第二章：映射

2.4 映射的合成

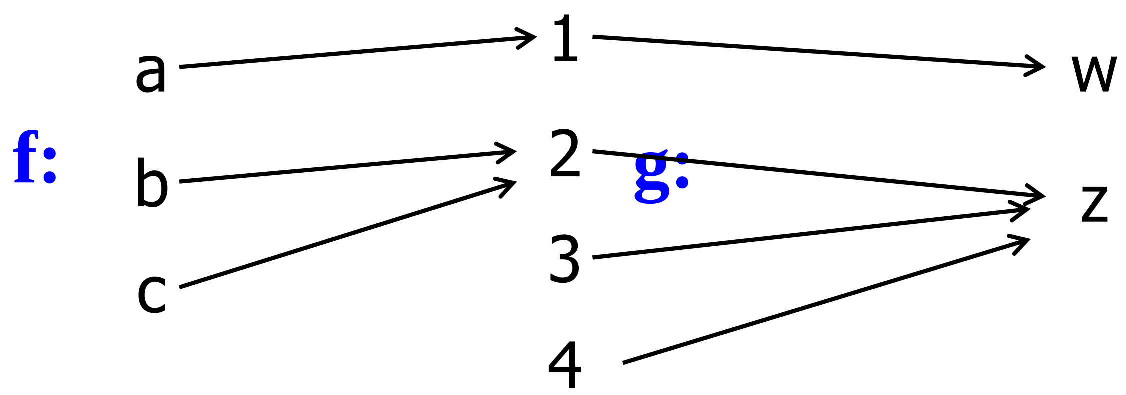
本节主要问题

（1）映射合成的定义

（2）映射合成的性质

（1）映射合成的定义

例:设X={a,b,c},Y={1,2,3,4}, Z={w, z}



定义映射： gf(x)=g(f(x))

则： gf(a)=g(f(a))=g(1) =w

gf(b)=g(f(b))=g(2) =z

gf(c) =g(f(c))=g(2) =z

（1）映射合成的定义

定义2.4.1 设$f:X\to Y, g:Y\to Z$,

定义映射：$h:X\to Z$，$\forall x\in X$, $h(x)=g(f(x))$。h称为f与g的合成, “映射f与g的合成” h记为$g\circ f$,省略中间的“$\circ$”，简记为gf

按定义，$\forall x\in X$,我们有

$$g\circ f(x)=gf(x)=g(f(x))$$

注意：“f与g的合成”，在书写时写成gf。

（2）映射合成的性质

定理2.4.1　设$f:X\to Y, g:Y\to Z, h:Z\to W$，则：

$$h(gf)=(hg)f$$

即映射的合成运算满足结合律。

只要明确这是映射相等的证明

需要证明：$\forall x$，$h(gf)(x)=(hg)f(x)$

按定义顺序展开，两边都等于

$h(g(f(x)))$。

（2）映射合成的性质

映射的合成运算满足结合律是合成运算的基本性质。据此**h(gf)**和**(hg)f**就可简记为**hgf**。

设$f_1:A_1\rightarrow A_2$,

$f_2:A_2\rightarrow A_3$, . . . ,

$f_n:A_n\rightarrow A_{n+1}$。

这n个映射的合成就可以记为:

