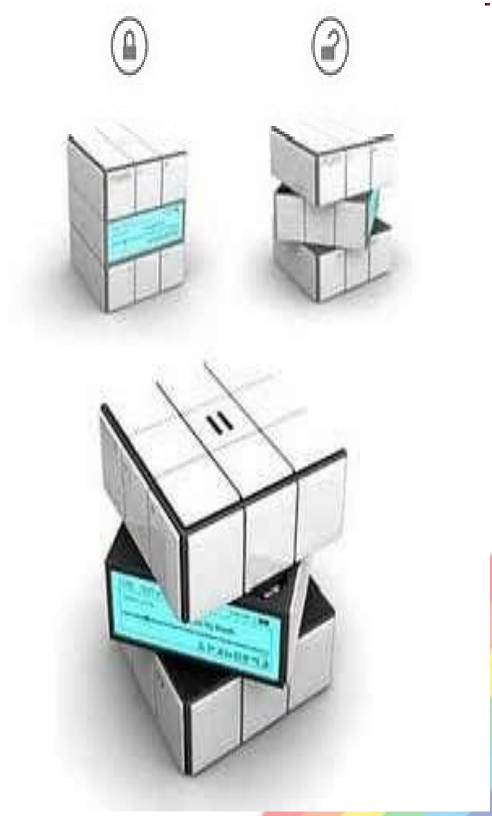
BÀI 1

TẬP HỢP VÀ ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

TÌNH HUỐNG DẪN NHẬP

Trong việc giải một bài toán nào đấy, bên cạnh việc xử lý các giá trị số, ta còn gặp các tình huống phải xử lý các giá trị lôgic, chẳng hạn các giá trị của các phép so sánh, vì thế trong các ngôn ngữ lập trình hiện nay, ngoài các phép toán xử lý số, xử lý ký tự, người ta còn xây dựng các phép toán lôgic, nhằm xây dựng các mệnh đề phức hợp làm điều kiện trong các câu lệnh rẽ nhánh hoặc vòng lặp.



Câu hỏi đặt ra là, thế nào là các phép toán lôgic, ứng dụng chúng như thế nào?

MỤC TIÊU

Sau khi học bài này, các bạn có thể:

- Nắm được các khái niệm cơ bản về kiến thức tập hợp, đại số mệnh đề.
- Liệt kê được những ký hiệu thường dùng.
- Sử dụng được các phép toán tập hợp, mệnh đề.
- Liên hệ và sử dụng các kiến thức bài học trong một số ứng dụng quan trọng

NỘI DUNG

- Các khái niệm cơ bản và những ký hiệu thường dùng
- Các phép toán tập hợp
- Tích Đêcac
- Phân hoạch
- Quan hệ
- Khái niệm về mệnh đề
- Các phép toán mệnh đề
- Vị từ và lượng từ
- Ứng dụng của đại số lôgic

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

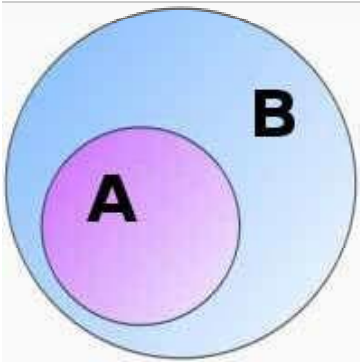
1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

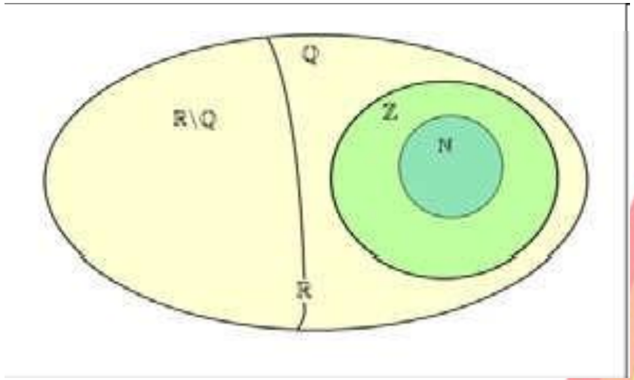
Tập hợp: Là một trong những khái niệm nguyên thủy không định nghĩa. Có thể xem tập hợp được hình thành từ việc nhóm các đối tượng nào đó với nhau, mà ta gọi chúng là các phần tử của tập hợp.

Ví dụ:

- Tập hợp các số nguyên
- Tập hợp các đường thẳng trên một mặt phẳng,
- Tập hợp các sinh viên của một trường đại học,…

Thông thường, các phần tử của một tập hợp được xác định nhờ một tính chất chung nào đấy.





