第十三届全国大学生数学竞赛初赛
《非数学类》试题及参考解答

一、填空题（每小题 6 分，共 30 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}\dfrac{x-\ln\left(e^x+x\right)}{x}=$____.

【答案】：0

【参考解答】：原式$=-\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)=0$

2、设$z=z(x,y)$是由方程$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$所确定的二元隐函数，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

【参考解答】：将方程两边分别关于x和y求偏导，得

$$\begin{cases}2\cos(x+2y-3z)\left(1-3\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=1-3\dfrac{\partial z}{\partial x}\\ 2\cos(x+2y-3z)\left(2-3\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=2-3\dfrac{\partial z}{\partial y}\end{cases}$$

按$\cos(x+2y-3z)=\dfrac{1}{2}$和$\neq\dfrac{1}{2}$两种情形，都可解得:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{3},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{3}.$$

因此$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1.$

3、设函数$f(x)$连续，且$f(0)\neq 0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=$_________.

【参考解答】：令$x-t=u$，则$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$. 于是由洛必达法则和积分中值定理，得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+2xf(x)-2xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}=1\end{aligned}$$

其中ξ介于$0,x$之间.

4、过三条直线$L_1:\begin{cases}x=0,\\ y-z=2,\end{cases}$ $L_2:\begin{cases}x=0,\\ x+y-z+2=0,\end{cases}$ 与$L_3:\begin{cases}x=\sqrt{2},\\ y-z=0\end{cases}$的圆柱面方程为________.

【答案】: $2x^2+y^2+z^2-2yz=4$

【参考解答】: 三条直线的对称式方程分别为

$$L_1:\frac{x}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{1}, L_2:\frac{x}{0}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-2}{1}$$
$$L_2:\frac{x-\sqrt{2}}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$$

所以三条直线平行. 在L_1上取点$P_1(0,1,-1)$, 过该点作与三直线都垂直的平面$y+z=0$, 分别交L_2,L_3于点$P_2(0,-1,1),P_3(\sqrt{2},0,0)$. 易知经过这三点的圆的圆心为$O(0,0,0)$. 这样, 所求圆柱面的中心轴线方程为

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}.$$

设圆柱面上任意点的坐标为$Q(x,y,z)$, 因为点Q到轴线的距离均为$\sqrt{2}$, 所以有

$$\frac{|(x,y,z)\times(0,1,1)|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

化简即得所求圆柱面的方程为$2x^2+y^2+z^2-2yz=4$.

5、记$D=\left\{(x,y)|\,x^2+y^2\le\pi\right\}$, 则

$$\iint_D\left(\sin x^2\cos y^2+x\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

【答案】: π

【参考解答】: 根据重积分的对称性, 得

$$\text{原式}=\iint_D\sin x^2\cos y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sin y^2\cos x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\iint_D\left(\sin x^2\cos y^2+\sin y^2\cos x^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D\sin\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}r\sin r^2\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\left(-\cos r^2\right)\Big|_0^{\sqrt{\pi}}=\pi$$

二、(14 分) 设$x_1=2021$, $x_n^2-2\left(x_n+1\right)x_{n+1}+2021=0(n\ge1)$. 证明数列$\left\{x_n\right\}$收敛, 并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【参考解答】: 记$a=1011,y_n=1+x_n$, 函数$f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{a}{x}(x>0)$, 则$y_1=2a$且

$$y_{n+1}=f\left(y_n\right)(n\ge1).$$

易知, 当$x>\sqrt{2a}$时, $x>f(x)>\sqrt{2a}$, 所以$\left\{y_n\right\}$是单调减少且有下界的数列,

因而收敛. 由此可知$\{x_n\}$收敛.

令$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，则$A>0$且$A=f(A)$，解得$A=\sqrt{2a}$. 因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2022}-1.$$

三、(14 分) 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上是有界连续函数, 证明: 方程$y''+14y'+13y=f(x)$的每一个解在$[0,+\infty)$上都是有界函数.