$f_nf_{n-1}...f_1$,

$\forall x\in A_1$,

$f_nf_{n-1}...f_1(x)=f_n(f_{n-1}...(f_2(f_1(x)))...)$

（2）映射合成的性质

定理2.4.2 设$f: X \to Y$, 则$f \circ I_X = I_Y \circ f$

明确两条：

① I_x和I_y是恒等映射

② 证明的是映射相等。

证明略。

（2）映射合成的性质

定理2.4.3 设$f: X \to Y, g: Y \to Z$, 则

(1) 如果f与g都是单射的，则gf也是单射的。

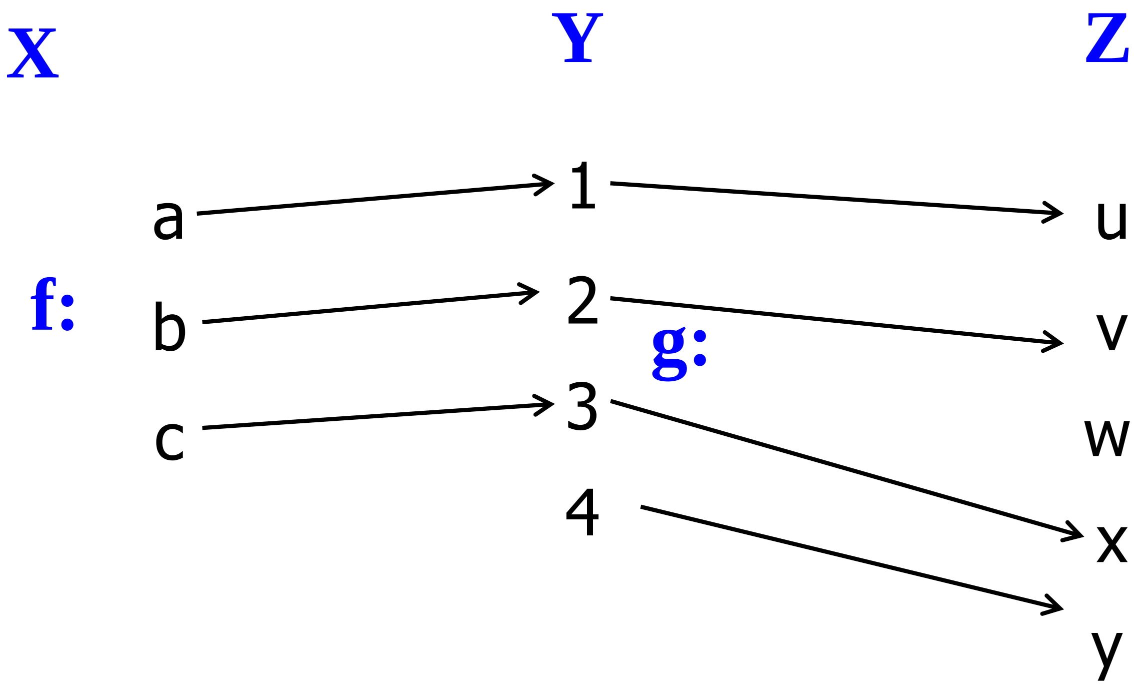
(2) 如果f与g都是满射的，则gf也是满射的。

(3) 如果f与g都是双射的，则gf也是双射的。

（2）映射合成的性质

定理2.4.3 设$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, 则

(1) 如果f与g都是单射的，则gf也是单射的。



定义映射：$gf(x)=g(f(x))$

（2）映射合成的性质

定理2.4.3 设$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, 则

(1) 如果f与g都是单射的，则gf也是单射的。

首先清楚单射的定义：

$\forall\ x_1\neq x_2$，$gf(x_1) \neq gf(x_2)$

证明：$\forall\ x_1\neq x_2$，因为f是单射。

所以$f(x_1) \neq f(x_2)$

又因为g是单射，

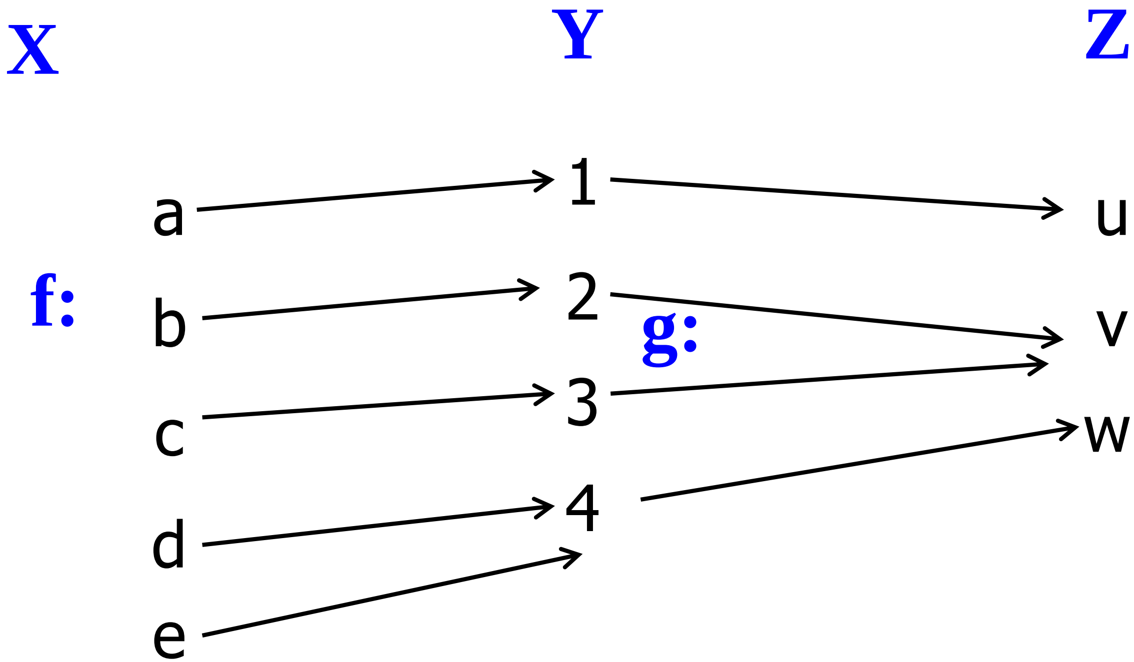
所以$gf(x_1) \neq gf(x_2)$

因此gf是单射。

（2）映射合成的性质

定理2.4.3 设$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, 则

(2) 如果f与g都是满射的，则gf也是满射的。



定义映射：**gf(x)=g(f(x))**

（2）映射合成的性质

