Đại học Công nghệ Thông tin HKI 2020-2021

Khoa Khoa học Máy tính

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI KỲ

MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

Thời gian: if(mệt muốn nộp && time <=10:00) then submit

ĐỀ 1

Câu 1: (1 điểm)

Hãy cho biết ý nghĩa của "độ phức tạp" khi đề cập đến thuật toán?

Câu 2: (2 điểm) Ký hiệu tiệm cận

a) Chứng minh: max{f(n), g(n)} = Θ (f(n) + g(n))

b) Khẳng định sau là đúng hay sai và vì sao?

$$Nếu\ f(n) = \Theta\big(g(n)\big)\ \ và\ \ g(n) = \Theta\big(h(n)\big)\ \ thì\ \ h(n) = \Theta(f(n))$$

Lưu ý: Θ là Big – Theta

c) Với mỗi nhóm hàm bên dưới, hãy sắp xếp các hàm số theo thứ tự tăng dần của "order of growth" và có giải thích ngắn gọn cách thực hiện

Group 1: $f_1(n) = \binom{n}{n-2}$ $f_2(n) = \sqrt[3]{n}(\log n)^2$ $f_3(n) = n^{5(\log n)^2}$ $f_4(n) = 10logn + 2\log(logn)$	**Group 2:** $f_5(n) = n2^{n/2}$ $f_6(n) = n^{\log n}$ $f_7(n) = n^{n^{1/5}}$ $f_8(n) = 2^{2^{1000000}}$

(Lưu ý ký hiệu: log là log cơ số 2, $\binom{n}{k}$ là tổ hợp chập k của n)

Câu 3: (2 điểm) Đánh giá độ phức tạp

Đếm số phép gán, số phép so sánh được thực hiện trong đoạn chương trình sau, suy ra độ phức tạp thuật toán (1.5 điểm). Lưu ý: không cần rút gọn Gán (n), Sosánh(n).

```
i=1;
count = 0;
while(i<=4n)
{
    x=(n-i)(i-3n)
    y=i-2n
    j=1
    while(j<=x)
    {
        if(i>=2y)
            count = count -2
        j=j+1
    }
    i=i+1
}
```

Câu 4: (>=3 điểm) CHỌN LÀM ÍT NHẤT 2 CÂU

a) Cho phương trình đệ quy:

$$\begin{cases} \qquad T(1) \quad C_1 \\ T(n) \quad 4T(n/2) \quad n \ \text{nếu} n \geq 2 \end{cases}$$

Một người dùng phương pháp đoán nghiệm để giải phương trình đệ quy trên. Giả sử anh ta đoán nghiệm như sau: $f(n) \quad an^2 \quad bn$

Theo bạn, lần đoán nghiệm này có thành công hay không và vì sao? (Gợi ý: thử đoán như anh ta)

b) Giải phương trình đệ quy sau dùng phương pháp **truy hồi/thay thế**

$$\boldsymbol{T(1) = 1}$$
$$\boldsymbol{T(n) = 4T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2}$$

c) Giải phương trình đệ quy sau dùng **hàm sinh**

$$\boldsymbol{T(0) = 7}$$
$$\boldsymbol{T(n+1) = T(n) + 3n}$$

Câu 5: (1.5 điểm)

Một nhà máy sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian lao động để làm ra một mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp 2 lần thời gian để làm xong mũ kiểu hai. Nếu sản xuất toàn mũ kiểu thứ 2 thì nhà máy làm được 500 mũ mỗi ngày. Thị trường tiêu thụ được trong mỗi ngày nhiều nhất là 150 mũ kiểu một và 200 mũ kiểu hai. Tiền lãi một mũ kiểu một là 8 USD và kiểu hai là 5 USD. Cần sản xuất bao nhiêu mũ mỗi kiểu trong ngày để tổng tiền lãi lớn nhất.

Hãy mô hình hóa bài toán và tìm phương án tối ưu nhất.

Câu 6: (>= 5 điểm) CHỌN LÀM ÍT NHẤT 2 CÂU

a) Cho bài toán được mô tả như sau: Ta có một số nguyên có n chữ số. Hãy tìm cách xóa đi k chữ số trong số nguyên trên sao cho kết quả thu được là nhỏ nhất có thể. Ví dụ: cho số 2070880 nếu phải xóa đi 2 chữ số thì số nhỏ nhất thu được là 880 (xóa số 2 đầu tiên và số 7), hoặc cho số 27819, nếu phải xóa 2 chữ số thì kết quả của bài toán là 219.

