第六章：图论的基本概念

6.1 图论的产生与发展概述

6.2 基本定义

6.3 路、圈、连通图

6.4 补图、偶图

6.5 欧拉图

6.6 哈密顿图

6.7 图的邻接矩阵

6.8 带权图与最短路问题

6.4 补图、偶图

本节主要问题

一、补图和自补图的定义
二、补图的性质
三、偶图的定义
四、偶图的性质

一、补图和自补图的定义

定义6.4.1 设G=(V,E)是一个图,图

$$G^c=(V, P_2(V)\backslash E)$$

称为G的补图。如果G与其补G^c同构,则称G是自补图。

显然，两个顶点u与v在G^c中邻接,当且仅当u与v在G中不邻接。

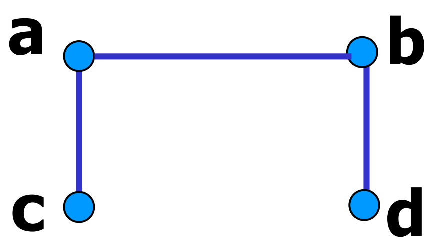


图6.4.1

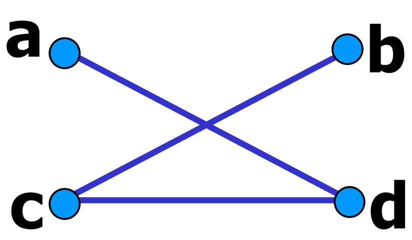


图6.4.1的补图

一、补图和自补图的定义

自补图　　　　n个顶点的自补图有多少条边?

如果图G与G^c同构,则称G是自补图。

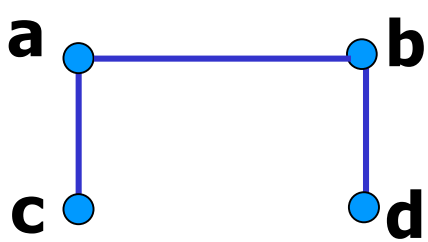


图6.4.1

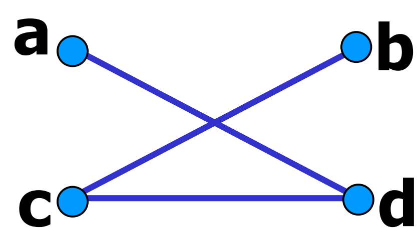


图6.4.1的补图

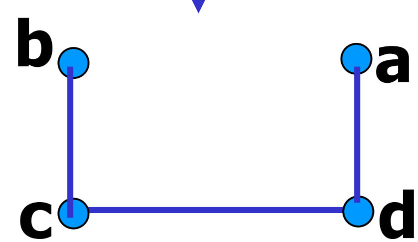


图6.4.1的补图

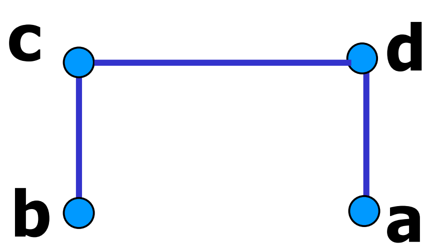


图6.4.1的补图

习 题

3(P216).证明：每一个自补图有4n或4n+1个顶点

证：

设$G_1=(V,E_1)$是一个自补图；

它的补图为$G_2=(V,E_2)$；

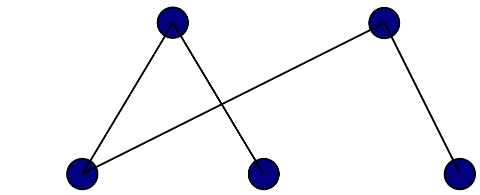
设$|V|=m$ $|E_1|+|E_2|=m(m-1)/2$

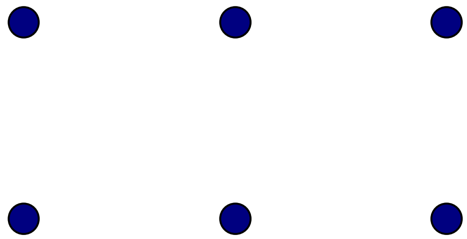
$|E_1|=m(m-1)/4$

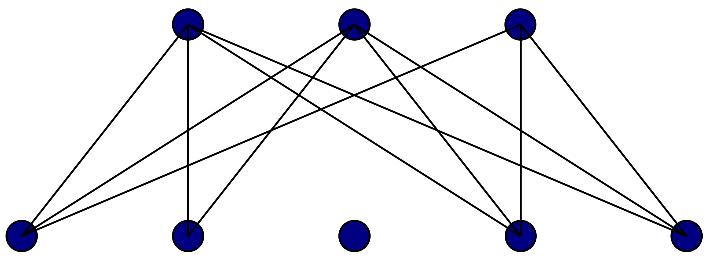
因此m能被4整除或m-1能被4整除

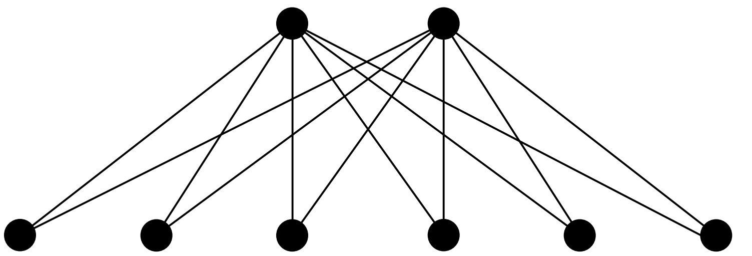
也就是m=4n或m=4n+1.

