

Теорема о полноте исчисления предикатов

Общая идея доказательства

1. Надо справиться со слишком большим количеством вариантов. Модель задаётся как $\langle D, F, P, X \rangle$.
2. Для оценки в модели важно только какие формулы истинны. Модели \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 «похожи», если $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}_1} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}_2}$ при всех φ .
3. Поступим так:
 - 3.1 построим эталонное множество моделей \mathfrak{M} , каждая модель соответствует списку истинных формул, *но им не является*;
 - 3.2 докажем полноту \mathfrak{M} : если каждая $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ предполагает $\mathcal{M} \models \varphi$, то $\vdash \varphi$;
 - 3.3 заметим, что если $\vdash \varphi$, то каждая $\mathcal{M} \in \mathfrak{M}$ предполагает $\mathcal{M} \models \varphi$.
4. В ходе доказательства нас ждёт множество технических препятствий.

Непротиворечивое множество формул

Определение

Γ — непротиворечивое множество формул, если $\Gamma \not\vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$ для любого α

Примеры:

▶ непротиворечиво:

▶ $\Gamma = \{A \rightarrow B \rightarrow A\}$

▶ $\Gamma = \{P(x, y) \rightarrow \neg P(x, y), \forall x. \forall y. \neg P(x, y)\};$

▶ противоречиво:

▶ $\Gamma = \{P \rightarrow \neg P, \neg P \rightarrow P\}$

так как $P \rightarrow \neg P, \neg P \rightarrow P \vdash \neg P \ \& \ \neg\neg P$

▶ пусть $D = \mathbb{Z}$ и $P(x) \equiv (x > 0)$, аналогом для этой модели будет $\Gamma = \{P(1), P(2), P(3), \dots\}$

Полное непротиворечивое множество формул

Определение

Γ — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул, если:

1. Γ содержит только замкнутые бескванторные формулы;
2. если α — некоторая замкнутая бескванторная формула, то $\alpha \in \Gamma$ или $\neg\alpha \in \Gamma$.

Определение

Γ — полное непротиворечивое множество замкнутых формул, если:

1. Γ содержит только замкнутые формулы;
2. если α — некоторая замкнутая формула, то $\alpha \in \Gamma$, или $\neg\alpha \in \Gamma$.

Пополнение непротиворечивого множества формул

Теорема

*Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул.
Тогда, какова бы ни была замкнутая (бескванторная) формула φ , хотя бы $\Gamma \cup \{\varphi\}$
или $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ — непротиворечиво*

Доказательство.

Пусть это не так и найдутся такие Γ , φ и α , что

$$\begin{aligned}\Gamma, \varphi &\vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha \\ \Gamma, \neg\varphi &\vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha\end{aligned}$$

Тогда по лемме об исключении гипотезы

$$\Gamma \vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$$

То есть Γ не является непротиворечивым. Противоречие.



Дополнение непротиворечивого множества формул до полного

Теорема

Пусть Γ — непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул.
Тогда найдётся полное непротиворечивое множество замкнутых (бескванторных) формул Δ , что $\Gamma \subseteq \Delta$

Доказательство.

1. Занумеруем все формулы (их счётное количество): $\varphi_1, \varphi_2, \dots$

2. Построим семейство множеств $\{\Gamma_i\}$:

$$\Gamma_0 = \Gamma \qquad \Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\varphi_i\}, & \text{если } \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \text{ непротиворечиво} \\ \Gamma_i \cup \{\neg\varphi_i\}, & \text{иначе} \end{cases}$$

3. Итоговое множество

$$\Delta = \bigcup_i \Gamma_i$$

4. Непротиворечивость Δ не следует из индукции — индукция гарантирует непротиворечивость только Γ_i при натуральном (т.е. *конечном*) i , потому...



Дополнение. . . (завершение доказательства)

4. Δ непротиворечиво:

4.1 Пусть Δ противоречиво, то есть

$$\Delta \vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$$

4.2 Доказательство конечной длины и использует конечное количество гипотез $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\} \subset \Delta$, то есть

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$$

4.3 Пусть $\delta_i \in \Gamma_{d_i}$, тогда

$$\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \dots \cup \Gamma_{d_n} \vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$$

4.4 Но $\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \dots \cup \Gamma_{d_n} = \Gamma_{\max(d_1, d_2, \dots, d_n)}$, которое непротиворечиво, и потому

$$\Gamma_{d_1} \cup \Gamma_{d_2} \cup \dots \cup \Gamma_{d_n} \not\vdash \alpha \ \& \ \neg\alpha$$



Модель для множества формул

Определение

Моделью для множества формул F назовём такую модель \mathcal{M} , что при всяком $\varphi \in F$ выполнено $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}} = \mathcal{I}$.

