Geometría Computacional

Conceptos básicos

Agenda

- Repaso de Conceptos básicos de geometría
- Problemas geométricos
  - Con puntos
  - Con segmentos de línea
  - Con polígonos

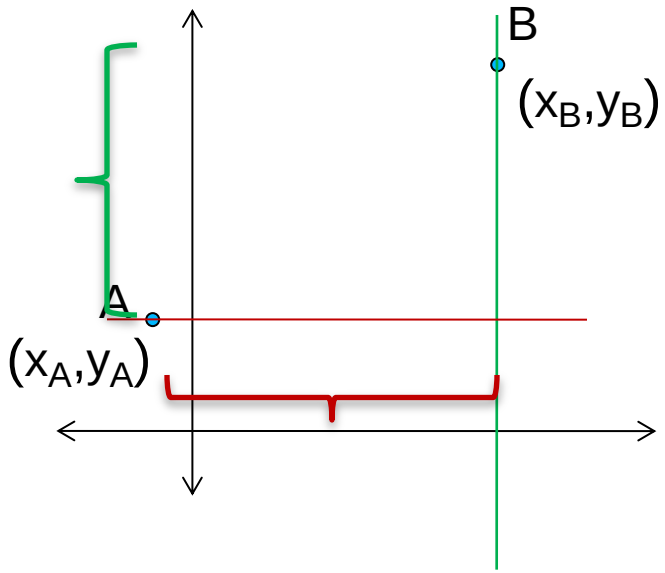
Geometría
(repaso)

Líneas, Triángulos, Polígonos,
Circunferencia y Círculo

Puntos

- Representación : P (x_p,y_p)

```
Type def struct {
        double x;       /* x-coordenada */
        double y;       /* y-coordenada */
        } point;
```

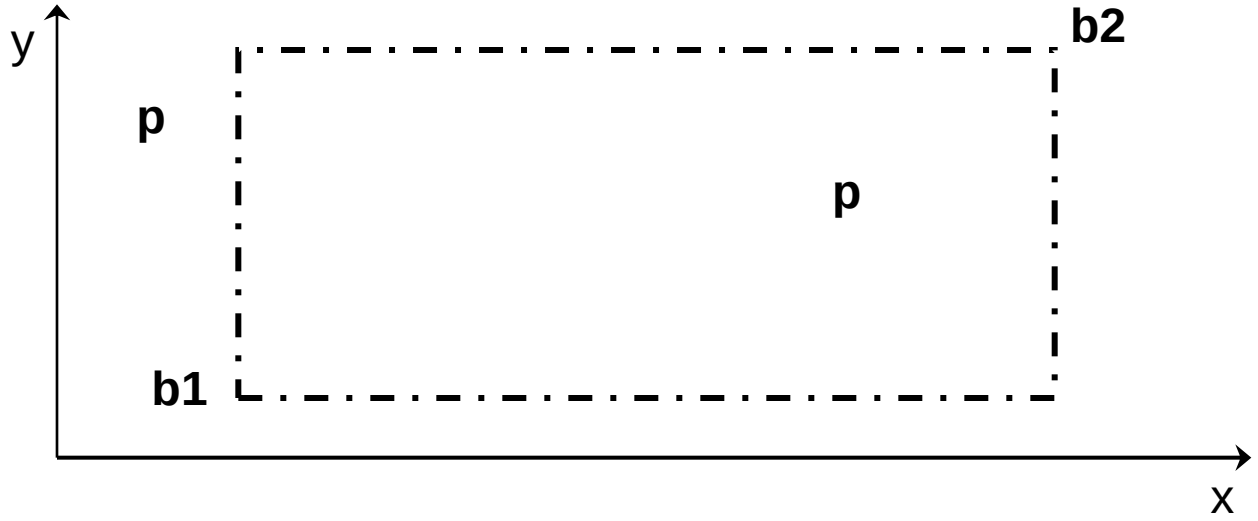


(a) Distancia entre dos puntos A(x_A,y_A) y B(x_B,y_B)

$$Dist(A,B) = \left((x_B - x_A)^* (x_B - x_A) + (y_B - y_A)^* (y_B - y_A) \right)^{1/2}$$

