Geometría

Caso de Estudio

(Programming Challenges - Cap. 13)

Ejemplo:

Plan de vuelo de Superman

Superman tiene al menos dos poderes que los mortales normales no poseen: visión rayos X y la capacidad de volar más rápido que una bala de extrema velocidad. Algunas de sus otras habilidades no son tan impresionantes: tú o yo probablemente podríamos cambiarnos de ropa en una cabina telefónica si nos proponemos hacerlo.

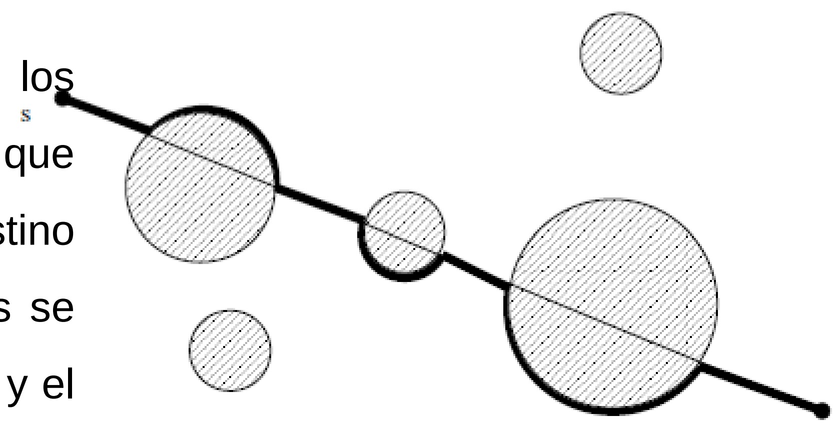
Superman busca demostrar sus poderes entre su posición actual $s = (x_s, y_s)$ y una posición objetivo $t = (x_t, y_t)$. El medio ambiente está lleno de obstáculos de forma circular (o cilíndrica). La visión de rayos X de Superman no tiene alcance ilimitado, estando limitada por la cantidad de material que tiene que ver a través. Está ansioso por calcular la longitud total de las intersecciones de los obstáculos entre los dos puntos para saber si intenta este truco.

Ejemplo:

Plan de vuelo de Superman

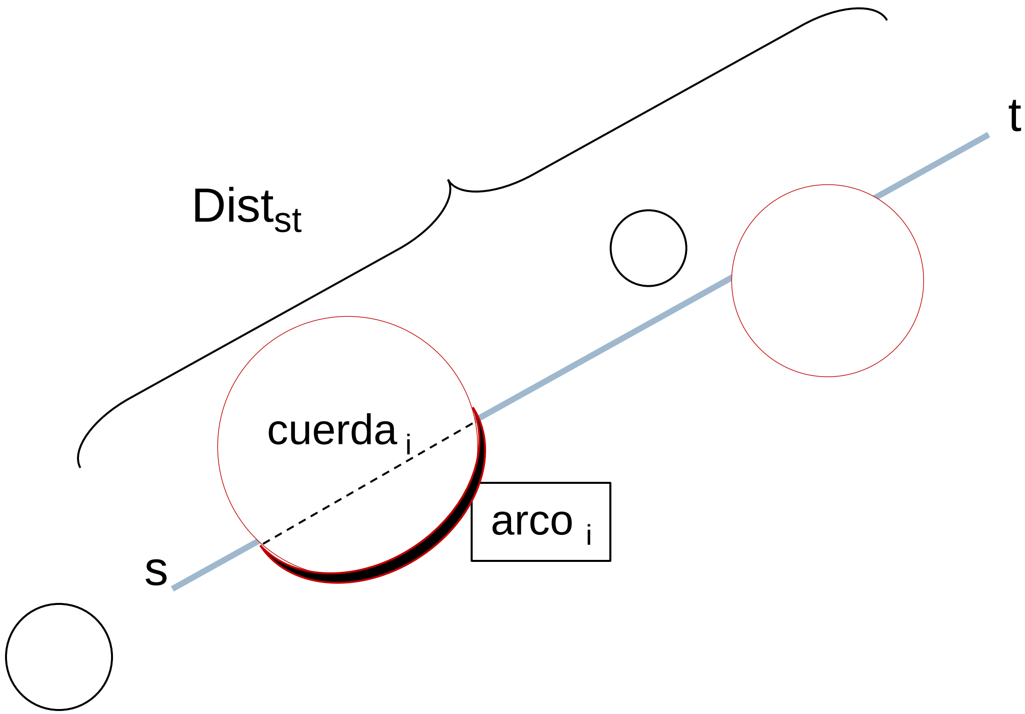
Teniendo en cuenta esto, el Hombre de Acero quisiera volar entre su posición actual y el objetivo. Él puede ver a través de objetos, pero no volar a través de ellos. Su camino deseado vuela directamente a la meta, hasta que choca con un objeto. En este punto, vuela a lo largo del límite del círculo hasta que retorna a la línea recta que une la posición inicial y final. Este no es el camino más corto sin obstáculos, pero Superman no es completamente estúpido - siempre toma el más corto de los dos arcos alrededor del círculo.