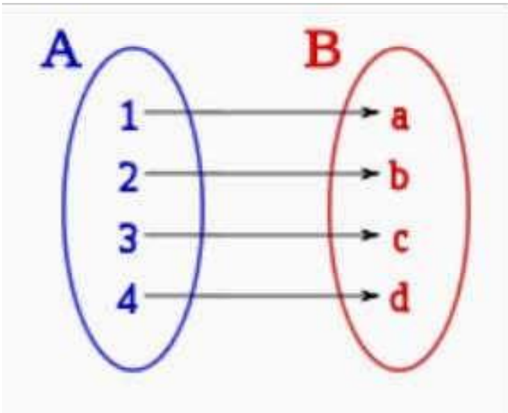
1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Số phần tử của tập hợp: Nếu A là tập hữu hạn thì ta ký hiệu N(A) là số phần tử của A. Ngoại trừ tập rỗng có số phần tử bằng 0, các tập hữu hạn khác đều có số phần tử là một số tự nhiên nào đấy.

Ví dụ:

- N, Z, R là các tập vô hạn
- A = {1, 2, 3, 4} là tập hữu hạn và có N (A) = 4 .
- Số phần tử của A là một tham số quan trọng trtrong việc đánh giá độ phức tạp của các thuật toán liên quan đến A

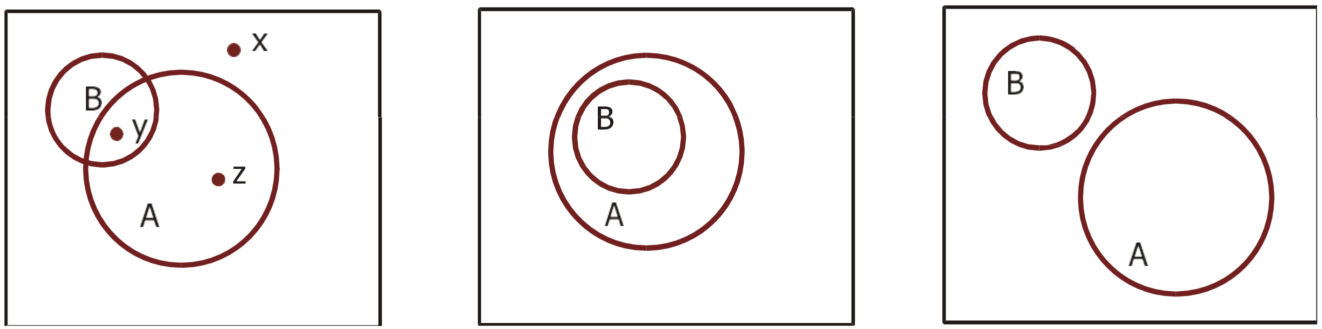


1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Giản đồ venn: Với giản đồ Venn, tập vũ trụ U được biểu diễn bằng một hình chữ nhật, còn các tập hợp được biểu diễn như những vòng tròn nằm trong hình chữ nhật này với ý nghĩa những điểm nằm trong vòng tròn mô tả các phần tử thuộc tập tương ứng.

Ví dụ:



Giản đồ Venn cho người ta thấy rõ mối quan hệ giữa các phần tử với các tập hợp và giữa các tập hợp với nhau.

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.2. KÝ HIỆU THƯỜNG DÙNG

- Tập hợp (nhiều khi gọi ngắn gọn là tập) được ký hiệu bằng các chữ cái lớn A, B, …, X, Y, …
- Những phần tử được ký hiệu bằng các chữ cái nhỏ a, b, …, x, y, …
- Để chỉ x là phần tử thuộc X ta viết $x \in X$, trái lại ta viết $x \notin X$
- Các quan hệ A= B (A bằng B), $A \neq B$ (A khác B), $A \subseteq B$ (A bao hàm trong B hay A là tập con của B) được ký hiệu và hiểu như thông lệ
- Ví dụ:
  - A = {a, 2, Fred, while}
  - A = {1, 2, 3, ..., 100}

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.2. KÝ HIỆU THƯỜNG DÙNG

- N – Tập các số tự nhiên,
- Z – Tập các số nguyên,
- Q – Tập các số hữu tỉ,
- R – Tập các số thực,
- C – Tập các số phức.
- U – Tập vũ trụ hay không gian
- Φ– Tập rỗng.

