第九章：平面图与图的着色

9.1 平面图及其欧拉公式

9.2 非哈密顿平面图

9.3 库拉托斯基定理、对偶图

9.4 图的顶点着色

*9.5 图的边着色

9.4　图的顶点着色

本节主要内容

1、图的顶点着色的定义

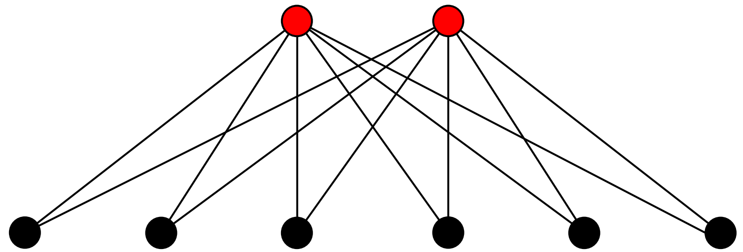
2、图的色数的定义

3、图的顶点着色的性质

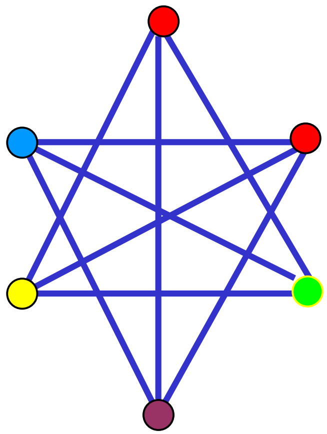
4、图的顶点着色的应用

1、图的顶点着色的定义

定义9.4.1 图的一种(顶点)着色是指对图的每个顶点指定一种颜色，使得没有两个邻接的顶点有同一颜色。

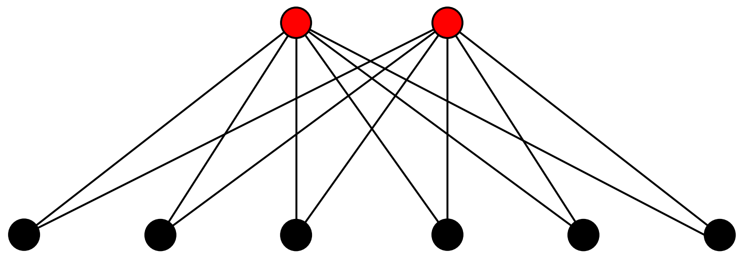


K26



图的一种顶点着色是对图的顶点的一种分组，着同一颜色的为一组，要求顶点间有边的不能分在一组。

1、图的顶点着色的定义



图G

几个关于顶点着色的术语。

（1）图G的一个n着色是用n种颜色对G的顶点着色；

（2）若图G=(V,E)的顶点已着色，则着同一颜色的那些顶点之集称为G的一个色组；

（3）同一色组内的各顶点不邻接，这样的顶点集合称为G的一个顶点独立集；

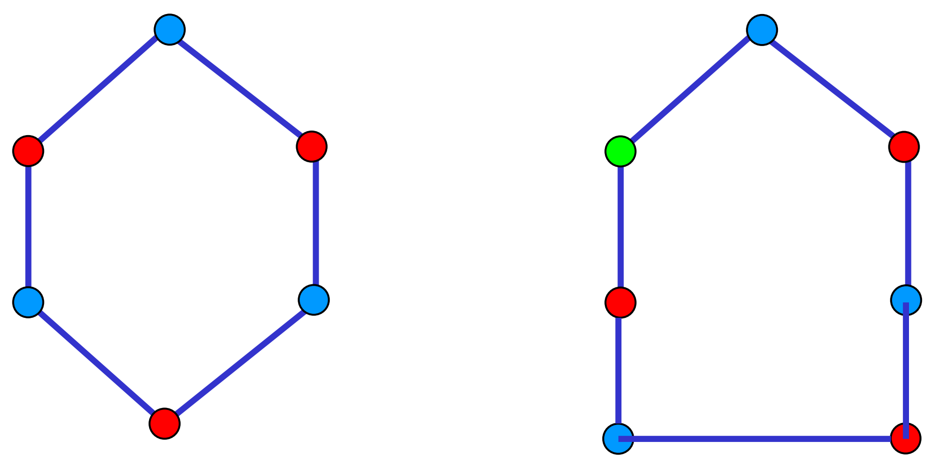
（4）如果G有一个n着色，则G的顶点集V被这种n着色划分为n个色组。

2、图的色数的定义

定义9.4.2 图G的色数是使G为n—着色的数的最小值，图G的色数记为$\chi(G)$，$\chi(G)\leq n$，则称G是n—可着色的，若$\chi(G)=n$，则称G是n色的。

