Алгебра Линденбаума

Теорема

Пусть $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$. Тогда $(\approx)$ — отношение эквивалентности.

Доказательство.

Надо доказать, что для любых α, β, γ:

1. $\alpha \approx \alpha$ (очевидно, $\alpha \vdash \alpha$);
2. $\alpha \approx \beta$ влечёт $\beta \approx \alpha$ (очевидно из определения);
3. $\alpha \approx \beta$ и $\beta \approx \gamma$ влечёт $\alpha \approx \gamma$:
   из посылок следует $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \gamma$, соединив доказательства, получим $\alpha \vdash \gamma$.

$\square$

$L/_{\approx}$ — частично-упорядоченное множество. Элементы будем обозначать $[\alpha]$.

Теорема

$\alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $[\alpha] \le [\beta]$.

$\mathcal{L}$ — решётка.

Покажем $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \mathbin{\&} \beta]$. То есть, $[\alpha \mathbin{\&} \beta]$ — наибольшая нижняя грань α и β.

- *(... нижняя грань)* $[\alpha \mathbin{\&} \beta] \le [\alpha]$: заметим, что $\alpha \mathbin{\&} \beta \vdash \alpha$.
- *(наибольшая ...)* Если $[\sigma] \le [\alpha]$ и $[\sigma] \le [\beta]$, то $[\sigma] \le [\alpha \mathbin{\&} \beta]$:
  Рассмотрим вывод в контексте σ:

$(1..a)$	α	из $[\sigma] \le [\alpha]$
$(a+1..b)$	β	из $[\sigma] \le [\beta]$
$(b+1)$	$\alpha \to \beta \to \alpha \mathbin{\&} \beta$	Сх. акс
$(b+2)$	$\beta \to \alpha \mathbin{\&} \beta$	M.P. a, $b+1$
$(b+3)$	$\alpha \mathbin{\&} \beta$	M.P. b, $b+2$

  Отсюда $\sigma \vdash \alpha \mathbin{\&} \beta$.

Утверждение $[\alpha] + [\beta] = [\alpha \vee \beta]$ показывается аналогично.

$\mathcal{L}$ — импликативная решётка с 0, согласованная с ИИВ

- *(импликативная ...)* Покажем $[\alpha] \to [\beta] = [\alpha \to \beta]$:
в самом деле, $[\alpha] \to [\beta] =$ наиб $\{[\sigma] \mid [\alpha \,\&\, \sigma] \le [\beta]\}$. Покажем требуемое двумя включениями:
    1. $\alpha \,\&\, (\alpha \to \beta) \vdash \beta$ (карринг + транзитивность импликации)
    2. Если $\alpha \,\&\, \sigma \vdash \beta$, то $\sigma \vdash \alpha \to \beta$ (карринг + теорема о дедукции)
- *(... с нулём ...)* Покажем, что $0 = [A \,\&\, \neg A]$:
в самом деле, $A \,\&\, \neg A \vdash \sigma$ при любом σ.
- *(... согласованная с ИИВ)*
    1. Из доказательства видно, что $[\alpha \,\&\, \beta] = [\alpha] \cdot [\beta]$, $[\alpha \vee \beta] = [\alpha] + [\beta]$, $[\alpha \to \beta] = [\alpha] \to [\beta]$, $[A \,\&\, \neg A] = 0$.
    2. $[A \to A] = [A] \to [A] = 1$ по свойствам алгебры Гейтинга
    3. $[\neg\alpha] = [\alpha \to A \,\&\, \neg A] = [\alpha] \to 0 = \sim [\alpha]$

$\Gamma(\mathcal{L})$ — алгебра Гейтинга, согласованная с ИИВ.

Надо учитывать существование нового элемента ω.
Например, импликация/псевдодополнение: $[\alpha] \rightarrow [\beta] = \text{наиб}\ \{s \mid [\alpha] \cdot s \le [\beta]\}$.