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.3. CÁCH XÁC ĐỊNH TẬP HỢP

- Liệt kê các phần tử của tập hợp:
  - A= {1, 2, 3, 4, a, b, c}
- Đưa ra tính chất đặc trưng:

Ví dụ:

Tập X gồm hai số thực 1 và 2 ngoài cách liệt kê, còn có thể mô tả $X = \{x \in R|\ x^2 -$

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

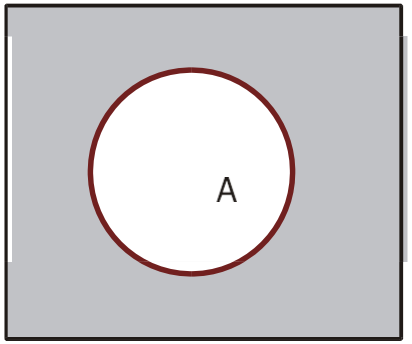
1.4. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

- Phép bù: Là phép toán một ngôi. Ta gọi bù của A, ký hiệu $\bar{A}$ là tập hợp các phần tử không thuôc A. Nói riêng, bù của U là Φ, bù của Φlà U.

➢ Ví dụ: U là tập các số nguyên, A là tập các số nguyên chẵn, khi đó phần bù $\overline{A}$ của A là tập hợp các số nguyên lẻ.

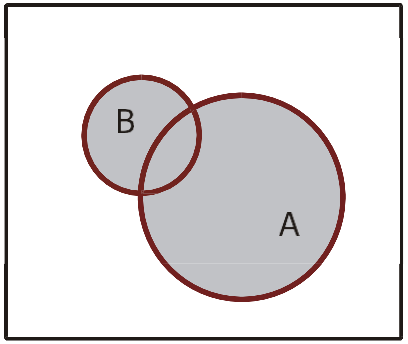
- Phép hợp: là một phép toán hai ngôi. Giả sử A và B là hai tập hợp, ta gọi hợp của A với B, ký hiệu A ∪ B là tập hợp gồm các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp.

➢ Ví dụ: A = {a, b, e}, B = {b, c, d, e}, khi đó A ∪ B= {a, b, c, d, e}.



$\overline{A}$

Phép toán bù



A ∪ B

Phép toán hợp

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

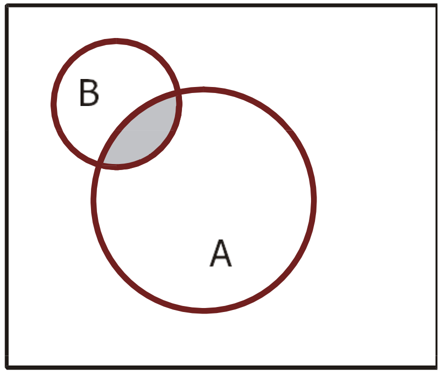
1.4. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

- Phép giao: là một phép toán hai ngôi. Giả sử A và B là hai tập hợp, ta gọi giao của A với B, ký hiệu $A \cap B$ là tập hợp gồm các phần tử thuộc đồng thời cả hai tập hợp.

➢ Ví dụ: A = {a, b, e}, B = {b, c, d, e}, khi đó $A \cap B$ = {b, e}.

- Nếu A và B không có phần tử chung nào thì giao của chúng là tập rỗng, khi đó nếu A, B khác rỗng, ta cũng nói A và B là hai tập hợp rời nhau.

Dưới đây là các giản đồ Venn minh họa kết quả của các phép toán này (phần tô đậm):



$A \cap B$

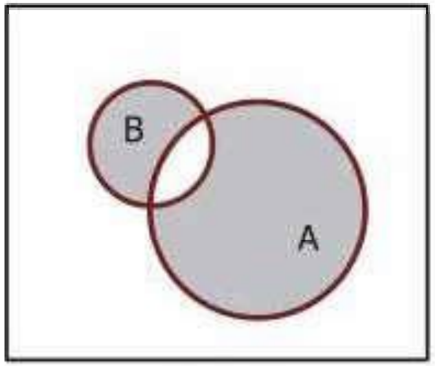
Phép toán giao

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

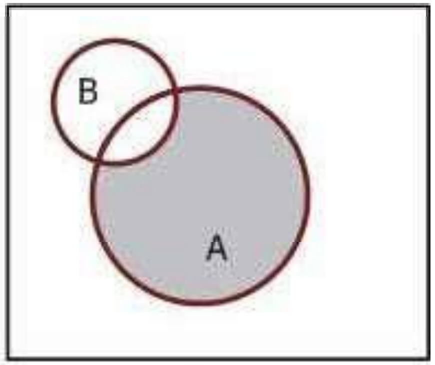
1.4. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