三、偶图的定义





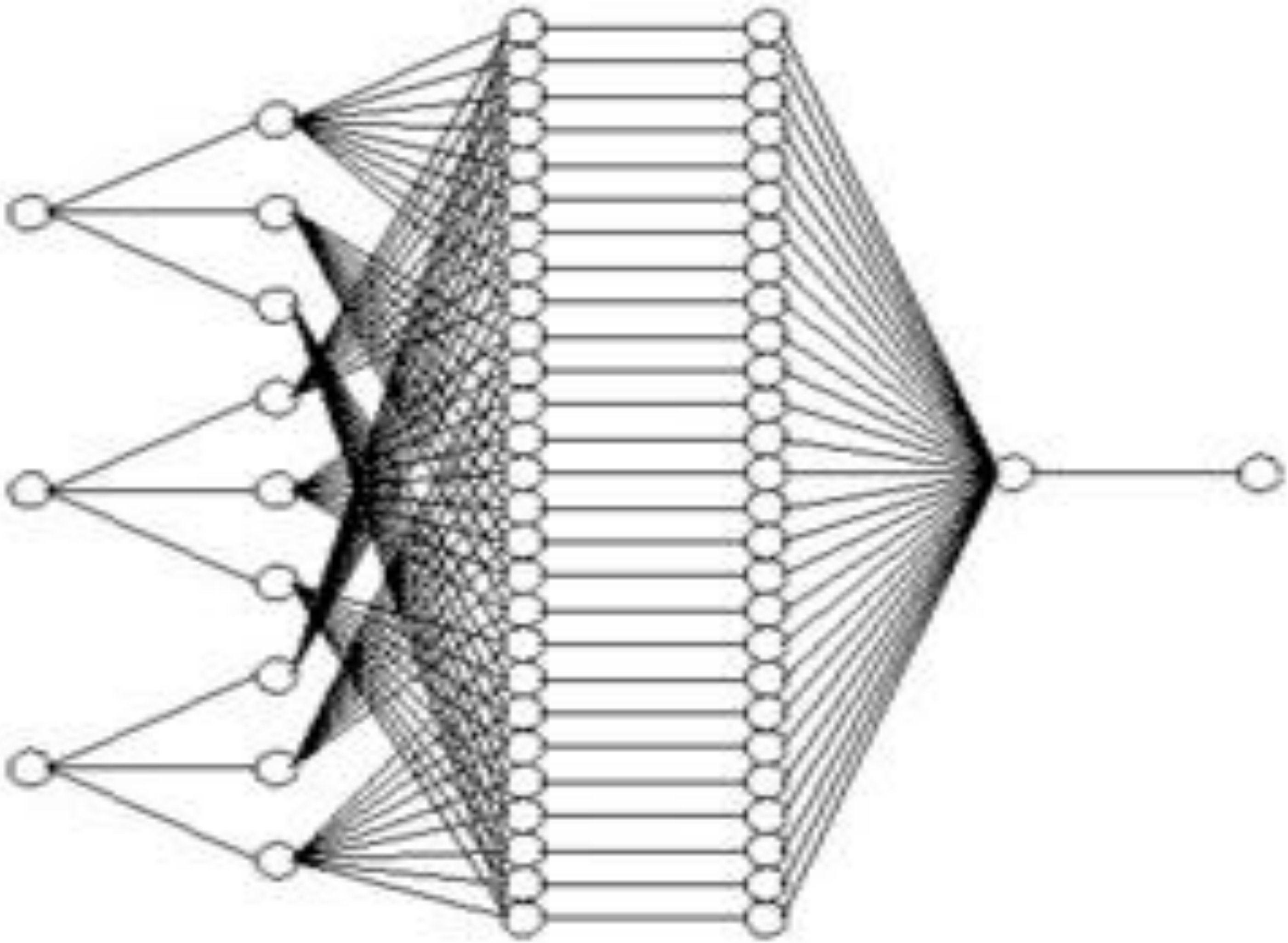




K26

偶图（二分图、二部图、双图、双色图）

三、偶图的定义



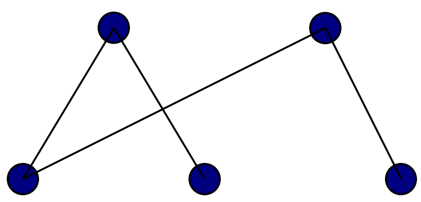
百度神经网络图册

三、偶图的定义

定义6.4.2 $G=(V,E)$称为偶图

如果G的顶点集V有一个二划分$\{V_1, V_2\}$；

使得G的任一条边的两个端点一个在V_1中，另一个在V_2中，这个偶图有时记为$((V_1, V_2), E)$。



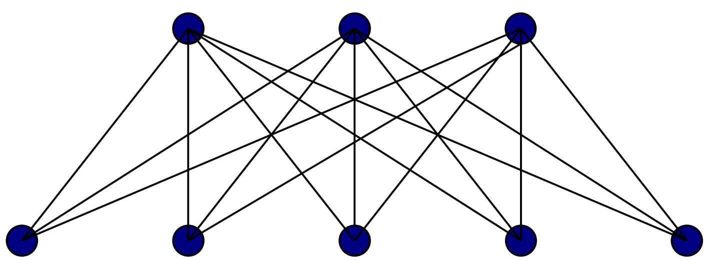
偶图（二分图、二部图、双图、双色图）

三、偶图的定义

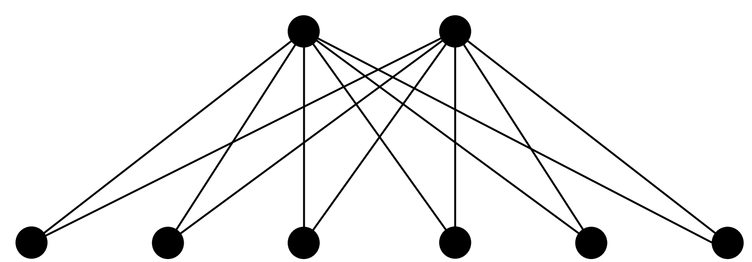
完全偶图

如果$\forall u \in V_1, v \in V_2$均有$uv \in E$, 则这个偶图称为完全偶图, 并记为$K(m, n)$或$K_{m, n}$, 其中$|V_1|=m, |V_2|=n$;

完全偶图有$m \times n$条边。



K35



K26

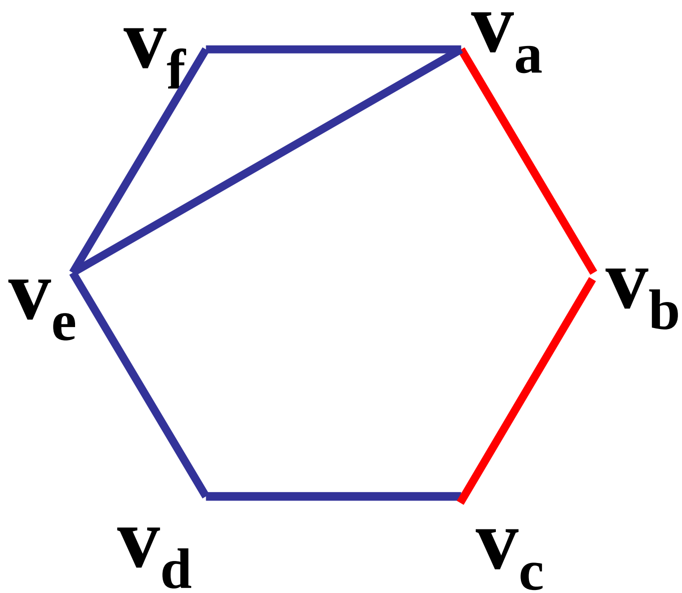
完全偶图

四、偶图的性质

两点间的距离

定义6.4.3 G=(V, E)是一个图, u和v是G的顶点。联结u和v的最短路的长称为u与v之间的距离, 并记为d(u, v);

如果u与v之间没有路, 则定义d(u, v)=∞。

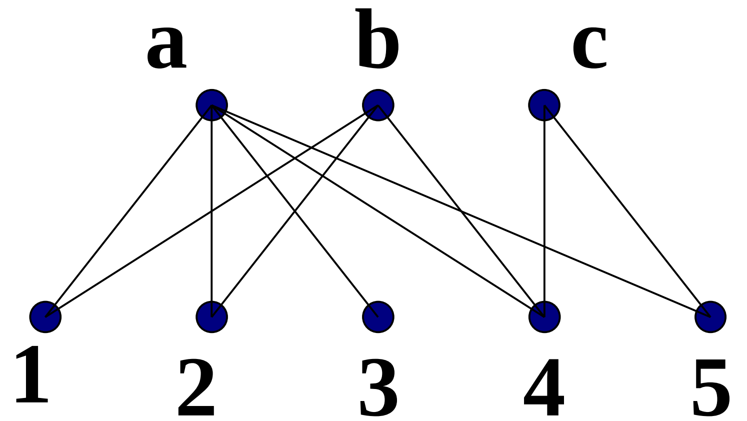


左图Va到Vc的距离是2

四、偶图的性质

定理6.4.2 图G为偶图的充分必要条件是它的所有圈都是偶数长.

[证]必要性:



偶图

分析圈a-1-b-2-a

四、偶图的性质

定理6.4.2 图G为偶图的充分必要条件是它的所有圈都是偶数长.