若G是偶数个顶点的圈C_{2n}，则$\chi(C_{2n})=2$，

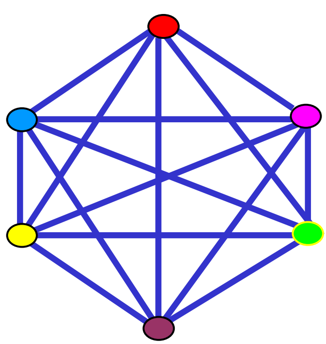
若G是奇数个顶点圈C_{2n+1}，则$\chi(C_{2n+1})=3$。



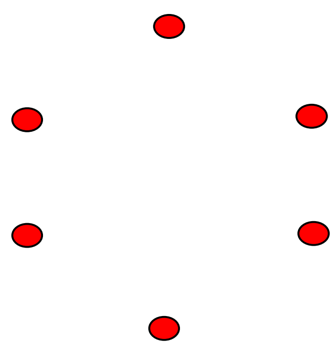
2、图的色数的定义

定义9.4.2 图G的色数是使G为n—着色的数的最小值，图G的色数记为$\chi(G)$，$\chi(G)\le n$，则称G是n—可着色的，若$\chi(G)=n$，则称G是n色的。

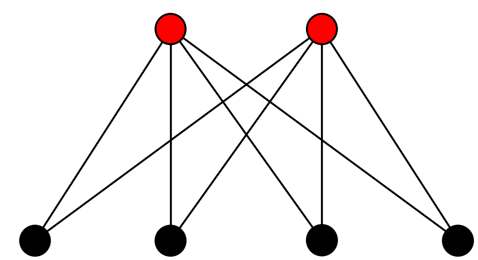
$\chi(K_p)=p$，　$\chi(K_p^c)=1$，　$\chi(K_{m,n})=2$，



K6



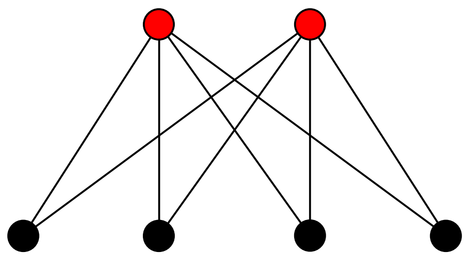
K_6^c



$K_{2,4}$

9.4 图的顶点着色

定理9.4.1 一个图是可双色的当且仅当它没有奇数长的圈。



偶图

一个图是可双色的当且仅当是偶图。

偶图的充分必要条件是它的圈的长度都是偶数。

9.4 图的顶点着色

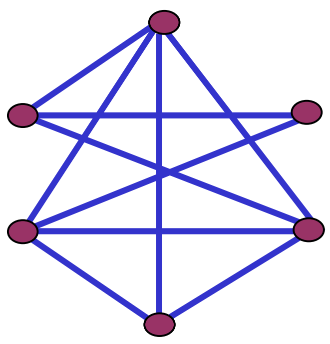
定理9.4.2 设$\Delta=\Delta(G)$为图G的顶点度的最大值，则G是$(\Delta+1)$—可着色的.