【参考解答】: 易得对应的齐次方程$y''+14y'+13y=0$的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-13x}$$

又 由$y''+14y'+13y=f(x)$得

$$\left(y''+y'\right)+13\left(y'+y\right)=f(x).$$

令$y_1=y'+y$，则$y_1'+13y_1=f(x)$，解得

$$y_1=e^{-13x}\left(\int_0^x f(t)e^{13t}\mathrm{d}t+C_3\right).$$

同理，由$y''+14y'+13y=f(x)$，得

$$\left(y''+13y'\right)+\left(y'+13y\right)=f(x).$$

令$y_2=y'+13y$，则$y_2'+y_2=f(x)$，解得

$$y_2=e^{-x}\left(\int_0^x f(t)e^{t}\mathrm{d}t+C_4\right).$$

取$C_3=C_4=0$，得$\begin{cases} y'+y=e^{-13x}\displaystyle\int_0^x f(t)e^{13t}\mathrm{d}t, \\ y'+13y=e^{-x}\displaystyle\int_0^x f(t)e^{t}\mathrm{d}t. \end{cases}$ 由此解得原方程的一个特解为

$$y^*=\frac{1}{12}e^{-x}\int_0^x f(t)e^t\mathrm{d}t-\frac{1}{12}e^{-13x}\int_0^x f(t)e^{13t}\mathrm{d}t$$

因此，原方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-13x}+\frac{1}{12}e^{-x}\int_0^x f(t)e^t\mathrm{d}t-\frac{1}{12}e^{-13x}\int_0^x f(t)e^{13t}\mathrm{d}t.$$

因为$f(x)$在$[0,+\infty)$上有界，所以，存在$M>0$，使得

$$|f(x)|\le M, 0\le x<+\infty$$

注意到当$x\in[0,+\infty)$时，$0<e^{-x}\le 1, 0<e^{-13x}\le 1$，所以

$$\begin{aligned} |y| &\le \left|C_1e^{-x}\right|+\left|C_2e^{-13x}\right|+\frac{1}{12}e^{-x}\left|\int_0^x f(t)e^t\mathrm{d}t\right|+\frac{1}{12}e^{-13x}\left|\int_0^x f(t)e^{13t}\mathrm{d}t\right| \\ &\le |C_1|+|C_2|+\frac{M}{12}e^{-x}\int_0^x e^t\mathrm{d}t+\frac{M}{12}e^{-13x}\int_0^x e^{13t}\mathrm{d}t \\ &\le |C_1|+|C_2|+\frac{M}{12}\left(1-e^{-x}\right)+\frac{M}{12\times 13}\left(1-e^{-13x}\right) \\ &\le |C_1|+|C_2|+\left|\frac{M}{12}+\frac{M}{12\times 13}\right|=|C_1|+|C_2|+\frac{7M}{78} \end{aligned}$$

对于方程的每一个确定的解，常数C_1,C_2是固定的，所以，原方程的每一个解都是有界的.

四、(14 分) 对于 4 次齐次函数

$$f(x,y,z)=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2$$

计算曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$.

【参考解答】: 因为 $f(x,y,z)$ 为 4 次齐次函数，所以对 $\forall t\in R$，恒有

$$f(tx,ty,tz)=t^4f(x,y,z)$$

对上式两边关于 t 求导，得

$$xf_1'(tx,ty,tz)+yf_2'(tx,ty,tz)+zf_3'(tx,ty,tz)=4t^3f(x,y,z)$$

取 $t=1$，得

$$xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)=4f(x,y,z).$$

设曲面 Σ 上点 (x,y,z) 处的外法线方向的方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$$\cos\alpha=x,\cos\beta=y,\cos\gamma=z$$

因此由高斯公式和轮换对称性，记 $\Omega: x^2+y^2+z^2\leq 1$，得

$$\oiint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\frac{1}{4}\oint_{\Sigma}\left(xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)\right)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{4}\oiint\limits_{\Sigma}\left[\cos\alpha f_x'+\cos\beta f_y'+\cos\gamma f_z'\right]\mathrm{dS}=\frac{1}{4}\oiint\limits_{\Sigma} f_x'\mathrm{d}y\mathrm{d}z+f_y'\mathrm{d}z\mathrm{d}x+f_z'\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\iiint\limits_{\Omega}\left[f_{xx}''(x,y,z)+f_{yy}''(x,y,z)+f_{zz}''(x,y,z)\right]\mathrm{d}V$$

$$=\frac{3}{2}\iiint\limits_{\Omega}\left[x^2\left(2a_1+a_4+a_6\right)+y^2\left(2a_2+a_4+a_5\right)+z^2\left(2a_3+a_5+a_6\right)\right]\mathrm{d}V$$

$$=\sum_{i=1}^{6}a_i\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}V=\sum_{i=1}^{6}a_i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^2\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4\pi}{5}\sum_{i=1}^{6}a_i$$

