集合论与图论—离散数学I

一、离散数学的前世今生？

二、集合论和图论的用途？

三、教材和主要参考书？

四、课程内容？

五、考试考核方式？

一、离散数学的前世今生

数论

主要研究整数的性质，例如：奇数、偶数、素数（质数）、质因子分解等概念。著名问题有：

把整数扩展到『符号』

哥德巴赫猜想（1742年）

任一大于2的偶数都可写成两个质数之和。

8=3+5，14=3+11

1966年陈景润证明了“1+2”成立，即“任一充分大的偶数都可以表示成二个素数的和，或是一个素数和一个半素数的和”。

16=2+2×7

费马大定理（1621年）

当整数$n > 2$时，关于x,y,z的不定方程

$x^n + y^n = z^n$ 无正整数解。

1994年英国数学家安德鲁·怀尔斯（Andrew Wiles）完成证明。

一、离散数学的前世今生

集合论

给『符号』定义运算规则

集合论是研究集合（由一堆抽象“符号”构成的整体）的数学理论，包含了元素、集合、映射、关系等最基本的数学概念。集合论常用来描述算法。

输入：元结构集合 S_{meta}

输出：簇结构集合 $S_{cluster}$

初始化：$S_{cluster}=\phi$；集合 $S=\phi$

While ($S_{meta}!=\phi$){

  任取$(v, w) \in S_{meta}$; $S=S\cup\{(v, w)\}$;$S_{meta} = S_{meta}\setminus \{(v, w)\}$;

    $\forall c$, if $(v, c) \in S_{meta}$ {

    $S=S\cup\{(v, c)\}$; $S_{meta} = S_{meta}\setminus \{(v, c)\}$;

