隐马尔可夫模型

一、隐马尔可夫模型HMM

1. 隐马尔可夫模型（ `Hidden Markov model,HMM` ）是可用于序列标注问题的统计学模型，描述了由隐马尔可夫链随机生成观察序列的过程，属于生成模型。
2. 隐马尔可夫模型：隐马尔可夫模型是关于时序的概率模型，描述由一个隐藏的马尔可夫链随机生成不可观测的状态随机序列，再由各个状态生成一个观察而产生观察随机序列的过程。
   - 隐藏的马尔可夫链随机生成的状态的序列称作状态序列。
   - 每个状态生成一个观测，而由此产生的观测的随机序列称作观测序列。
   - 序列的每一个位置又可以看作是一个时刻。

1.1 基本概念

1. 设 $\mathbb{Q}=\{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\cdots,\mathbf{q}_Q\}$ 是所有可能的状态的集合， $\mathbb{V}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_V\}$ 是所有可能的观测的集合，其中 Q 是可能的状态数量，V 是可能的观测数量。
   - $\mathbb{Q}$ 是状态的取值空间，$\mathbb{V}$ 是观测的取值空间 。
   - 每个观测值 $\mathbf{v}_i$ 可能是标量，也可能是一组标量构成的集合，因此这里用加粗的黑体表示。状态值的表示也类似。
2. 设 $\mathbf{I}=(i_1,i_2,\cdots,i_T)$ 是长度为 T 的状态序列， $\mathbf{O}=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$ 是对应的观测序列。
   - $i_t\in\{1,\cdots,Q\}$ 是一个随机变量，代表状态 $\mathbf{q}_{i_t}$ 。
   - $o_t\in\{1,\cdots,V\}$ 是一个随机变量，代表观测 $\mathbf{v}_{o_t}$ 。
3. 设 $\mathbf{A}$ 为状态转移概率矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,Q}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,Q}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{Q,1} & a_{Q,2} & \cdots & a_{Q,Q}\end{bmatrix}$$

   其中 $a_{i,j}=P(i_{t+1}=j\mid i_t=i)$，表示在时刻 t 处于状态 $\mathbf{q}_i$ 的条件下，在时刻 $t+1$ 时刻转移到状态 $\mathbf{q}_j$ 的概率。
4. 设 $\mathbf{B}$ 为观测概率矩阵

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}b_1(1) & b_1(2) & \cdots & b_1(V)\\ b_2(1) & b_2(2) & \cdots & b_2(V)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_Q(1) & b_Q(2) & \cdots & b_Q(V)\end{bmatrix}$$

   其中 $b_j(k)=P(o_t=k\mid i_t=j)$，表示在时刻 t 处于状态 $\mathbf{q}_j$ 的条件下生成观测 $\mathbf{v}_k$ 的概率。
5. 设 $\vec{\pi}$ 是初始状态概率向量：$\vec{\pi}=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_Q)^T,\quad \pi_i=P(i_1=i)$ 是时刻 $t=1$ 时处于状态 $\mathbf{q}_i$ 的概率。

   根据定义有： $\sum_{i=1}^Q\pi_i=1$ 。

6. 隐马尔可夫模型由初始状态概率向量 $\vec{\pi}$、状态转移概率矩阵 $\mathbf{A}$ 以及观测概率矩阵 $\mathbf{B}$ 决定。因此隐马尔可夫模型λ 可以用三元符号表示，即 ：$\lambda=(\mathbf{A},\mathbf{B},\vec{\pi})$ 。其中 $\mathbf{A},\mathbf{B},\vec{\pi}$ 称为隐马尔可夫模型的三要素：
    - 状态转移概率矩阵 $\mathbf{A}$ 和初始状态概率向量 $\vec{\pi}$ 确定了隐藏的马尔可夫链，生成不可观测的状态序列。
    - 观测概率矩阵 $\mathbf{B}$ 确定了如何从状态生成观测，与状态序列一起确定了如何产生观测序列。
7. 从定义可知，隐马尔可夫模型做了两个基本假设：
    - 齐次性假设：即假设隐藏的马尔可夫链在任意时刻 t 的状态只依赖于它在前一时刻的状态，与其他时刻的状态和观测无关，也与时刻 t 无关，即：

$$P(i_t\mid i_{t-1},o_{t-1},\cdots,i_1,o_1)=P(i_t\mid i_{t-1}),\quad t=1,2,\cdots,T$$

    - 观测独立性假设，即假设任意时刻的观测值只依赖于该时刻的马尔可夫链的状态，与其他观测及状态无关，即：

$$P(o_t\mid i_T,o_T,\cdots,i_{t+1},o_{t+1},i_t,i_{t-1},o_{t-1},\cdots,i_1,o_1)=P(o_t\mid i_t),\quad t=1,2,\cdots,T$$

    .

1.2 生成算法

1. 隐马尔可夫模型可以用于标注问题：给定观测的序列，预测其对应的状态序列。 如：词性标注问题中，状态就是单词的词性，观测就是具体的单词。在这个问题中：
    - 状态序列：词性序列 。
    - 观察序列：单词序列 。
    - 生成方式：
        - 给定初始状态概率向量 $\vec{\pi}$ ，随机生成第一个词性。
        - 根据前一个词性，利用状态转移概率矩阵 $\mathbf{A}$ 随机生成下一个词性。
        - 一旦生成词性序列，则根据每个词性，利用观测概率矩阵 $\mathbf{B}$ 生成对应位置的观察，得到观察序列。
2. 一个长度为 T 的观测序列的 `HMM` 生成算法：
    - 输入：
        - 隐马尔可夫模型 $\lambda=(\mathbf{A},\mathbf{B},\vec{\pi})$
        - 观测序列长度 T
    - 输出：观测序列 $\mathbf{O}=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$
    - 算法步骤：
        - 按照初始状态分布 $\vec{\pi}$ 产生状态 i_1 。
        - 令 $t=1$ ，开始迭代。迭代条件为： $t\le T$ 。迭代步骤为：
            - 按照状态 i_t 的观测概率分布 $b_j(k)$ 生成 o_t ， $o_t\in\mathbb{V}$。
            - 按照状态 i_t 的状态转移概率分布 $a_{i,j}$ 产生状态 i_{t+1}， $i_{t+1}\in\mathbb{Q}$ 。
            - 令 $t=t+1$。

二、 HMM 基本问题

1. 隐马尔可夫模型的 3 个基本问题：
    - 概率计算问题：给定模型 $\lambda=(\mathbf{A},\mathbf{B},\vec{\pi})$ 和观测序列 $\mathbf{O}=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$，计算观测序列 $\mathbf{O}$ 出现的概率 $P(\mathbf{O};\lambda)$ 。即：评估模型 λ 与观察序列 $\mathbf{O}$ 之间的匹配程度。

