
TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #02 Bổ sung: Bổ sung thêm 1 bài tập số 5 về Hàm sinh

GV hướng dẫn: Huỳnh Thị Thanh Thương

Nhóm thực hiện: Nhóm 5

1. Trần Văn Lực 20521587
2. Dương Thành Bảo Khanh 20521444
3. Lê Nguyễn Bảo Hân 20520174
4. Nguyễn Trần Minh Anh 20520394

TP.HCM, ngày 25 tháng 3 năm 2022

Bài tập 5:Giải phương trình đệ quy sau dùng phương pháp hàm sinh

❖ a)

$$T(n)=\begin{cases}1\ khi\ n=\ 0\\ 2T(n-1)+7\ khi\ n>0\end{cases}$$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_0^{\infty}$ là:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}T(n)x^n$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[2T(n-1)+7]x^n+T(0)x^0$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[2T(n-1)]\,x^n+7\left[\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)-\ 1\right]+1^{(*)}$$

$$Xét\ \sum_{n=1}^{\infty}2T(n-1)\,x^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}T(n-1)\,x^{n-1}=2x(f(x))$$

$Thế\ vào$ $^{(*)}$, ta có:

$$f(x)=2x\big(f(x)\big)+7\left[\frac{1}{1-x}-1\right]+1$$

$$f(x)=2x\big(f(x)\big)+\frac{7x}{1-x}+1$$

$$(1-2x)f(x)=\frac{1+6x}{1-x}$$

$$f(x)=\frac{1+6x}{(1-x)(1-2x)}$$

Đưa phương trình về dạng: $f(x)=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-2x}$

Ta có: $A(1-2x)+B(1-x)=1+6x\rightarrow\begin{cases}A+B=1\\-2A-B=6\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A=-7\\B=8\end{cases}$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-7}{1-x}+\frac{8}{1-2x}$$

$$f(x)=-7\sum_{n=0}^{\infty}(x)^n+8\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[8(2)^n-7]x^n\ \ mà\ \ \ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}T(n)x^n$$

⇨ T(n) = $8(2)^n-7$

❖ b).

$\boldsymbol{T(n) = 7T(n-1) - 12T(n-2)}$ ***nếu n>=2***
$\boldsymbol{T(0) = 1}$
$\boldsymbol{T(1) = 2}$

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_0^\infty$ là:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} [7T(n-1) - 12T(n-2)]x^n + 1 + 2x \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} [7T(n-1)]x^n - \sum_{n=2}^{\infty} [12T(n-2)]x^n + 1 + 2x \end{aligned}$$

$$Xét\ \ A = \sum_{n=2}^{\infty} [7T(n-1)]x^n = 7x \sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} = 7x[f(x) - 1]$$

$$Xét\ \ B = \sum_{n=2}^{\infty} [12T(n-2)]x^n = 12x^2 \sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^{n-2} = 12x^2.f(x)$$

$\Rightarrow f(x) = 7x[f(x) - 1] - 12x^2.f(x) + 1 + 2x$
$\Rightarrow f(x) - 7x.f(x) + 12x^2.f(x) = -7x + 1 + 2x$
$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1-5x}{1 - 7x + 12x^2} = \dfrac{1-5x}{(1-3x)(1-4x)}$
$\Rightarrow f(x) = \dfrac{2}{1-3x} - \dfrac{1}{1-4x}$
$\Rightarrow f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n - 1\sum_{n=0}^{\infty}(4x)^n \quad mà \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$

$\Rightarrow T(n) = 2 * 3^n - 1 * 4^n$

❖ c).

T(n+1) = T(n) + 2(n+2) nếu n >=1
T(0) = 3

Thế n = n -1 ta được:

T(n) = T(n-1) +2(n+1)

Hàm sinh của dãy vô hạn $\{T(n)\}_0^{\infty}$ là:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T(n)\, x^n$$

f(x) = $\sum_{n=1}^{\infty}[T(n-1) \ + 2(n+1)]x^n$ +T(0) x^0

f(x) = $\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^n$+ $2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)]x^n$ +3

Xét $\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^n$ = x $\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)\, x^{n-1}$

=x[f(x)]

⇨ f(x) = $xf(x)$+ $2\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)]x^n$ +3

f(x) = $xf(x)$+ $2 \ * \frac{1}{(1-x)^2}$ - 2 + 3 = $xf(x)$+ $\frac{2}{(1-x)^2}$ + 1

⇨ (1-x)f(x) = $\frac{2}{(1-x)^2} + 1$

⇨ f(x) = $\frac{2}{(1-x)^3} + \frac{1}{1-x}$

ta có $\frac{2}{(1-x)^3}$ = $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\, x^n$=$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+3n \ + 2)\, x^n$

⇨ f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2 + \ 3n \ + 2)\, x^n \ + \ \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty}[(n^2 + \ 3n \ + 2) + 1]\, x^n$

f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty}[n^2 + \ 3n \ + 3]\, x^n$

mà f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n$

Vậy T(n) = $n^2 + \ 3n \ + 3$