    }

$S_{cluster}= S_{cluster} \cup S$; $S=\phi$

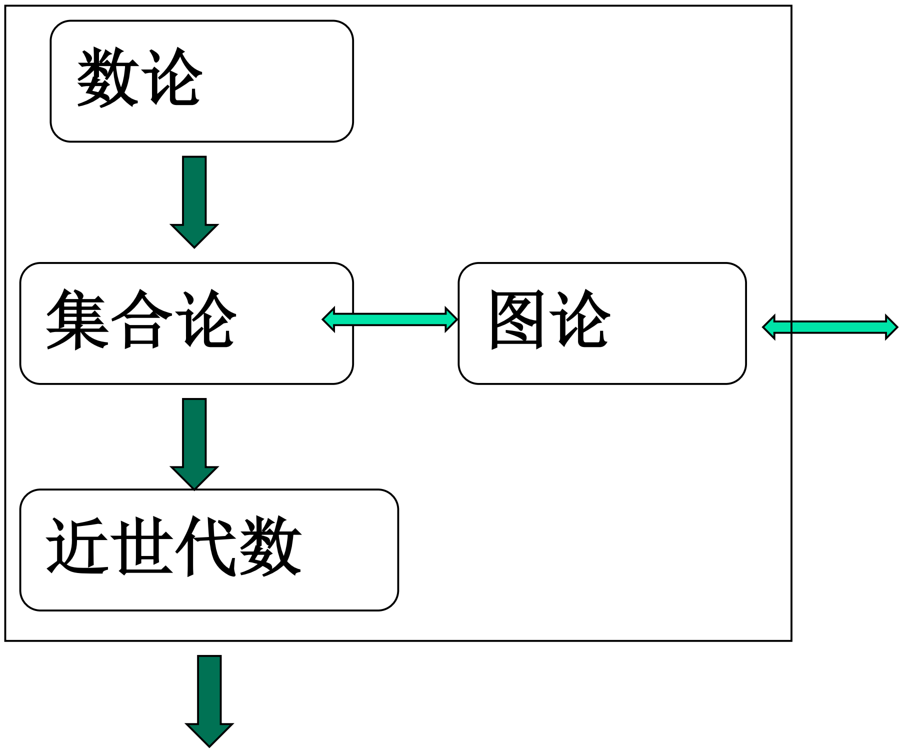
一、离散数学的前世今生

近世代数

近世代数（抽象代数）
在集合的“符号”间增加运算；
把运算从数字之间扩展到符号之间。
这种“运算”的不同特点形成：
群、环、域等概念。

男人 = 吃饭 + 睡觉 + 挣钱
猪 = 吃饭 + 睡觉
男人 = 猪 + 挣钱
猪 = 男人 - 挣钱
结论：男人不挣钱的都是猪

一、离散数学的前世今生



图论可以看做是集合论的可视化应用。用点、线的方式来表示元素和元素之间的各种关系，在计算机科学中应用广泛。

组合数学：(排列、组合、生成函数、算法)。

数理逻辑：逻辑学的符号表示和推演。

二、集合论和图论的用途

例1：文本相似性计算—比较如下两段文字的相似性。

金正恩在会上对强化发展革命武装力量作出指示。他说：人民军今年要集中精力完善军事斗争准备。金正恩还明确了今后势必同美国一战的作战方式和相应战术问题。

金正恩在会上强调了发展革命武装力量的重要性。他说：人民军今年要集中精力加强军事斗争准备。他还明确了要与美国一战的决心并讲到了作战方式和相应战术问题。

→ 建立数学模型

二、集合论和图论的用途

金正恩在会上对强化发展革命武装力量作出指示。他说：人民军今年要集中精力完善军事斗争准备。金正恩还明确了今后势必同美国一战的作战方式和相应战术问题。

分词

A={金正恩，会上，强化，发展，革命武装力量，作出，指示，他，说，人民军，今年，集中精力，完善，军事斗争准备，明确了，今后，势必，美国一战，作战方式，相应，战术问题}

二、集合论和图论的用途

金正恩在会上强调了发展革命武装力量的重要性。他说：人民军今年要集中精力加强军事斗争准备。他还明确了要与美国一战的决心并讲到了作战方式和相应战术问题。

分词

B={金正恩，会上，强调，发展，革命武装力量，重要性，他，说，人民军，今年，集中精力，加强，军事斗争准备，明确了，要，美国一战，决心，讲到了，作战方式，相应，战术问题}

二、集合论和图论的用途

将两段文字通过分词形成两个集合：

A={金正恩，会上，强化，发展，革命武装力量，作出，指示，他，说，人民军，今年，集中精力，完善，军事斗争准备，明确了，今后，势必，美国一战，作战方式，相应，战术问题}

B={金正恩，会上，强调，发展，革命武装力量，重要性，他，说，人民军，今年，集中精力，加强，军事斗争准备，明确了，要，美国一战，决心，讲到了，作战方式，相应，战术问题}

将两段文本的相似性问题转化为两个集合间的相似性问题

→ 算法设计

二、集合论和图论的用途

杰卡德相似系数(Jaccard similarity coefficient),

也称杰卡德指数(Jaccard Index),

用来衡量两个集合相似度的一种指标。

$$J(A,B)=\frac{|A\cap B|}{|A\cup B|}$$

二、集合论和图论的用途

计算机科学领域的大多数基本概念和理论，几乎均采用集合论和图论的有关术语来描述。

特别是在构建数学模型，算法描述时用的更广泛。

二、集合论和图论的用途

集合论与图论是：
数据结构、算法设计与分析、
计算机图形学、图像处理、
密码学、编码理论、
数据压缩、人工智能、
生物信息工程等计算机课程的基础课程。

可以说《集合论和图论》是计算机方向所有软件课程的基础。

二、集合论和图论的用途

考研复试课程

2015年考研复试课总共200分

集合论占18分

图论占14分

三、选用教材

离散数学引论

王义和 著

哈尔滨工业大学出版社

参考教材

离散数学及其应用

Discrete Mathematics and Its Applicatioms

(美)Kenneth H.Rosen *著*

(英文版)