Usted puede asumir que ninguno de los obstáculos circulares se cruzan entre ellos, y que tanto las posiciones de inicio como las de destino quedan fuera de los obstáculos. Los círculos se especifican dando las coordenadas centrales y el radio.



Plan de vuelo de Superman

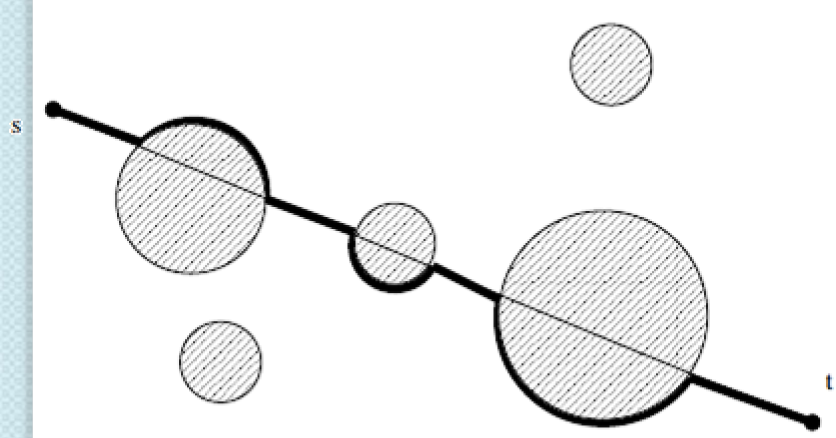
Objetivo: Calcular la distancia mínima entre ***s*** y ***t*** (Dm)



Dm = Dist$_{st}$ - $\sum$ { – cuerda $_i$ + arco $_i$ } $\forall$ círculo que interseca la recta ***st***

Plan de vuelo de Superman

Operaciones geométricas básicas requeridas para resolver el problema



Para resolver el problema se requieren tres operaciones básicas:

(1) Intersección entre un círculo y la línea ***l*** de la trayectoria entre ***s*** y ***t***

(2) Cálculo de la longitud de la cuerda

(3) Cálculo de la longitud del arco más pequeño del círculo que intersecta ***l***

Plan de vuelo de Superman

Objetivo: Calcular la distancia mínima entre ***s*** y ***t*** (Dm)

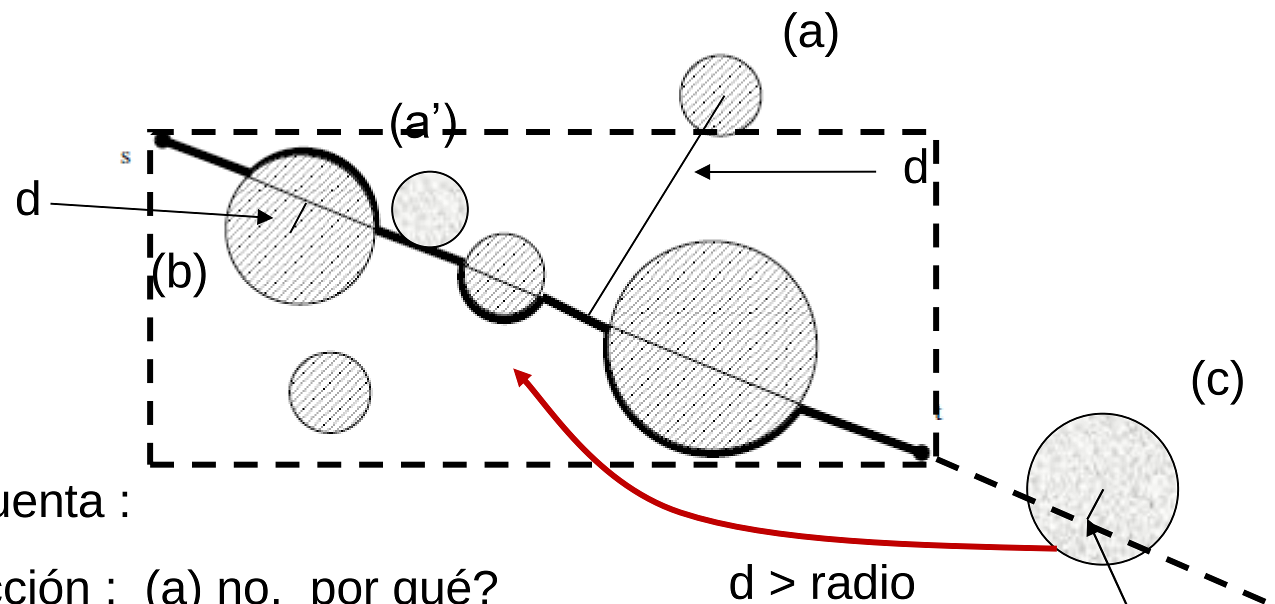
$Dm = Dist_{st} - \sum \{ -cuerda_i + arco_i \} \; \forall$ círculo que interseca la recta ***st***