- Phép trừ: Giả sử A và B là hai tập hợp. Ta gọi hiệu của A đối với B, ký hiệu là tập hợp các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B.
  - ➢ Ví dụ: A = {a, b, e}, B = {b, c, d, e}, khi đó A - B = {a}.
  - ➢ Chú ý: Phép trừ không có tính giao hoán, chẳng hạn, trong ví dụ trên B - A = {c, d}.
- Phép cộng: Giả sử A, B là hai tập hợp. Ta gọi tổng của A và B, ký hiệu là tập hợp thuộc A hoặc thuộc B nhưng không được thuộc cả hai.
  - ➢ Ví dụ: A = {a, b, e}, B = {b, c, d, e}, khi đó A ⊕ B = {a,c,d}.
  - ➢ Chú ý: Phép cộng có tính giao hoán, nghĩa là A ⊕ B = B ⊕ A

Dưới đây là các giản đồ Venn minh họa kết quả của các phép toán này (phần tô đậm):



A ⊕ B



A - B

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.4. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

- **Luật phản xạ:**

$$\bar{\bar{A}} = A$$

- **Luật kết hợp:**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

- **Luật giao hoán:**

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- **Luật phân bố:**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- **Luật lũy đẳng:**

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.4. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

- **Luật đồng nhất:**

$$\boldsymbol{A \cup \Phi = A}$$

$$\boldsymbol{A \cap U = U}$$

- **Luật hấp thu:**

$$\boldsymbol{A \cup U = U}$$

$$\boldsymbol{A \cap \Phi = \Phi}$$

- **Luật đầy đủ và phi mâu thuẩn:**

$$\boldsymbol{A \cup \overline{A} = U}$$

$$\boldsymbol{A \cap \overline{A} = \Phi}$$

- **Luật De Morgan:**

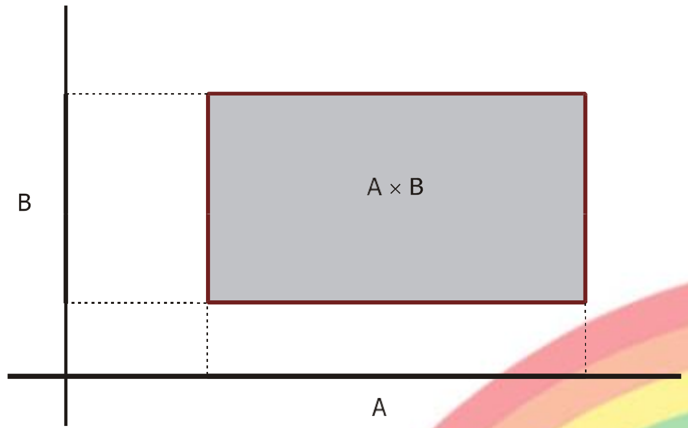
$$\boldsymbol{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$$

$$\boldsymbol{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.5. TÍCH ĐÊCAC

Giả sử A và B là hai tập hợp nào đó (có thể thuộc các không gian khác nhau, chẳng hạn A là tập hợp các thí sinh đại học còn B là tập hợp các ngành nghề đào tạo của các trường đại học). Ta xây dựng một tập hợp mới, bằng cách ghép A với B theo nghĩa mỗi phần tử của tập này là một cặp có thứ tự gồm thành phần đầu lấy từ A và thành phần sau lấy từ B. Tập mới này được gọi là tích Đêcac (theo tên của nhà toán học Pháp, René Descartes) của A với B, và được ký hiệu là A x B. Như vậy ta có thể viết: $A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$



- **Ví dụ:** A = {a, b, c}, B = {1, 2}, khi đó:

$A \times B$ = (a,1), (a, 2),(b,1),(b, 2),(c,1), (c, 2)

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.5. TÍCH ĐÊCAC

Tích Đêcac được mở rộng một cách tự nhiên cho nhiều tập hợp. Giả sử A1 , A2 ,..., Am là m tập nào đấy, Ta gọi tích Đêcac (hay ngắn gọn − tích) của các tập này (theo thứ tự đã nêu), A × A × ... × A ký hiệu A1 × A2 × ... × Am , là tập hợp các bộ có thứ tự gồm m thành phần, trong đó thành phần thứ i lấy từ tập Ai (i = 1, 2, ..., m):

$$A\ x\ A\ x \dots x\ A = \{(a, a, \dots, a) | a \in A, i = 1,2, \dots, m\}$$

Nói riêng, một tập A có thể ghép với chính nó nhiều lần. Tích $A\ x\ A\ x \dots x\ A$ (m lần) được gọi là lũy thừa m của A và được ký hiệu Am.