机械工业出版社

参考教材

集合论与图论

耿素云 编著

北京大学出版社

四、课程内容

第一章:集合及其应用
第二章:映射
第三章:关系
第四章:无穷集合及其基数
*第五章:模糊集合论
第六章:图的基本概念
第七章:树和割集
第八章:连图度和匹配
第九章:平面图和图的着色
第十章:有向图

线上Spoc观看时长和测验20分

线下期末考试和作业成绩80分

第一章：集合及其应用

1.1集合的概念

具
体

金庸的书：飞、雪、连、天、射、白、鹿；
笑、书、神、侠、倚、碧、鸳；越

金庸的书 = {飞，雪，连，天，射，白，鹿，
笑，书，神，侠，倚，碧，鸳，越}

集合的名字

集合的元素

抽
象

X= {a, b, c, d, e, f, g}

集合的元素
（一般用小写字母）

集合的名字(一般用大写字母)

1.1集合的概念

1、集合的概念，通常把具有某种性质的元素的全体称做集合。

在朴素集合论体系中,“集合”是一个原始概念，在朴素集合论中“集合”不能严格定义。

常用大写英文字母A,B,C,...表示集合，用小写英文字母a,b,c,...,表示集合中的元素。

1.1集合的概念

对于一个集合A来说，元素x或者是集合A的元素，或者不是，两者必居其一。

$A = \{x, y, z, o, p, q\}$

x是集合A的元素，我们说x属于A，

记为: $x \in A$;

b不是集合A的元素，我们说b不属于A，

记为: $b \notin A$。

1.1集合的概念

2、集合的表示方法:

（1）列举法（或：枚举法）：列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，然后用花括号括起来。

例如：设A是由26个英文字母为元素的集合，

则:$A=\{a, b, c, d, \ldots x, y, z\}$。

（2）描述法：当集合A是具有某种性质P的元素全体时,我们往往用下面的形式表示A。

$A = \{x \mid x\text{具有性质}P\}$

例如:$A = \{x \mid x\text{是素数}\}$

集合的描述法定义引起第三次数学危机!

3、三次数学危机：

（1）无理数引起的危机

著名问题：公元前5世纪，毕达哥拉斯定理：一切数均可表示成整数或整数之比。

解决结果：出现了无理数

（2）无穷小（微积分的基础）引起的危机。

著名问题：兔子追不上乌龟

解决结果：柯西定义“无穷小的概念”

（3）集合的定义引起的危机。

著名问题：罗素悖论

解决结果：康托尔公理集合论的诞生

1.1集合的概念

罗素悖论

一天，某村理发师挂出一块招牌：“村里所有不自己理发的人都由我给他们理发，我也只给这些人理发。”

1.1集合的概念

设理发师为i，被i理发的人的集合为：

$A=\{x \mid i给x理发\}$

下面我们来看一下理发师i是否属于集合A。

(1)如果$i\in A$ ⟶ i给i理发 ⟶ $i\notin A$

(2)如果$i\notin A$ ⟶ i不给i理发 ⟶ $i\in A$

这就是第三次数学危机的来源，

对集合论进行修正，避免悖论。代表性成果是公理集合论。

1.1集合的概念

对于集合的表示法应该注意以下几点：

(1)集合中的元素是各不相同的；

A={a, a, b}

判断题：规定集合中的元素不能相同是因为：集合中存在相同元素没有意义。

(2)集合中的元素不规定顺序；

{a, b} = {b, a}

(3)集合的两种表示法有时是可以互相转化的。

列举法 ⟷ 描述法

1.2 子集、集合的相等

(1)、子集的概念

$A=\{a, b\}$ $B=\{a, b, c\}$

A是B的子集，记作$A\subseteq B$

定义1.1 设A, B为两个集合, 若A中的每个元素都是B中的元素，则称A是B的子集合, 简称子集。记作$A\subseteq B$。

其符号化形式为：$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x,\ x\in A\rightarrow x\in B$