定理2.4.3 设$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, 则

(2) 如果f与g都是满射的，则gf也是满射的。

首先清楚满射的定义：

$\forall\ z$， 存在x, $gf(x)=z$

证明：$\forall\ z\in Z$，因为g是满射。

所以存在$y\in Y$，$g(y) = z$

又因为f是满射，

所以存在$x\in X$, $f(x)=y$

因此$gf(x)=z$。

命题成立。

（2）映射合成的性质

定理2.4.4 设$f:X \to Y, g:Y \to Z$，则

(1) 如果gf是单射，则f是单射。

(2) 如果gf是满射，则g是满射。

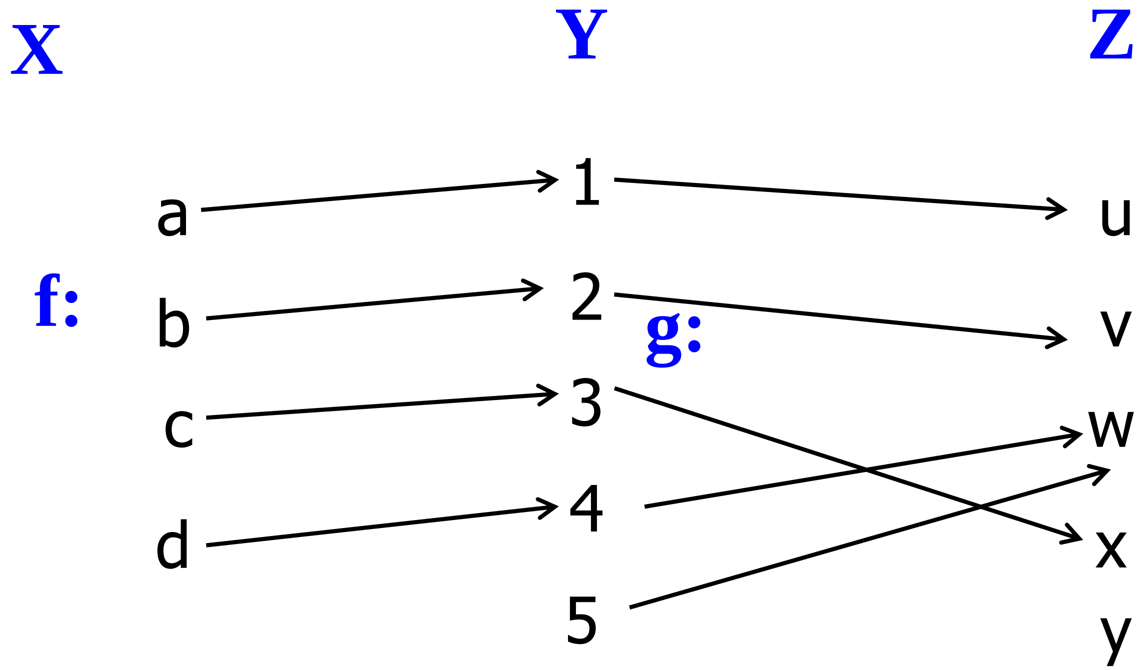
(3) 如果gf是双射，则f是单射且g是满射。

（2）映射合成的性质

定理2.4.4 设$f:X\rightarrow Y$, $g:Y\rightarrow Z$, 则

(1) 如果gf是单射，则f是单射。

例子



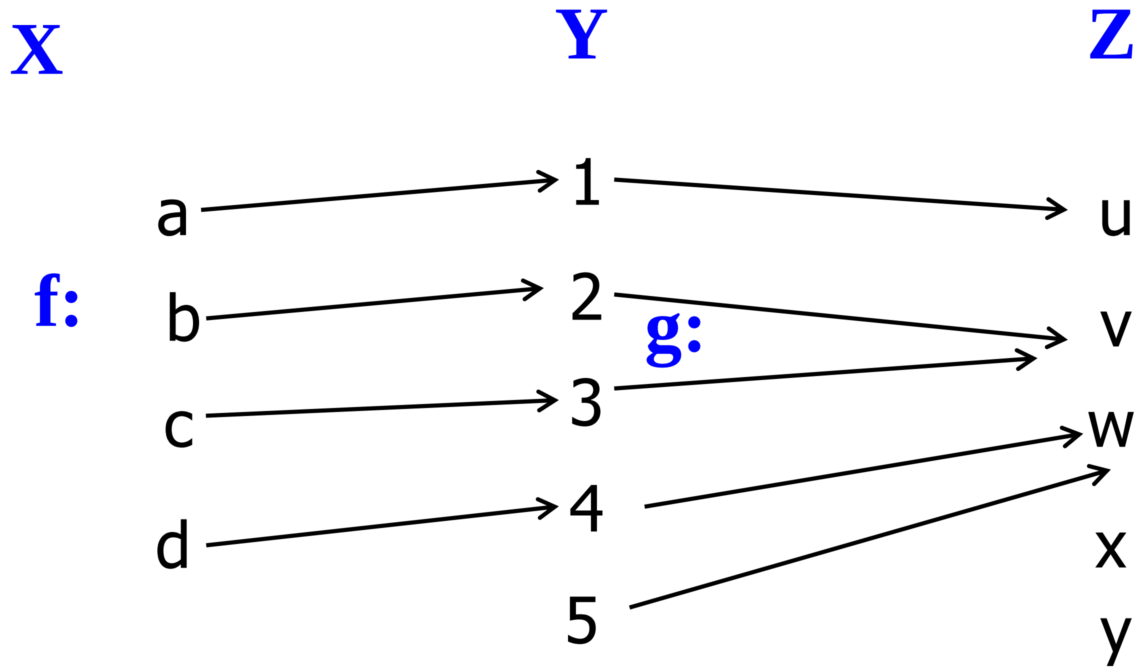
定义映射：**gf(x)=g(f(x))**

（2）映射合成的性质

定理2.4.4 设$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, 则

(1) 如果gf是单射，则f是单射。

反过来不成立



定义映射：$gf(x)=g(f(x))$

（2）映射合成的性质

定理2.4.4 设 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, 则

(1) 如果gf是单射，则f是单射。

首先清楚单射的定义：

$\forall\ x_1 \neq x_2$， $gf(x_1) \neq gf(x_2)$

证明：如果**f**不是单射，

存在 $x_1 \neq x_2$， $f(x_1)=f(x_2)$

因此 $gf(x_1)=gf(x_2)$

这与gf是单射矛盾。

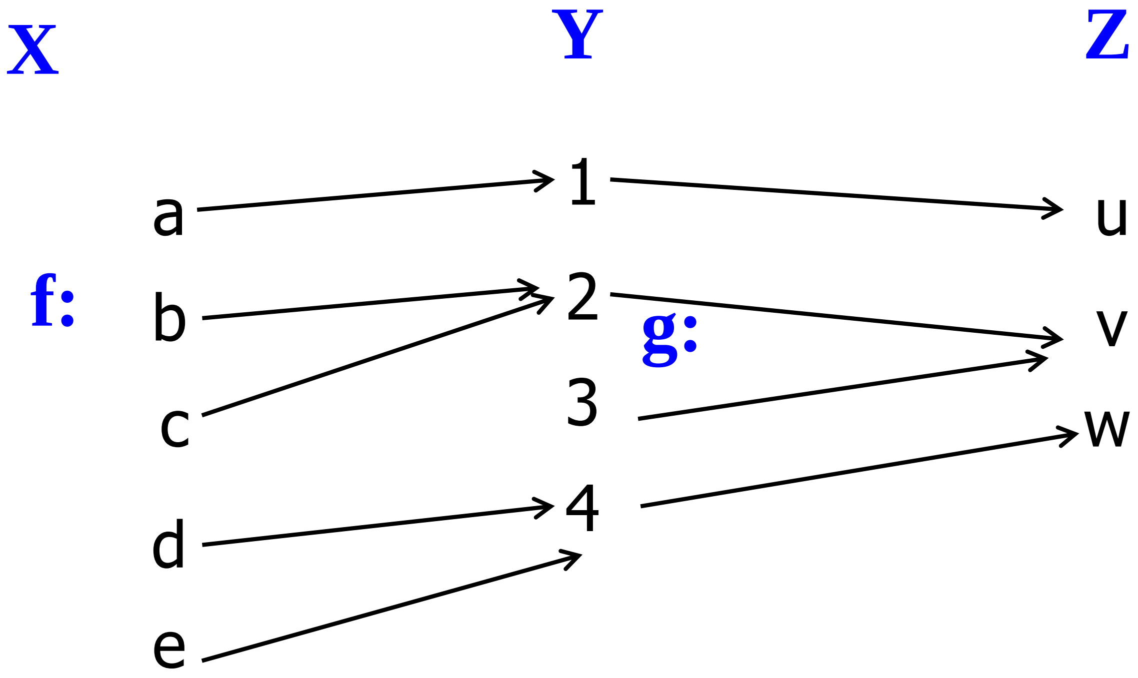
因此定理得证。

（2）映射合成的性质