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.6. PHÂN HOẠCH

Người ta cần chia nhỏ tập đang xét X thành nhiều tập con khác rỗng $A_1, A_2, \dots, A_m$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

(1) $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$

(2) $A_i \cap A_j = \Phi\ (i \neq j)$

Điều kiện (1) được gọi là phủ X, điều kiện (2) được gọi là rời nhau. Họ các tập con của X thỏa mãn các điều kiện đã nêu, được gọi là một phân hoạch hay một chia lớp của X, mỗi môt tập con của họ này được gọi là một lớp phân hoạch.

Ví dụ: X = {a, b, c, d, e, f}. Khi đó họ các tập con {A1, A2, A3}, trong đó A1 = {a, b}, A2 = {c}, A3 = {d, e, f}, là một phân hoạch gồm 3 lớp của X.

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.7. QUAN HỆ

- R (Relation): Quan hệ
- Quy ước viết aRb thay cho lời nói "a có quan hệ R với b"
- Mỗi quan hệ R, xác định một quan hệ phủ định của nó, ký hiệu $\overline{R}$, theo định nghĩa a $\overline{R}$b khi và chỉ khi a không có quan hệ R với b.
  - ➢ Ví dụ: Trên tập các số nguyên, người ta có thể định nghĩa các quan hệ như sau: aRb khi và chỉ khi a < b (R là quan hệ "nhỏ hơn", $\bar{R}$ là quan hệ "không nhỏ hơn"). Với R là quan hệ "nhỏ hơn" ta có 2R3, 5R7, $5\bar{R}2$
- Việc xác định một quan hệ R trên tập X là việc chỉ rõ điều kiện cần và đủ cho các cặp có thứ tự (a, b); a, b ∈ X để aRb, đó cũng là điều kiện xác định một tập con nào đó của tích Đêcac X2. Vì vậy một quan hệ hai ngôi cho trên X có thể đồng nhất với một tập con của tích X2.

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.7. QUAN HỆ

- Tính phản xạ: quan hệ R được gọi là có tính phản xạ nếu aRa với mọi a thuộc X.
  - Ví dụ: Quan hệ “song song” trên tập các đường thẳng có tính phản xạ.
- Tính đối xứng: quan hệ R được gọi là có tính đối xứng nếu từ aRb ta suy ra bRa với mọi a, b thuộc X.
  - Ví dụ: Quan hệ “song song” trên tập các đường thẳng có tính đối xứng trong khi quan hệ “chia hết” trên tập các số nguyên không có tính đối xứng.
- Tính bắc cầu: quan hệ R được gọi là có tính bắc cầu nếu từ aRb và bRc ta suy ra aRc với mọi a, b, c thuộc X.
  - Ví dụ: Quan hệ “song song” trên tập các đường thẳng có tính bắc cầu trong khi quan hệ “vuông góc” trên tập này lại không có tính chất đó.

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.7. QUAN HỆ

- Định lý: Một quan hệ tương đương R trên tập X xác định một phân hoạch trên tập đó và ngược lại.

Định lý vừa phát biểu cho thấy rằng, một quan hệ tương đương trên một tập được đồng nhất với một phân hoạch trên tập ấy, vì thế tên của một quan hệ tương đương cũng thường được dùng làm tên của phân hoạch tương ứng (hoặc ngược lại) và các lớp của phân hoạch cũng được gọi là các lớp tương đương.

- Ví dụ: Quan hệ "song song" trên tập các đường thẳng sẽ phân hoạch tập này thành các lớp đồng phương, trong đó hai đường thẳng cùng phương khi và chỉ khi chúng thuộc cùng một lớp.

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

- Khái niệm mệnh đề
- Các phép toán mệnh đề
- Vị từ và lượng từ
- Ứng dụng của đại số mệnh đề

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.1. KHÁI NIỆM MỆNH ĐỀ

- **Mệnh đề:** Là một phát biểu mà nội dung của nó chỉ có một trong hai giá trị đúng hoặc sai. Những câu không có nội dung đúng, sai rõ ràng hoặc không phải câu trần thuật, mặc dù được xem là những mệnh đề trong ngôn ngữ thông thường, sẽ không phải là mệnh đề theo định nghĩa này.
- **Ví dụ:** Các phát biểu dưới đây là các mệnh đề:
  - ➢ Hà Nội là thủ đô của nước Việt Nam (có giá trị đúng)
  - ➢ 2 + 1 = 4 (có giá trị sai)
  - ➢ Mặt trời quay quanh trái đất (có giá trị sai)
  - ➢ 20 chia hết cho 5 (có giá trị đúng)

  Các câu sau đây không phải là mệnh đề theo nghĩa đã nêu:
  - ➢ Hôm nay là thứ mấy? (không phải câu trần thuật)
  - ➢ x + y = 3 (không rõ đúng, sai)

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.1. KHÁI NIỆM MỆNH ĐỀ

- Các mệnh đề được ký hiệu bởi các chữ cái P, Q, R, ...
- Có nhiều cách để ký hiệu hai giá trị đúng sai. Thông thường người ta dùng các chữ cái đầu T và F trong từ tiếng Anh True và False để chỉ đúng, sai. Tuy nhiên, đơn giản hơn cả và không lệ thuộc vào ý nghĩa ngôn ngữ, ta dùng hai chữ số 1 (đúng), 0 (sai) để ký hiệu hai giá trị này

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.1. KHÁI NIỆM MỆNH ĐỀ

Kiểm tra xem các khẳng định sau có phải là mệnh đề hay không?