[证]必要性：

设$G=(V,E)$是偶图，则V有一个二划分$\{V_1,V_2\}$，使得对任一$uv\in E$有$u\in V_1$，$v\in V_2$；

设$v_1v_2...v_nv_1$是G的一个长为n的圈，不妨设$v_1\in V_1$；

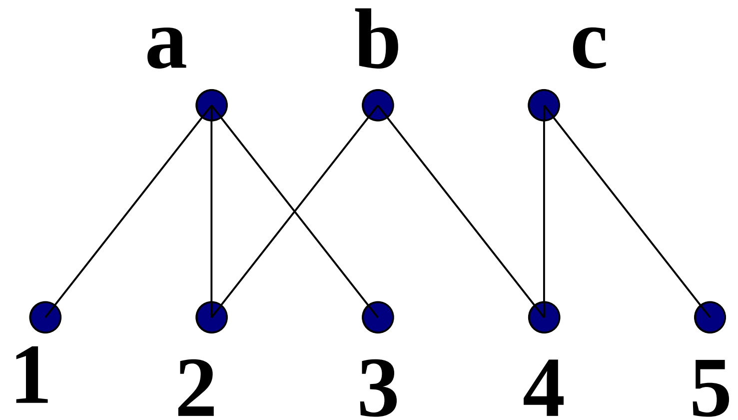
则这个圈$v_1v_2...v_nv_1$上奇数下标的顶点在V_1中，下标为偶数的顶点在V_2中；

每个下标为偶数的顶点恰关联圈上两条边，所以此圈的长n为偶数。

四、偶图的性质

定理6.4.2 图G为偶图的充分必要条件是它的所有圈都是偶数长.

[证]充分性:



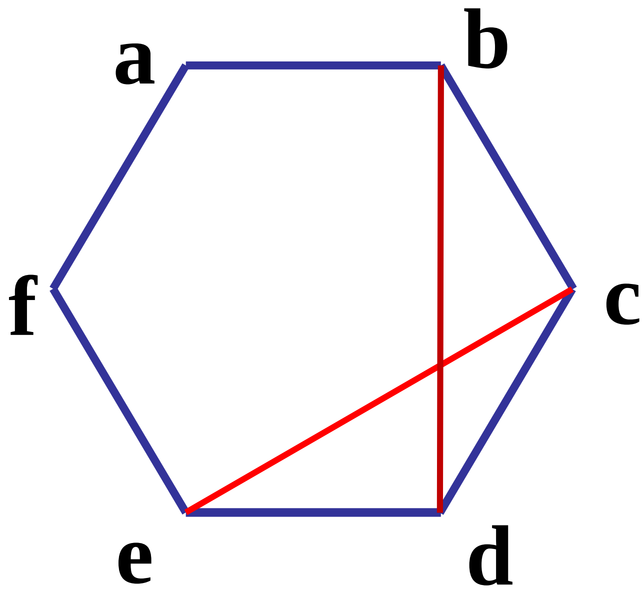
偶图

分析同组顶点间的距离和异组顶点之间的距离有什么特点。

四、偶图的性质

定理6.4.2 图G为偶图的充分必要条件是它的所有圈都是偶数长.

[证]充分性：



左图所有的圈都是偶数长

任选一顶点（例如a），与他的距离是奇数的分为一组，是偶数的分为一组。

分为两组：

{a, c, e}, {b, d, f}

只需证明同组中顶点间无边即可。

检查如果ce或bd间有边。

四、偶图的性质

定理6.4.2 图G为偶图的充分必要条件是它的所有圈都是偶数长.

[证]充分性:

设G的每个圈的长为偶数,证G是偶图;