- 学习问题：已知观测序列 $\mathbf{O}=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$，估计模型 $\lambda=(\mathbf{A},\mathbf{B},\vec{\pi})$ 的参数，使得在该模型下观测序列概率 $P(\mathbf{O};\lambda)$ 最大。即：用极大似然估计的方法估计参数。
- 预测问题（也称为解码问题）：已知模型 $\lambda=(\mathbf{A},\mathbf{B},\vec{\pi})$ 和观测序列 $\mathbf{O}=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$， 求对给定观测序列的条件概率 $P(\mathbf{I}\mid\mathbf{O})$ 最大的状态序列 $\mathbf{I}=(i_1,i_2,\cdots,i_T)$。即：给定观测序列，求最可能的对应的状态序列 。

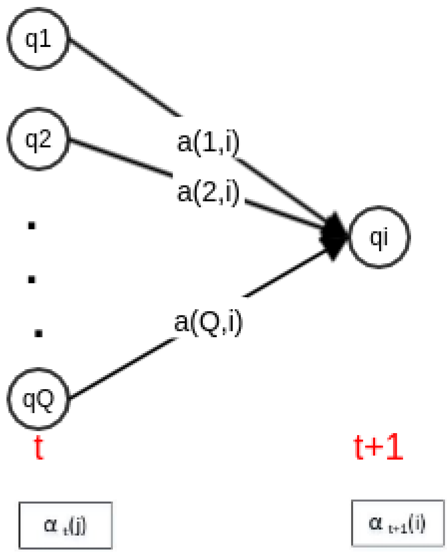
  如：在语音识别任务中，观测值为语音信号，隐藏状态为文字。解码问题的目标就是：根据观测的语音信号来推断最有可能的文字序列。

2.1 概率计算问题

1. 给定隐马尔可夫模型 $\lambda=(\mathbf{A},\mathbf{B},\vec{\pi})$ 和观测序列 $\mathbf{O}=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$，概率计算问题需要计算在模型 λ 下观测序列 $\mathbf{O}$ 出现的概率 $P(\mathbf{O};\lambda)$。
2. 最直接的方法是按照概率公式直接计算：通过列举所有可能的、长度为 T 的状态序列 $\mathbf{I}=(i_1,i_2,\cdots,i_T)$，求各个状态序列 $\mathbf{I}$ 与观测序列 $\mathbf{O}=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$ 的联合概率 $P(\mathbf{O},\mathbf{I};\lambda)$，然后对所有可能的状态序列求和，得到 $P(\mathbf{O};\lambda)$ 。
   - 状态序列 $\mathbf{I}=(i_1,i_2,\cdots,i_T)$ 的概率为：
     $$P(\mathbf{I};\lambda)=\pi_{i_1}a_{i_1,i_2}a_{i_2,i_3}\cdots a_{i_{T-1},i_T}$$
   - 给定状态序列 $\mathbf{I}=(i_1,i_2,\cdots,i_T)$ ，观测序列 $\mathbf{O}=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$ 的条件概率为：
     $$P(\mathbf{O}\mid\mathbf{I};\lambda)=b_{i_1}(o_1)b_{i_2}(o_2)\cdots b_{i_T}(o_T)$$
   - $\mathbf{O}$ 和 $\mathbf{I}$ 同时出现的联合概率为：
     $$P(\mathbf{O},\mathbf{I};\lambda)=P(\mathbf{O}\mid\mathbf{I};\lambda)P(\mathbf{I};\lambda)=\pi_{i_1}a_{i_1,i_2}a_{i_2,i_3}\cdots a_{i_{T-1},i_T}b_{i_1}(o_1)b_{i_2}(o_2)\cdots b_{i_T}(o_T)$$
   - 对所有可能的状态序列 $\mathbf{I}$ 求和，得到观测序列 $\mathbf{O}$ 的概率：
     $$P(\mathbf{O};\lambda)=\sum_{\mathbf{I}}P(\mathbf{O},\mathbf{I};\lambda)=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_T}\pi_{i_1}a_{i_1,i_2}a_{i_2,i_3}\cdots a_{i_{T-1},i_T}b_{i_1}(o_1)b_{i_2}(o_2)\cdots b_{i_T}(o_T)$$
   - 上式的算法复杂度为 $O(T\times Q^T)$，太复杂，实际应用中不太可行。

2.1.1 前向算法

1. 给定隐马尔可夫模型 $\lambda=(\mathbf{A},\mathbf{B},\vec{\pi})$，定义前向概率：在时刻 t 时的观测序列为 $o_1,o_2,\cdots,o_t$ ，且时刻 t 时状态为 $\mathbf{q}_i$ 的概率为前向概率，记作：$\alpha_t(i)=P(o_1,o_2,\cdots,o_t,i_t=i;\lambda)$
2. 根据定义，$\alpha_t(j)$ 是在时刻 t 时观测到 $o_1,o_2,\cdots,o_t$ ，且在时刻 t 处于状态 $\mathbf{q}_j$ 的前向概率。则有：
   - $\alpha_t(j)\times a_{j,i}$ ：为在时刻 t 时观测到 $o_1,o_2,\cdots,o_t$ ，且在时刻 t 处于状态 $\mathbf{q}_j$ ，且在 $t+1$ 时刻处在状态 $\mathbf{q}_i$ 的概率。
   - $\sum_{j=1}^{Q}\alpha_t(j)\times a_{j,i}$ ：为在时刻 t 观测序列为 $o_1,o_2,\cdots,o_t$ ，并且在时刻 $t+1$ 时刻处于状态 $\mathbf{q}_i$ 的概率。
   - 考虑 $b_i(o_{t+1})$，则得到前向概率的地推公式：
     $$\alpha_{t+1}(i)=\left[\sum_{j=1}^{Q}\alpha_t(j)a_{j,i}\right]b_i(o_{t+1})$$



3. 观测序列概率的前向算法：
    - 输入：
        - 隐马尔可夫模型 $\lambda=(\mathbf{A},\mathbf{B},\vec{\pi})$
        - 观测序列 $\mathbf{O}=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$
    - 输出： 观测序列概率 $P(\mathbf{O};\lambda)$
    - 算法步骤：
        - 计算初值： $\alpha_1(i)=\pi_i b_i(o_1),\quad i=1,2,\cdots,Q$ 。

          该初值是初始时刻的状态 $i_1=i$ 和观测 o_1 的联合概率。
        - 递推：对于 $t=1,2,\cdots,T-1$ ：

$$\alpha_{t+1}(i)=\left[\sum_{j=1}^{Q}\alpha_t(j)a_{j,i}\right]b_i(o_{t+1}),\quad i=1,2,\cdots,Q$$