定理2.4.4 设$f:X\to Y, g:Y\to Z$, 则

(2) 如果gf是满射，则g是满射。

例子

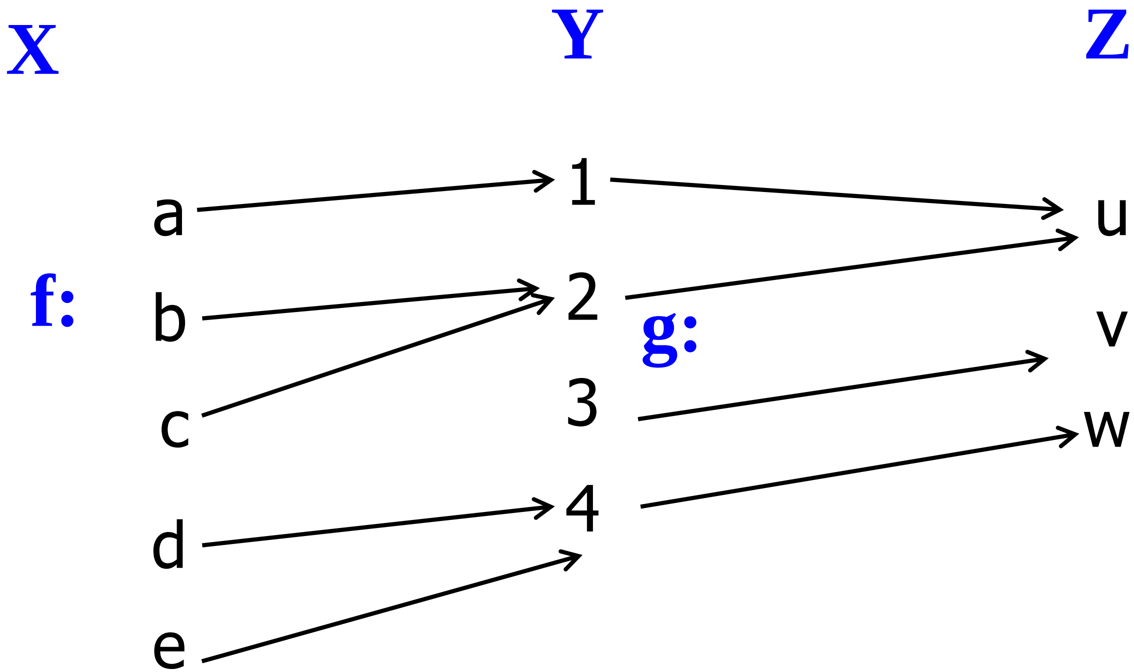


定义映射：gf(x)=g(f(x))

（2）映射合成的性质

定理2.4.4 设$f:X\to Y, g:Y\to Z$, 则

(2) 如果gf是满射，则g是满射。



反过来不成立

定义映射：$gf(x)=g(f(x))$

（2）映射合成的性质

定理2.4.4 设$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, 则

(2) 如果gf是满射，则g是满射。

首先清楚满射的定义：

$\forall\ z$，存在x, $gf(x)=z$

证明：如果g不是满射，

$\exists\, z\in Z$，$\forall\ y\in Y$，$g(y)\neq z$

因为gf是满射，$\exists\, x\in X$，$gf(x)=z$

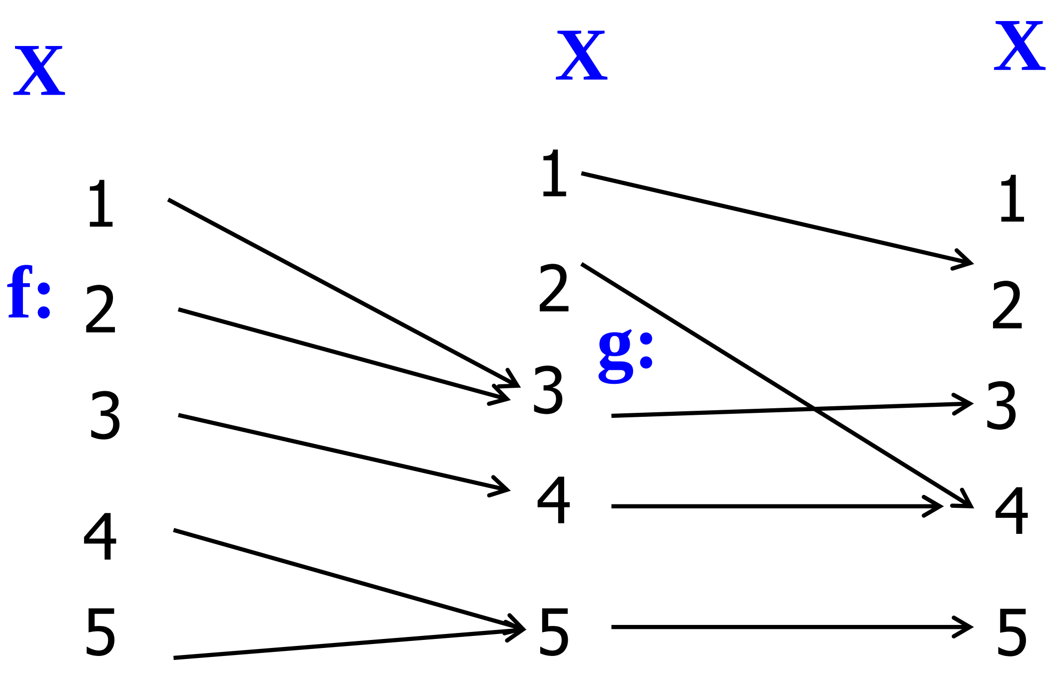
令$y=f(x)$，有$g(y)=z$；

这与g不是满射矛盾。

因此定理得证。

（2）映射合成的性质

定理2.4.5 设f与g是X到X的映射，则$I_m(f)\subseteq I_m(g)$的充分必要条件是存在一个映射$h:X\rightarrow X$, 使得$f=gh$。



证充分性

设$h:X\rightarrow X$, $f=gh$,

$f(X)=gh(X)$,

由于$h(X)\subseteq X$,

所以$g(h(X))\subseteq g(X)$

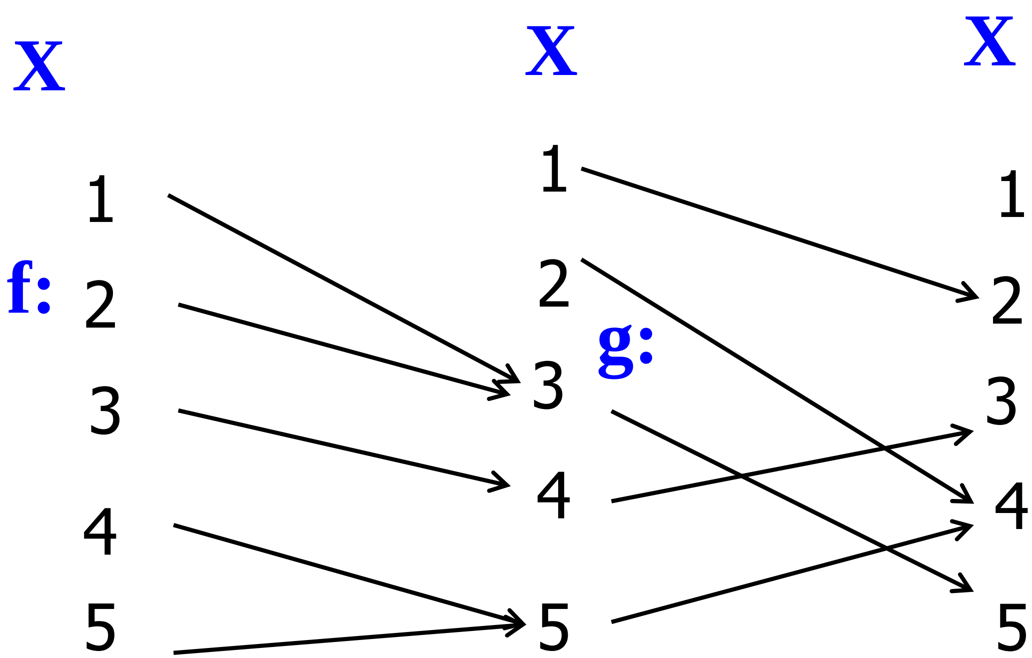
即$f(X)\subseteq g(X)$,

$I_m(f)\subseteq I_m(g)$

$I_m(f)=\{3,4,5\}$, $I_m(g)=\{2,3,4,5\}$

（2）映射合成的性质

定理2.4.5 设f与g是X到X的映射，则 $I_m(f)\subseteq I_m(g)$ 的充分必要条件是存在一个映射 $h:X\to X$，使得 $f=gh$。