为此,不妨设G是连通图,否则可分别考虑G的每个支,任取G的一个顶点u,定义集合

$V_1=\{v|v\in V, d(u, v)$是偶数$\}$,

$V_2=\{v|v\in V, d(u, v)$是奇数$\}$。

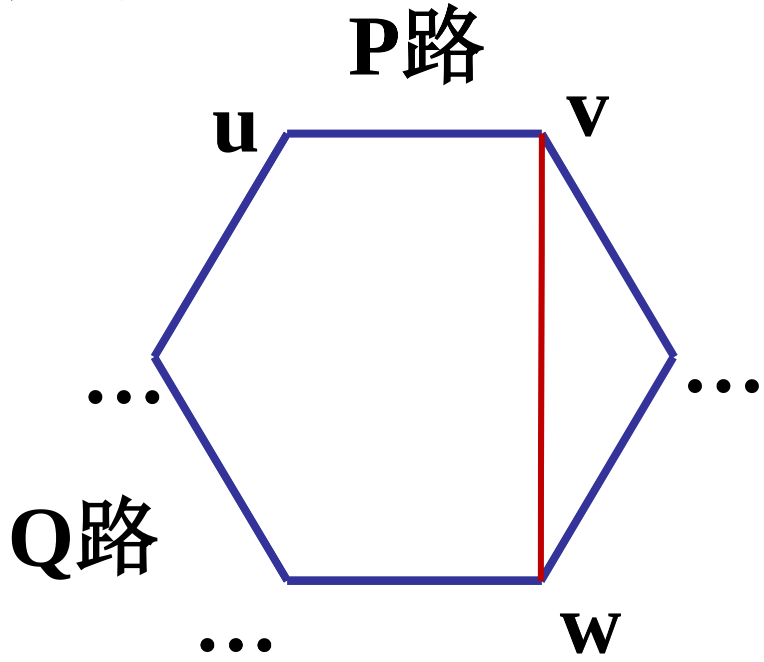
四、偶图的性质

则$\{V_1, V_2\}$是V的一个二划分；

假设w与v是V_2的两个不同顶点，并且$vw \in E$；

令P是u与v间的最短路，Q为u与w间的最短路；

如果除u点外P与Q不相交，则P、Q和vw形成一个长度为奇数的圈。



四、偶图的性质

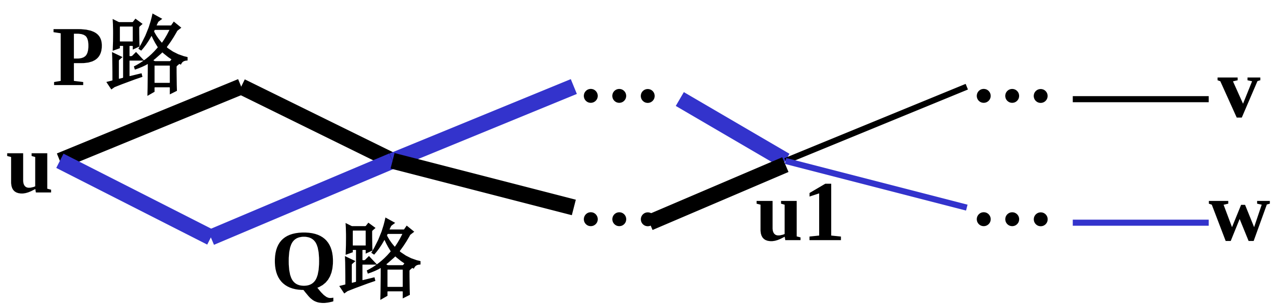
如果P和Q除u外还有相交点

u_1为从u开始，P与Q的最后的一个公共顶点；

因为P与Q是最短路，所以P和Q上的u-u_1段也是最短的u与u_1间路，故有相同的长；

而P与Q的长都是奇数，故P的u_1到v的段P_1与Q的u_1到w段Q_1有相同的奇偶性；

于是，边vw，Q_1，P_1构成G中一个奇数长的圈，这与假设矛盾，所以V_2的任两不同顶点v与w间无边；

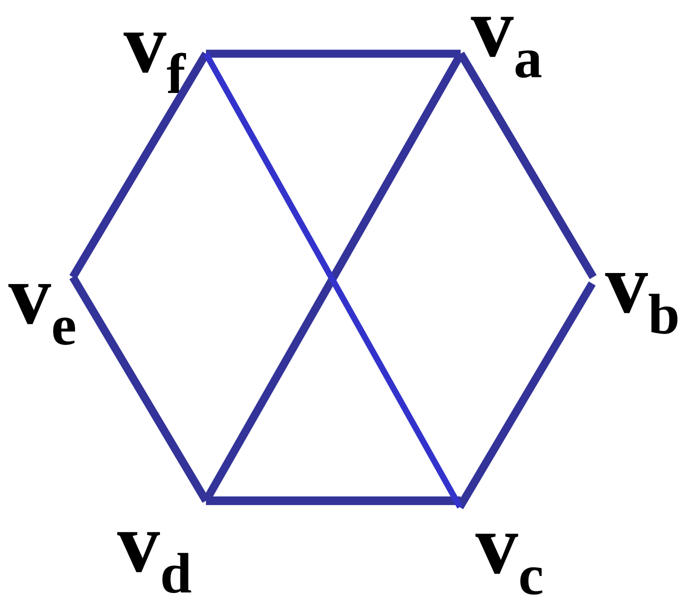


四、偶图的性质

同理可证V_1的任两顶点间也没边, 因此G是一个偶图。

定理6.4.2 图G为偶图的充分必要条件是它的所有圈都是偶数长.

讨论用计算机证明一个图是不是偶图以及分开偶图的顶点的方法。



四、偶图的性质

例6.4.2　图6.4.5是半张象棋盘，一只马从某点跳了n步后又跳回到这点，试证：n是偶数.

1	0	1	**0***	1	**0***	1	0	1	0
0	1	**0***	1	0	1	**0***	1	0	1
1	0	1	0	**1***	0	1	0	1	0
0	1	**0***	1	0	1	**0***	1	0	1
1	0	1	**0***	1	**0***	1	0	1	0

［证］ 如果按图上所示方法给棋盘的每个格点标上0或1，格点作为顶点。

按马的走法，正好是一个0和1(或1和0)构成的交错序列；走了n步又回到出发点，n是偶数。

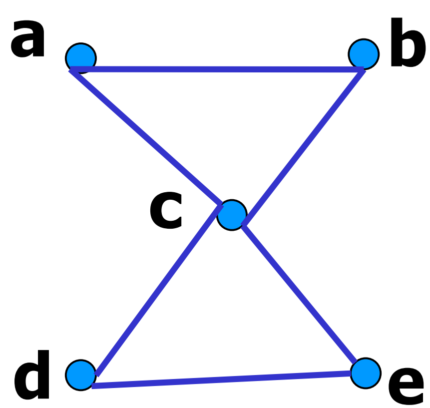
6.5 欧拉图

本节主要问题

一、欧拉图的定义
二、欧拉图的性质

一、欧拉图的定义

定义6.5.1 包含图的所有顶点和所有边的闭迹称为欧拉闭迹，存在一条欧拉闭迹的图称为欧拉图。

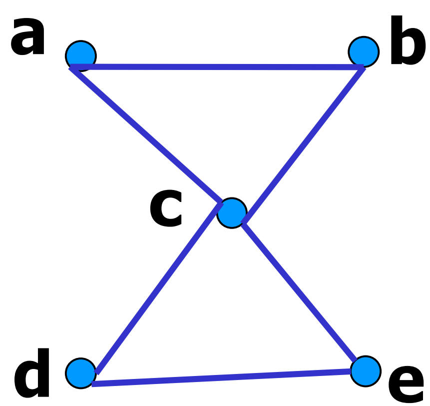


abcdeca是一条欧拉闭迹

二、欧拉图的性质

定理6.5.1　图G是欧拉图当且仅当G是连通的且每个顶点的度都是偶数。

必要性：分析欧拉闭迹



abcdeca是一条欧拉闭迹

在这条闭迹上，每个顶点每出现一次都需要2度。

二、欧拉图的性质

定理6.5.1　图G是欧拉图当且仅当G是连通的且每个顶点的度都是偶数。

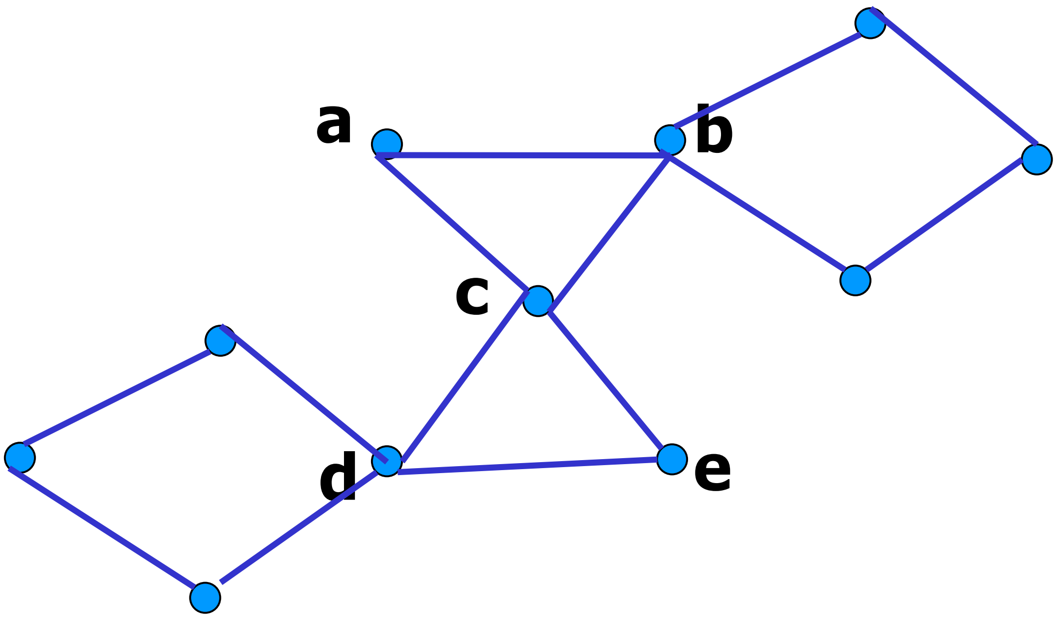
[证]⇒设G是一个欧拉图，则G中有一条包含G的所有顶点和所有边的闭迹，所以，G是连通的；

当沿着这条闭迹走时，每经过一个顶点，均涉及两条以前未走过的边，其一是沿着这条边进入这个顶点，而另一条边是顺着它离开这个顶点，由于这条迹是闭迹，所以G的每个顶点的度都是偶数。

二、欧拉图的性质

定理6.5.1　图G是欧拉图当且仅当G是连通的且每个顶点的度都是偶数。

充分性：



定理6.3.3 设G=(V,E)是至少有一个顶点不是弧立顶点的图，如果∀u∈V，degu为偶数，则G中有圈。

二、欧拉图的性质

证充分性：设G是连通的且每个顶点的度都是偶数；

由定理6.3.3知G中有一个圈Z_1；

如果Z_1包含了G的所有边，从而也就包含了G的所有顶点，因此Z_1是G的欧拉闭迹，故G是欧拉图；

否则Z_1不包含G的所有边；

这时从G中删去圈Z_1上的边，得到的图记为G_1；

显然，G_1的每个顶点的度均为偶数；并且至少有一个顶点的度数不为零。

二、欧拉图的性质

再用定理6.3.3, G_1中有圈Z_2, 从G_1中删去Z_2得到的图记为G_2, ……, 最后必得到一个图G_n, G_n中无边, 于是我们得到了G中的n个圈