        - 终止： $P(\mathbf{O};\lambda)=\sum_{i=1}^{Q}\alpha_T(i)$ 。

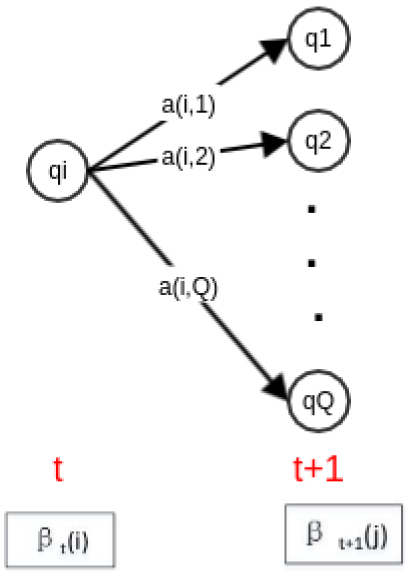
          因为 $\alpha_T(i)$ 表示在时刻 T ，观测序列为 $o_1,o_2,\cdots,o_T$ ，且状态为 $\mathbf{q}_i$ 的概率。对所有可能的 Q 个状态 $\mathbf{q}_i$ 求和则得到 $P(\mathbf{O};\lambda)$ 。
4. 前向算法是基于 `状态序列的路径结构` 递推计算 $P(\mathbf{O};\lambda)$。
    - 其高效的关键是局部计算前向概率，然后利用路径结构将前向概率“递推”到全局。
    - 算法复杂度为 $O(TQ^2)$ 。

2.1.2 后向算法

1. 给定隐马尔可夫模型 $\lambda=(\mathbf{A},\mathbf{B},\vec{\pi})$ ，定义后向概率：在时刻 t 的状态为 $\mathbf{q}_i$ 的条件下，从时刻 $t+1$ 到 T 的观测序列为 $o_{t+1},o_{t+2},\cdots,o_T$ 的概率为后向概率，记作：$\beta_t(i)=P(o_{t+1},o_{t+2},\cdots,o_T\mid i_t=i;\lambda)$ 。
2. 在时刻 t 状态为 $\mathbf{q}_i$ 的条件下，从时刻 $t+1$ 到 T 的观测序列为 $o_{t+1},o_{t+2},\cdots,o_T$ 的概率可以这样计算：
    - 考虑 t 时刻状态 $\mathbf{q}_i$ 经过 $a_{i,j}$ 转移到 $t+1$ 时刻的状态 $\mathbf{q}_j$。
        - $t+1$ 时刻状态为 $\mathbf{q}_j$的条件下，从时刻 $t+2$ 到 T 的观测序列为观测序列为 $o_{t+2},o_{t+3},\cdots,o_T$ 的概率为 $\beta_{t+1}(j)$。

- $t+1$ 时刻状态为 $\mathbf{q}_j$的条件下，从时刻 $t+1$ 到 T 的观测序列为观测序列为 $o_{t+1}, o_{t+2}, \cdots, o_T$ 的概率为 $b_j(o_{t+1}) \times \beta_{t+1}(j)$。
- 考虑所有可能的 $\mathbf{q}_j$，则得到 $\beta_t(j)$ 的递推公式：

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{Q} a_{i,j} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$$



3. 观测序列概率的后向算法：
   - 输入：
     - 隐马尔可夫模型 $\lambda = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \vec{\pi})$
     - 观测序列 $\mathbf{O} = (o_1, o_2, \cdots, o_T)$
   - 输出：观测序列概率 $P(\mathbf{O}; \lambda)$
   - 算法步骤：
     - 计算初值：$\beta_T(i) = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, Q$

       对最终时刻的所有状态 $\mathbf{q}_i$ ，规定 $\beta_T(i) = 1$ 。
     - 递推：对 $t = T-1, T-2, \cdots, 1$:

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{Q} a_{i,j} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j), \quad i = 1, 2, \cdots, Q$$

     - 终止：$P(\mathbf{O}; \lambda) = \sum_{i=1}^{Q} \pi_i b_i(o_1) \beta_1(i)$

       $\beta_1(i)$ 为在时刻 1 ，状态为 $\mathbf{q}_i$ 的条件下，从时刻 2 到 T 的观测序列为 $o_2, o_3, \cdots, o_T$ 的概率。对所有的可能初始状态 $\mathbf{q}_i$ （由 π_i 提供其概率）求和并考虑 o_1 即可得到观测序列为 $o_1, o_2, \cdots, o_T$ 的概率。

2.1.3 统一形式

1. 利用前向概率和后向概率的定义，可以将观测序列概率统一为：

$$P(\mathbf{O}; \lambda) = \sum_{i=1}^{Q} \sum_{j=1}^{Q} \alpha_t(i) a_{i,j} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j), \quad t = 1, 2, \cdots, T-1$$

- 当 $t=1$ 时，就是后向概率算法；当 $t=T-1$ 时，就是前向概率算法。
- 其意义为：在时刻 t：
    - $\alpha_t(i)$ 表示：已知时刻 t 时的观测序列为 $o_1,o_2,\cdots,o_t$ 、且时刻 t 时状态为 $\mathbf{q}_i$ 的概率。
    - $\alpha_t(i)a_{i,j}$ 表示：已知时刻 t 时的观测序列为 $o_1,o_2,\cdots,o_t$ 、且时刻 t 时状态为 $\mathbf{q}_i$、且 $t+1$ 时刻状态为 $\mathbf{q}_j$ 的概率。
    - $\alpha_t(i)a_{i,j}b_j(o_{t+1})$ 表示：已知时刻 $t+1$ 时的观测序列为 $o_1,o_2,\cdots,o_{t+1}$ 、且时刻 t 时状态为 $\mathbf{q}_i$ 、且 $t+1$ 时刻状态为 $\mathbf{q}_j$ 的概率。
    - $\alpha_t(i)a_{i,j}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)$ 表示：已知观测序列为 $o_1,o_2,\cdots,o_T$ 、且时刻 t 时状态为 $\mathbf{q}_i$ 、且 $t+1$ 时刻状态为 $\mathbf{q}_j$ 的概率。
    - 对所有可能的状态 $\mathbf{q}_i,\mathbf{q}_j$ 取值，即得到上式。

2. 根据前向算法有：$\alpha_{t+1}(j)=\sum_{i=1}^Q\alpha_t(i)a_{i,j}b_j(o_{t+1})$ 。则得到：

$$P(\mathbf{O};\lambda)=\sum_{i=1}^Q\sum_{j=1}^Q\alpha_t(i)a_{i,j}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)$$
$$=\sum_{j=1}^Q\left[\sum_{i=1}^Q\alpha_t(i)a_{i,j}b_j(o_{t+1})\right]\beta_{t+1}(j)=\sum_{j=1}^Q\alpha_{t+1}(j)\beta_{t+1}(j)$$
$$t=1,2,\cdots,T-1$$

   由于 t 的形式不重要，因此有：

$$P(\mathbf{O};\lambda)=\sum_{j=1}^Q\alpha_t(j)\beta_t(j),\quad t=1,2,\cdots,T$$

3. 给定模型 $\lambda=(\mathbf{A},\mathbf{B},\vec{\pi})$ 和观测序列 $\mathbf{O}$ 的条件下，在时刻 t 处于状态 $\mathbf{q}_i$ 的概率记作：$\gamma_t(i)=P(i_t=i\mid\mathbf{O};\lambda)$
    - 根据定义：

$$\gamma_t(i)=P(i_t=i\mid\mathbf{O};\lambda)=\frac{P(i_t=i,\mathbf{O};\lambda)}{P(\mathbf{O};\lambda)}$$