Punto en Box

```
(b) point_in_box (point p, point b1, point b2 )
  {
    return( (p[X] >= min(b1[X],b2[X])) && (p[X] <= max(b1[X],b2[X]))
    && (p[Y] >= min(b1[Y],b2[Y])) && (p[Y] <= max(b1[Y],b2[Y])) );
  }
```



Líneas rectas

- Representación
  - Ecuación : ax + by + c = 0

```
Type def struct {
        double a;          /* x-coefficient */
        double b;          /* y-coefficient */
        double c;          /* constant term */
} line;
```

- Algunas funciones útiles:
  - » Puntos a línea
  - » Intersección
  - » Punto y pendiente a línea
  - » Punto más cercano

Líneas rectas

(a) Ecuación : $ax + by + c = 0$

(b) Ecuación : $y = mx + n$ donde m es la pendiente y n es la ordenada al origen

Relación entre las definiciones (a) y (b)

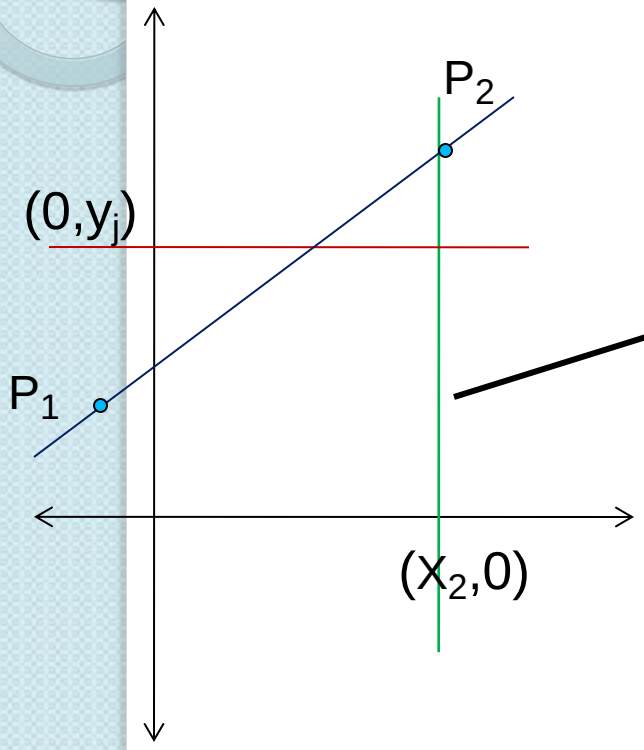
A partir de (b) tenemos que: $y - mx - n = 0$ entonces $a = -m$, $b = 1$ y $c = -n$

Para la Recta que pasa por los punto $P_1 (x_1,y_1)$ y $P_2 (x_2,y_2)$ se tiene que la pendiente $m = (y_1 - y_2) / (x_1 - x_2)$ y ordenada al origen $n = y_1 - m\, x_1$

Atención con las rectas **verticales** !!!

Líneas

Puntos a línea



Vertical: (x_2,y) $\forall$ y
Horizontal: (x,y_j) $\forall$ x

```
1 ) points_to_line(point p1, point p2, line *l)
{
    if (p1[X] == p2[X]) {
            l->a = 1;
            l->b = 0;
            l->c = -p1[X];
                        } else {
            l->b = 1;
      l->a = -(p1[Y]-p2[Y])/(p1[X]-p2[X]);
      l->c = -(l->a * p1[X]) - (l->b * p1[Y]);
    }
}
```

Líneas

Punto y pendiente a línea

```
2) point_and_slope_to_line(point p,
   double m, line *l)
{
   l->a = -m;
   l->b = 1;
   l->c = -((l->a*p[X]) + (l->b*p[Y]));
 }
```

Líneas

Paralelas – Idénticas

```
3) bool parallelQ(line l1, line l2)
{
   return ( (fabs(l1.a-l2.a) <= EPSILON) &&
            (fabs(l1.b-l2.b) <= EPSILON) );
}

4) bool same_lineQ(line l1, line l2)
{
   return ( parallelQ(l1,l2) && (fabs(l1.c-l2.c) <=
   EPSILON) );
}
```

Líneas : Intersección

5)

Un punto (x, y) cae en una línea $l : y = mx + b$ si al reemplazar x en la formula anterior obtenemos y.

