Теоремы об исчислении высказываний.

Напоминание: истинность

- Если α истинна при любой оценке переменных, то α общезначима:
$$\models \alpha$$
- Если α истинна при любой оценке переменных, при которой истинны высказывания $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, будем говорить, что α — *следствие* этих высказываний:
$$\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \alpha$$
- Истинна при какой-нибудь оценке — *выполнима*.
- Не истинна ни при какой оценке — *невыполнима*.
- Не истинна при какой-нибудь оценке — *опровержима*.

Выводимость из гипотез

Определение (доказательство формулы α)

— *такое доказательство (вывод)* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, *что* $\alpha \equiv \delta_n$.
Формула α *доказуема (выводима), если существует её доказательство.*
Обозначение:

$$\vdash \alpha$$

Определение (вывод формулы α из гипотез $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$)

— *такая последовательность* $\delta_1, \ldots, \delta_n$, *причём каждое* δ_i *либо:*

- *является аксиомой;*
- *либо получается по правилу Modus Ponens из предыдущих;*
- *либо является одной из гипотез: существует* $t : \delta_i \equiv \gamma_t$.

Формула α *выводима из гипотез* $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, *если существует её вывод.*
Обозначение:

$$\gamma_1, \ldots, \gamma_k \vdash \alpha$$

Корректность и полнота

Определение (корректность теории)

Теория корректна, если любое доказуемое в ней утверждение общезначимо. То есть, $\vdash \alpha$ *влечёт* $\models \alpha$*.*

Определение (полнота теории)

Теория семантически полна, если любое общезначимое в ней утверждение доказуемо. То есть, $\models \alpha$ *влечёт* $\vdash \alpha$*.*

Корректность исчисления высказываний

Теорема (корректность)

Если $\vdash \alpha$, *то* $\models \alpha$

Доказательство.

Индукция по длине вывода n.

- База, $n = 1$ — частный случай перехода (без правила Modus Ponens)
- Переход. Пусть для любого доказательства длины n формула δ_n общезначима. Тогда рассмотрим обоснование δ_{n+1} и разберём случаи:
  1. Аксиома — убедиться, что все аксиомы общезначимы.
  2. Modus Ponens j, k — убедиться, что если $\models \delta_j$ и $\models \delta_j \to \delta_{n+1}$, то $\models \delta_{n+1}$.

$\square$

Общезначимость схемы аксиом №9

Общезначимость схемы аксиом — истинность каждой аксиомы, задаваемой данной схемой, при любой оценке:

$$[\![(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha]\!] = \text{И}$$

Построим таблицу истинности формулы в зависимости от оценки α и β:

$[\![\alpha]\!]$	$[\![\beta]\!]$	$[\![\neg\alpha]\!]$	$[\![\alpha \rightarrow \beta]\!]$	$[\![\alpha \rightarrow \neg\beta]\!]$	$[\![(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha]\!]$	$[\![(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha]\!]$
Л	Л	И	И	И	И	И
Л	И	И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И	Л	И
И	И	Л	И	Л	И	И

Общезначимость заключения правила Modus Ponens

Пусть в выводе есть формулы δ_j, $\delta_k \equiv \delta_j \to \delta_{n+1}$, δ_{n+1} (причём $j < n+1$ и $k < n+1$).

Фиксируем какую-нибудь оценку. По индукционному предположению, δ_j и $\delta_j \to \delta_{n+1}$ общезначимы. Поэтому при данной оценке $[\![\delta_j]\!] \equiv$ И и $[\![\delta_j \to \delta_{n+1}]\!] \equiv$ И.

Построим таблицу истинности для импликации:

$[\![\delta_j]\!]$	$[\![\delta_{n+1}]\!]$	$[\![\delta_j \to \delta_{n+1}]\!]$
Л	Л	И
Л	И	И
И	Л	Л
И	И	И

Из таблицы видно, что $[\![\delta_{n+1}]\!] =$ Л только если $[\![\delta_j \to \delta_{n+1}]\!] =$ Л или $[\![\delta_j]\!] =$ Л. Значит, это невозможно, и $[\![\delta_{n+1}]\!] =$ И

Контекст, метаязык

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами, (Γ, Δ_1, ...) списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Списки можно указывать через запятую:

$$\Gamma, \Delta, \zeta \vdash \alpha$$

это означает то же, что и

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \zeta \vdash \alpha$$

если

$$\Gamma := \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}, \quad \Delta := \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *выполнено тогда и только тогда, когда выполнено* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Пусть $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, покажем $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

То есть по условию существует вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \to \beta$$

Тогда следующая последовательность — тоже вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \to \beta, \alpha, \beta$$

Доказательство: $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ влечёт $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

№ п/п	формула	пояснение
(1)	δ_1	в соответствии с исходным доказательством
	$\dots$	
$(n-1)$	δ_{n-1}	в соответствии с исходным доказательством
(n)	$\alpha \to \beta$	в соответствии с исходным доказательством
$(n+1)$	α	гипотеза
$(n+2)$	β	Modus Ponens n+1, n

Вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ предоставлен, первая часть теоремы доказана.