五、(14 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，证明:

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)\right]$$
$$=\frac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right].$$

【参考解答】: 记 $x_k=a+\dfrac{k(b-a)}{n},\xi_k=a+\dfrac{(2k-1)(b-a)}{2n},k=1,2,\cdots,n$. 将 $f(x)$ 在 $\left[x_{k-1},x_k\right]$ 上展开成泰勒公式，得

$$f(x)=f\left(\xi_k\right)+f'\left(\xi_k\right)\left(x-\xi_k\right)+\frac{f''\left(\eta_k\right)}{2}\left(x-\xi_k\right)^2$$

其中 $x\in\left[x_{k-1},x_k\right]$, η_k 介于 0 和 x 之间. 于是

$$
\begin{aligned}
B_n &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{2k-1}{2n}(b-a)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(x) - f\left(\xi_k\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[f'\left(\xi_k\right)\left(x-\xi_k\right) + \frac{f''\left(\eta_k\right)}{2}\left(x-\xi_k\right)^2\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''\left(\eta_k\right)\left(x-\xi_k\right)^2 \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

设$f''(x)$在$\left[x_{k-1},x_k\right]$上的最大值和最小值分别为M_k,m_k，因为

$$
\int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(x-\xi_k\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{(b-a)^3}{12n^3}
$$

因为$f''(x)$在$[a,b]$上连续，所以$f''(x)$在$[a,b]$上可积. 根据定积分$\int_0^1 f''(x)\mathrm{d}x$的定义及牛顿-莱布尼兹公式，得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{b-a}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} M_k \frac{b-a}{n} \\
&= \int_a^b f''(x)\mathrm{d}x = f'(b) - f'(a)
\end{aligned}
$$

再根据夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 B_n = \dfrac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right]$.

六、(14 分) 设$\left\{a_n\right\}$与$\left\{b_n\right\}$均为正实数列，满足：$a_1 = b_1 = 1$且

$$
b_n = a_n b_{n-1} - 2, n = 2,3,\cdots.
$$

又设$\left\{b_n\right\}$为有界数列，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$收敛，并求该级数的和.

【参考解答】：首先，注意到$a_1 = b_1 = 1$，且

$$
a_n = \left(1+\frac{2}{b_n}\right)\frac{b_n}{b_{n-1}}
$$

所以当$n \ge 2$时，有

$$
a_1a_2\cdots a_n = \left(1+\frac{2}{b_2}\right)\left(1+\frac{2}{b_3}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{b_n}\right)b_n.
$$

由于$\left\{b_n\right\}$有界，故存在$M > 0$，使得当$n \ge 1$时，恒有$0 < b_n \le M$. 因此

$$
\begin{aligned}
0 < \frac{b_n}{a_1a_2\cdots a_n} &= \left(1+\frac{2}{b_2}\right)^{-1}\left(1+\frac{2}{b_3}\right)^{-1}\cdots\left(1+\frac{2}{b_n}\right)^{-1} \\
&\le \left(1+\frac{2}{M}\right)^{-n+1} \to 0, n \to \infty
\end{aligned}
$$

根据夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_1a_2\cdots a_n} = 0$.

考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$的部分和$S_n$，当$n\geq 2$时，有

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}\frac{a_kb_{k-1}-b_k}{2}\\&=1+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{b_{k-1}}{a_1a_2\cdots a_{k-1}}-\frac{b_k}{a_1a_2\cdots a_k}\right)=\frac{3}{2}-\frac{b_n}{2a_1a_2\cdots a_n}\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}$，这就证明了级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$收敛，且其和为$\frac{3}{2}$.