    - 根据前向概率和后向概率的定义，有：$\alpha_t(i)\beta_t(i)=P(i_t=i,\mathbf{O};\lambda)$，则有：

$$\gamma_t(i)=\frac{P(i_t=i,\mathbf{O};\lambda)}{P(\mathbf{O};\lambda)}=\frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{P(\mathbf{O};\lambda)}=\frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^Q\alpha_t(j)\beta_t(j)}$$

4. 给定模型 $\lambda=(\mathbf{A},\mathbf{B},\vec{\pi})$ 和观测序列 $\mathbf{O}$ ，在时刻 t 处于状态 $\mathbf{q}_i$ 且在 $t+1$ 时刻处于状态 $\mathbf{q}_j$ 的概率记作：$\xi_t(i,j)=P(i_t=i,i_{t+1}=j\mid\mathbf{O};\lambda)$
    - 根据

$$\xi_t(i,j)=P(i_t=i,i_{t+1}=j\mid\mathbf{O};\lambda)=\frac{P(i_t=i,i_{t+1}=j,\mathbf{O};\lambda)}{P(\mathbf{O};\lambda)}$$
$$=\frac{P(i_t=i,i_{t+1}=j,\mathbf{O};\lambda)}{\sum_{u=1}^Q\sum_{v=1}^QP(i_t=u,i_{t+1}=v,\mathbf{O};\lambda)}$$

    - 考虑到前向概率和后向概率的定义有：$P(i_t=i,i_{t+1}=j,\mathbf{O};\lambda)=\alpha_t(i)a_{i,j}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)$，因此有：

$$\xi_t(i,j)=\frac{\alpha_t(i)a_{i,j}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)}{\sum_{u=1}^Q\sum_{v=1}^Q\alpha_t(u)a_{u,v}b_v(o_{t+1})\beta_{t+1}(v)}$$

5. 一些期望值：
   - 在给定观测 $\mathbf{O}$ 的条件下，状态 i 出现的期望值为： $\sum_{t=1}^T\gamma_t(i)$ 。
   - 在给定观测 $\mathbf{O}$ 的条件下，从状态 i 转移的期望值： $\sum_{t=1}^{T-1}\gamma_t(i)$ 。
     - 这里的转移，表示状态 i 可能转移到任何可能的状态。
     - 假若在时刻 T 的状态为 $\mathbf{q}_i$ ，则此时不可能再转移，因为时间最大为 T 。
   - 在观测 $\mathbf{O}$ 的条件下，由状态 i 转移到状态 j 的期望值： $\sum_{t=1}^{T-1}\xi_t(i,j)$ 。

2.2 学习问题

1. 根据训练数据的不同，隐马尔可夫模型的学习方法也不同：
   - 训练数据包括观测序列和对应的状态序列：通过监督学习来学习隐马尔可夫模型。
   - 训练数据仅包括观测序列：通过非监督学习来学习隐马尔可夫模型。

2.2.1 监督学习

1. 假设数据集为 $\mathbb{D}=\{(\mathbf{O}_1,\mathbf{I}_1),(\mathbf{O}_2,\mathbf{I}_2),\cdots,(\mathbf{O}_N,\mathbf{I}_N)\}$ 。其中：
   - $\mathbf{O}_1,\cdots,\mathbf{O}_N$ 为 N 个观测序列；$\mathbf{I}_1,\cdots,\mathbf{I}_N$ 为对应的 N 个状态序列。
   - 序列 $\mathbf{O}_k$ ，$\mathbf{I}_k$ 的长度为 T_k ，其中数据集中 $\mathbf{O}_1,\cdots,\mathbf{O}_N$ 之间的序列长度可以不同。
2. 可以利用极大似然估计来估计隐马尔可夫模型的参数。
   - 转移概率 $a_{i,j}$ 的估计：设样本中前一时刻处于状态 i 、且后一时刻处于状态 j 的频数为 $A_{i,j}$ ，则状态转移概率 $a_{i,j}$ 的估计是：

     $$\hat{a}_{i,j}=\frac{A_{i,j}}{\sum_{u=1}^Q A_{i,u}},\quad i=1,2,\cdots,Q;j=1,2,\cdots,Q$$

   - 观测概率 $b_j(k)$ 的估计：设样本中状态为 j 并且观测为 k 的频数为 $B_{j,k}$，则状态为 j 并且观测为 k 的概率 $b_j(k)$ 的估计为：

     $$\hat{b}_j(k)=\frac{B_{j,k}}{\sum_{v=1}^V B_{j,v}},\quad j=1,2,\cdots,Q;k=1,2,\cdots,V$$

   - 初始状态概率的估计：设样本中初始时刻（即：$t=1$ ）处于状态 i 的频数为 C_i，则初始状态概率 π_i 的估计为：$\hat{\pi}_i=\frac{C_i}{\sum_{j=1}^Q C_j},\quad i=1,2,\cdots,Q$ 。

2.2.2 无监督学习

1. 监督学习需要使用人工标注的训练数据。由于人工标注往往代价很高，所以经常会利用无监督学习的方法。

   隐马尔可夫模型的无监督学习通常使用 `Baum-Welch` 算法求解。
2. 在隐马尔可夫模型的无监督学习中，数据集为 $\mathbb{D}=\{\mathbf{O}_1,\mathbf{O}_2,\cdots,\mathbf{O}_N\}$。其中：
   - $\mathbf{O}_1,\cdots,\mathbf{O}_N$ 为 N 个观测序列。
   - 序列 $\mathbf{O}_k$的长度为 T_k ，其中数据集中 $\mathbf{O}_1,\cdots,\mathbf{O}_N$ 之间的序列长度可以不同。
3. 将观测序列数据看作观测变量 $\mathbf{O}$ ， 状态序列数据看作不可观测的隐变量 $\mathbf{I}$ ，则隐马尔可夫模型事实上是一个含有隐变量的概率模型： $P(\mathbf{O};\lambda)=\sum_{\mathbf{I}}P(\mathbf{O}\mid\mathbf{I};\lambda)P(\mathbf{I};\lambda)$。其参数学习可以由 `EM` 算法实现。

- `E` 步：求 `Q` 函数（其中 $\bar{\lambda}$ 是参数的当前估计值）

$$Q(\lambda,\bar{\lambda})=\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{\mathbf{I}}P(\mathbf{I}\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_j;\bar{\lambda})\log P(\mathbf{O}=\mathbf{O}_j,\mathbf{I};\lambda)\right)$$

  将 $P(\mathbf{I}\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_j;\bar{\lambda})=\frac{P(\mathbf{I},\mathbf{O}=\mathbf{O}_j;\bar{\lambda})}{P(\mathbf{O}_j;\bar{\lambda})}$ 代入上式，有：

$$Q(\lambda,\bar{\lambda})=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{P(\mathbf{O}_j;\bar{\lambda})}\left(\sum_{\mathbf{I}}P(\mathbf{I},\mathbf{O}=\mathbf{O}_j;\bar{\lambda})\log P(\mathbf{I},\mathbf{O}=\mathbf{O}_j;\lambda)\right)$$