- 3 là số nguyên tố.
- Bạn có khỏe không?
- Con gái nhà ai mà xinh thế!

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.2. CÁC PHÉP TOÁN MỆNH ĐỀ

- Phép phủ định: Là phép toán một ngôi. Ta gọi phủ định của mệnh đề P, ký hiệu $\overline{P}$ hay $\neg P$ là mệnh đề xác định bởi bảng sau:

P	$\neg P$
1	0
0	1

Nghĩa là giá trị của $\neg P$ là ngược (phủ định) với giá trị của P

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.2. CÁC PHÉP TOÁN MỆNH ĐỀ

- Phép tuyển: là phép toán hai ngôi. Ta gọi tuyển của P với Q, ký hiệu P ∨ Q, là mệnh đề xác định bởi bảng sau:

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Nghĩa là P∨ Q có giá trị đúng khi và chỉ khi có ít nhất một trong hai toán hạng P, Q là đúng.

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.2. CÁC PHÉP TOÁN MỆNH ĐỀ

- Phép hội: là phép toán hai ngôi. Ta gọi hội của P với Q, ký hiệu P∧Q, là mệnh đề xác định bởi bảng sau:

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Nghĩa là P∧Q có giá trị đúng khi và chỉ khi cả hai toán hạng P, Q là đúng

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.2. CÁC PHÉP TOÁN MỆNH ĐỀ

- Phép kéo theo: là phép toán hai ngôi. Ta gọi P kéo theo Q, ký hiệu P→Q, là một mệnh đề xác định bởi bảng sau:

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Nghĩa là P→Q là đúng trừ khi P đúng Q sai. Phép toán này được định nghĩa để mô tả việc chứng minh "từ P suy ra Q", trong đó ta cần chỉ ra nếu P đúng thì Q cũng đúng mà không quan tâm đến tình huống P sai

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.2. CÁC PHÉP TOÁN MỆNH ĐỀ

- Phép tương đương: là phép toán hai ngôi. Ta gọi P tương đương Q, ký hiệu $P \leftrightarrow Q$, là một mệnh đề xác định bởi bảng sau:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Nghĩa là $P \leftrightarrow Q$ là đúng khi và chỉ khi P và Q có giá trị như nhau (cùng đúng hoặc cùng sai). Có thể thấy ngay rằng $P \leftrightarrow Q$ được xác định giống như $(P\rightarrow Q)\wedge (Q\rightarrow P)$, nó mô tả việc chứng minh "P, Q là tương đương" giống như việc chứng minh "từ P suy ra Q và ngược lại".

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.2. CÁC PHÉP TOÁN MỆNH ĐỀ

- Phép cộng: là phép toán hai ngôi. Ta gọi tổng của P với Q, ký hiệu P ⊕Q, là một mệnh đề xác định bởi bảng sau:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Phép cộng giống như phép tuyển, ngoại trừ nó cho kết quả 0 khi cả hai toán hạng cùng bằng 1.

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.2. CÁC PHÉP TOÁN MỆNH ĐỀ

- **Luật phản xạ:**

$$\overline{\overline{\boldsymbol{P}}} = \boldsymbol{P}$$

- **Luật kết hợp:**

$$\boldsymbol{P} \vee (\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}) = (\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \vee \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{P} \wedge (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R}) = (\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{R}$$

- **Luật giao hoán:**

$$\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{P}$$

- **Luật phân bố:**

$$\boldsymbol{P} \vee (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R}) = (\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{R})$$

$$\boldsymbol{P} \wedge (\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}) = (\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \vee (\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{R})$$

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.2. CÁC PHÉP TOÁN MỆNH ĐỀ

- **Luật lũy đẳng:**

$$\boldsymbol{P \vee P = P}$$
$$\boldsymbol{P \wedge P = P}$$

- **Luật đồng nhất:**

$$\boldsymbol{P \vee 0 = P}$$
$$\boldsymbol{P \wedge 1 = P}$$

- **Luật hấp thu:**

$$\boldsymbol{P \wedge 1 = 1}$$
$$\boldsymbol{P \vee 0 = 0}$$

- **Luật đầy đủ và phi mâu thuẫn:**

$$\boldsymbol{P \vee \overline{P} = 1}$$
$$\boldsymbol{P \wedge \overline{P} = 0}$$