找到h使得 $\forall x\in X$，$f(x)=g(h(x))$

$f(1)=g(4)$　$h(1)=4$

$f(2)=g(4)$　$h(2)=4$

$f(3)=g(5)$　$h(3)=5$

$f(4)=g(3)$　$h(4)=3$

$f(5)=g(3)$　$h(5)=3$

$f(a)=g(h(a))$

$h(a)\in g^{-1}(f(a))$

$I_m(f)=\{3,4,5\}$, $I_m(g)=\{2,3,4,5\}$

2.4 映射的合成

定理2.4.5 设f与g是X到X的映射，则$I_m(f)\subseteq I_m(g)$的充分必要条件是存在一个映射$h:X\to X$, 使得$f=gh$。

证必要性：$I_m(f)\subseteq I_m(g)$，则$f(X)\subseteq g(X)$，

即$\forall x\in X$, $f(x)\in g(X)$

所以,$\forall x\in X$, 存在一个y，使$g(y)=f(x)$

令$\mathbf{h}:X\to X$, h定义为$\forall x\in X$, $h(x)=y$, y为$g^{-1}(f(x))$中某个特定元素。

于是$\mathbf{gh(x)=g(h(x))=f(x)}$

**

2.5 逆映射

本节主要问题

（1）逆映射的定义

（2）左逆映射和右逆映射的定义

（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

（1）逆映射的定义

例如：X={1, 2, 3}, Y={a, b, c}

定义f：f(1)=a, f(2)=b, f(3)=c

定义g：g(a)=1, g(b)=2, g(c)=3

$$f:\quad \begin{array}{ccc} 1 & \rightleftarrows & a \\ 2 & \rightleftarrows & b \\ 3 & \rightleftarrows & c \end{array} \quad g:$$

gf(1)=g(a)=1, gf(2)=g(b)=2, gf(3)=g(c)=3

fg(a)=f(1)=a, fg(b)=f(2)=b, fg(c)=g(3)=c

$gf=I_X$，　　$fg=I_Y$。

（1）逆映射的定义

定义2.5.1　设$f:X\to Y$，如果存在一个映射$g:Y\to X$，使得：$fg=I_Y$且$gf=I_X$，

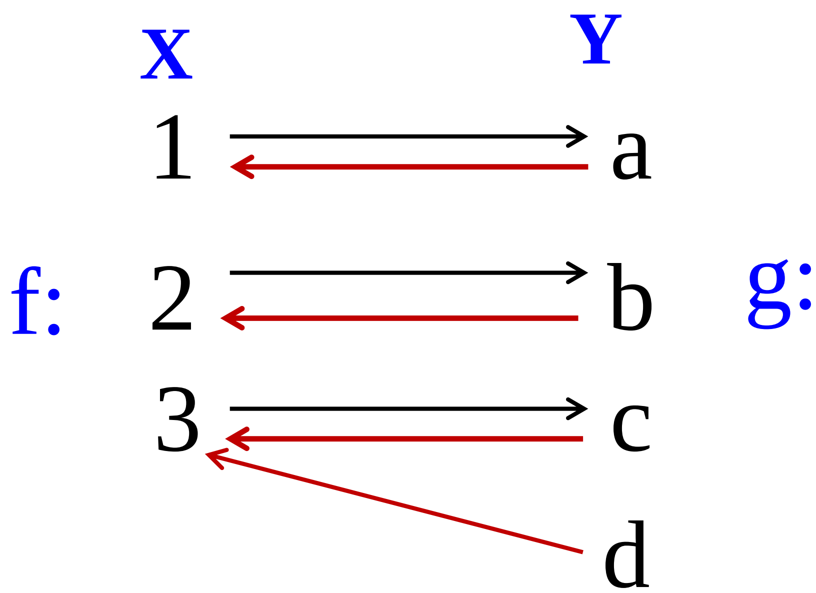
则称映射f是可逆的，而g称为f的逆映射

按定义f可逆当且仅当$fg=I_Y$且$gf=I_X$同时成立，缺一不可。

（2）左逆映射和右逆映射的定义

定义2.5.2

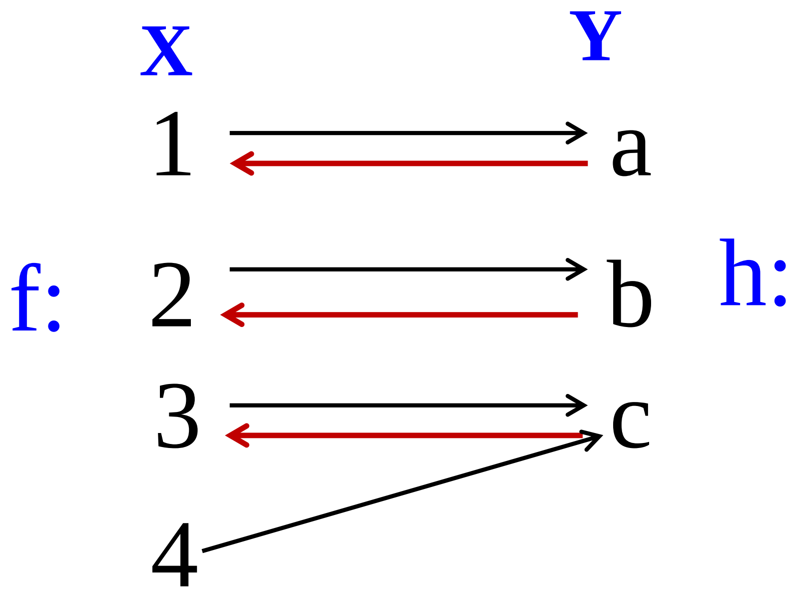
设$f:X\rightarrow Y$,如果存在一个映射$g:Y\rightarrow X$,使得:$gf=I_X$,则称映射f是左可逆的，g称为f的左逆映射。