［证］ 对顶点数p用归纳法

当p=1成立，

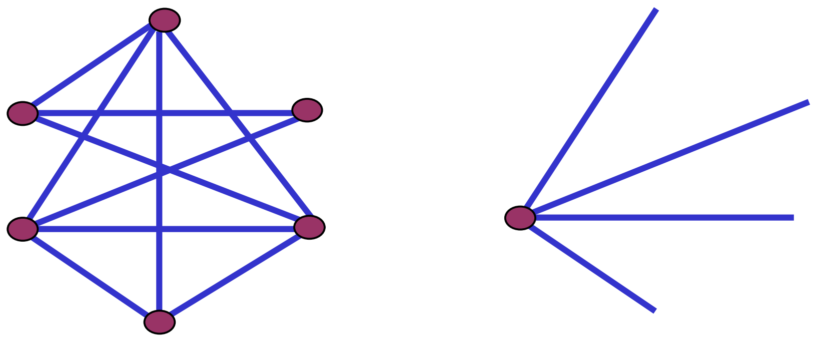
假设p=k时定理成立，$(\Delta+1)$可着色

今设G是一个有p=k+1个顶点的图，



图G

9.4　图的顶点着色



图G

从G中任意去掉一个顶点v，则G-v有k个顶点，

$\Delta(G-v) \leq \Delta(G)$

由归纳假设G-v是$(\Delta+1)$—可着色的，

但在G中与v邻接的顶点最多有Δ个，与v邻接的顶点最多用去Δ种颜色，剩下一种给顶点v着色即可。

9.4 图的顶点着色

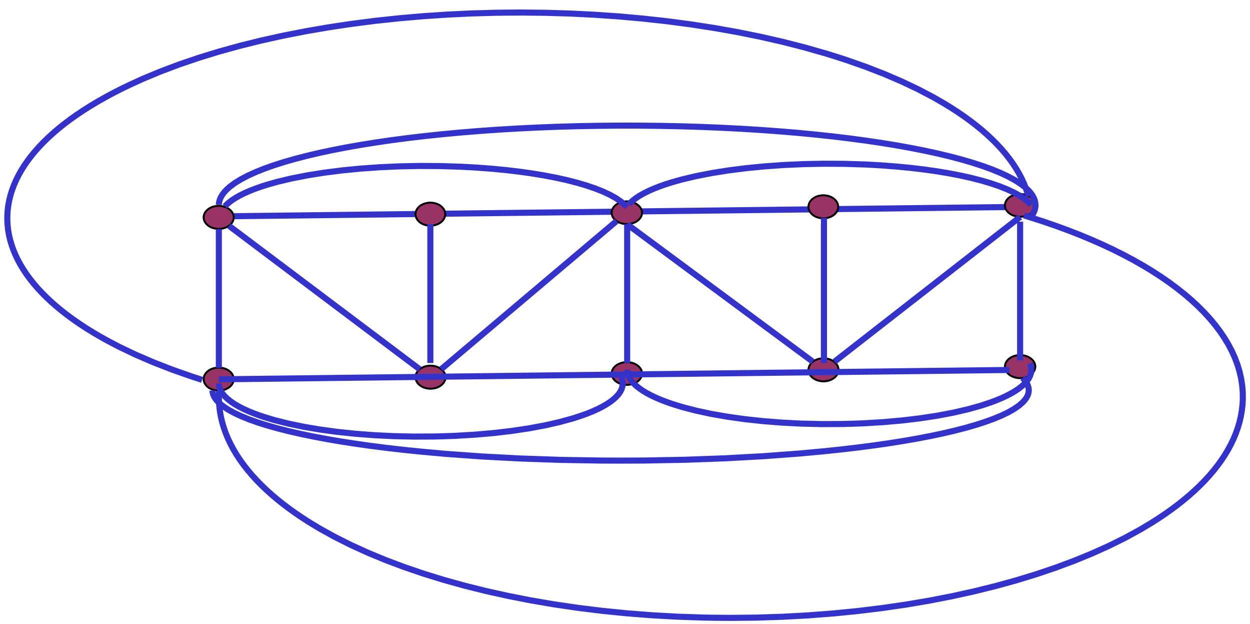
定理9.4.4 每个平面图都是6可着色的

［证］ 对平面图的顶点数p用归纳法；

如果顶点数小于7，显然是6—可着色的；

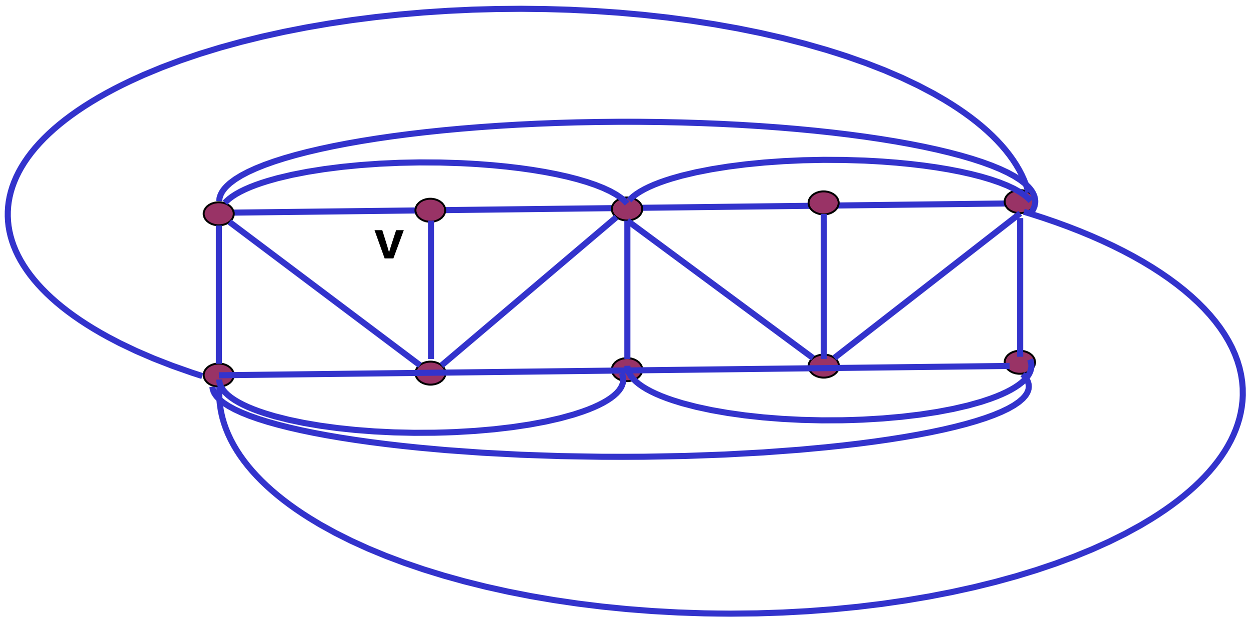
假设当p=k时的平面图是6—可着色的，只需证对有p=k+1时平面图也是6—可着色的即可；

设G是一个p=k+1的平面图；



平面图G

9.4 图的顶点着色



由推论9.1.6知G有顶点v, degv≤5,
G-v是一个p=k的平面图,