$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\in A, x\in B$

或者：$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x, x\notin B\rightarrow x\notin A$

1.2　子集、集合的相等

A={a, b, c}　B= {a, b, d}

A不是B的子集，记作A $\not\subseteq$ B

怎么证明A不是B的子集？

A$\not\subseteq$B$\Leftrightarrow$　$\exists$x, x$\in$A, x$\notin$B

若A，B，C是集合。“$\subseteq$”有以下性质：

(1)A$\subseteq$A

(2)如果A$\subseteq$B,且B$\subseteq$C　则:A$\subseteq$C。

1.2 子集、集合的相等

要注意“$\in$”与“$\subseteq$”在概念上的区别。

判断题：有人说元素有时候也是集合，集合有时候又是元素，对吗？√

对于X和Y，$X\in Y$ 与$X\subseteq Y$可能同时成立 √

对照上面这两个概念，比较集合$\{a\}$与$\{a, \{a\}\}$。

$\{a\}\in\{a,\{a\}\}$。并且$\{a\} \subseteq\{a,\{a\}\}$

$A\in B$ 与$A\subseteq B$有可能同时成立！

1.2 子集、集合的相等

A={a, b}是B={a, b, c}的子集。并且$A \neq B$

(2)、真子集的概念

定义1.2.2 设A，B为二集合，若$A \subseteq B$且$\exists x(x \in B$并且$x \notin A)$，则称A是B的真子集，记作$A \subset B$，读作A是B的真子集。

$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B$并且$\exists x(x \in B$并且$x \notin A)$，

设A, B, C为3个集合，下面3个命题为真：

(1)$A \not\subset A$。 (2)$A \subset B$，则$B \not\subset A$。

(3)$A \subset B$，且$B \subset C$，则$A \subset C$。

1.2　子集、集合的相等

$A=\{a,c,b\}$，$B=\{a,b,c\}$

(3)、集合相等的概念

定义1.2.3　设A,B是集合，如果$A\subseteq B$且$B\subseteq A$,则称A与B相等，记作$A=B$。

其符号化形式为：$A=B\Leftrightarrow\forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)$　重要！

由子集与集合相等的概念，可知：

(1) $A\neq B\Leftrightarrow A\not\subseteq B$或者$B\not\subseteq A$

(2) $A\subset B\Leftrightarrow A\subseteq B$且$A\neq B$。

(4)、空集的概念

定义1.2.4 不拥有任何元素的集合称为空集合，简称为空集，记作$\varnothing$。

例如：$A=\{x \mid x^2+1=0 \wedge x \in R\}$

$B=\{(x, y) \mid x^2+y^2<0 \wedge x, y \in R\}$都是空集。

$\{\varnothing\}$不是空集！

$\{\varnothing\}$它是包含一个空集的集合。

1.2 子集、集合的相等

定理1.2.1 空集是一切集合的子集。

推论：空集是唯一的。

证明：需要证明：

对于空集$\emptyset$和任意集合A

$\forall x, x \in \emptyset \rightarrow x \in A$

需要数理逻辑的知识，对于一个复合命题来说，如果前提不成立，这个命题就是对的。

$\forall x, x \in \emptyset \rightarrow x \notin A$ √

$\rightarrow \emptyset \not\subseteq A$ ×

$\emptyset \not\subseteq A$应该怎么证明？

1.2 子集、集合的相等

证明Ø $\not\subseteq$ A步骤是什么?