Pasos a seguir:

```
Definir recta l  que pasa por los puntos s y t ;
cuerdas= 0.0 ; arcos = 0.0;
Para cada círculo c_i {
      si  c_i   se interseca con la recta l   entonces
           {  calcular   arco_i  y cuerda_i ;
              arcos  += arco_i ;
              cuerdas += cuerda_i ;
            }
}
recorrido = distancia(s,t)  -  cuerdas + arcos;
printf(recorrido);
```

Plan de vuelo de Superman

(1) Intersección entre un círculo y la línea ***l*** de la trayectoria entre ***s*** y ***t***



Tener en cuenta :

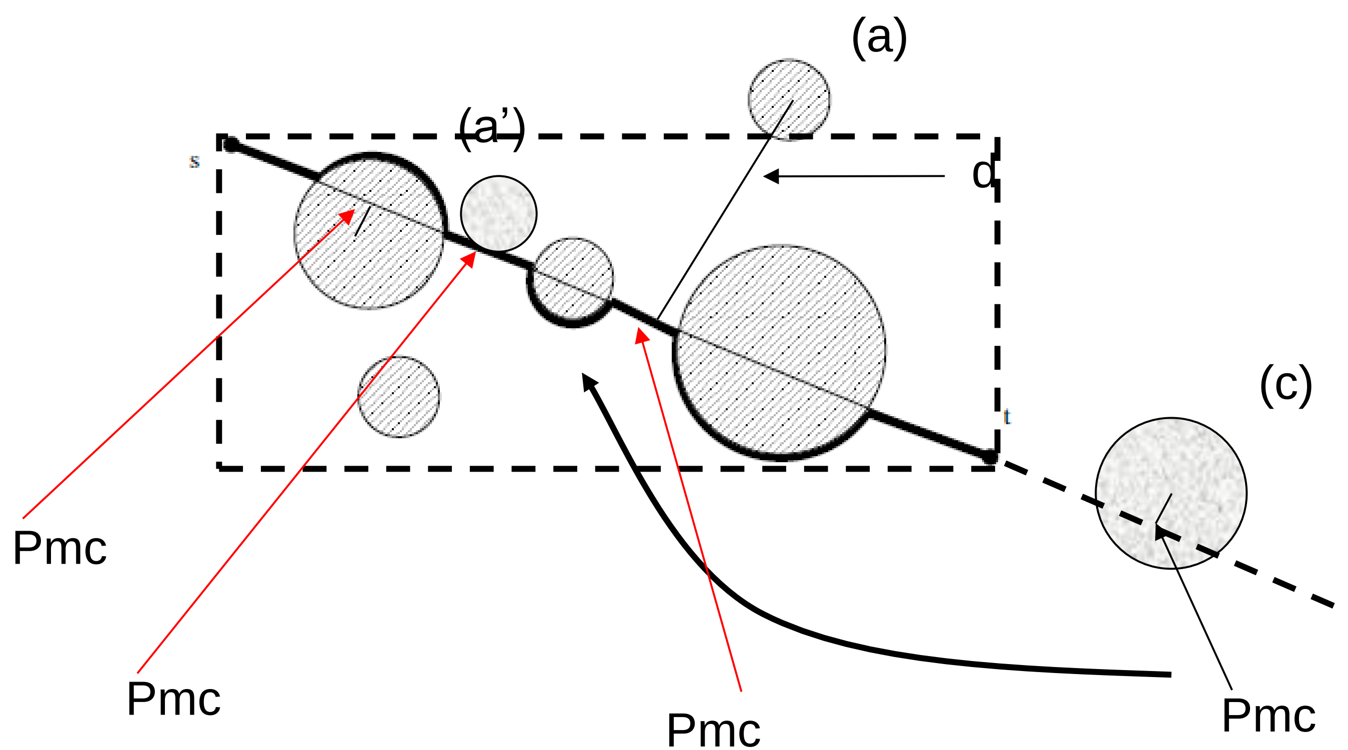
(1) Intersección : (a) no, por qué? d > radio