Yêu cầu:

- Hãy thiết kế một thuật toán để giải bài toán trên. Cho biết thuật toán đó thiết kế theo phương pháp nào? Tại sao?

- Minh họa từng bước của thuật toán cho 2 ví dụ trên để người đọc hiểu rõ về cách làm SV mà đã đề xuất.

b) Cho bài toán "Tìm tất cả n! hoán vị của 1 tập gồm n phần tử " được mô tả như sau:

Cho một tập hợp gồm n phần tử a = (a_1, a_2, . . . , a_n), trong đó các phần tử đôi một khác nhau. Hãy liệt kê tất cả các hoán vị của dãy n phần tử của a. Ví dụ: với a = (7, 2, 4), các hoán vị bao gồm {(7, 2, 4); (7, 4, 2); (2, 7, 4); (2, 4, 7); (4, 2, 7); (4, 7, 2)}

Yêu cầu:

- Thiết kế <u>thuật toán</u> để giải bài toán trên theo **2 cách**: dùng phương pháp quay lui (backtracking) và phương pháp giảm để trị (decrease and conquer). Lưu ý: Thuật toán trình bày dưới dạng mã giả và có chú thích cho người đọc dễ hiểu.

- So sánh độ phức tạp của 2 thuật toán đã thiết kế.

Gợi ý: nếu không xây dựng được thuật toán thì trình bày ý tưởng để có điểm.

c) Bài toán "Các dãy con **tăng** có tổng cho trước" được mô tả như sau: Cho dãy số nguyên dương (a_0,a_1, …, a_{n-1}) và một số nguyên dương M. Tìm tất cả các dãy con **tăng** của dãy a (có ràng buộc bảo toàn tính thứ tự) sao cho tổng của các phần tử trong dãy con bằng M.

Ví dụ: cho dãy (7, 1, 4, 3, 5, 6) và M = 11, các dãy con thỏa mãn ràng buộc là: (1, 4, 6); (5, 6).

Yêu cầu: Thiết kế một <u>thuật toán</u> để giải bài toán trên (2 điểm).

d) Cho bài toán "Nhân chuỗi ma trận" được mô tả như sau:

Cho 1 chuỗi ma trận <A_1 , A_2 ,…, A_n>, với A_i có kích thước là p_{i-1} x p_i. Ta muốn tính tích A = A_1 x A_2 x...x A_n. Hãy xác định thứ tự nhân các ma trận sao cho số phép nhân được sử dụng là ít nhất.

Yêu cầu:

- Trình bày ý tưởng giải bài toán "Nhân chuỗi ma trận" bằng quy hoạch động

- Cho biết kết quả của trường hợp cụ thể sau: Nhân 4 ma trận ABCD với các ma trận có kích thước lần lượt là A: 4 × 5 , B: 5 × 3 , C là 3 × 5 , D : 5 × 4.

e) Cho bài toán "Chuỗi con chung dài nhất" được mô tả như sau: Cho 2 chuỗi X = <x_1 x_2 … x_m> và Y = <y_1 y_2 … y_n>. Tìm chuỗi con chung dài nhất (LCS) của X và Y. Chuỗi con của một chuỗi nhận được từ chuỗi ấy bằng cách xóa đi 1 số phần tử.

Yêu cầu:

- Trình bày <u>ý tưởng</u> giải bài toán trên bằng phương pháp **"Quy hoạch động"**

- Áp dụng quy hoạch động để giải trường hợp cụ thể sau: Tìm chuỗi con chung dài nhất của 2 chuỗi X = <a b c d a b> và Y = <a d c a b>

Gợi ý: **-** Trình bày ý tưởng gồm 4 bước: 1) Phân tích đặc trưng "Optimal substructure"; 2) Xác định phương trình quy hoạch động; 3) Tạo bảng lưu trữ kết quả của các bài toán con khi giải lần đầu; 4) Xây dựng lời giải của bài toán ban đầu;

- Minh họa áp dụng bằng cách điền giá trị vào bảng và truy xuất lời giải.

HẾT

Gợi ý: Một số công thức tính tổng quan trọng

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \approx \frac{1}{2}n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \approx \frac{1}{3}n^3$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k \approx \frac{1}{k+1}n^{k+1}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = 1 + a + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \ (a \neq 1);$$

$$\sum_{i=1}^{n} i2^i = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + n2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \approx \ln n + \gamma, \text{ where } \gamma \approx 0.5772$$

$$\sum_{i=1}^{n} \log i \approx n \log n$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n)\, x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n = \frac{1}{(1-x)^2} & \end{array}}$$