El punto de intersección de las líneas $l_1 : y = m_1x + b_1$ y $l_2 : y = m_2x + b_2$ es el punto en donde ellas son iguales, es decir,

$x = (b_2 - b_1) / (m_1 - m_2) , \ y = m_1 * (b_2 - b_1) / (m_1 - m_2) + b_1$

Líneas : Intersección

```
5) intersection_point(line l1, line l2, point p)
 {
   if (same_lineQ(l1,l2)) {
          printf("Warning: Identical lines, all points intersect.\n");
          p[X] = p[Y] = 0.0;
          return;
        }
   if (parallelQ(l1,l2) == TRUE) {
          printf("Error: Distinct parallel lines do not intersect.\n");
          return;
        }
   p[X] = (l2.b*l1.c - l1.b*l2.c) / (l2.a*l1.b - l1.a*l2.b);
   if (fabs(l1.b) > EPSILON)    /* test for vertical line */
          p[Y] = - (l1.a * (p[X]) + l1.c) / l1.b;
          else
          p[Y] = - (l2.a * (p[X]) + l2.c) / l2.b;
 }
```

Líneas : Intersección - Ángulos

Dos líneas no paralelas cualesqueira se intersecan formando un ángulo

- Las líneas, escritas en su forma general,

$l_1 : \; a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ y $l_2 : = a_2 x + b_2 y + c_2$

forman el ángulo ϑ dado por : $\text{tg } \vartheta = (a_1 b_2 - a_2 b_1) / (a_1 a_2 + b_1 b_2)$

- Para líneas en formato $l : y = mx + b$, el ángulo está dado por:

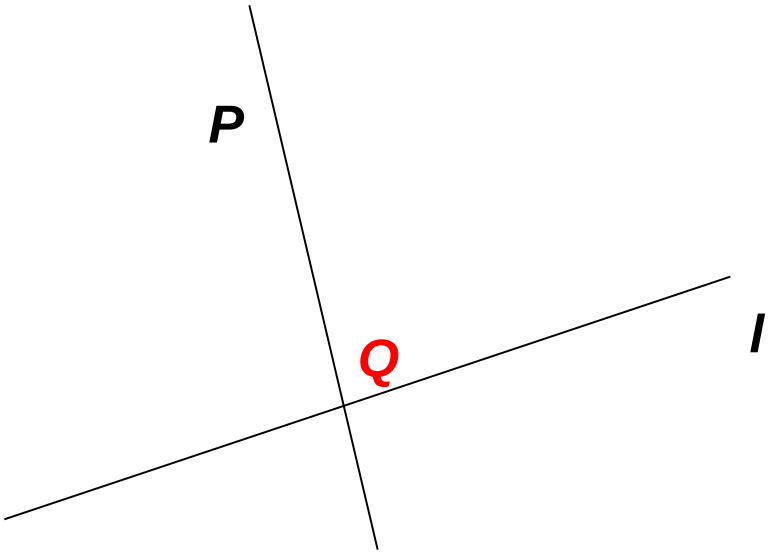
$\text{tg } \vartheta = (m_2 - m_1) \; / \; (m_1 * m_2 + 1)$

Dos líneas son **perpendiculares** si ellas se cruzan en ángulos **rectos** (90º). La línea perpendicular a $l : y = mx + b$ es $y = (- 1/m) x + b'$ $\forall$ *valor* de b' .

Líneas: Punto más cercano

6)

El punto sobre la línea ***l*** más cercano a un punto **P** dado, es el punto **Q** intersección entre la línea ***l*** y la línea perpendicular a ***l*** que pasa por el punto **P**.