$\exists x, x \in Ø, x \notin A$ ×

1.2　子集、集合的相等

(5)、集族的概念

$A_1=\{1,2,3\}$　$A_2=\{2,3,4\}$　$A_3=\{5,6,7\}$

$A=\{A_1,A_2,A_3\}$

例如：在学校中，每个班级的学生形成一个集合，而全校的各个班级就形成一个集族。

定义1.2.4　以集合为元素的集合称为集族。

1.2　子集、集合的相等

设$A=\{A_1, A_2, A_3 \cdots A_n\}$为一个集族。

集族的表示方法：

若令$I=\{1, 2, 3, \cdots n\}$，则$\forall i\in I$, i确定了一个唯一的集合A_i。

于是集族A又常写成$\{A_h\}_{h\in I}$。

1.2　子集、集合的相等

例1.2.3　设$S=\{1,2,3\}$，S的所有子集构成的集合为：

$$B=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

B称作S的幂集，记作2^S

(6)、幂集的概念

定义1.2.5　集合S的所有子集(包括空集Ø和S本身)形成的集族称为S的幂集，并记为2^S，或记为**P(**S)。

$$2^S=\{A \mid A\subseteq S\}$$

1.2　子集、集合的相等

定理1.2.2 设集合A的元素个数$|A|=n$(n为自然数),则$|P(A)|=2^n$。

证明:

A的0个元素的子集个数为:C(n,0)

A的1个元素的子集个数为:C(n,1)

A的2个元素的子集个数为:C(n,2)

………

A的S个元素的子集个数为:C(n,n)

$$|P(A)|=C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\ldots+C(n,n)$$
$$=2^n$$

1.2 子集、集合的相等

注意，$2^{\varnothing}=\{\varnothing\}$。

在这里要区分$\varnothing$和$\{\varnothing\}$

$\varnothing$为空集，而$\{\varnothing\}$是一个集族。

$\varnothing \neq \{\varnothing\}$

$\varnothing \in \{\varnothing\}$

$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$。

1.3　集合的基本运算

$A=\{5,6,7,8,9,10\}$　$B=\{2,3,5,7\}$

$A\cup B=\{2,3,5,6,7,8,9,10\}$。

(1)、并集的概念

定义1.8　设A,B为二集合，称由A和B所有元素组成的集合为A与B的并集,记作$A\cup B$,称$\cup$为并运算符,$A\cup B$的描述法表示如下：

$A\cup B=\{x\mid x\in A或者x\in B\}$。

1.3 集合的基本运算

定理1.3.1 设A,B,C为任意的三个集合

1°. 交换律成立， 即$A\cup B=B\cup A$;

2°. 幂等律成立，即$A\cup A=A$;

3°. $\varnothing\cup A=A$;

4°. $A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$;

5°. 结合律成立，即$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$。

1.3 集合的基本运算

将集合的并运算推广到多个集合的并集。

$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$定义为至少属于$A_1, A_2, ..., A_n$中之一的那些元素构成的集合。

$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$简记为: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

若$A_1, A_2, ..., A_n, ...$是一个集合的无穷序列, 则它们的并集记为: $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup ...$,

简记为: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

集族中元素的并集

一般地, 若 $\{A_l\}_{l\in I}$ 是任一集族, 则集族中那些集合的并集记为

简记为 $$\bigcup_{l\in I} A_l = \{x \mid \exists l \in I 使得 x \in A_l\}$$

1.3 集合的基本运算

$A=\{5,6,7,8,9,10\}$ $B=\{2,3,5,7\}$

$A\cap B=\{5,7\}$。

(2)、交集的概念

定义1.9 设A, B为二集合，称由A和B的公共元素(既属于A又属于B)组成的集合为A与B的交集，记作$A\cap B$，称$\cap$为交运算符。

$A\cap B$的描述法表示为：

$A\cap B=\{x \mid x\in A 且 x\in B\}$

定理1.3.2 设A, B, C为任意的三个集合，则：

6°. 交换律成立, 即$A \cap B = B \cap A$;

7°. 幂等律成立, 即$A \cap A = A$;

8°. $\varnothing \cap A = \varnothing$;

9°. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$;