- **Luật De Morgan:**

$$\boldsymbol{\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}}$$
$$\boldsymbol{\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}}$$

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.2. CÁC PHÉP TOÁN MỆNH ĐỀ

Hai luật biến đổi tương đương dưới đây (được thêm vào danh sách các biến đổi cơ bản) thường được dùng cho việc rút gọn:

- **Luật nuốt:**

$$P \wedge (P \vee Q) = P$$

$$P \vee (P \wedge Q) = P$$

- **Luật dán:**

$$P \wedge (\bar{P} \vee Q) = P \wedge Q$$

$$P \wedge (\bar{P} \vee Q) = P \vee Q$$

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.3. VỊ TỪ VÀ LƯỢNG TỪ

- Định nghĩa vị từ: Vị từ là một khẳng định P(x,y,..)trong đó x,y là các biến độc lập thuộc tập A, B, … cho trước sao cho:
  - Bản thân P(x, y, …) không phải là mệnh đề
  - Nếu thay x, y, … là các giá trị cụ thể thì P(x, y, …) là mệnh đề
- Ví dụ: Phát biểu P(x) có nội dung "x là một số nguyên lớn hơn 5" sẽ là các mệnh đề với từng giá trị x cụ thể trên tập các số nguyên, chẳng hạn ta có P(7) là một mệnh đề đúng còn P(3) là một mệnh đề sai. Một phát biểu kiểu như vậy được gọi là một vị từ, nó xác định một hàm mệnh đề, nhận các giá trị lôgic {0, 1} với các biến nhận giá trị trên một tập nào đó mà người ta gọi là không gian của biến vị từ. Trong ví dụtrên P(x) là một vị từ với biến x thuộc không gian các số nguyên.

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.3. VỊ TỪ VÀ LƯỢNG TỪ

- **Các phép toán trên vị từ:**
  - Phủ định của vị từ P, ký hiệu $\bar{P}$ được định nghĩa

$$\bar{P}(x) = \overline{P(x)}$$

  - Tuyển của vị từ P và Q, ký hiệu $P \vee Q$ được định nghĩa

$$(P \vee Q)(x) = P(x) \vee Q(x)$$

  - Hội của vị từ P và Q, ký hiệu $P \wedge Q$, được định nghĩa

$$(P \wedge Q)(x) = P(x) \wedge Q(x)$$

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.3. VỊ TỪ VÀ LƯỢNG TỪ

Ví dụ: P(x) là vị từ "x < x + 1" trên không gian các số thực, khi đó lượng từ $''\forall x P(x)$ có giá trị đúng còn lượng từ $\exists x \overline{P(x)}$ có giá trị sai.

Từ định nghĩa của các lượng từ, dễ thấy các tương đương dưới đây

$$\overline{\forall x P(x)} = \exists\, x\, \overline{P(x)}$$

$$\overline{\exists x P(x)} = \forall\, x\, \overline{P(x)}$$

Các tương đương này được gọi là các luật phủ định của lượng từ.

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.4. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠI SỐ LOGIC

- **Kỹ thuật chứng minh**
- **Kỹ thuật lập trình**
- **Kỹ thuật tổng hợp mạch Lôgic**

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.4. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠI SỐ LOGIC

2.4.1. KỸ THUẬT CHỨNG MINH

- Chứng minh trực tiếp: Xuất phát từ P đúng ta dẫn về một hệ quả H dễ thấy hơn, nghĩa là chứng minh P→H là hằng đúng, sau đó nếu ta chứng minh được H dẫn về Q, tức là H →Q là hằng đúng, thì định lý được chứng minh. Cơ sở của phép suy luận này dựa vào biểu thức ((P→ H) (H→ Q))→ (P→ Q) là hằng đúng, được gọi là luật bắc cầu hay tam đoạn luận, mà việc chứng minh nó được thực hiện dễ dàng trong lôgic (chẳng hạn, bằng cách lập bảng giá trị).
- Ví dụ: Khẳng định “nếu n là số nguyên lẻ thì n2 cũng là số nguyên lẻ” được chứng minh như sau: “n là số nguyên lẻ” ⇒ ”n được viết dưới dạng 2m + 1 với m nguyên nào đó” ⇒ “n2 = (2m + 1)2 = 4m2 + 4m + 1 = 2(2m2 + 2m) + 1” ⇒ “n2 là số nguyên lẻ” (ký hiệu ⇒ có nghĩa là “dẫn về” hay “suy ra”).