Líneas: Punto más cercano

```
6) closest_point(point p_in, line l, point p_c)
  {
    line perp;                    /* perpendicular to l through (x,y) */
    if (fabs(l.b) <= EPSILON) {          /* vertical line */
          p_c[X] = -(l.c);
          p_c[Y] = p_in[Y];
          return;
    }
    if (fabs(l.a) <= EPSILON) {                    /* horizontal line */
          p_c[X] = p_in[X];
          p_c[Y] = -(l.c);
          return;
        }
    point_and_slope_to_line(p_in,1/l.a,&perp);    /* normal case */
    intersection_point(l,perp,p_c);
  }
```

Triángulos y trigonometría

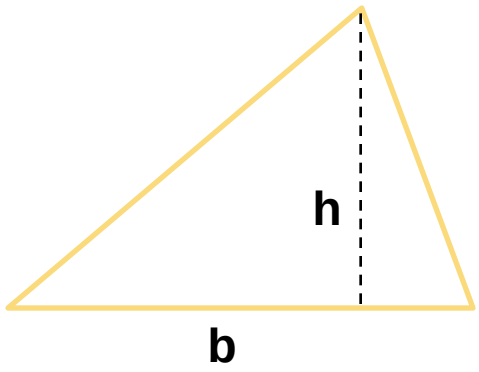
- Perímetro y área
- Triángulos rectángulos
  - Elementos : catetos, hipotenusa y ángulos
  - Teorema de Pitágoras

Triángulos: Perímetro y área

Perímetro : Suma de los lados del triángulo.

Conociendo las coordenadas de cada vértice, se calcula la longitud de cada lado y se suman.

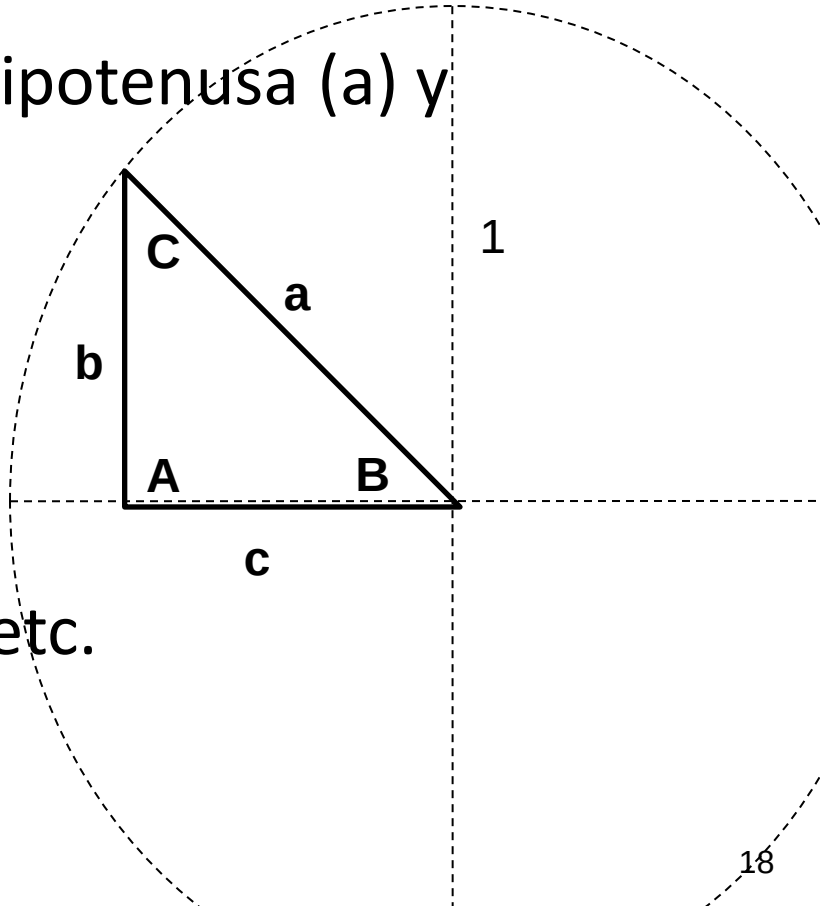
Área: Producto entre la base y la altura, dividido 2.