  - 在给定参数 $\bar{\lambda}$ 时， $P(\mathbf{O}_j;\bar{\lambda})$ 是已知的常数，记做 $\tilde{P}_j$ 。
  - 在给定参数 $\bar{\lambda}$ 时，$P(\mathbf{I},\mathbf{O}=\mathbf{O}_j;\bar{\lambda})$ 是 $\mathbf{I}$ 的函数，记做 $\tilde{P}_j(\mathbf{I})$ 。

  根据 $P(\mathbf{O},\mathbf{I};\lambda)=\pi_{i_1}b_{i_1}(o_1)a_{i_1,i_2}b_{i_2}(o_2)\cdots a_{i_{T-1},i_T}b_{i_T}(o_T)$ 得到：

$$\begin{aligned}Q(\lambda,\bar{\lambda})=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\tilde{P}_j}\Bigg(&\sum_{\mathbf{I}}(\log\pi_{i_1})\tilde{P}_j(\mathbf{I})+\sum_{\mathbf{I}}\left(\sum_{t=1}^{T_j-1}\log a_{i_t,i_{t+1}}\right)\tilde{P}_j(\mathbf{I})\\&+\sum_{\mathbf{I}}\left(\sum_{t=1}^{T_j}\log b_{i_t}(o_t^{(j)})\right)\tilde{P}_j(\mathbf{I})\Bigg)\end{aligned}$$

  其中：T_j 表示第 j 个序列的长度， $o_t^{(j)}$ 表示第 j 个观测序列的第 t 个位置。

- `M` 步：求`Q` 函数的极大值：

$$\bar{\lambda}^{<new>}\leftarrow\arg\max_{\lambda}Q(\lambda,\bar{\lambda})$$

  极大化参数在 `Q` 函数中单独的出现在3个项中，所以只需要对各项分别极大化。

  - $\frac{\partial Q(\lambda,\bar{\lambda})}{\partial\pi_i}=0$ ：

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(\lambda,\bar{\lambda})}{\partial\pi_i}&=\frac{\partial(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\tilde{P}_j}\sum_{\mathbf{I}}(\log\pi_{i_1})\tilde{P}_j(\mathbf{I}))}{\partial\pi_i}\\&=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\tilde{P}_j}\sum_{i_1=1}^{Q}P(i_1,\mathbf{O}=\mathbf{O}_j;\bar{\lambda})\frac{\partial\log\pi_{i_1}}{\partial\pi_i}\end{aligned}$$

    将 $\pi_Q=1-\pi_1-\cdots-\pi_{Q-1}$ 代入，有：

$$\frac{\partial Q(\lambda,\bar{\lambda})}{\partial\pi_i}=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\tilde{P}_j}\left(\frac{P(i_1=i,\mathbf{O}=\mathbf{O}_j;\bar{\lambda})}{\pi_i}-\frac{P(i_1=Q,\mathbf{O}=\mathbf{O}_j;\bar{\lambda})}{\pi_Q}\right)=0$$

    将$\tilde{P}_j=P(\mathbf{O}=\mathbf{O}_j;\bar{\lambda})$ 代入，即有：

$$\pi_i\propto\sum_{j=1}^{N}P(i_1=i\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_j;\bar{\lambda})$$

    考虑到 $\sum_{i=1}^{Q}\pi_i=1$，以及 $\sum_{i=1}^{Q}\sum_{j=1}^{N}P(i_1=i\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_j;\bar{\lambda})=N$， 则有：

$$\pi_i=\frac{\sum_{j=1}^{N}P(i_1=i\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_j;\bar{\lambda})}{N}$$

其物理意义为：统计在给定参数 $\bar\lambda$ ，已知 $\mathbf{O}=\mathbf{O}_j$ 的条件下，$i_1=i$ 的出现的频率。它就是 $i_1=i$ 的后验概率的估计值。

- $\frac{\partial Q(\lambda,\bar\lambda)}{\partial a_{i,j}}=0$ ：同样的处理有：

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(\lambda,\bar\lambda)}{\partial a_{i,j}}=\sum_{k=1}^N\frac{1}{\tilde P_k}\sum_{t=1}^{T_k-1}\Bigg(&\frac{P(i_t=i,i_{t+1}=j,\mathbf{O}=\mathbf{O}_k;\bar\lambda)}{a_{i,j}}\\&-\frac{P(i_t=i,i_{t+1}=Q,\mathbf{O}=\mathbf{O}_k;\bar\lambda)}{a_{i,Q}}\Bigg)\end{aligned}$$

得到：

$$a_{i,j}\propto\sum_{k=1}^N\sum_{t=1}^{T_k-1}P(i_t=i,i_{t+1}=j\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_k;\bar\lambda)$$

考虑到 $\sum_{j=1}^Q a_{i,j}=1$ ，则有：

$$\begin{aligned}a_{i,j}&=\frac{\sum_{k=1}^N\sum_{t=1}^{T_k-1}P(i_t=i,i_{t+1}=j\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_k;\bar\lambda)}{\sum_{j'=1}^Q\sum_{k=1}^N\sum_{t=1}^{T_k-1}P(i_t=i,i_{t+1}=j'\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_k;\bar\lambda)}\\&=\frac{\sum_{k=1}^N\sum_{t=1}^{T_k-1}P(i_t=i,i_{t+1}=j\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_k;\bar\lambda)}{\sum_{k=1}^N\sum_{t=1}^{T_k-1}P(i_t=i\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_k;\bar\lambda)}\end{aligned}$$

其物理意义为：统计在给定参数 $\bar\lambda$ ，已知 $\mathbf{O}=\mathbf{O}_j$ 的条件下，统计当 $i_t=i$ 的情况下 $i_{t+1}=j$ 的出现的频率。它就是 $i_{t+1}=j\mid i_t=i$ 的后验概率的估计值。

- $\frac{\partial Q(\lambda,\bar\lambda)}{\partial b_j(k)}=0$ ：同样的处理有：

$$\frac{\partial Q(\lambda,\bar\lambda)}{\partial b_j(k)}=\sum_{i=1}^N\frac{1}{\tilde P_i}\sum_{t=1}^{T_i}\left(\frac{P(i_t=j,o_t=k,\mathbf{O}=\mathbf{O}_i;\bar\lambda)}{b_j(k)}-\frac{P(i_t=j,o_t=V,\mathbf{O}=\mathbf{O}_i;\bar\lambda)}{b_j(V)}\right)$$

得到：

$$b_j(k)\propto\sum_{i=1}^N\sum_{t=1}^{T_i}P(i_t=j,o_t=k\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_i;\bar\lambda)$$

其中如果第 i 个序列 $\mathbf{O}_i$ 的第 t 个位置 $o_t^{(i)}\ne k$ ，则 $P(i_t=j,o_t=k\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_i;\bar\lambda)=0$ 。

考虑到 $\sum_{k=1}^V b_j(k)=1$ ，则有：

$$\begin{aligned}b_j(k)&=\frac{\sum_{i=1}^N\sum_{t=1}^{T_i}P(i_t=j,o_t=k\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_i;\bar\lambda)}{\sum_{k'=1}^V\sum_{i=1}^N\sum_{t=1}^{T_i}P(i_t=j,o_t=k'\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_i;\bar\lambda)}\\&=\frac{\sum_{i=1}^N\sum_{t=1}^{T_i}P(i_t=j,o_t=k\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_i;\bar\lambda)}{\sum_{i=1}^N\sum_{t=1}^{T_i}P(i_t=j\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_i;\bar\lambda)}\end{aligned}$$