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.
Построим «черновик» вывода, приписав α слева к каждой формуле:

$$\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \dots, \alpha \to \delta_{n-1}, \alpha \to \beta$$

Данная последовательность формул не обязательно вывод: $\Gamma := \varnothing$, $\alpha := A$

$$\delta_1 := A \to B \to A$$

припишем A слева — вывод не получим:

$$\alpha \to \delta_1 \equiv A \to (A \to B \to A)$$

Последовательности, странная нумерация

Определение (конечная последовательность)

Функция $\delta : 1 \ldots n \to \mathcal{F}$

Определение (конечная последовательность, индексированная дробными числами)

Функция $\zeta : I \to \mathcal{F}$, *где* $I \subset \mathbb{Q}$ *и* $|I| \in \mathbb{N}$

Пример (странный мотивационный пример: язык Фокал)

Программа	*Вывод*
`10.1    t n,!`	`=     0.0000`
`10.15   s n = n+1`	`=     1.0000`
`10.17   i (n-3) 10.1,11.0,11.0`	`=     2.0000`
`11.0    t "That's all"`	`That's all`

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство.

(индукция по длине вывода). Если $\delta_1, \dots, \delta_n$ — вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то найдётся вывод ζ_k для $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, причём $\zeta_1 \equiv \alpha \to \delta_1, \dots, \zeta_n \equiv \alpha \to \delta_n$.

- База ($n = 1$): частный случай перехода (без M.P.).
- Переход. Пусть $\delta_1, \dots, \delta_{n+1}$ — исходный вывод. И пусть (по индукционному предположению) уже по начальному фрагменту $\delta_1, \dots, \delta_n$ построен вывод ζ_k утверждения $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_n$.
  Но δ_{n+1} как-то был обоснован — разберём случаи:
  1. δ_{n+1} — аксиома или $\delta_{n+1} \in \Gamma$
  2. $\delta_{n+1} \equiv \alpha$
  3. δ_{n+1} — Modus Ponens из δ_j и $\delta_k \equiv \delta_j \to \delta_{n+1}$.

  В каждом из случаев можно дополнить черновик до полноценного вывода.

$\square$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, случай аксиомы

№ п/п	новый вывод	пояснение
	...	
(1)	$\alpha \to \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \to \delta_2$	
	...	
(n)	$\alpha \to \delta_n$	
	$\alpha \to \delta_{n+1}$	δ_{n+1} — аксиома, либо $\delta_{n+1} \in \Gamma$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, случай аксиомы

№ п/п	новый вывод	пояснение
	$\dots$	
(1)	$\alpha \to \delta_1$	
	$\dots$	
(2)	$\alpha \to \delta_2$	
	$\dots$	
$(n+0.3)$	$\delta_{n+1} \to \alpha \to \delta_{n+1}$	схема аксиом 1
$(n+0.6)$	δ_{n+1}	аксиома, либо $\delta_{n+1} \in \Gamma$
$(n+1)$	$\alpha \to \delta_{n+1}$	Modus Ponens $n+0.3$, $n+0.6$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, случай $\delta_i \equiv \alpha$

№ п/п	новый вывод	пояснение
	$\dots$	
(1)	$\alpha \to \delta_1$	
	$\dots$	
(2)	$\alpha \to \delta_2$	
	$\dots$	
$(n+0.2)$	$\alpha \to (\alpha \to \alpha)$	Сх. акс. 1
$(n+0.4)$	$(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$	Сх. акс. 2
$(n+0.6)$	$(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$	M.P. $n+0.2$, $n+0.4$
$(n+0.8)$	$\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$	Сх. акс. 1
$(n+1)$	$\alpha \to \alpha$	M.P. $n+0.8$, $n+0.6$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, случай Modus Ponens

№ п/п	новый вывод	пояснение
	...	
(1)	$\alpha \to \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \to \delta_2$	
	...	
(j)	$\alpha \to \delta_j$	
	...	
(k)	$\alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}$	
	...	
($n+0.3$)	$(\alpha \to \delta_j) \to (\alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}) \to (\alpha \to \delta_{n+1})$	Сх. акс. 2
($n+0.6$)	$(\alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}) \to (\alpha \to \delta_{n+1})$	M.P. j, $n+0.3$
($n+1$)	$\alpha \to \delta_{n+1}$	Modus Ponens $n+0.6$, k

Некоторые полезные правила

Лемма (Правило контрапозиции)

Каковы бы ни были формулы α и β, справедливо, что $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$.

Лемма (правило исключённого третьего)

Какова бы ни была формула α, $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$.

Лемма (об исключении допущения)

Пусть справедливо $\Gamma, \rho \vdash \alpha$ *и* $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$. *Тогда также справедливо* $\Gamma \vdash \alpha$.

Доказательство.