y (a’) ? sí, d = radio (pero, **no** lo tomamos)

(b) sí, d < radio

(c) sí, d < radio, pero no está en la trayectoria.
Cómo se chequea si está o no en la trayectoria?

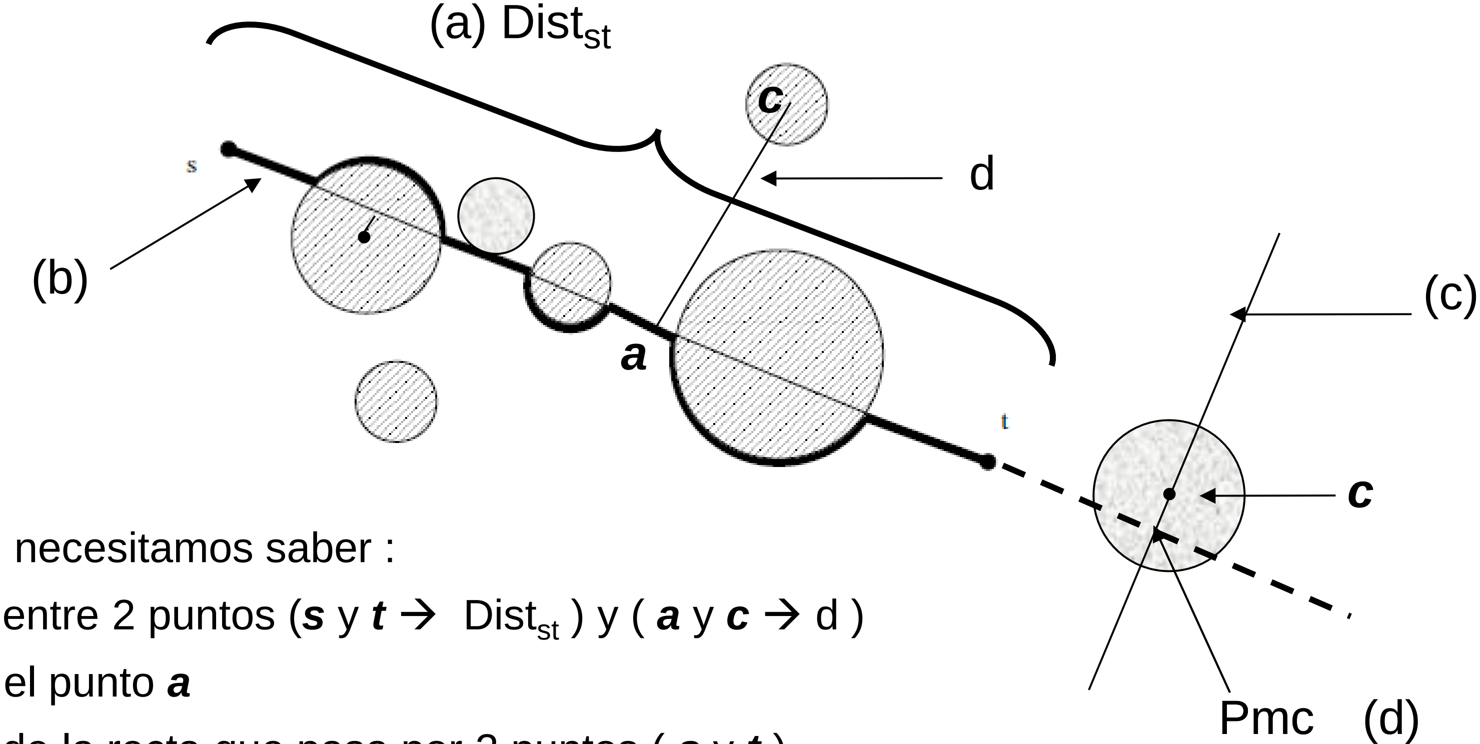
Plan de vuelo de Superman



Chequearemos que los puntos más cercanos al segmento de la trayectoria caigan en el Box formado por las coordenadas de ***s*** y ***t***