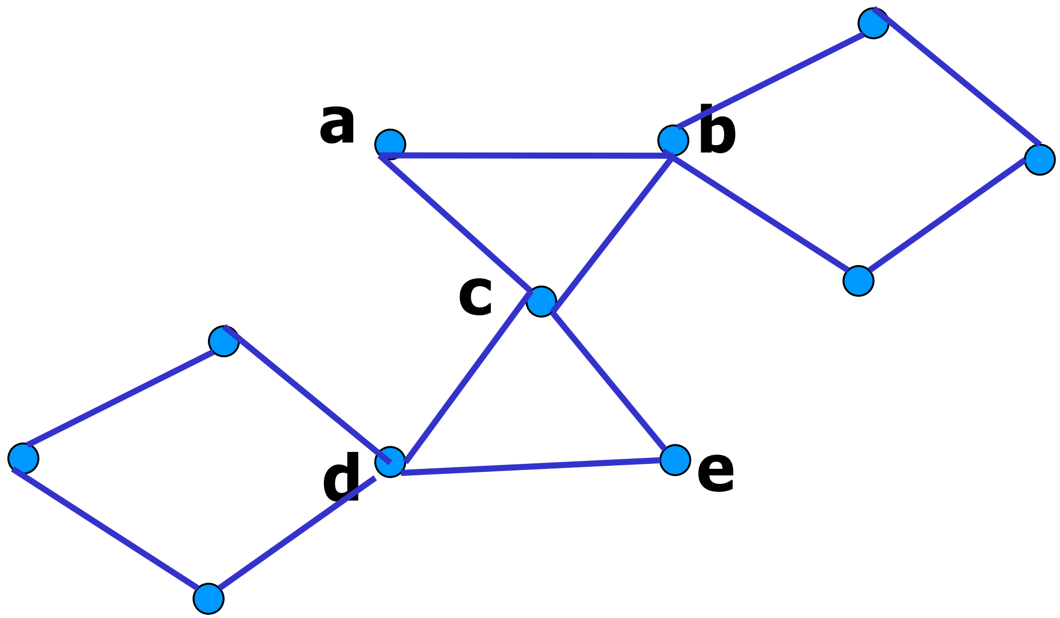
$Z_1, Z_2, ..., Z_n$;