Triángulos rectángulos

- Trigonometría
  - Elementos: catetos (b,c), hipotenusa (a) y ángulos (A,B,C)
  - Teorema de Pitágoras

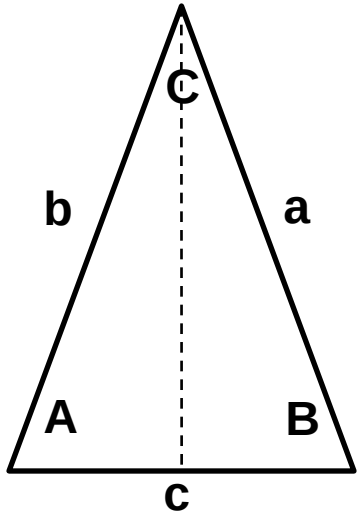
    $a^2 = b^2 + c^2$
  - Funciones : seno, cos, tg, etc.



Triángulos no-rectángulos

- Relaciones trigonométricas
  - Teorema del seno

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$



  - Teorema del coseno : generalización de Pitágora

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos A$$

Resolviendo Triángulos

Las propiedades trigonométricas nos permiten calcular distintas propiedades.

Resolver triángulos es el arte de poder obtener ángulos y longitudes de lados de un triángulo a partir de un subconjunto de datos. Los problemas entran en dos categorías:

- *Dados dos ángulos y un lado, encontrar el resto*. Encontrar el tercer ángulo es fácil, ya que la suma de los tres es 180°. El teorema del seno nos permite encontrar el resto de los lados.

- *Dados dos lados y un ángulo, encontrar el resto*. Si el ángulo se encuentra entre los dos lados, el teorema del coseno nos permite encontrar el tercer lado. Luego, con el teorema del seno calculamos los restantes ángulos. De lo contrario, podemos usar el teorema del seno y la propiedad de la suma de los ángulos para determinar todos los ángulos, y luego el teorema del seno para obtener el lado restante.

Área de Triángulos

El área de un triángulo T es:

A(T) = ½ *b* * *h*

b es la base, representada por uno de los lados

h es la altura, representada por la distancia entre el tercer vértice y la base. La altura puede ser calculada con alguna de las propiedades vistas.

Otra forma de calcular el área es directamente desde la representación por coordenadas (usando álgebra lineal y determinantes):

```
double signed_triangle_area(point a, point b, point c) {
    return( (a[X]*b[Y] - a[Y]*b[X] + a[Y]*c[X]
                - a[X]*c[Y] + b[X]*c[Y] - c[X]*b[Y]) / 2.0 );
}
```

```
double triangle_area(point a, point b, point c) {
    return( fabs(signed_triangle_area(a,b,c)) );
}
```

Circunferencia y círculo

Elementos:

- Radio: r
- Centro: o
- Cuerda: segmento que une dos puntos de la circunferencia
- Diámetro: es una cuerda que pasa por el centro
- Arco de circunferencia: es cada una de las partes en que la cuerda divide la circunferencia
- Semicircunferencia: mitad de la circunferencia

Circunferencia y círculo

Longitud de la circunferencia:

$L = 2 \pi r$

Área del cículo:

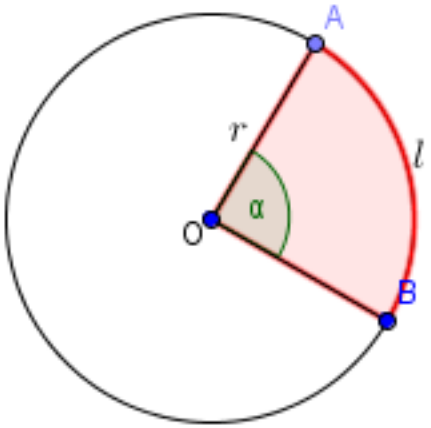
$A = \pi r^2$

Longitud del arco de circunferencia:

$L.arco = L \alpha° / 360° = 2 \pi r \alpha° / 360°$

Área del sector circular:

$A.sector = A \alpha° / 360° = \pi r^2 \alpha° / 360°$



Bibliografía

Programming Challenges. The Programming Contest Training Manual. Steven S. Skiena, Miguel A. Revilla. Springer-Verlag New York, Inc., 2003 ISBN 0-387-00163-8.

Introduction to Algorithms, 2nd Ed –Thomas H. Cormen
ISBN 0-262-03293-7 (hc.: alk. paper, MIT Press).-ISBN 0-07-013151-1 (McGraw-Hill)