Доказывается с использованием лемм, указанных выше. $\square$

Теорема о полноте исчисления высказываний

Теорема

Если $\models \alpha$*, то* $\vdash \alpha$*.*

Специальное обозначение

Определение (условное отрицание)

Зададим некоторую оценку переменных, такую, что $[\![\alpha]\!] = x$*.*
Тогда условным отрицанием формулы α *назовём следующую формулу* $(\!|\alpha|\!)$*:*

$$(\!|\alpha|\!) = \begin{cases} \alpha, & x = \text{И} \\ \neg\alpha, & x = \text{Л} \end{cases}$$

Аналогично записи для оценок, будем указывать оценку переменных, если это потребуется / будет неочевидно из контекста:

$$(\!|\neg X|\!)^{X:=\text{Л}} = \neg X \qquad (\!|\neg X|\!)^{X:=\text{И}} = \neg\neg X$$

Также, если $\Gamma := \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, то за $(\!|\Gamma|\!)$ обозначим $(\!|\gamma_1|\!), (\!|\gamma_2|\!), \dots (\!|\gamma_n|\!)$.

Таблицы истинности и высказывания

Рассмотрим связку «импликация» и её таблицу истинности:

$[\![A]\!]$	$[\![B]\!]$	$[\![A \to B]\!]$	формула
Л	Л	И	$\neg A, \neg B \vdash A \to B$
Л	И	И	$\neg A, B \vdash A \to B$
И	Л	Л	$A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$
И	И	И	$A, B \vdash A \to B$

Заметим, что с помощью условного отрицания данную таблицу можно записать в одну строку:

$$(\!|A|\!), (\!|B|\!) \vdash (\!|A \to B|\!)$$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$, *то* $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки $(\star)$ и докажем в них каждую строку:
$$(\!|\varphi|\!), (\!|\psi|\!) \vdash (\!|\varphi \star \psi|\!)$$
2. Построим таблицу истинности для α и докажем в ней каждую строку:
$$(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\alpha|\!)$$
3. Если формула общезначима, то в ней все строки будут иметь вид $(\!|\Xi|\!) \vdash \alpha$, потому от гипотез мы сможем избавиться и получить требуемое $\vdash \alpha$.

Шаг 1. Лемма о связках

Запись

$$(\!|\varphi|\!), (\!|\psi|\!) \vdash (\!|\varphi \star \psi|\!)$$

сводится к 14 утверждениям:

$$\begin{array}{rcl}
\neg\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \mathbin{\&} \psi) \\
\neg\varphi, \psi & \vdash & \neg(\varphi \mathbin{\&} \psi) \\
\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \mathbin{\&} \psi) \\
\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \mathbin{\&} \psi) \\
\neg\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \vee \psi) \\
\neg\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \vee \psi) \\
\varphi, \neg\psi & \vdash & (\varphi \vee \psi) \\
\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \vee \psi)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\neg\varphi, \neg\psi & \vdash & (\varphi \to \psi) \\
\neg\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \to \psi) \\
\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \to \psi) \\
\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \to \psi) \\
\varphi & \vdash & \neg\neg\varphi \\
\neg\varphi & \vdash & \neg\varphi
\end{array}$$

Шаг 2. Обобщение на любую формулу

Лемма (Условное отрицание формул)

Пусть пропозициональные переменные $\Xi := \{X_1, \dots, X_n\}$ *— все переменные, которые используются в формуле* α. *И пусть задана некоторая оценка переменных. Тогда,* $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\alpha|\!)$

Доказательство.

Индукция по длине формулы α.

- База: формула α — атомарная, т.е. $\alpha \equiv X_i$. Тогда при любом Ξ выполнено $(\!|\Xi|\!)^{X_i:=\text{И}} \vdash X_i$ и $(\!|\Xi|\!)^{X_i:=\text{Л}} \vdash \neg X_i$.
- Переход: $\alpha \equiv \varphi \star \psi$, причём $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\varphi|\!)$ и $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\psi|\!)$
  Тогда построим вывод:

$(1) \dots (n)$	$(\!|\varphi|\!)$	индукционное предположение
$(n+1) \dots (k)$	$(\!|\psi|\!)$	индукционное предположение
$(k+1) \dots (l)$	$(\!|\varphi \star \psi|\!)$	лемма о связках: $(\!|\varphi|\!)$ и $(\!|\psi|\!)$ доказаны выше, значит, их можно использовать как гипотезы

$\square$

Шаг 3. Избавляемся от гипотез

Лемма

Пусть при всех оценках переменных $(\!|\Xi|\!) \vdash \alpha$, *тогда* $\vdash \alpha$.

Доказательство.

Индукция по количеству переменных n.

- База: $n = 0$. Тогда $\vdash \alpha$ есть из условия.
- Переход: пусть $(\!|X_1, X_2, \dots X_{n+1}|\!) \vdash \alpha$. Рассмотрим 2^n пар выводов:

$$\frac{(\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!), \neg X_{n+1} \vdash \alpha \qquad (\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!), X_{n+1} \vdash \alpha}{(\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!) \vdash \alpha}$$

При этом, $(\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!) \vdash \alpha$ при всех оценках переменных $X_1, \dots X_n$. Значит, $\vdash \alpha$ по индукционному предположению. $\square$

Заключительные замечания

Теорема о полноте — конструктивна. Получающийся вывод — экспоненциальный по длине.
Несложно по изложенному доказательству разработать программу, строящую вывод.
Вывод для формулы с 3 переменными — порядка 3 тысяч строк.