightarrow 0 = \neg a \vee \text{Л} = \neg a$.
Заметим, что $a + \sim a = a \vee \neg a = \text{И}$.

Итого: булева алгебра — импликативная решётка с 0 и с $a + \sim a = 1$.

□

Множества и топологии как решётки

Лемма

$\langle \mathcal{P}(X), (\subseteq) \rangle$ — *булева алгебра.*

Доказательство.

$a \rightarrow b = \text{наиб}\{c \subseteq X \mid a \cap c \subseteq b\}$. Т.е. наибольшее, не содержащее точек из $a \setminus b$.
Т.е. $X \setminus (a \setminus b)$. То есть $(X \setminus a) \cup b$.
$a + \sim a = a \cup (X \setminus a) \cup \varnothing = X$ □

Лемма

$\langle \Omega, (\subseteq) \rangle$ — *псевдобулева алгебра.*

Доказательство.

$a \rightarrow b = \text{наиб}\{c \in \Omega \mid a \cap c \subseteq b\}$. Т.е. наибольшее открытое, не содержащее точек из $a \setminus b$. То есть, $(X \setminus (a \setminus b))^{\circ}$. То есть, $((X \setminus a) \cup b)^{\circ}$. □

Решётки и исчисление высказываний

Определение

Пусть некоторое исчисление высказываний оценивается значениями из некоторой решётки. Назовём оценку согласованной с исчислением, если $[\![\alpha \mathbin{\&} \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \cdot [\![\beta]\!]$, $[\![\alpha \vee \beta]\!] = [\![\alpha]\!] + [\![\beta]\!]$, $[\![\alpha \to \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \to [\![\beta]\!]$, $[\![\neg\alpha]\!] = \sim [\![\alpha]\!]$, $[\![A \mathbin{\&} \neg A]\!] = 0$, $[\![A \to A]\!] = 1$.

Теорема

Любая псевдобулева алгебра, являющаяся согласованной оценкой интуиционистского исчисления высказываний, является его корректной моделью: если $\vdash \alpha$, *то* $[\![\alpha]\!] = 1$.

Теорема

Любая булева алгебра, являющаяся согласованной оценкой классического исчисления высказываний, является его корректной моделью: если $\vdash \alpha$, *то* $[\![\alpha]\!] = 1$