他们是两两无公共边的, 由于G是连通的, 所以每个圈Z_i至少与其余的某个圈有公共顶点, 从而需要证明这些圈构成一个欧拉闭迹。

二、欧拉图的性质

定理6.5.1　图G是欧拉图当且仅当G是连通的且每个顶点的度都是偶数。

充分性：

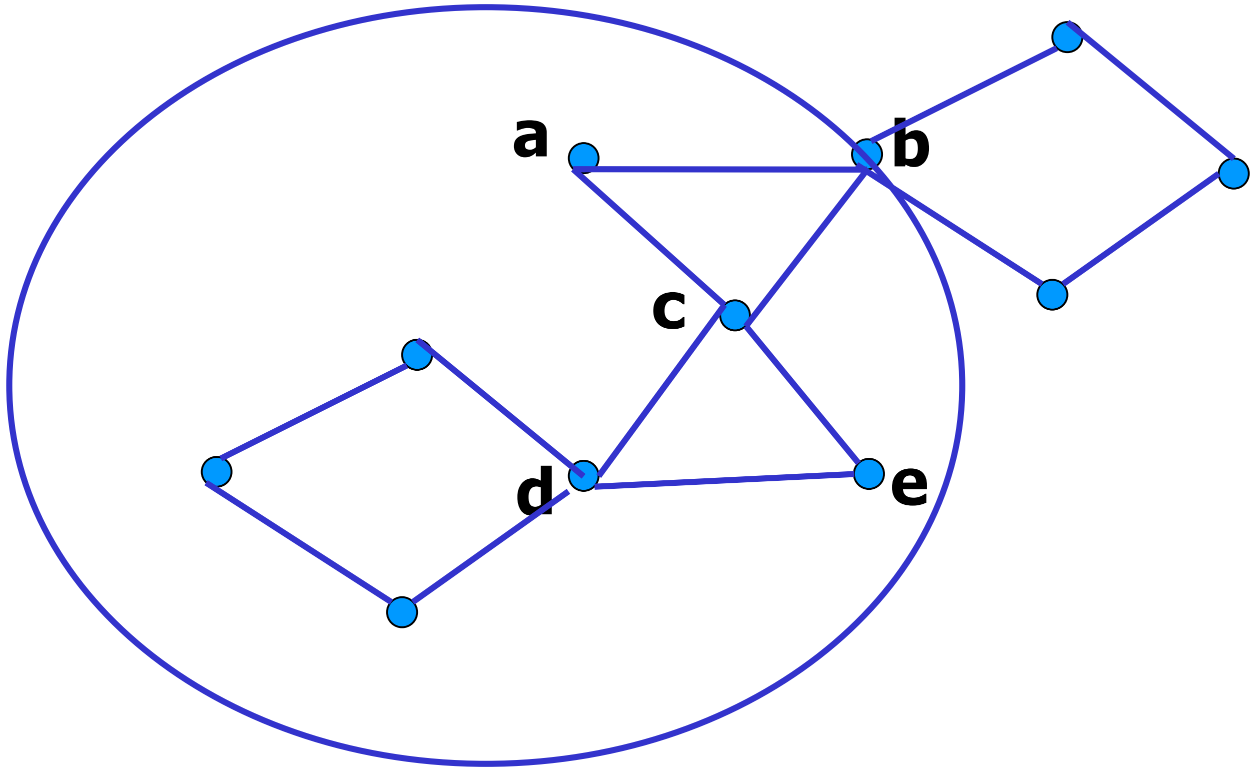


证明了度数都是偶数的连通图由n个圈构成

二、欧拉图的性质

对圈的个数n用归纳法，当n=1时，按圈的定义显然成立。

假设当n=k时成立，也就是k个边不重的有公共顶点的圈$z_1, z_2, \ldots, z_k$形成一个欧拉闭迹；

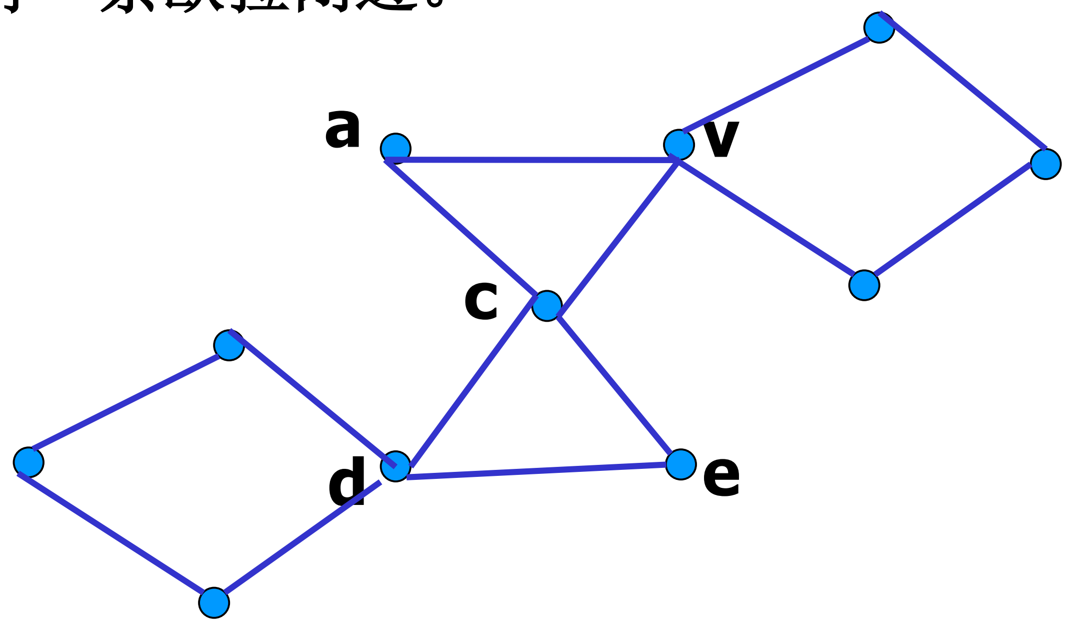


二、欧拉图的性质

当n=k+1，因为每个圈与其它圈有公共顶点，所以圈z_{k+1}必与某个圈Z_i有公共顶点，设这个公共顶点为v；

在圈z_{k+1}上从v开始走遍z_{k+1}，

按归纳假设前K个圈是一个欧拉闭迹，因此从v开始有一条欧拉闭迹。



二、欧拉图的性质

推论6.5.1　设G是一个连通图,则下列命题等价.

(1)G是一个欧拉图.

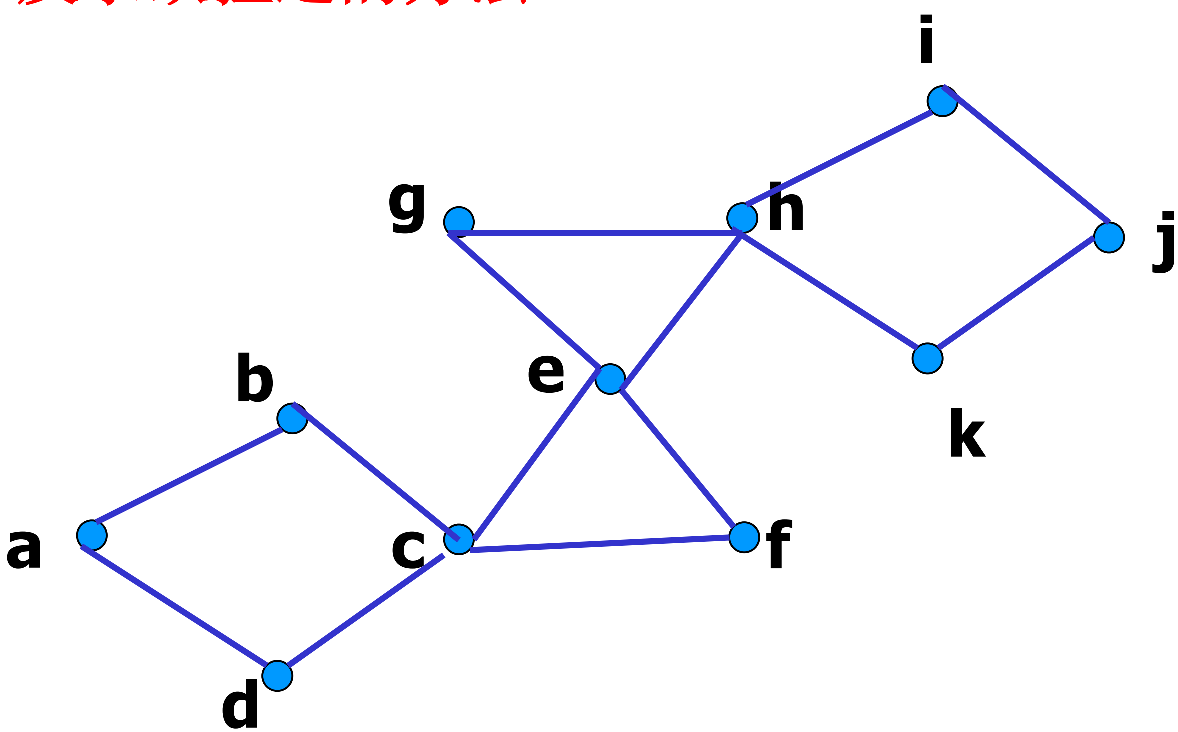
(2)G的每个顶点的度都是偶数.

(3)G的边集能划分成若干互相边不相交的圈。

四、偶图的性质

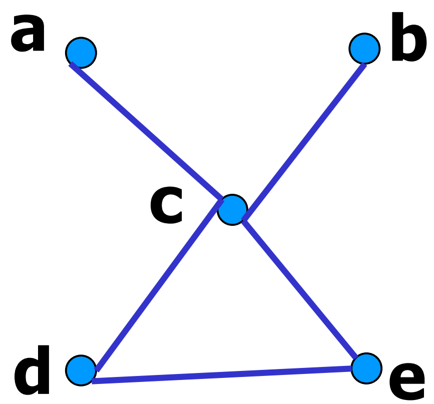
定理6.5.1　图G是欧拉图当且仅当G是连通的且每个顶点的度都是偶数。

讨论用计算机证明一个图是不是欧拉图以及求欧拉迹的方法。



二、欧拉图的性质

定义6.5.2　包含图的所有顶点和边的迹称为欧拉迹



acdecb是一条欧拉迹

推论6.5.2　图G有一条欧拉迹当且仅当G是连通的且有两个奇度顶点。

二、欧拉图的性质

一笔画问题

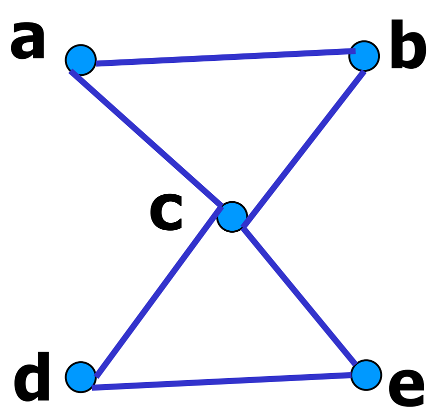
一个图能否笔不离开纸而一笔画成，使每条边只画一次且仅画一次；

欧拉给出的鉴别原则是只要看一下这个图的顶点的度数，如果恰有两个奇度顶点且图又是连通的，则这图能一笔画出，且应从一个奇度顶点开始画，最后终于另一个奇度顶点；

若每个顶点的度均为大于或等于2的偶数，图又是连通的，则这个图能一笔画出，并且最后还能回到出发点。

二、欧拉图的性质

定理6.5.2　设G是连通图，G恰有2n个奇度数顶点，n≥1. 则G的全部边可以排成n条开迹，而且至少有n条开迹。



a-b-c-d-e-c-a是一条欧拉闭迹

从**ab**处断开：

得一条开迹**b-c-d-e-c-a**

再从**de**处断开：

得两条开迹**b-c-d**和**e-c-a**

二、欧拉图的性质

定理6.5.2　设G是连通图，G恰有2n个奇度数顶点，n≥1．则G的全部边可以排成n条开迹，而且至少有n条开迹。

[证]G的2n个奇度顶点记为

$$v_1, u_1, v_2, u_2, \ldots, v_n, u_n.$$

在G中加入n条边$x_k=u_kv_k$, $k=1, 2, 3, \ldots, n$，则得到一个图G*，G*可能是多重图，G*是连通的且每个顶点的度都是偶数；