- *(... нижняя грань)* $[\alpha] \cdot [\alpha \rightarrow \beta] \le [\beta]$ — аналогично случаю для $\mathcal{L}$
- *(наибольшая ...)* Если $[\alpha] \cdot s \le [\beta]$, то
  - $s = [\sigma]$, то есть $s \ne \omega$ — аналогично случаю для $\mathcal{L}$;
  - $s = \omega$, тогда $[\alpha] \cdot \omega \le [\beta]$. Но $[\alpha] \ne \omega$ — либо $[\alpha] < \omega$, либо $[\alpha] = 1$. В обоих случаях $[\alpha] \cdot 1 \le [\beta]$. Отсюда s не наибольший.

Исчисление предикатов

Ограничения языка исчисления высказываний

$$\frac{\text{Каждый человек смертен} \qquad \text{Сократ есть человек}}{\text{Сократ смертен}}$$

Цель: увеличить формализованную часть метаязыка.

Мы неформально знакомы с предикатами $(P : D \to V)$ и кванторами $(\forall x.H(x) \to S(x))$.

$$\frac{\forall x.H(x) \to S(x) \qquad H(\text{Сократ})}{S(\text{Сократ})}$$

Начнём с примера

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

1. Предметные (здесь: числовые) выражения
   1.1 Предметные переменные (x).
   1.2 Одно- и двухместные функциональные символы «синус», «возведение в квадрат» и «сложение».
   1.3 Нульместные функциональные символы «ноль» (0) и «один» (1).
2. Логические выражения
   2.1 Предикатные символы «равно» и «больше»

Язык исчисления предикатов

1. Два типа: предметные и логические выражения.
2. Предметные выражения: метапеременная θ.
   - Предметные переменные: a, b, c, $\ldots$, метапеременные x, y.
   - Функциональные выражения: $f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременные f, g, $\ldots$
   - Примеры: r, $q(p(x, s), r)$.
3. Логические выражения: метапеременные α, β, γ, $\ldots$
   - Предикатные выражения: $P(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, метапеременная P.
     Имена: A, B, C, $\ldots$
   - Связки: $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \mathbin{\&} \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\neg\varphi)$.
   - Кванторы: $(\forall x.\varphi)$ и $(\exists x.\varphi)$.

Сокращения записи, метаязык

1. Метапеременные:
   - ψ, ϕ, π, ... — формулы
   - P, Q, ... — предикатные символы
   - θ, ... — термы
   - f, g, ... — функциональные символы
   - x, y, ... — предметные переменные
2. Скобки — как в И.В.; квантор — жадный:

$$(\forall a.\ \underbrace{A \vee B \vee C \rightarrow \exists b.\ \underbrace{D \,\&\, \neg E}_{\exists b\ldots}}_{\forall a\ldots}) \,\&\, F$$

3. Дополнительные обозначения при необходимости:
   - $(\theta_1 = \theta_2)$ вместо $E(\theta_1, \theta_2)$
   - $(\theta_1 + \theta_2)$ вместо $p(\theta_1, \theta_2)$
   - 0 вместо z
   - ...

Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x.\, \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(f(x), z) \ \vee \ G(p(q(s(x)), o), o)$$

Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x.\, \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(f(x), z) \ \vee \ G(p(q(s(x)), o), o)$$

1. Истинностные (логические) значения:
   1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);

Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(f(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

1. Истинностные (логические) значения:
   1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
   1.2 логические связки и кванторы.

Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x. \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(f(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

1. Истинностные (логические) значения:
   1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
   1.2 логические связки и кванторы.
2. Предметные значения:
   2.1 предметные переменные;

Теория моделей: два типа значений

Напомним формулу:

$$\forall x.\, \sin x = 0 \vee (\sin x)^2 + 1 > 1$$

Без синтаксического сахара:

$$\forall x. E(f(x), z) \vee G(p(q(s(x)), o), o)$$

1. Истинностные (логические) значения:
   1.1 предикаты (в том числе пропозициональные переменные = нульместные предикаты);
   1.2 логические связки и кванторы.
2. Предметные значения:
   2.1 предметные переменные;
   2.2 функциональные символы (в том числе константы = нульместные функциональные символы)