其物理意义为：统计在给定参数 $\bar\lambda$ ，已知 $\mathbf{O}=\mathbf{O}_j$ 的条件下，统计当 $i_t=j$ 的情况下 $o_t=k$ 的出现的频率。它就是 $o_t=k\mid i_t=j$ 的后验概率的估计值。

4. 令$\gamma_t^{(s)}(i)=P(i_t=i\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_s;\bar\lambda)$，其物理意义为：在序列 $\mathbf{O}_s$ 中，第 t 时刻的隐状态为 i 的后验概率。

   令 $\xi_t^{(s)}(i,j)=P(i_t=i,i_{t+1}=j\mid\mathbf{O}=\mathbf{O}_s;\bar\lambda)$，其物理意义为：在序列 $\mathbf{O}_s$ 中，第 t 时刻的隐状态为 i 、且第 $t+1$ 时刻的隐状态为 j 的后验概率。

   则 `M` 步的估计值改写为：

$$\pi_i=\frac{\sum_{s=1}^N P(i_1=i\mid \mathbf{O}=\mathbf{O}_s;\bar\lambda)}{N}=\frac{\sum_{s=1}^N \gamma_1^{(s)}(i)}{N}$$
$$a_{i,j}=\frac{\sum_{s=1}^N\sum_{t=1}^{T_s-1} P(i_t=i,i_{t+1}=j\mid \mathbf{O}=\mathbf{O}_s;\bar\lambda)}{\sum_{s=1}^N\sum_{t=1}^{T_s-1} P(i_t=i\mid \mathbf{O}=\mathbf{O}_s;\bar\lambda)}=\frac{\sum_{s=1}^N\sum_{t=1}^{T_s-1}\xi_t^{(s)}(i,j)}{\sum_{s=1}^N\sum_{t=1}^{T_s-1}\gamma_t^{(s)}(i)}$$
$$b_j(k)=\frac{\sum_{s=1}^N\sum_{t=1}^{T_s} P(i_t=j,o_t=k\mid \mathbf{O}=\mathbf{O}_s;\bar\lambda)}{\sum_{s=1}^N\sum_{t=1}^{T_i} P(i_t=j\mid \mathbf{O}=\mathbf{O}_s;\bar\lambda)}=\frac{\sum_{s=1}^N\sum_{t=1}^{T_s}\gamma_t^{(s)}(j)\mathbb{I}(o_t^{(s)}=k)}{\sum_{s=1}^N\sum_{t=1}^{T_i}\gamma_t^{(s)}(j)}$$

其中 $\mathbb{I}(o_t^{(s)}=k)$ 为示性函数，其意义为：当 $\mathbf{O}_s$ 的第 t 时刻为 k 时，取值为 1；否则取值为 0 。

5. `Baum-Welch`算法：
   - 输入：观测数据 $\mathbb{D}=\{\mathbf{O}_1,\mathbf{O}_2,\cdots,\mathbf{O}_N\}$
   - 输出：隐马尔可夫模型参数
   - 算法步骤：
     - 初始化：$n=0$，选取 $a_{i,j}^{<0>},b_j(k)^{<0>},\pi_i^{<0>}$ ，得到模型 $\lambda^{<0>}=(\mathbf{A}^{<0>},\mathbf{B}^{<0>},\vec\pi^{<0>})$
     - 迭代，迭代停止条件为：模型参数收敛。迭代过程为：
       - 求使得 `Q` 函数取极大值的参数：
$$\pi_i^{<n+1>}=\frac{\sum_{s=1}^N P(i_1=i\mid \mathbf{O}=\mathbf{O}_s;\bar\lambda)}{N}=\frac{\sum_{s=1}^N \gamma_1^{(s)}(i)}{N}$$
$$a_{i,j}^{<n+1>}=\frac{\sum_{s=1}^N\sum_{t=1}^{T_s-1} P(i_t=i,i_{t+1}=j\mid \mathbf{O}=\mathbf{O}_s;\bar\lambda)}{\sum_{s=1}^N\sum_{t=1}^{T_s-1} P(i_t=i\mid \mathbf{O}=\mathbf{O}_s;\bar\lambda)}=\frac{\sum_{s=1}^N\sum_{t=1}^{T_s-1}\xi_t^{(s)}(i,j)}{\sum_{s=1}^N\sum_{t=1}^{T_s-1}\gamma_t^{(s)}(i)}$$
$$b_j(k)^{<n+1>}=\frac{\sum_{s=1}^N\sum_{t=1}^{T_s} P(i_t=j,o_t=k\mid \mathbf{O}=\mathbf{O}_s;\bar\lambda)}{\sum_{s=1}^N\sum_{t=1}^{T_i} P(i_t=j\mid \mathbf{O}=\mathbf{O}_s;\bar\lambda)}=\frac{\sum_{s=1}^N\sum_{t=1}^{T_s}\gamma_t^{(s)}(j)\mathbb{I}(o_t^{(s)}=k)}{\sum_{s=1}^N\sum_{t=1}^{T_i}\gamma_t^{(s)}(j)}$$
       - 判断模型是否收敛。如果不收敛，则 $n\leftarrow n+1$ ，继续迭代。
     - 最终得到模型 $\lambda^{<n>}=(\mathbf{A}^{<n>},\mathbf{B}^{<n>},\vec\pi^{<n>})$ 。

2.3 预测问题

2.3.1 近似算法

1. 近似算法思想：在每个时刻 t 选择在该时刻最有可能出现的状态 i_t^* ，从而得到一个状态序列 $\mathbf{I}^*=(i_1^*,i_2^*,\cdots,i_T^*)$，然后将它作为预测的结果。
2. 近似算法：给定隐马尔可夫模型 $\lambda=(\mathbf{A},\mathbf{B},\vec\pi)$，观测序列 $\mathbf{O}=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$ ，在时刻 t 它处于状态 $\mathbf{q}_i$ 的概率为：
$$\gamma_t(i)=\frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{P(\mathbf{O};\lambda)}=\frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^Q\alpha_t(j)\beta_t(j)}$$
   在时刻 t 最可能的状态： $i_t^*=\arg\max_{1\le i\le Q}\gamma_t(i)$ 。
3. 近似算法的优点是：计算简单。

   近似算法的缺点是：不能保证预测的状态序列整体是最有可能的状态序列，因为预测的状态序列可能有实际上不发生的部分。
   - 近似算法是局部最优（每个点最优），但是不是整体最优的。
   - 近似算法无法处理这种情况： 转移概率为 0 。因为近似算法没有考虑到状态之间的迁移。