由归纳假设, G-v是6—可着色的, 与v邻接的顶点至多5个, 所以与v邻接的顶点着色时至多用了5种色, 用另一种未用的颜色对v着色即得G的一个6—着色, 因此, G是6可着色的。

9.4 图的顶点着色

定理9.4.5 每个可平面图是5—可着色的

[证]对可平面图的顶点数进行归纳证明；

当$p \leqslant 5$时，定理显然成立；

假设$p=k$的可平面图都是5—可着色的，证明$p=k+1$时可平面图也是5—可着色的；

设G是一个$p=k+1$的可平面图，由推论9.1.6知G中有一个顶点v使$\deg v \leqslant 5$，于是，G-v是一个有k个顶点的可平面图，由归纳假设，G-v是5可着色的；

9.4 图的顶点着色

1、如果degv≤4,则必有一种颜色,在G-v的一种5-着色时,对与v邻接的顶点着色中未用此色,

用此色对顶点v着色便得到G的5-着色;

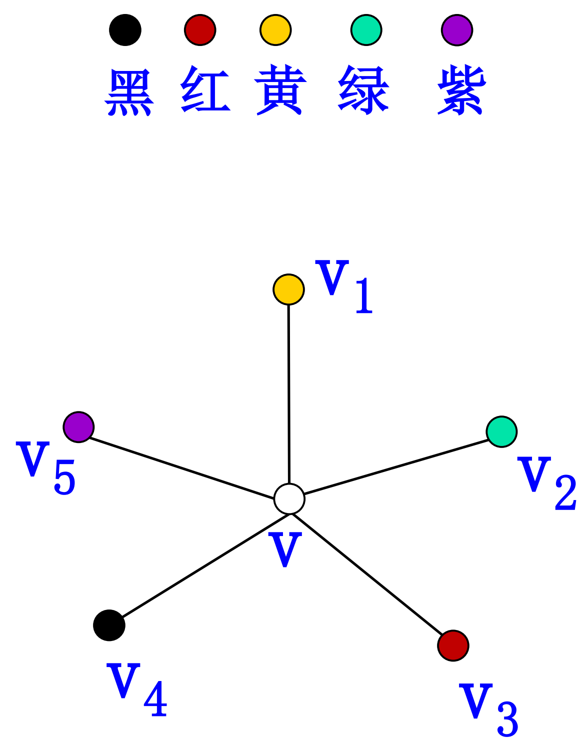
2、degv=5且对G-v的5-着色中,与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5分别着5种颜色c_1, c_2, c_3, c_4, c_5。