Оценка исчисления предикатов

Определение

Оценка — упорядоченная четвёрка $\langle D, F, P, E \rangle$*, где:*

1. D *— предметное множество;*
2. F *— оценка для функциональных символов; пусть* f_n *— n-местный функциональный символ:*
$$F_{f_n} : D^n \to D$$
3. P *— оценка для предикатных символов; пусть* T_n *— n-местный предикатный символ:*
$$P_{T_n} : D^n \to V \qquad V = \{И, Л\}$$
4. E *— оценка для предметных переменных.*
$$E(x) \in D$$

Оценка формулы

Запись и сокращения записи подобны исчислению высказываний:

$$[\![\phi]\!] \in V, \quad [\![Q(x, f(x)) \vee R]\!]^{x:=1, f(t):=t^2, R:=И} = И$$

1. Правила для связок $\vee$, &, $\neg$, $\rightarrow$ остаются прежние;
2. $[\![f_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = F_{f_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$
3. $[\![P_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)]\!] = P_{T_n}([\![\theta_1]\!], [\![\theta_2]\!], \dots, [\![\theta_n]\!])$
4. $$[\![\forall x.\phi]\!] = \begin{cases} И, & \text{если } [\![\phi]\!]^{x:=t} = И \text{ при всех } t \in D \\ Л, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } [\![\phi]\!]^{x:=t} = Л \end{cases}$$
5. $$[\![\exists x.\phi]\!] = \begin{cases} И, & \text{если найдётся } t \in D, \text{ что } [\![\phi]\!]^{x:=t} = И \\ Л, & \text{если } [\![\phi]\!]^{x:=t} = Л \text{ при всех } t \in D \end{cases}$$

Пример (очевидная интерпретация)

Оценим:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим оценку:

- $D := \mathbb{N}$;
- $F_1 := 1$, $F_{(+)}$ — сложение в $\mathbb{N}$;
- $P_{(=)}$ – равенство в $\mathbb{N}$.

Фиксируем $a \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{b:=a} = Л$$

поэтому при любом $a \in \mathbb{N}$:

$$[\![\exists b.\neg a + 1 = b]\!] = И$$

Итого:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!] = И$$

Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\square\}$;
- $F_{(1)} := \square$, $F_{(+)}(a, b) := \square$;
- $P_{(=)}(a, b) :=$ И.

Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{a:=\square, b:=\square} = \text{И}$$

Итого:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!] = \text{Л}$$

Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\square\}$;
- $F_{(1)} := \square$, $F_{(+)}(a, b) := \square$;
- $P_{(=)}(a, b) :=$ И.

Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{a:=\square, b:=\square} = \text{И}$$

Итого:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!] = \text{Л}$$

Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\Box\}$;
- $F_{(1)} := \Box$, $F_{(+)}(a, b) := \Box$;
- $P_{(=)}(a, b) :=$ И.

Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{a:=\Box, b:=\Box} = \text{И}$$

Итого:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!] = \text{Л}$$

Пример (странная интерпретация)

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!]$$

Зададим интерпретацию:

- $D := \{\square\}$;
- $F_{(1)} := \square$, $F_{(+)}(a, b) := \square$;
- $P_{(=)}(a, b) := И$.

Тогда:

$$[\![a + 1 = b]\!]^{a \in D, b \in D} = И$$

Итого:

$$[\![\forall a.\exists b.\neg a + 1 = b]\!] = Л$$

Общезначимость

Определение

Формула исчисления предикатов общезначима, если истинна при любой оценке:

$$\models \phi$$

То есть истинна при любых D, F, P и E.

Пример: общезначимая формула

Теорема

$$[\![\forall x.Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!]$$

Доказательство.

Фиксируем D, F, P, E. Пусть $x \in D$. Обозначим $P_Q(F_f(E_x))$ за t. Ясно, что $t \in V$. Разберём случаи.