Альтернативное обозначение: $\mathcal{M} \models \varphi$.

Модели для непротиворечивых множеств замкнутых бескванторных формул

Теорема

Любое непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул имеет модель.

Конструкция для модели

Определение

Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул. Тогда модель M задаётся так:

1. D — множество всевозможных предметных выражений без предметных переменных и дополнительная строка “ошибка!”
2. $\llbracket f(\theta_1, \dots, \theta_n) \rrbracket = “f(” \uplus \llbracket \theta_1 \rrbracket \uplus “,” \uplus \dots \uplus “,” \uplus \llbracket \theta_n \rrbracket \uplus “)”$
3. $\llbracket P(\theta_1, \dots, \theta_n) \rrbracket = \begin{cases} И, & \text{если } P(\theta_1, \dots, \theta_n) \in M \\ Л, & \text{иначе} \end{cases}$
4. $\llbracket x \rrbracket = “ошибка!”$, так как формулы замкнуты.

Доказательство корректности

Лемма

Пусть φ — бескванторная формула, тогда $\mathcal{M} \models \varphi$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in M$.

Доказательство (индукция по длине формулы φ).

1. База. φ — предикат. Требуемое очевидно по определению \mathcal{M} .
2. Переход. Пусть $\varphi = \alpha \star \beta$ (или $\varphi = \neg \alpha$), причём $\mathcal{M} \models \alpha$ ($\mathcal{M} \models \beta$) тогда и только тогда, когда $\alpha \in M$ ($\beta \in M$).
Тогда покажем требуемое для каждой связки в отдельности. А именно, для каждой связки покажем два утверждения:
 - 2.1 если $\mathcal{M} \models \alpha \star \beta$, то $\alpha \star \beta \in M$.
 - 2.2 если $\mathcal{M} \not\models \alpha \star \beta$, то $\alpha \star \beta \notin M$.



Доказательство утверждений для связок

Если $\varphi = \alpha \rightarrow \beta$ и для любой формулы ζ , более короткой, чем φ , выполнено $\mathcal{M} \models \zeta$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in M$, тогда:

1. если $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta$, то $\alpha \rightarrow \beta \in M$;
2. если $\mathcal{M} \not\models \alpha \rightarrow \beta$, то $\alpha \rightarrow \beta \notin M$.

Доказательство (разбором случаев).

1. $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta$: $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{Л}$. Тогда по предположению $\alpha \notin M$, потому по полноте $\neg \alpha \in M$. И, поскольку в ИВ $\neg \alpha \vdash \alpha \rightarrow \beta$, то $M \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Значит, $\alpha \rightarrow \beta \in M$, иначе по полноте $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \in M$, что делает M противоречивым.
2. $\mathcal{M} \models \alpha \rightarrow \beta$: $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$ и $\llbracket \beta \rrbracket = \text{И}$. Рассуждая аналогично, используя $\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$, приходим к $\alpha \rightarrow \beta \in M$.
3. $\mathcal{M} \not\models \alpha \rightarrow \beta$. Тогда $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$, $\llbracket \beta \rrbracket = \text{Л}$, то есть $\alpha \in M$ и $\neg \beta \in M$. Также, $\alpha, \neg \beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$, отсюда $M \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$. Предположим, что $\alpha \rightarrow \beta \in M$, то $M \vdash \alpha \rightarrow \beta$ — отсюда $\alpha \rightarrow \beta \notin M$.



Доказательство теоремы о существовании модели

Доказательство.

Пусть M — непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул.

По теореме о пополнении существует M' — полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул, что $M \subseteq M'$.

По лемме M' имеет модель, эта модель подойдёт для M .

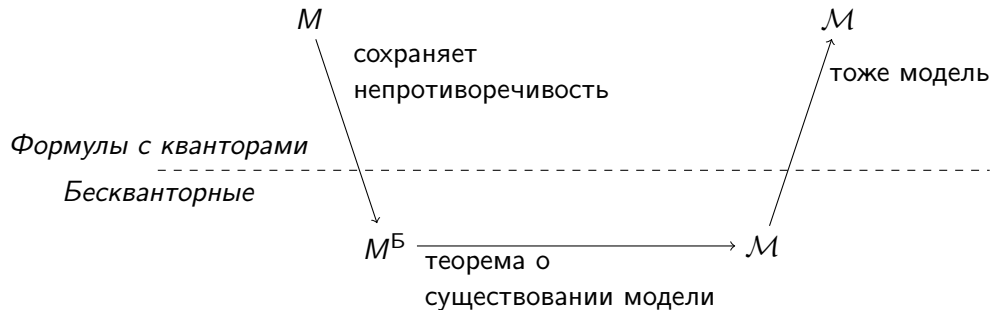


Формулировка и схема доказательства теоремы Гёделя о полноте

Теорема (Гёделя о полноте исчисления предикатов)

Если M — непротиворечивое множество замкнутых формул, то оно имеет модель.