Plan de vuelo de Superman

(1) Intersección entre un círculo y la línea ***l*** de la trayectoria entre ***s*** y ***t***



Resumiendo, necesitamos saber :

(a) Distancia entre 2 puntos (***s*** y ***t*** → Dist$_{st}$) y (***a*** y ***c*** → d)

y cuál es el punto ***a***

(b) Ecuación de la recta que pasa por 2 puntos (***s*** y ***t***) .

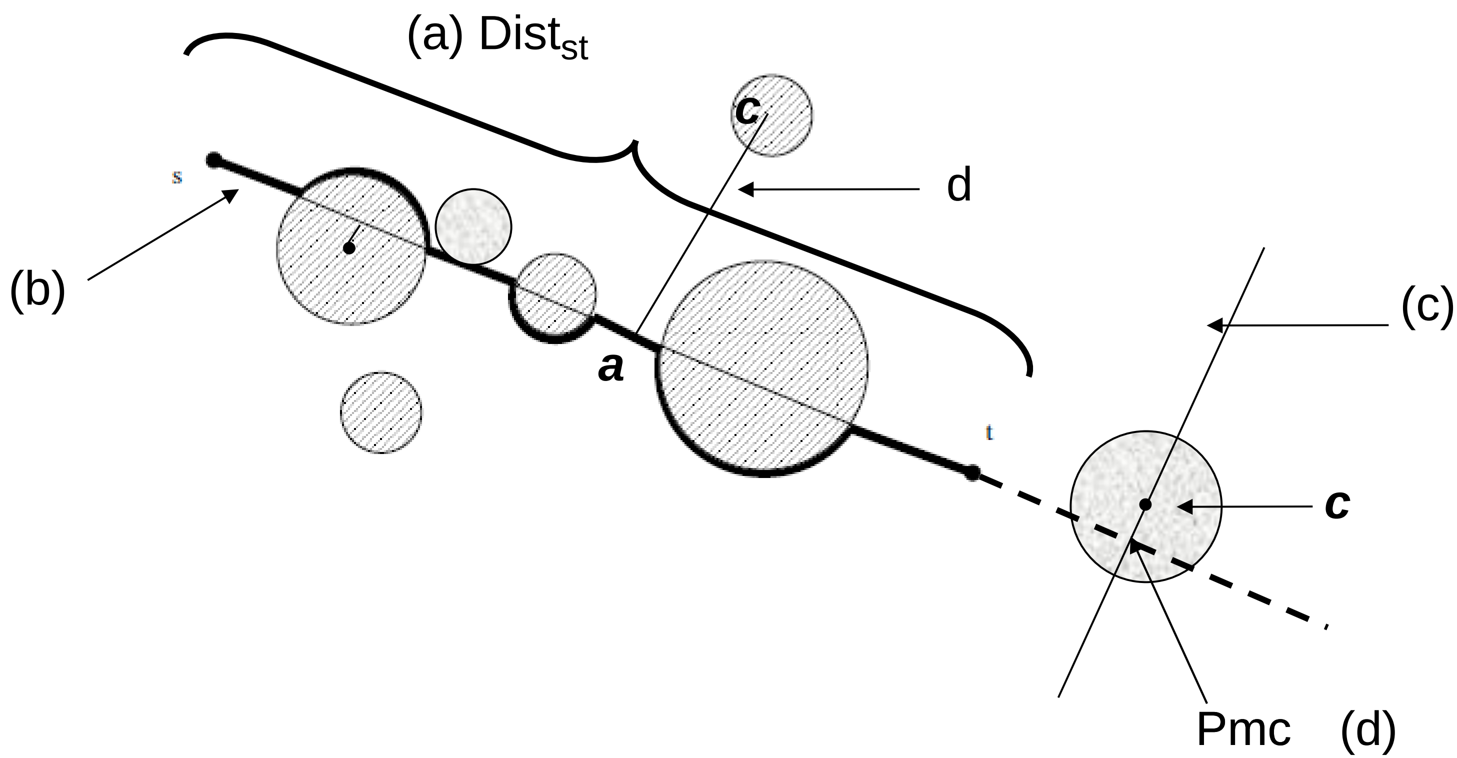
(c) Ecuación de la recta pasa por 1 punto y es perpendicular a una dada (***centro círc. y (b)***).