于是，由定理6.5.1，G*有欧拉闭迹Z；

在Z中去掉新加的边$x_1, x_2, \ldots, x_n$，得到了G的n条迹，于是，G的全部边被排成n条开迹。

二、欧拉图的性质

假设G的全部边能排成q条开迹，并且q<n；

则不是这q条开迹中任一条端点的顶点必是G的偶度顶点，位于端点的顶点有2q个，于是，G至多有2q个奇度顶点；

因此2n≤2q，即n≤q，这与假设q<n相矛盾，所以G的全部边至少排成n条开迹。

**

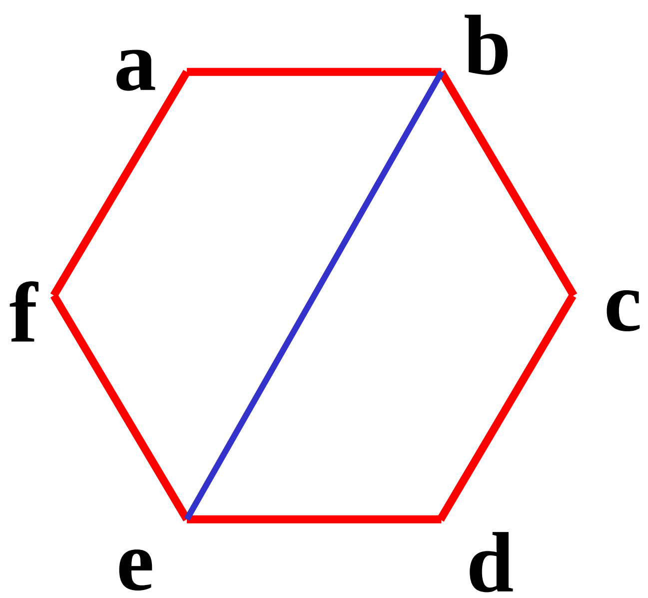
6.6 哈密顿图

本节主要问题

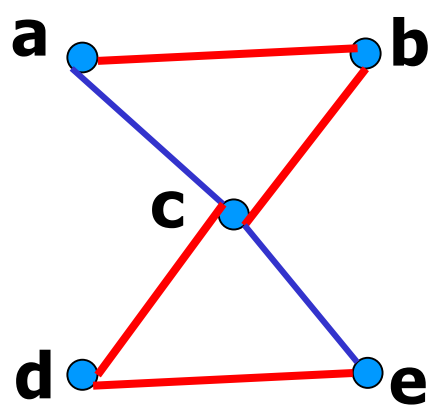
一、哈密顿图的定义
二、哈密顿图的性质

一、哈密顿图的定义

类似于确定一个图是否存在一条欧拉迹或欧拉闭迹的问题，哈密顿于1859年提出了确定一个图是否有一条生成路或生成圈的问题。



有生成圈。

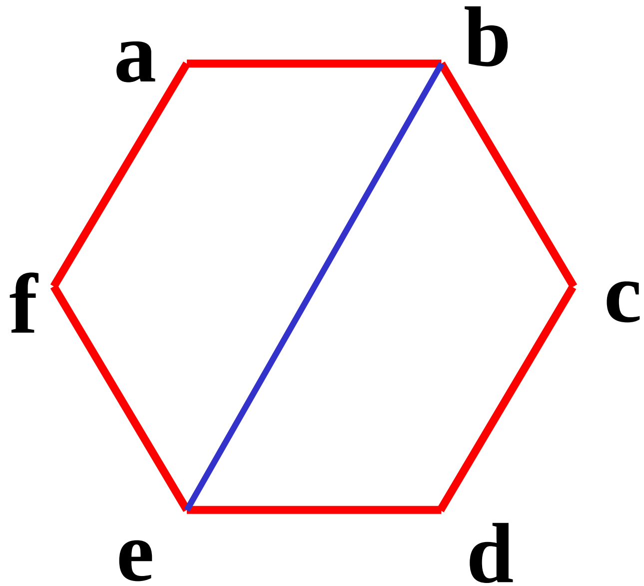


无生成圈。

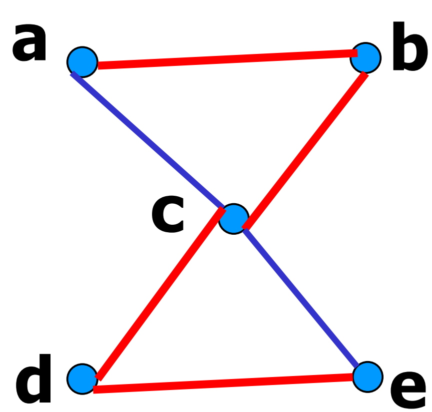
有生成路

一、哈密顿图的定义

定义6.6.1　图G的一条生成路称为G的哈密顿路，所谓G的生成路就是包含G的所有顶点的路。G的一个包含所有顶点的圈称为G的一个哈密顿圈，具有哈密顿圈的图称为哈密顿图。