（2）左逆映射和右逆映射的定义

定义2.5.2 （续）

设f:X→Y,如果存在一个映射h:Y→X,使得:$fh=I_Y$,则称映射f是右可逆的，h称为f的右逆映射



（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

定理2.5.1 设$f:X \to Y$，则f是可逆的充分必要条件是f为双射的（一一对应）。

[证]必要性：若f可逆，按定义存在一个映射$g:Y \to X$，使得$gf=I_X$，$fg=I_Y$。

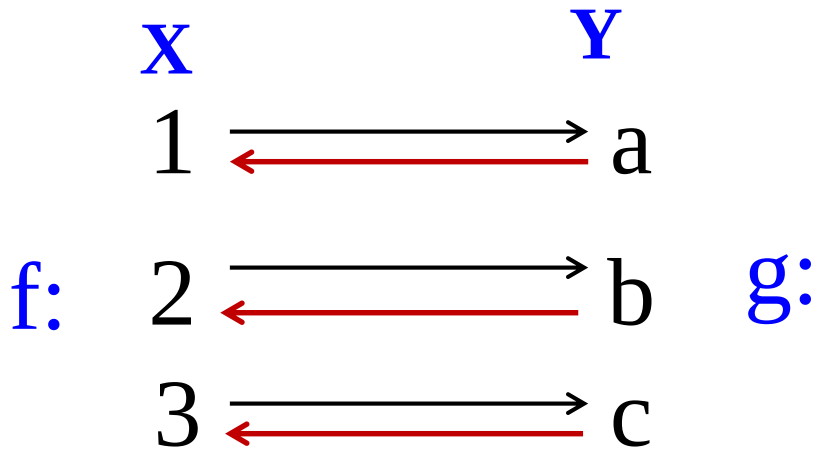
I_X，I_Y是双射，

由定理2.4.4，f既是满射又是单射，

因此f是双射。

（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

[证]充分性：



（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

[证]充分性：

若f是双射，则$\forall y\in Y$有且仅有一个$x\in X$，使得$f(x)=y$。

令$g: Y\to X$，对任一$y\in Y$，$g(y)=x$当且仅当$f(x)=y$。

$\forall x\in X$，$gf(x)=g(f(x))=g(y)=x$，即：$gf=I_X$。

$\forall y\in Y$，$fg(y)=f(g(y))=f(x)=y$，即：$fg=I_Y$。

因此f是可逆的

（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

定理2.5.2 设f:X→Y,则如果f是可逆的,则f的逆映射是唯一的。f的逆记作f^{-1}。

[证]如果f的逆不唯一：

设f有两个逆映射 f_1^{-1}和f_2^{-1} 且$f_1^{-1} \neq f_2^{-1}$

$$\exists y \in Y, f_1^{-1}(y) \neq f_2^{-1}(y)$$

因为f是它们的逆映射

$$\therefore ff_1^{-1}(y) \neq ff_2^{-1}(y)$$

结果y≠y,矛盾。

（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

定理2.5.3 设$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$都是可逆的，则gf也可逆且：$(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$, $(f^{-1})^{-1}=f$。

（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

定理2.5.4 设$f:X\rightarrow Y$，则：

(1) f左可逆的充分必要条件是f为单射；

(2) f右可逆的充分必要条件是f为满射。

（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

定理2.5.4 设$f:X\to Y$,则:

(1) f左可逆的充分必要条件是f为单射;

[证]必要性：首先设f是左可逆的;

存在$g:Y\to X$,使得$gf=I_X$;

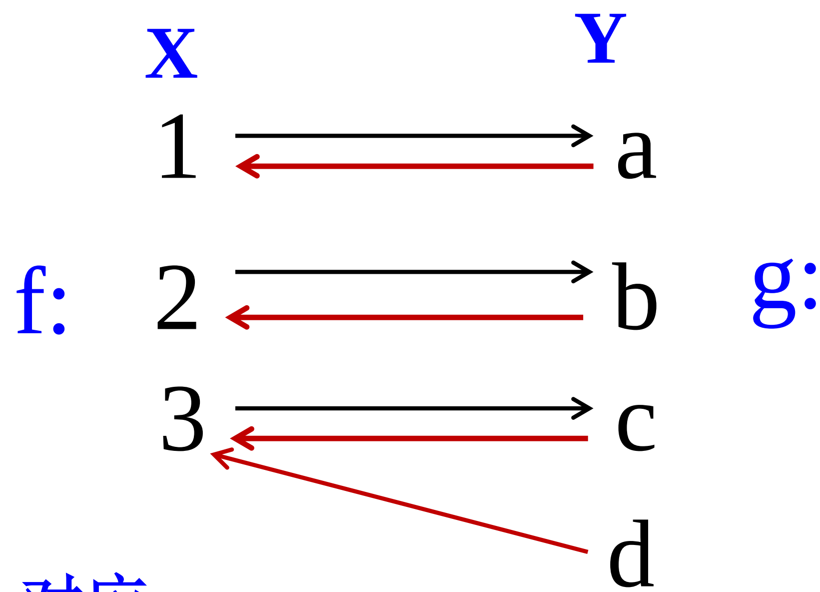
由I_X是单射可得f是单射;

（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

定理2.5.4 设$f:X\rightarrow Y$，则：

(1) f左可逆的充分必要条件是f为单射；

[证]充分性：若f为单射



则f可视为X到$I_m(f)$的一一对应。

于是，有$g:I_m(f)\rightarrow X$，使得$gf=I_X$。

扩充g到Y上：$\forall y\in Y$，若$y\in I_m(f)$，则$g(y)$不变，

而当$y\in Y\backslash I_m(f)$时，规定$g(y)$为X中一固定元x_0，则g就是Y到X的映射，且$gf=I_X$，所以，f是左可逆。

（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

定理2.5.4 设$f:X\rightarrow Y$,则:

(2) f右可逆的充分必要条件是f为满射。

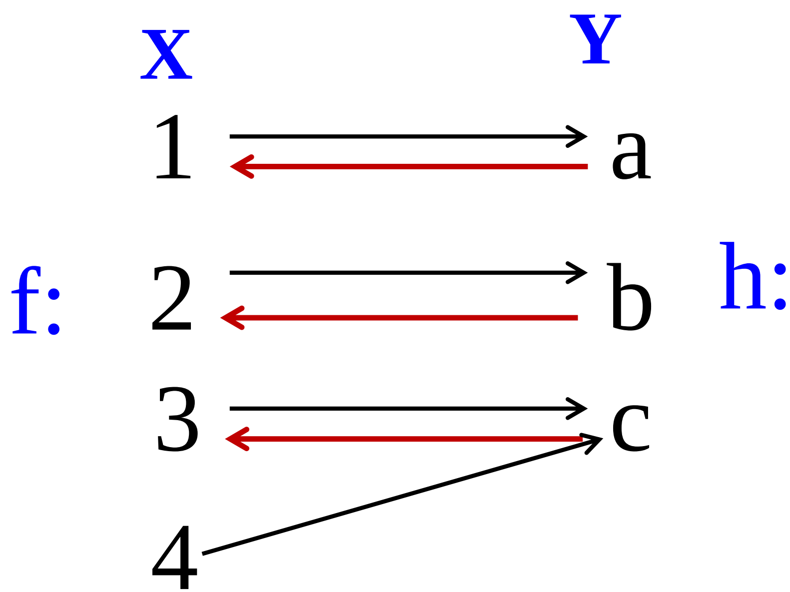
[证]必要性:首先设f是右可逆的;