(d) Punto de intersección entre 2 rectas. (Si las rectas son (b) y (c) → Pmc y ***a***)

(e) Un punto (x,y) cae en el Box formado por las coordenadas (sx,sy) y (tx,ty)

Plan de vuelo de Superman

(1) Intersección entre un círculo y la línea ***l*** de la trayectoria entre ***s*** y ***t***

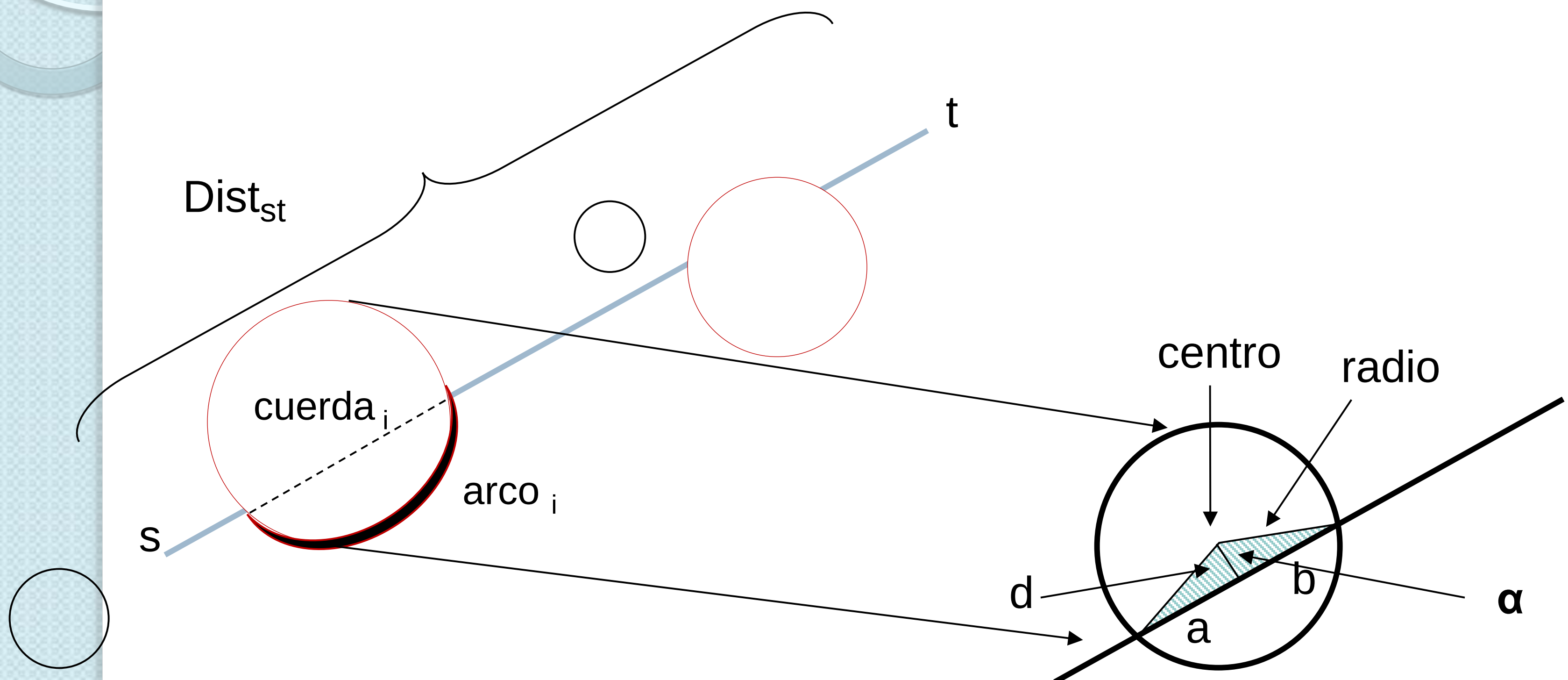


Conclusión:

Si d < radio de **Ci** y el Punto de intersección entre las 2 rectas cae en la trayectoria de los puntos **s** y **t** entonces tomo el círculo **Ci** . Existe intersección entre **Ci** y la trayectoria de Superman.