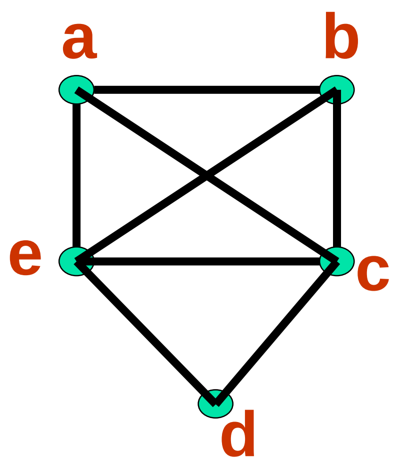
哈密顿图。



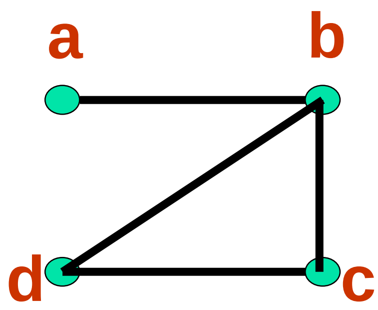
有哈密顿路

一、哈密顿图的定义

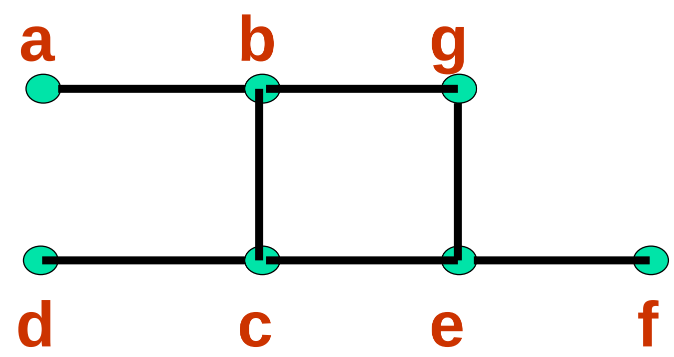
讨论下面的例子，是否存在哈密顿圈，路？



G_1



G_2



G_3

存在哈密顿圈

abcdea

不存在哈密顿圈

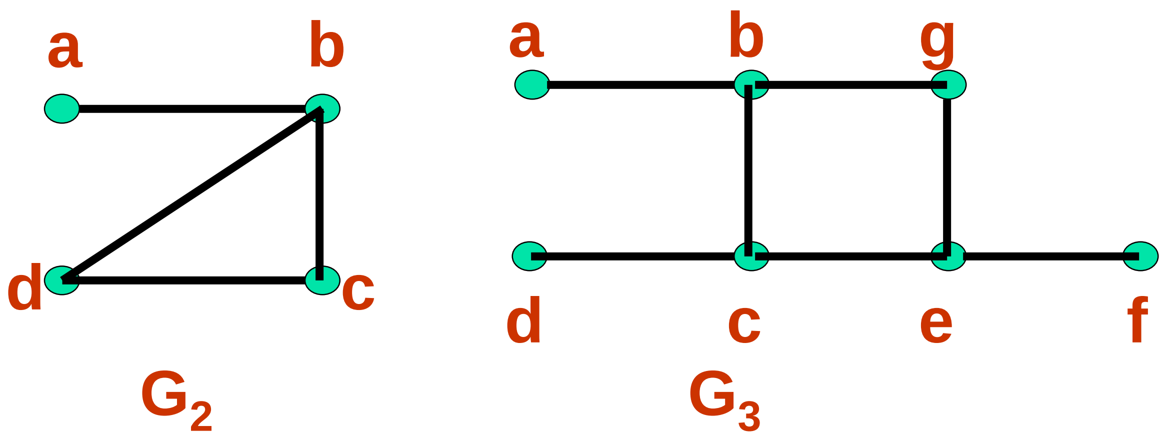
存在哈密顿路：

abcd

不存在哈密顿圈

不存在哈密顿路

一、哈密顿图的定义



分析结果：

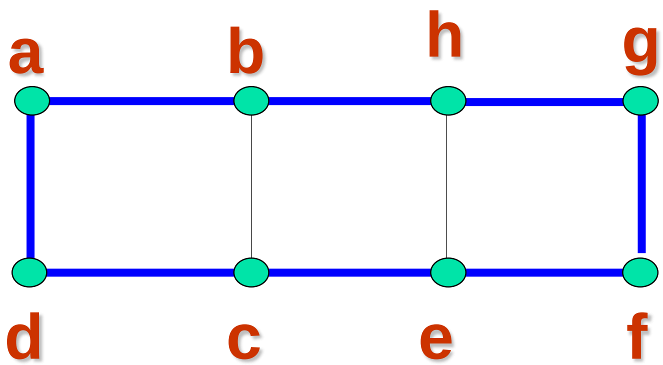
(1)哈密顿图是连通图且顶点度数不能小于2

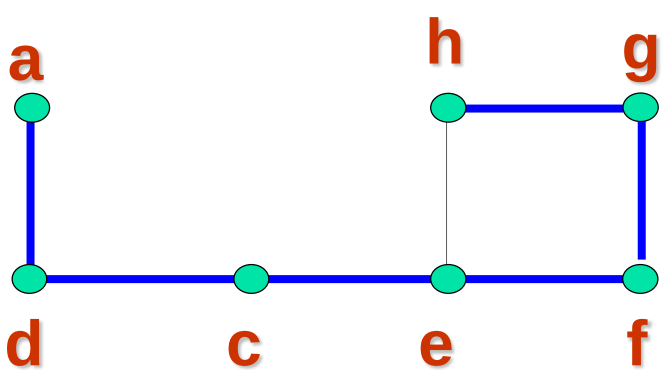
(2)有哈密顿路的图是连通的，1度顶点不能多于2个。

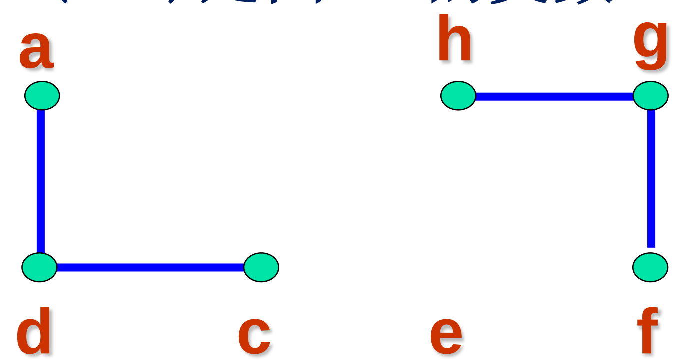
二、哈密顿图的性质

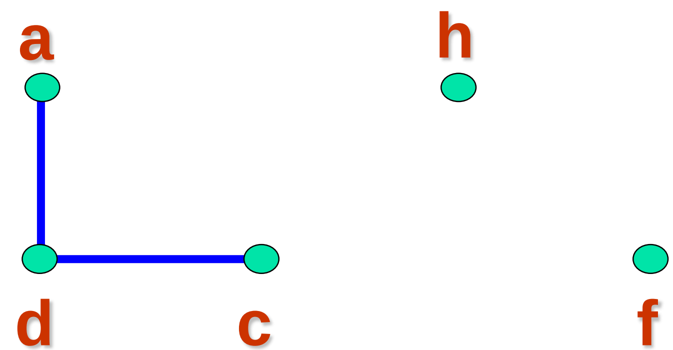
定理6.6.1　设G=(V,E)是哈密顿图，则对V的每个非空子集S，均有$\omega(G-S)\leqslant|S|$，其中G−S是从G中去掉S中那些顶点后所得到的图，而$\omega(G-S)$是图G−S的支数。

例如S={b, e, g}









$\omega(G-S)\leqslant|S|$

二、哈密顿图的性质

定理6.6.1　设G=(V,E)是哈密顿图,则对V的每个非空子集S,均有ω(G-S)≤|S|，其中G-S是从G中去掉S中那些顶点后所得到的图,而ω(G-S)是图G-S的支数。

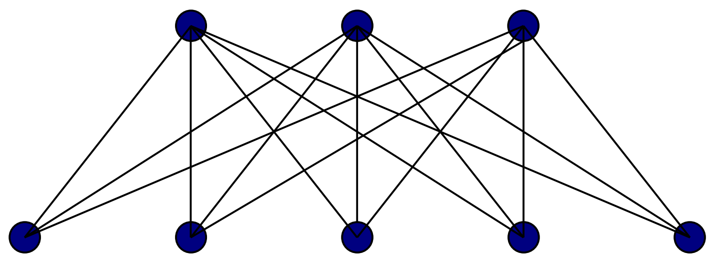
[证]　设H是G的哈密顿圈,

则对于V的每个非空子集S,均有ω(H-S)≤|S|;

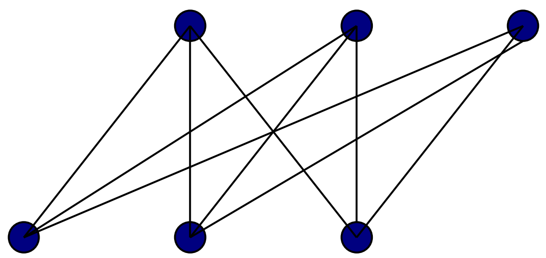
H-S是G-S的一个生成子图,所以ω(G-S)≤ω(H-S)≤|S| 。

习 题

4(P228).完全偶图$K_{m,n}$是哈密顿图的充分必要条件是什么？



K35



K33

是m=n

10(P228).证明具有奇数个顶点的偶图不是哈密顿图？

习 题

1(P216).若图G不是连通图,则G^C是连通图,

习 题

1(P216).若图G不是连通图，则G^C是连通图，

证明：

由于G不连通，假设G有两个分支，V1和V2，分别有m和n个顶点。

在G^C V1和V2任意两点间都有边；

对于任意顶点u和v，假如u和v在G中位于两个分支中，u和v在G^C中必有边相连；

否则假设都位于V1中，设w是V2中顶点， u和v在G^C中都与w邻接，因次u与v之间有路。