9.4 图的顶点着色

例如：如图所示，用5种颜色给图染色，现在顶点v周围5种颜色已经用完了。

证明思想是替换某个顶点的染色。

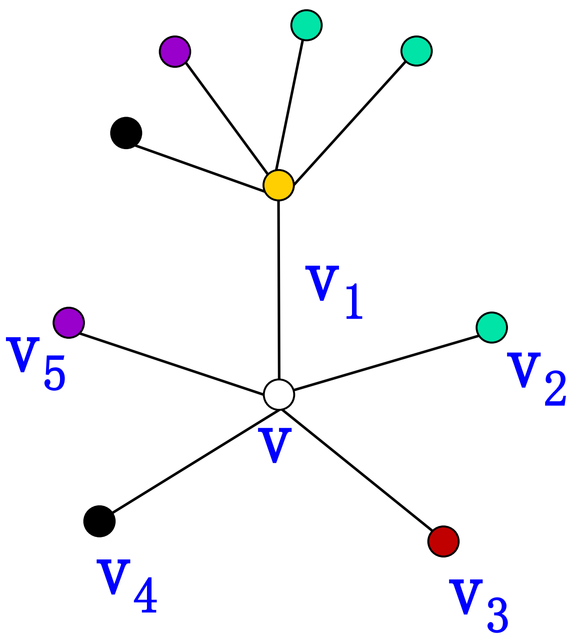
例如：如果能把v1的颜色黄色换成红色，则v染成黄色即可。



9.4 图的顶点着色

v1换成红色的过程中有以下三种情况：

(1) v1不与红色顶点相邻。v1直接换成红色。



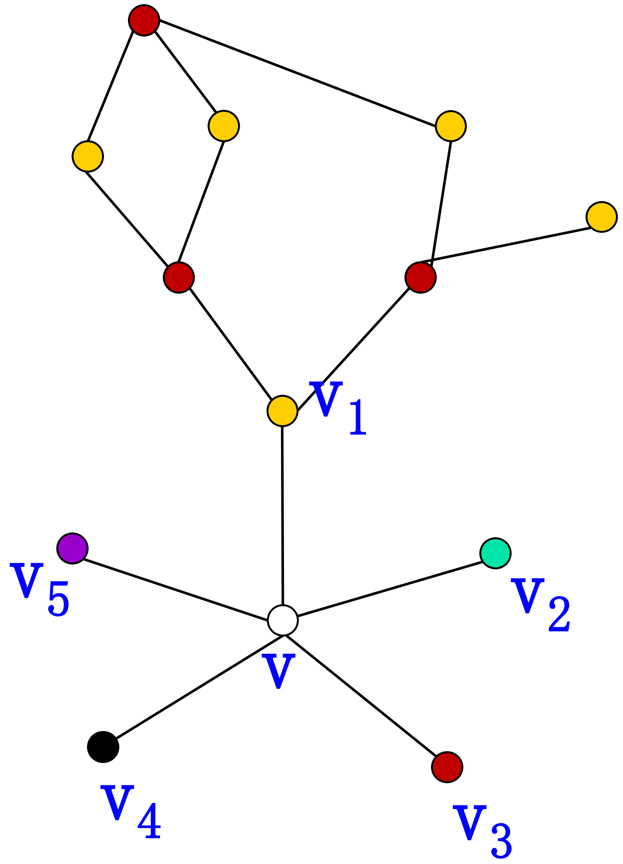
9.4 图的顶点着色

v1换成红色的过程中有以下三种情况：

(2) v1与红色顶点相邻，

如图所示这种情况。

把包含v1的红黄支中两种颜色互换。



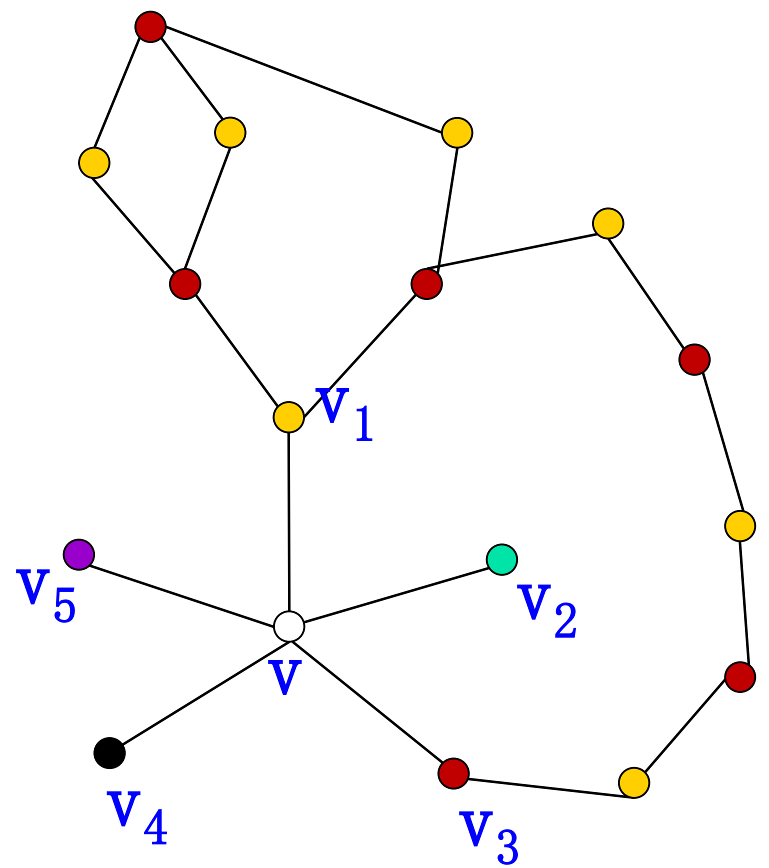
9.4 图的顶点着色

v1换成红色的过程中有以下三种情况：