Plan de vuelo de Superman

(2) Cálculo de la longitud de la cuerda y (3) cálculo de la longitud del arco



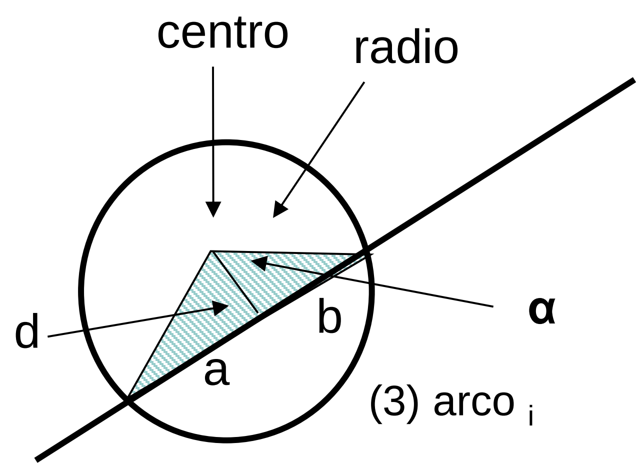
cuerda $_i$ = **a** + **b** ⇒ si conocemos **d,** aplicamos Pitágoras. **d = ?**

arco $_i$ = es la parte prop. del perímetro de la circ. corresp. al ángulo 2**α, α=??**

Dm = $Dist_{st} + \sum \{ - cuerda_i + arco_i \}$ ∀ círculo que interseca la recta st

Plan de vuelo de Superman

(2) Cálculo de la longitud de la cuerda y (3) cálculo de la longitud del arco



Resumiendo, necesitamos saber :

(2) Pitágoras : $r^2 = b^2 + d^2$; conocido "d" y "r" despejamos y calculamos **b** (tb **a**)

(3) Funciones trigonométricas para calcular **α**, es decir, $\cos \alpha = d / r$; $\alpha = \arccos (d/r)$

y para la parte prop. de la circunf corresp a 2**α** , tenemos que:

$360° \text{ ---- > } 2 \pi r$ (perímetro de la circunf)

$2\alpha° \text{ ---- > } x = 2\alpha° \; 2 \pi r \; / \; 360° \text{ ---- > } 2 \alpha \, 2 \pi r / (2 \pi) \text{ ---> } 2 \alpha \, r$

$x = 2 * r * \arccos (d/r)$

Plan de vuelo de Superman

```
point s;                /* Superman's initial position */
point t;                /* target position */
int ncircles;           /* number of circles */
circle c[MAXN];         /* circles data structure */

superman()
{
    line l;                 /* line from start to target position */
    point close;            /* closest point */
    double d;               /* distance from circle-center */
    double xray = 0.0;      /* length of intersection with circles */
    double around = 0.0;    /* length around circular arcs */
    double angle;           /* angle subtended by arc */
    double travel;          /* total travel distance */
    int i;                  /* counter */
    double asin(), sqrt();
    double distance();
```

continúa →

Plan de vuelo de Superman

```
points_to_line(s,t,&l);

for (i=1; i<=ncircles; i++) {
        closest_point(c[i].c,l,close);
        d = distance(c[i].c,close);
        if ((d>=0) && (d < c[i].r) && point_in_box(close,s,t)) {
                xray += 2*sqrt(c[i].r*c[i].r - d*d);
                angle = acos(d/c[i].r);
                around += ((2*angle)/(2*PI)) * (2*PI*c[i].r);
                }
}

travel = distance(s,t) - xray + around;
printf("Superman sees thru %7.3lf units, and flies %7.3lf
                units\n", xray, travel);
}
```

Operaciones con Líneas rectas y puntos

- **distance(c[i].c,close)**
- **points_to_line(s,t,&l)**
  - Definir la recta que pasa por 2 Puntos
- **closest_point(c[i].c,l,close)**
  - Encontrar el Punto sobre la recta más cercano a un Punto dado
    - Definir la recta que pasa por un Punto y tiene Pendiente "m"
    - Encontrar el Punto de Intersección entre 2 rectas
- **point_in_box(close,s,t)**
  - Determinar si un punto (x,y) cae en el Box formado por las coordenadas (s_x,s_y) y (t_x,t_y)

Fin Caso de estudio