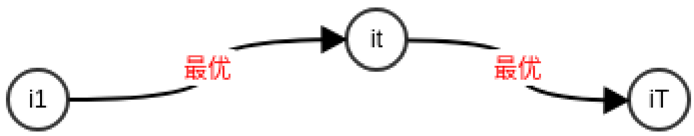
2.3.2 维特比算法

1. 维特比算法用动态规划来求解隐马尔可夫模型预测问题。

   它用动态规划求解概率最大路径（最优路径），这时一条路径对应着一个状态序列。

2. 维特比算法思想：

   - 根据动态规划原理，最优路径具有这样的特性：如果最优路径在时刻 t 通过结点 i_t^* ， 则这一路径从结点 i_t^* 到终点 i_T^* 的部分路径，对于从 i_t^* 到 i_T^* 的所有可能路径来说，也必须是最优的。



   - 只需要从时刻 $t=1$ 开始，递推地计算从时刻 1 到时刻 t 且时刻 t 状态为 $i, i=1,2,\cdots,N$ 的各条部分路径的最大概率（以及取最大概率的状态）。于是在时刻 $t=T$ 的最大概率即为最优路径的概率 P^* ，最优路径的终结点 i_T^* 也同时得到。
   - 之后为了找出最优路径的各个结点，从终结点 i_T^* 开始，由后向前逐步求得结点 $i_{T-1}^*,\cdots,i_1^*$，得到最优路径 $\mathbf{I}^*=(i_1^*,i_2^*,\cdots,i_T^*)$。

3. 定义在时刻 t 状态为 i 的所有单个路径 $(i_1,i_2,\cdots,i_t)$ 中概率最大值为：

$$\delta_t(i)=\max_{i_1,i_2,\cdots,i_{t-1}} P(i_t=i,i_{t-1},\cdots,i_1,o_t,\cdots,o_1;\lambda),\quad i=1,2,\cdots,Q$$

> 它就是算法导论中《动态规划》一章提到的“最优子结构”

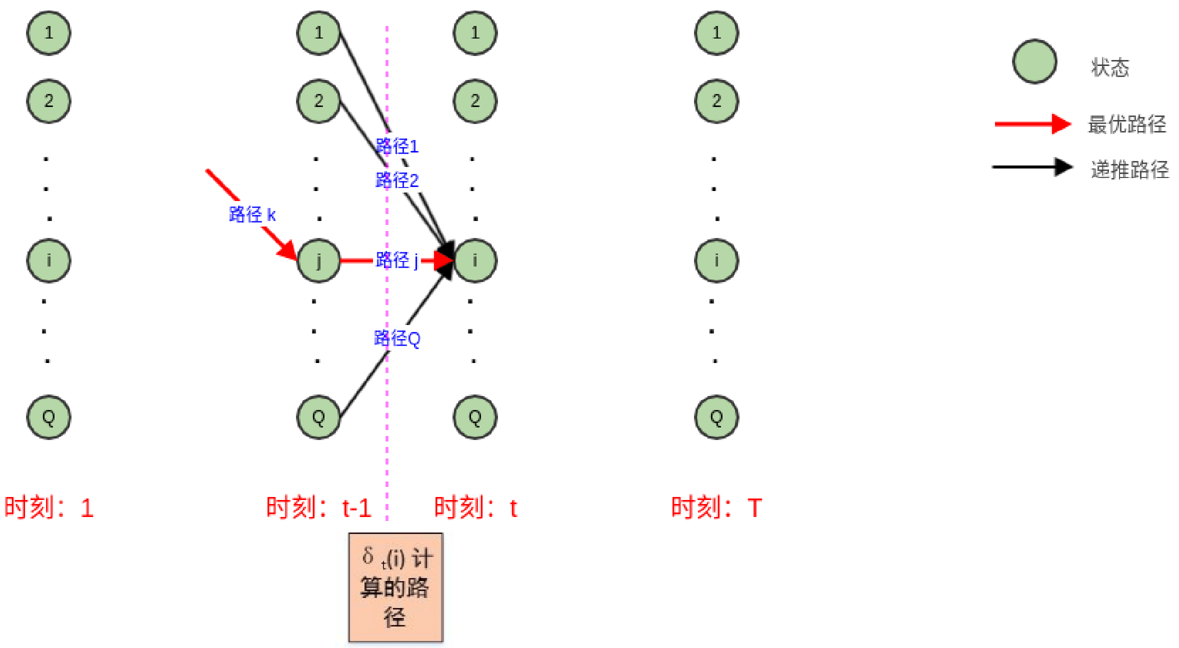
   则根据定义，得到变量 δ的递推公式：

$$\delta_{t+1}(i)=\max_{i_1,i_2,\cdots,i_t} P(i_{t+1}=i,i_t,\cdots,i_1,o_{t+1},\cdots,o_1;\lambda)=\max_{1\le j\le Q}\delta_t(j)\times a_{j,i}\times b_i(o_{t+1})$$
$$i=1,2,\cdots,Q;t=1,2,\cdots,T-1$$

4. 定义在时刻 t 状态为 i 的所有单个路径中概率最大的路径的第 $t-1$ 个结点为：

$$\Psi_t(i)=\arg\max_{1\le j\le Q}\delta_{t-1}(j)a_{j,i},\quad i=1,2,\cdots,Q$$

   它就是最优路径中，最后一个结点（其实就是时刻 t 的 $\mathbf{q}_i$ 结点）的前一个结点。



5. 维特比算法：

   - 输入：
     - 隐马尔可夫模型 $\lambda=(\mathbf{A},\mathbf{B},\vec{\pi})$
     - 观测序列 $\mathbf{O}=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$
   - 输出：最优路径 $\mathbf{I}^*=(i_1^*,i_2^*,\cdots,i_T^*)$
   - 算法步骤：
     - 初始化：因为第一个结点的之前没有结点 ，所以有：

$$\delta_1(i)=\pi_i b_i(o_1),\Psi_1(i)=0,\quad i=1,2,\cdots,Q$$

     - 递推：对 $t=2,3,\cdots,T$

$$\delta_t(i)=\max_{1\le j\le Q}\delta_{t-1}(j)a_{j,i}b_i(o_t),\quad i=1,2,\cdots,Q;t=1,2,\cdots,T$$
$$\Psi_t(i)=\arg\max_{1\le j\le Q}\delta_{t-1}(j)a_{j,i}\ ,\quad i=1,2,\cdots,Q$$

     - 终止：$P^*=\max_{1\le i\le Q}\delta_T(i),\quad i_T^*=\arg\max_{1\le i\le Q}\delta_T(i)$ 。
     - 最优路径回溯：对 $t=T-1,T-2,\cdots,1$ ：$i_t^*=\Psi_{t+1}(i_{t+1}^*)$ 。
     - 最优路径 $\mathbf{I}^*=(i_1^*,i_2^*,\cdots,i_T^*)$ 。