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.4. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠI SỐ LOGIC

2.4.1. KỸ THUẬT CHỨNG MINH

- Chứng minh gián tiếp: Khi việc chứng minh trực tiếp từ P suy ra Q gặp nhiều khó khăn, người ta thường dùng phương pháp phản chứng: xuất phát đồng thời có P (P đúng) và không có Q (Q sai), ta dẫn được về một điều sai, khi đó định lý được chứng minh. Cơ sở của phép chứng minh này là sự tương đương giữa biểu thức $(P \wedge \bar{Q}) \rightarrow 0$ và biểu thức $P \rightarrow Q$, được gọi là luật phản chứng.
- Ví dụ: Khẳng định “nếu n2 là số nguyên lẻ thì n cũng là số nguyên lẻ” (mệnh đề đảo của mệnh đề trong ví dụ trước) được chứng minh bằng phản chứng như sau: Giả sử n2 là số nguyên lẻ đồng thời n là số nguyên chẵn, khi đó ta có các suy diễn “n là số nguyên chẵn” ”n được viết dưới dạng 2m với m nguyên nào đó” “n2 = (2m)2 = 2(2m2)” “n2 là số nguyên chẵn”. Việc đồng thời có hai mệnh đề phủ định nhau “n2 là số nguyên lẻ” và “n2 là số nguyên chẵn” là một điều sai

2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.4. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠI SỐ LOGIC

2.4.2.KỸ THUẬT LẬP TRÌNH

- Ngôn ngữ Pascal: Kiểu lôgic có tên kiểu là Boolean, giá trị đúng được đặt tên là TRUE và giá trị sai được đặt tên là FALSE. Các phép toán lôgic cơ bản đều được xây dựng và được đặt tên theo các từ khóa tiếng Anh: NOT (phủ định), OR (tuyển), AND (hội), XOR (tuyển loại).

- Trong ngôn ngữ C: Kiểu lôgic không được xây dựng riêng mà được dùng như những giá trị số: 0 (sai), khác 0 (đúng), các phép toán lôgic được ký hiệu ! (phủ định), || (tuyển), && (hội).

- Ví dụ với ngôn ngữ PASCAL:

Điều kiện NOT ((x >= 3) OR x <= 1)) thể thay thế bằng điều kiện tương đương (x > 1) AND (x < 3). Một số trường hợp lệnh IF lồng nhau có thể thay bằng một lệnh IF.

Chẳng hạn lệnh: IF (a > 1) THEN

IF (b < 5) THEN ...

Có thể thay bằng IF (a > 1) AND (b < 5) THEN ...

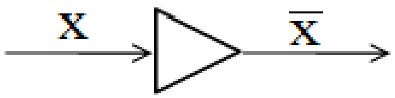
2. ĐẠI SỐ MỆNH ĐỀ

2.4. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠI SỐ LOGIC

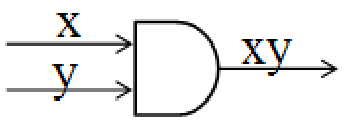
2.4.3. KỸ THUẬT MẠCH LÔGIC

- Định lý. Mọi hàm đại số lôgic đều được thực hiện bằng một biểu thức lôgic trong đó chỉ chứa các phép toán phủ định, hội, tuyển.
- Các mạch lôgic cơ bản thường được gọi là các cổng lôgic (gọi tắt là cổng). Có 3 loại cổng lôgic được định nghĩa như sau:

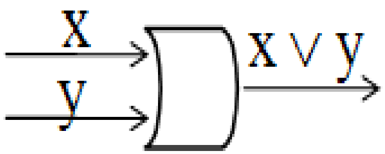
➢ Cổng phủ định (cổng NOT): Là cổng có một đầu vào và một đầu ra thực hiện hàm phủ định , được biểu diễn bằng hình vẽ:



➢ Cổng hội (cổng AND): Là cổng có hai đầu vào và một đầu ra thực hiện hàm hội , được biểu diễn bằng hình vẽ:



➢ Cổng tuyển (cổng OR): Là cổng có hai đầu vào và một đầu ra thực hiện hàm tuyển , được biểu diễn bằng hình vẽ:



TÓM LƯỢC CUỐI BÀI

Các bạn cần ghi nhớ các vấn đề sau:

- Khái niệm cơ bản về tập hợp và những ký hiệu thường dùng
- Các phép toán tập hợp
- Tích Đêcác; Phân hoạch và Quan hệ
- Khái niệm và các phép toán về mệnh đề
- Vị từ và lượng từ
- Ứng dụng của đại số lôgic