存在$g:Y\rightarrow X$,使得$fg=I_Y$;

由I_Y是满射可得f是满射;

（3）左逆映射、右逆映射、逆映射的性质

[证]充分性：设f是满射



则$\forall y\in Y$，$f^{-1}(\{y\})=\{x|f(x)=y\}\neq\varnothing$,

取一个$x_0\in f^{-1}(\{y\})$, 并令$g(y)=x_0$,

$(fg)(y)=f(g(y))=f(x_0)=y$, 于是$fh=I_Y$;

则$g:Y\rightarrow X$为f的一个右逆，

**

2.8 集合的特征函数

本节主要问题

（1）集合和函数的对应关系

（2）集合的性质和集合特征函数的对应关系

（3）同构

（1）集合和函数的对应关系

设全集X = {a,b,c,…,x,y,z}, E = {a, b, c}

定义函数：

$$f(x)=\begin{cases}1,\text{如果}x\in E,\\0,\text{如果}x\notin E.\end{cases}$$

f(a)=1, f(b)=1, f(c)=1, f(d)=0, …

令E={a,b},按上述定义：

f(a)=1, f(b)=1, f(c)=0, f(d)=0, …

按照这样的定义，一个子集唯一确定一个函数，反过来，一个这样的函数也唯一确定一个子集。

（1）集合和函数的对应关系

定义2.8.1　设X是一个集合，E$\subseteq$X。从X到{0, 1}的如下的一个映射χ_E称为E的特征函数：$\forall x \in X$,

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, 如果\ x \in E, \\ 0, 如果\ x \notin E. \end{cases}$$

可见, 集合E和集合的特征函数χ_E之间相互唯一确定。

（2）集合的性质和集合特征函数的对应关系

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, 如果\, x\in E,\\ 0, 如果\, x\notin E.\end{cases}$$

1. 若E和F$\subseteq$X。且E$\neq$F，则$\chi_E\neq\chi_F$。

设全集X = {a,b,c,…,x,y,z}, E = {a, b, c}, F={c, d},

$\chi_E(a)\neq\chi_F(a)$

证明：由E$\neq$F可得，$\exists x\in E$, $x\notin F$ 或者$\exists x\in F$, $x\notin E$

不失一般性，我们令 $\exists x\in E$, $x\notin F$;

则$\chi_E(x)=1$; $\chi_F(x)=0$, 因此：$\chi_E\neq\chi_F$。

1*. 若E和F$\subseteq$X且$\chi_E\neq\chi_F$，则E$\neq$F。

（2）集合的性质和集合特征函数的对应关系

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1,\text{如果}\,x\in E,\\0,\text{如果}\,x\notin E.\end{cases}$$

2、若$E\subseteq F$。则$\forall x\in X,\chi_E(x)\le\chi_F(x)$。

设全集X = {a, b, c, …, x, y, z}， E = {a, b}
F={a, b, c}，

$\chi_E(a)=\chi_F(a)=1$； $\chi_E(b)=\chi_F(b)=1$； $\chi_E(c)=1,\chi_F(c)=0$；
$\chi_E(d)=\chi_F(d)=0$； ……

2*、若$\forall x\in X,\chi_E(x)\le\chi_F(x)$。$E\subseteq F$。

（2）集合的性质和集合特征函数的对应关系

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, 如果\, x\in E,\\ 0, 如果\, x\notin E.\end{cases}$$

3、$\chi_{\varnothing}\equiv 0$, 即$\forall x\in X$, $\chi_{\varnothing}(x)=0$;

4、$\chi_X\equiv 1$, 即$\forall x\in X$, $\chi_X(x)=1$。

Ch(X)是X中所有子集构成的特征函数的集合。

令$Ch(X)=\{\chi|\chi:X\rightarrow\{0,1\}\}$。

Ch(X)是X中所有子集构成的特征函数的集合。

例如：$X=\{a,b\}$

$\chi(a)=0,\ \chi(b)=0 \longleftrightarrow \varnothing$

$\chi(a)=1,\ \chi(b)=0 \longleftrightarrow \{a\}$

$\chi(a)=0,\ \chi(b)=1 \longleftrightarrow \{b\}$

$\chi(a)=1,\ \chi(b)=1 \longleftrightarrow \{a,b\}$

Ch(X)与X的幂集2^X存在一一对应。

1(P55)、设$N=\{1, 2, 3, \ldots\}$。试构造两个映射f和g：$N\rightarrow N$，使得$fg=I_N$, 但$gf\neq I_N$。

解：$g(x)=x+1$;