三、 最大熵马尔科夫模型MEMM

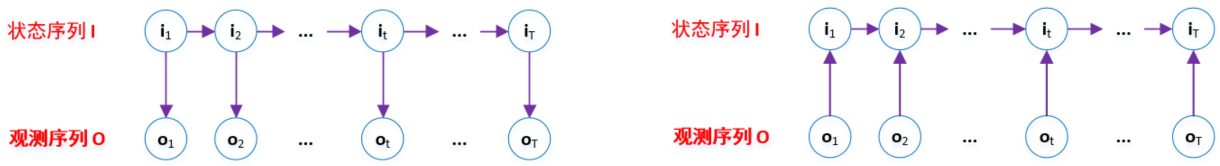
1. `HMM` 存在两个基本假设：

   - 观察值之间严格独立。
   - 状态转移过程中，当前状态仅依赖于前一个状态（一阶马尔科夫模型）。

   如果放松第一个基本假设，则得到最大熵马尔科夫模型 `MEMM` 。

2. 最大熵马尔科夫模型并不通过联合概率建模，而是学习条件概率 $P(i_t\mid i_{t-1},o_t)$ 。

它刻画的是：在当前观察值 o_t 和前一个状态 i_{t-1} 的条件下，当前状态 i_t 的概率。



HMM　　　　MEMM

3. `MEMM` 通过最大熵算法来学习。

   根据最大熵推导的结论：

$$P_{\vec{\mathbf{w}}}(y \mid \vec{\mathbf{x}})=\frac{1}{Z_{\vec{\mathbf{w}}}(\vec{\mathbf{x}})} \exp \left(\sum_{i=1}^{n} w_{i} f_{i}(\vec{\mathbf{x}}, y)\right)$$
$$Z_{\vec{\mathbf{w}}}(\vec{\mathbf{x}})=\sum_{y} \exp \left(\sum_{i=1}^{n} w_{i} f_{i}(\vec{\mathbf{x}}, y)\right)$$

   这里 $\vec{\mathbf{x}}$ 就是当前观测 o_t 和前一个状态 i_{t-1} ，因此：$\vec{\mathbf{x}}=(i_{t-1}, o_t)$ 。这里 y 就是当前状态 i_t ，因此：$y=i_t$ 。因此得到：

$$P_{\vec{\mathbf{w}}}(i_t \mid i_{t-1}, o_t)=\frac{1}{Z_{\vec{\mathbf{w}}}(i_{t-1}, o_t)} \exp \left(\sum_{i=1}^{n} w_{i} f_{i}(i_t, i_{t-1}, o_t)\right)$$
$$Z_{\vec{\mathbf{w}}}(i_{t-1}, o_t)=\sum_{i_t} \exp \left(\sum_{i=1}^{n} w_{i} f_{i}(i_t, i_{t-1}, o_t)\right)$$

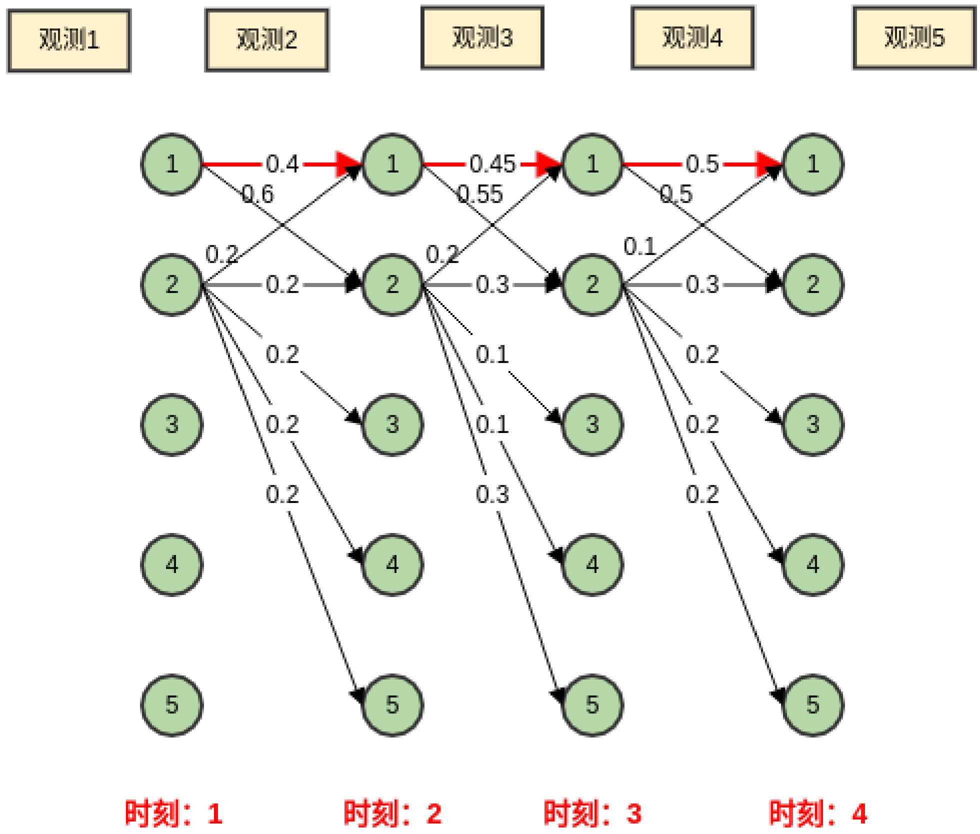
4. `MEMM` 的参数学习使用最大熵中介绍的 `IIS` 算法或者拟牛顿法，解码任务使用维特比算法。

5. 标注偏置问题：

   如下图所示，通过维特比算法解码得到：

$$P(1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1)=0.4 \times 0.45 \times 0.5=0.09$$
$$P(2 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 2)=0.2 \times 0.3 \times 0.3=0.018$$
$$P(1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2)=0.6 \times 0.2 \times 0.5=0.06$$
$$P(1 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2)=0.4 \times 0.55 \times 0.3=0.066$$

   可以看到：维特比算法得到的最优路径为 $1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 1$ 。



- 实际上，状态 1 倾向于转换到状态 2 ；同时状态 2 也倾向于留在状态 2 。但是由于状态 2 可以转化出去的状态较多，从而使得转移概率均比较小。

  而维特比算法得到的最优路径全部停留在状态 1 ，这样与实际不符。
- `MEMM` 倾向于选择拥有更少转移的状态，这就是标记偏置问题。

6. 标记偏置问题的原因是：计算 $P_{\vec{\mathbf{w}}}(i_t \mid i_{t-1}, o_t)$ 仅考虑局部归一化，它仅仅考虑指定位置的所有特征函数。
   - 如上图中，$P_{\vec{\mathbf{w}}}(i_t \mid i_{t-1}=2, o_t)$ 只考虑在 $(i_{t-1}=2, o_t)$ 这个结点的归一化。
     - 对于 $(i_{t-1}=2, o_t)$ ，其转出状态较多，因此每个转出概率都较小。
     - 对于 $(i_{t-1}=1, o_t)$ ，其转出状态较少，因此每个转出概率都较大。
   - `CRF` 解决了标记偏置问题，因为 `CRF` 是全局归一化的：

$$P(\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}) = \frac{1}{Z}\exp\left(\sum_{j=1}^{K_1}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_j t_j(Y_i, Y_{i+1}, \mathbf{X}, i) + \sum_{k=1}^{K_2}\sum_{i=1}^{n}\mu_k s_k(Y_i, \mathbf{X}, i)\right)$$

     它考虑了所有位置、所有特征函数。