- Если $t =$ И, то $[\![Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} =$ И, потому $[\![Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} =$ И
- Если $t =$ Л, то $[\![\neg Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} =$ И, потому всё равно $[\![Q(f(x)) \vee \neg Q(f(x))]\!]^{Q(f(x)):=t} =$ И

□

Свободные вхождения

Определение

Вхождение подформулы в формулу — это позиция первого символа этой подформулы в формуле.

$$\text{Вхождения } x \text{ в формулу:} \quad (\forall x.A(x) \vee \exists x.B(x)) \vee C(x)$$

Определение

Рассмотрим формулу $\forall x.\psi$ *(или* $\exists x.\psi$*). Здесь переменная* x *связана в* ψ*. Все вхождения переменной* x *в* ψ *— связанные.*

Определение

Вхождение x *в* ψ *свободное, если не находится в области действия никакого квантора по* x*. Переменная входит свободно в* ψ*, если имеет хотя бы одно свободное вхождение.* $FV(\psi), FV(\Gamma)$ *— множества свободных переменных в* ψ*, в* Γ

Пример

$\exists y.(\forall x.P(x)) \vee P(x) \vee Q(y)$

Подстановка, свобода для подстановки

$$\psi[x := \theta] := \begin{cases} \psi, & \psi \equiv y, y \not\equiv x \\ \psi, & \psi \equiv \forall x.\pi \text{ или } \psi \equiv \exists x.\pi \\ \pi[x := \theta] \star \rho[x := \theta], & \psi \equiv \pi \star \rho \\ \theta, & \psi \equiv x \\ \forall y.\pi[x := \theta], & \psi \equiv \forall y.\pi \text{ и } y \not\equiv x \\ \exists y.\pi[x := \theta], & \psi \equiv \exists y.\pi \text{ и } y \not\equiv x \end{cases}$$

Определение

Терм θ свободен для подстановки вместо x в ψ ($\psi[x := \theta]$), если ни одно свободное вхождение переменных в θ не станет связанным после подстановки.

Свобода есть	Свободы нет
$(\forall x.P(y))[y := z]$	$(\forall x.P(y))[y := x]$
$(\forall y.\forall x.P(x))[x := y]$	$(\forall y.\forall x.P(t))[t := y]$

Теория доказательств

Рассмотрим язык исчисления предикатов. Возьмём все схемы аксиом классического исчисления высказываний и добавим ещё две схемы аксиом (здесь везде θ свободен для подстановки вместо x в φ):

11. $(\forall x.\varphi) \rightarrow \varphi[x := \theta]$
12. $\varphi[x := \theta] \rightarrow \exists x.\varphi$

Добавим ещё два правила вывода (здесь везде x не входит свободно в φ):

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi \rightarrow \forall x.\psi} \text{ Правило для } \forall$$

$$\frac{\psi \rightarrow \varphi}{(\exists x.\psi) \rightarrow \varphi} \text{ Правило для } \exists$$

Определение

Доказуемость, выводимость, полнота, корректность — аналогично исчислению высказываний.

Важность ограничений на схемы аксиом и правила вывода

- Рассмотрим формулу $(\forall x.\exists y.\neg x = y) \to ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$
- Соответствует 11 схеме

$$(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \theta] \qquad \varphi \equiv \exists y.\neg x = y \qquad \theta \equiv y$$

- Но нарушается свобода для подстановки

$$(\exists y.\neg x = y)[x := y] \equiv (\exists y.\neg y = y)$$

- Пусть $D = \mathbb{N}$ и $(=)$ есть равенство на $\mathbb{N}$. Тогда

$$[\![\exists y.\neg x = y]\!] = \text{И} \qquad [\![(\exists y.\neg x = y)[x := y]]\!] = \text{Л}$$

- $\not\models (\forall x.\exists y.\neg x = y) \to ((\exists y.\neg x = y)[x := y])$

Теорема о дедукции для исчисления предикатов

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, *то* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$. *Если* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *и в доказательстве не применяются правила для кванторов по свободным переменным из* α, *то* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Доказательство.

($\Rightarrow$) — как в КИВ ($\Leftarrow$) — та же схема, два новых случая.
Перестроим: $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \equiv \beta$ в $\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \dots, \alpha \to \delta_n$.
Дополним: обоснуем $\alpha \to \delta_n$, если предыдущие уже обоснованы.
Два новых похожих случая: правила для $\forall$ и $\exists$. Рассмотрим $\forall$.
Доказываем (n) $\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi$ (правило для $\forall$), значит, доказано (k) $\alpha \to \psi \to \varphi$.