$f(x)=x-1$，　当$x=1$时：$f(x)=1$。

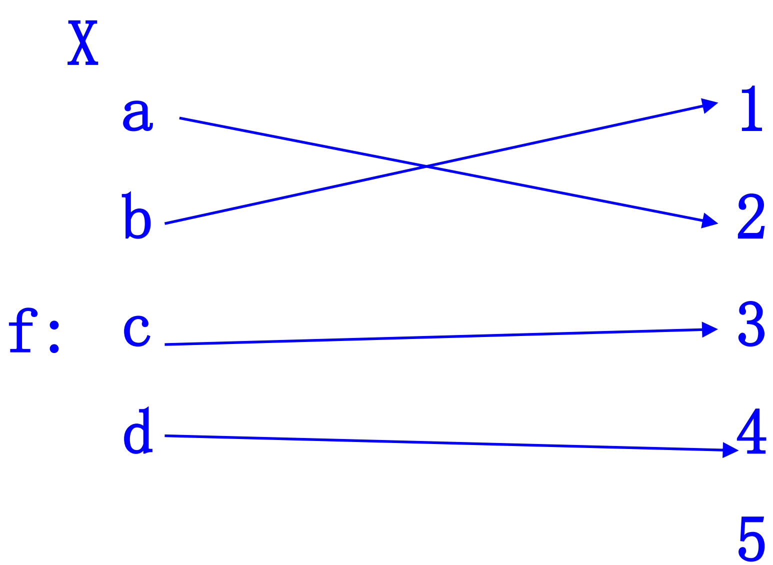
$fg=I_N$, 但$gf\neq I_N$。

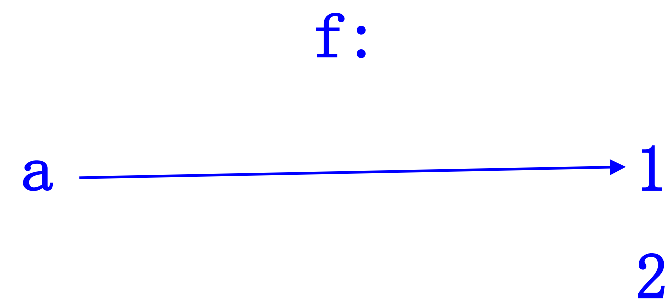
2(P55)、设f:X→Y。

(1)如果存在唯一的一个映射g:Y→X,使得gf=Ix，那么f是否可逆。

存在唯一的左逆映射，左可逆，单射！

问f是不是一一对应？





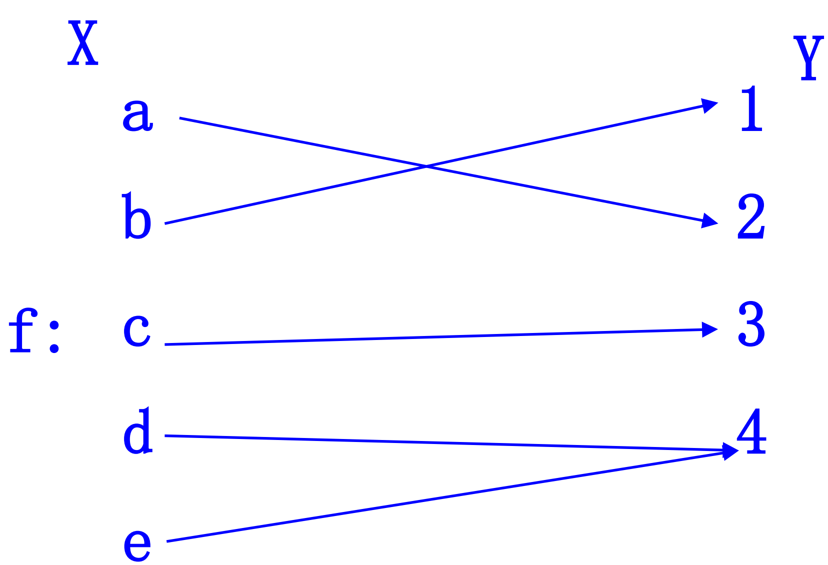
答案是不一定

2(P55)、设f:X→Y。

(2)如果存在唯一的一个映射g:Y→X,使得fg=Iy，那么f是否可逆。

存在唯一的右逆映射，右可逆，满射！

问f是不是一一对应？



证明：f可逆。

因为f右可逆，所以f是满射。

$\forall y \in Y$，如果$|f^{-1}(y)|>1$

则右逆映射不唯一。

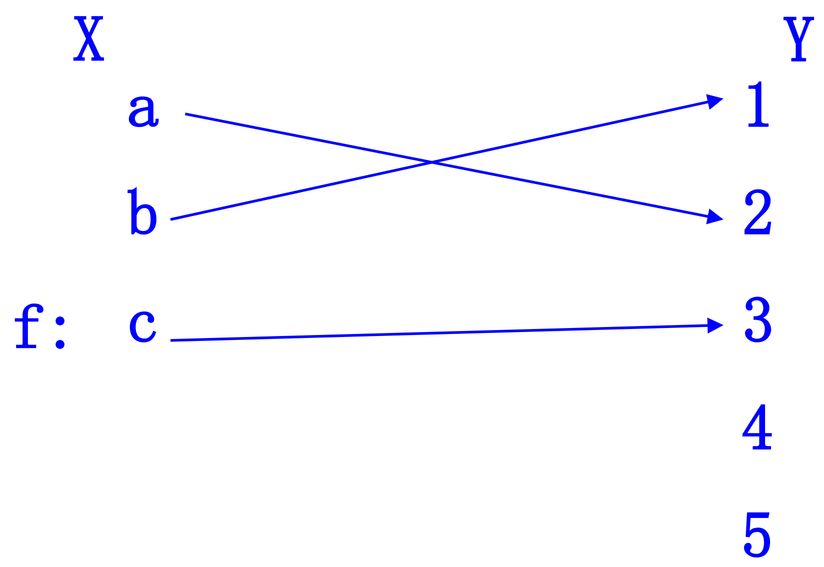
因此$|f^{-1}(y)|=1$

因此f是双射。可逆。

第二章：映射

3(P55)、设f:X→Y。X和Y为有穷集合。

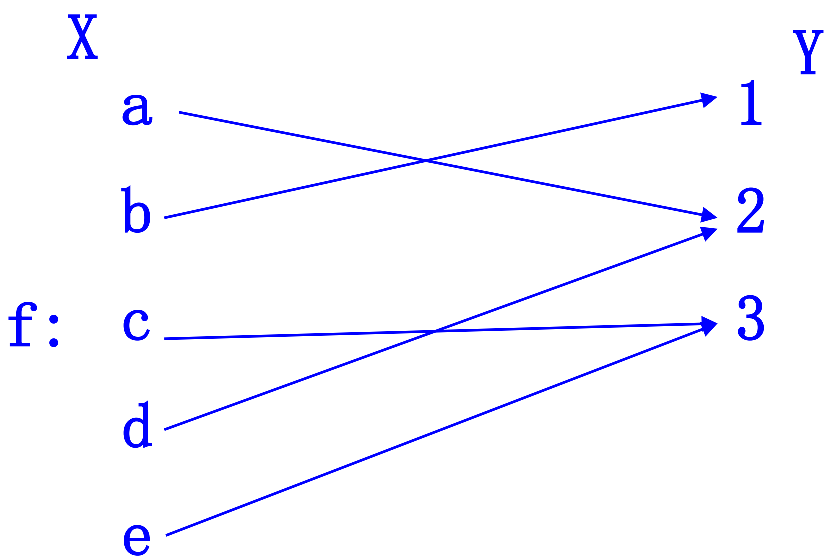
(1)如果f是左可逆的，那么f有多少个左逆映射？



$$|X|^{|Y|-|X|}$$

3(P55)、设f:X→Y。X和Y为有穷集合。

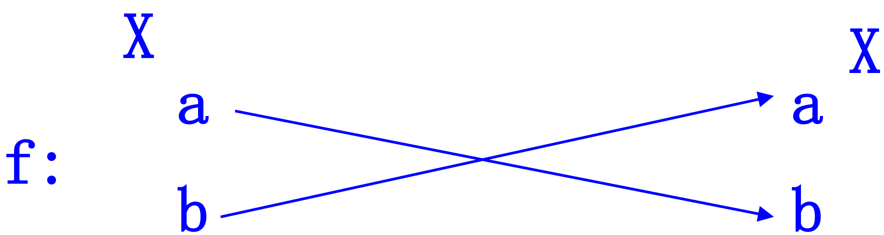
(2)如果f是右可逆的，那么f有多少个右逆映射？



设 $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$

则右逆映射的个数是：$|f^{-1}(y_1)| \times |f^{-1}(y_2)| \times \ldots \times |f^{-1}(y_n)|$

5(P55)、是否有一个从X到X的一个一一对应f，使得$f=f^{-1}$，但$f\neq I_X$?



存在！