10°. 结合律成立, 即$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$。

与并运算类似，可以将集合的交推广到有限个或可数个集合：

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, x \in A_i)\}$$

类似定义

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \forall n \in N, x \in A_n\}$$

对于集族$\{A_l\}_{l \in I}$中各集的交记成，$\bigcap_{l \in I} A_l$ 其定义为

$$\bigcap_{l \in I} A_l = \{x \mid \forall \xi \in I, x \in A_\xi\}$$

定理1.3.3 设A为一集合，$\{B_l\}_{l\in I}$为任一集族，则：

$$A \cap (\bigcup_{l\in I} B_l) = \bigcup_{l\in I} (A \cap B_l)$$

$$A \cup (\bigcap_{l\in I} B_l) = \bigcap_{l\in I} (A \cup B_l)$$

证明：$$A\cup(\bigcap_{l\in I}B_l)=\bigcap_{l\in I}(A\cup B_l)$$

(1) $$\forall x\in A\cup(\bigcap_{l\in I}B_l)$$

$$\Rightarrow x\in A \; or \; x\in\bigcap_{l\in I}B_l$$

$$\Rightarrow \forall l\in I, x\in A\cup B_l$$

$$\Rightarrow x\in\bigcap_{l\in I}(A\cup B_l)$$

(2) 略

定理1.3.4 设A, B, C为任意三个集合，则:

11°. 交运算对并运算满足分配律,

即$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

12°. 并运算对交运算满足分配律,

即$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

定理1.3.5 对任何集合A,B,吸收律成立。

13°. $A\cap(A\cup B)=A$;

14°. $A\cup(A\cap B)=A$。

定义1.3.3 设A, B为任意集合，若$A \cap B = \varnothing$，则称A, B不相交。若集序列$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$对于任意的$A_i$与$A_j(i \neq j)$不相交，则称$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$是两两不相交的集序列。

1.3 集合的基本运算

A={5, 6, 7, 8, 9, 10}　B ={2, 3, 5, 7}

A\B ={6, 8, 9, 10}

(3)、差集的概念

定义1.11 设A, B为两个任意集合，由属于A而不属于B的全体元素组成的集合称为A与B的差集，记作A\B

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A 且 x \notin B\}.$$

定理1.3.6 设A, B, C为任意三个集合，则

13°. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$。

1.3　集合的基本运算

差运算不满足交换律

即一般情况下：$A \setminus B \neq B \setminus A$

$A=\{5,6\}$　　　$B=\{5\}$

$A \setminus B = \{6\}$　$B \setminus A = \varnothing$

差运算不满足结合律。

$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

$A=\{5,6\}$　　　$B=\{5\}$　　　$C=\{5\}$

$(A \setminus B) \setminus C = \{6\}$　　$A \setminus (B \setminus C) = \{5,6\}$。

定理1.3.7　设A,B为任意二个集合,则

$(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$。

1.3 集合的基本运算

$A=\{5,6,7,8,9,10\}$　$B=\{2,3,5,7\}$

$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=\{6,8,9,10,2,3\}$

(3)、对称差的概念

定义1.3.5 设A, B为任意两个集合，称$A\backslash B$与$B\backslash A$的并集称为A与B的对称差，记作$A\Delta B$(也记作$A\oplus B$)

$$
\begin{aligned}
A\Delta B&=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)\\
&=\{x\mid(x\in A\text{且}x\notin B)\text{或}(x\notin A\text{且}x\in B)\\
&=\{x\mid x\in A\cup B\text{且}x\notin A\cap B\}\\
&=(A\cup B)\backslash(A\cap B)。
\end{aligned}
$$

定理1.3.8 设A, B, C为任意三个集合，则

16°. $A \Delta B = B \Delta A$;

17°. $A \Delta A = \varnothing$;

18°. $A \Delta \varnothing = A$;

19°. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$;

20°. 交运算关于对称差满足分配律，即

$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$。

***