Схема доказательства.



Поверхностные кванторы (предварённая форма)

Определение

Формула φ имеет поверхностные кванторы (находится в предварённой форме), если соответствует грамматике

$$\varphi ::= \forall x.\varphi \mid \exists x.\varphi \mid \tau$$

где τ — формула без кванторов

Теорема

Для любой замкнутой формулы ψ найдётся такая формула φ с поверхностными кванторами, что $\vdash \psi \rightarrow \varphi$ и $\vdash \varphi \rightarrow \psi$

Доказательство.

Индукция по структуре, применение теорем о перемещении кванторов.



Построение M^*

- ▶ Пусть M — полное непротиворечивое множество замкнутых формул с поверхностными кванторами (очевидно, счётное). Построим семейство непротиворечивых множеств замкнутых формул M_k .
- ▶ Пусть d_i^k — семейство *свежих* констант, в M не встречающихся.
- ▶ Индуктивно построим M_k :
 - ▶ База: $M_0 = M$
 - ▶ Переход: положим $M_{k+1} = M_k \cup S$, где множество S получается перебором всех формул $\varphi_i \in M_k$.
 1. φ_i — формула без кванторов, пропустим;
 2. $\varphi_i = \forall x.\psi$ — добавим к S все формулы вида $\psi[x := \theta]$, где θ — всевозможные замкнутые термы, использующие символы из M_k ;
 3. $\varphi_i = \exists x.\psi$ — добавим к S формулу $\psi[x := d_i^{k+1}]$, где d_i^{k+1} — некоторая свежая, ранее не использовавшаяся в M_k , константа.

Непротиворечивость M_k

Лемма

Если M непротиворечиво, то каждое множество из M_k — непротиворечиво

Доказательство.

Доказательство по индукции, база очевидна ($M_0 = M$). Переход:

- ▶ пусть M_k непротиворечиво, но M_{k+1} — противоречиво:
 $M_k, M_{k+1} \setminus M_k \vdash A \ \& \ \neg A$.
- ▶ Тогда (т.к. доказательство конечной длины): $M_k, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash A \ \& \ \neg A$, где $\gamma_i \in M_{k+1} \setminus M_k$.
- ▶ По теореме о дедукции: $M_k \vdash \gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n \rightarrow A \ \& \ \neg A$.
- ▶ Научимся выкидывать первую посылку: $M_k \vdash \gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n \rightarrow A \ \& \ \neg A$.
- ▶ И по индукции придём к противоречию: $M_k \vdash A \ \& \ \neg A$.



Устранение посылки

Лемма

Если $M_k \vdash \gamma \rightarrow W$ и $\gamma \in M_{k+1} \setminus M_k$, то $M_k \vdash W$.

Доказательство.

Покажем, как дополнить доказательство до $M_k \vdash W$, в зависимости от происхождения γ :

- Случай $\forall x.\varphi$: $\gamma = \varphi[x := \theta]$.

Допишем в конец доказательства:

| | |
|----------------------------------------------------------|---------------|
| $\forall x.\varphi$ | (гипотеза) |
| $(\forall x.\varphi) \rightarrow (\varphi[x := \theta])$ | (сх. акс. 11) |
| γ | (M.P.) |
| W | (M.P.) |



Случай $\exists x.\varphi$

- ▶ $\gamma = \varphi[x := d_i^{k+1}]$
- ▶ Перестроим доказательство $M_k \vdash \gamma \rightarrow W$: заменим во всём доказательстве d_i^{k+1} на y . Коллизий нет: под квантором d_i^{k+1} не стоит, переменной не является.
- ▶ Получим доказательство $M_k \vdash \gamma[d_i^{k+1} := y] \rightarrow W$ и дополним его:

| | |
|---------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\varphi[x := y] \rightarrow W$ | $\varphi[x := d_i^{k+1}][d_i^{k+1} := y]$ |
| $(\exists y.\varphi[x := y]) \rightarrow W$ | y не входит в W |
| $(\exists x.\varphi) \rightarrow (\exists y.\varphi[x := y])$ | доказуемо (упражнение) |
| ... | |
| $(\exists x.\varphi) \rightarrow W$ | доказуемо как $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \vdash \alpha \rightarrow \gamma$ |
| $\exists x.\varphi$ | гипотеза |
| W | |



Построение M^B

Определение

$$M^* = \bigcup_k M_k$$

Теорема

M^* непротиворечиво.