$(n-0.9)\dots(n-0.8)$	$(\alpha \to \psi \to \varphi) \to (\alpha \,\&\, \psi) \to \varphi$	Т. о полноте КИВ
$(n-0.6)$	$(\alpha \,\&\, \psi) \to \varphi$	M.P. $k, n-0.8$
$(n-0.4)$	$(\alpha \,\&\, \psi) \to \forall x.\varphi$	Правило для $\forall$, $n-0.6$
$(n-0.3)\dots(n-0.2)$	$((\alpha \,\&\, \psi) \to \forall x.\varphi) \to (\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi)$	Т. о полноте КИВ
(n)	$\alpha \to \psi \to \forall x.\varphi$	M.P. $n-0.4$, $n-0.2$

$\square$

Следование

Определение

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \models \alpha$, *если выполнено два условия:*

1. α *выполнено всегда, когда выполнено* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$*;*
2. α *не использует кванторов по переменным, входящим свободно в* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha$ *и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из* Γ, *то* $\Gamma \models \alpha$

Важность второго условия

Пример

Покажем, что $\Gamma \models \alpha$ *ведёт себя неестественно, если в* α *используются кванторы по переменным, входящим свободно в* Γ*.*

Легко показать, что $P(x) \vdash \forall x.P(x)$*.*

(1)	$P(x)$	*Гипотеза*
(2)	$P(x) \rightarrow (A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow P(x)$	*Сх. акс. 1*
(3)	$(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow P(x)$	*M.P. 1, 2*
(4)	$(A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow \forall x.P(x)$	*Правило для* $\forall$*, 3*
(5)	$(A \rightarrow A \rightarrow A)$	*Сх. акс. 1*
(6)	$\forall x.P(x)$	*M.P. 5, 4*

Пусть $D = \mathbb{Z}$ *и* $P(x) = x > 0$*. Тогда не будет выполнено* $P(x) \models \forall x.P(x)$*.*

Корректность

Теорема

Если θ свободен для подстановки вместо x в φ, то $[\![\varphi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\varphi[x := \theta]]\!]$

Доказательство (индукция по структуре φ).

- База: φ не имеет кванторов. Очевидно.
- Переход: пусть справедливо для ψ. Покажем для $\varphi = \forall y.\psi$.
  - $x = y$ либо $x \notin FV(\psi)$. Тогда: $[\![\forall y.\psi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\forall y.\psi]\!] = [\![(\forall y.\psi)[x := \theta]]\!]$
  - $x \neq y$. Тогда: $[\![\forall y.\psi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\psi]\!]^{y\in D; x:=[\![\theta]\!]} = \dots$

    Свобода для подстановки: $y \notin \theta$.

    $$\dots = [\![\psi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]; y\in D} = \dots$$

    Индукционное предположение.

    $$\dots = [\![\psi[x := \theta]]\!]^{y\in D} = [\![\forall y.(\psi[x := \theta])]\!] = \dots$$

    Но $\forall y.(\psi[x := \theta]) \equiv (\forall y.\psi)[x := \theta]$ (как текст). Отсюда:

    $$\dots = [\![(\forall y.\psi)[x := \theta]]\!]$$

□

Корректность

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha$ *и в доказательстве не используются кванторы по свободным переменным из* $FV(\Gamma)$, *то* $\Gamma \models \alpha$

Доказательство.

Фиксируем D, F, P. Индукция по длине доказательства α: при любом E выполнено $\Gamma \models \alpha$ при длине доказательства n, покажем для $n+1$.

- Схемы аксиом (1)..(10), правило М.Р.: аналогично И.В.
- Схемы (11) и (12), например, схема $(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \theta]$:

$$[\![(\forall x.\varphi) \to \varphi[x := \theta]]\!] = [\![((\forall x.\varphi) \to \varphi)[x := \theta]]\!] = [\![((\forall x.\varphi) \to \varphi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = \text{И}$$

- Правила для кванторов: например, введение $\forall$:
  Пусть $[\![\psi \to \varphi]\!] = \text{И}$. Причём $x \notin FV(\Gamma)$ и $x \notin FV(\psi)$. То есть, при любом x выполнено $[\![\psi \to \varphi]\!]^{x:=x} = \text{И}$. Тогда $[\![\psi \to (\forall x.\varphi)]\!] = \text{И}$.

□