Доказательство.

От противного: доказательство противоречия конечной длины, гипотезы лежат в максимальном M_k , тогда M_k противоречив. □

Определение

M^B — множество всех бескванторных формул из M^* .

По непротиворечивому множеству M можем построить M^B и для него построить модель \mathcal{M} . Покажем, что эта модель годится для M^* (и для M , так как $M \subset M^*$).

Модель для M^*

Лемма

\mathcal{M} есть модель для M^* .

Доказательство.

Покажем, что при $\varphi \in M^*$ выполнено $\mathcal{M} \models \varphi$. Докажем индукцией по количеству кванторов в φ .

- ▶ База: φ без кванторов. Тогда $\varphi \in M^B$, откуда $\mathcal{M} \models \varphi$ по построению \mathcal{M} .
- ▶ Переход: пусть утверждение выполнено для всех формул с n кванторами. Покажем, что это выполнено и для $n + 1$ кванторов.
 - ▶ Рассмотрим $\varphi = \exists x.\psi$, случай квантор всеобщности — аналогично.
 - ▶ Раз $\exists x.\psi \in M^*$, то существует k , что $\exists x.\psi \in M_k$.
 - ▶ Значит, $\psi[x := d_i^{k+1}] \in M_{k+1}$.
 - ▶ По индукционному предположению, $\mathcal{M} \models \psi[x := d_i^{k+1}]$ — в формуле n кванторов.
 - ▶ Но тогда $\llbracket \psi \rrbracket^{x:=\llbracket d_i^{k+1} \rrbracket} = \text{И}$.
 - ▶ Отсюда $\mathcal{M} \models \exists x.\psi$.



Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов

Теорема (Гёделя о полноте исчисления предикатов)

Если M — замкнутое непротиворечивое множество формул, то оно имеет модель.

Доказательство.

- ▶ Построим по M множество формул с поверхностными кванторами M' .
- ▶ По M' построим непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул M^B ($M^B \subseteq M^*$, теорема о непротиворечивости M^*).
- ▶ Дополним его до полного, построим для него модель \mathcal{M} (теорема о существовании модели).
- ▶ \mathcal{M} будет моделью и для M' ($M' \subseteq M^*$, лемма о модели для M^*), и, очевидно, для M .



Полнота исчисления предикатов

Следствие (из теоремы Гёделя о полноте)

Исчисление предикатов полно.

Доказательство.

- ▶ Пусть это не так, и существует формула φ , что $\models \varphi$, но $\nvdash \varphi$.
- ▶ Тогда рассмотрим $M = \{\neg\varphi\}$.
- ▶ M непротиворечиво: если $\neg\varphi \vdash A \ \& \ \neg A$, то $\vdash \varphi$ (упражнение).
- ▶ Значит, у M есть модель \mathcal{M} , и $\mathcal{M} \models \neg\varphi$.
- ▶ Значит, $\llbracket \neg\varphi \rrbracket = \text{И}$, поэтому $\llbracket \varphi \rrbracket = \text{Л}$, поэтому $\nmodels \varphi$. Противоречие.



Непротиворечивость исчисления предикатов

Теорема

Если у множества формул M есть модель \mathcal{M} , оно непротиворечиво.

Доказательство.

Пусть противоречиво: $M \vdash A \ \& \ \neg A$, в доказательстве использованы гипотезы $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$. Тогда $\vdash \delta_1 \rightarrow \delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \delta_n \rightarrow A \ \& \ \neg A$, то есть $\llbracket \delta_1 \rightarrow \delta_2 \rightarrow \dots \rightarrow \delta_n \rightarrow A \ \& \ \neg A \rrbracket = \text{И}$ (корректность). Поскольку все $\llbracket \delta_i \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{И}$, то и $\llbracket A \ \& \ \neg A \rrbracket_{\mathcal{M}} = \text{И}$ (анализ таблицы истинности импликации). Однако $\llbracket A \ \& \ \neg A \rrbracket = \text{Л}$. Противоречие. □

Следствие

Исчисление предикатов непротиворечиво

Доказательство.

Рассмотрим $M = \emptyset$ и любую классическую модель. □

Доказательства опираются на непротиворечивость метатеории.