(3) 如图所示：

包含v1的红黄支与包含v3的红黄支是连通的。

红黄色互换的时候v1换成了红色，v3又换成了黄色。



9.4 图的顶点着色

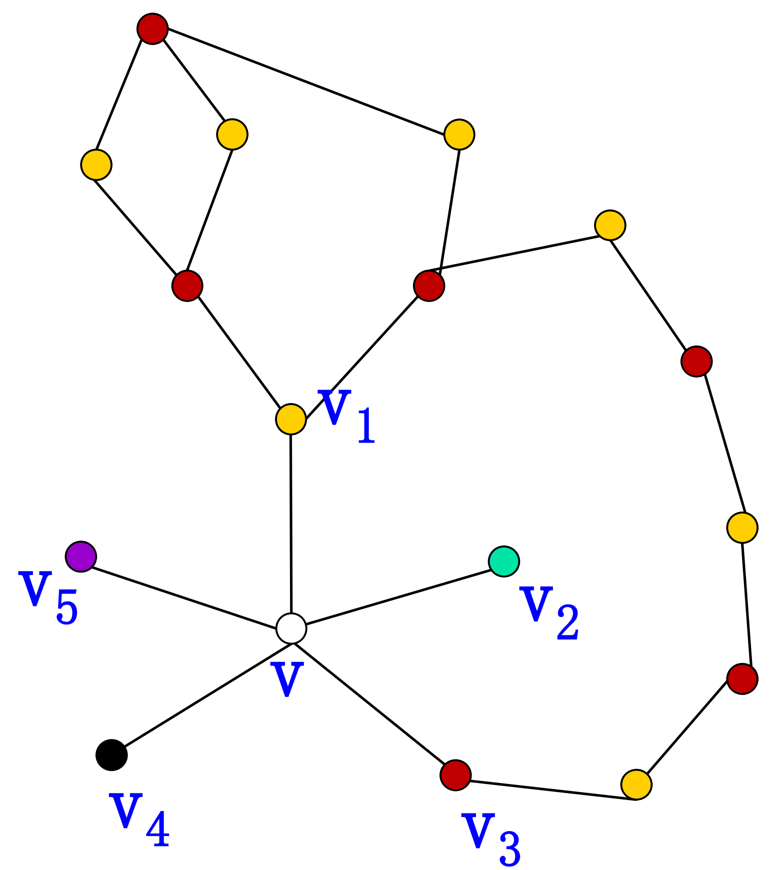
如果包含v1的红黄支与包含v3的红黄支是连通的。

如图所示：

则考虑v2的绿色和v4的黑色互换。

则不会出现红黄色互换的第三种情况？

这时又用到了平面的图的性质。



9.4 图的顶点着色

定理9.4.5 每个可平面图是5—可着色的

[证]对可平面图的顶点数进行归纳证明；

当$p \leqslant 5$时，定理显然成立；

假设$p=k$的可平面图都是5—可着色的，证明$p=k+1$时可平面图也是5—可着色的；

设G是一个$p=k+1$的可平面图，由推论9.1.6知G中有一个顶点v使$\deg v \leqslant 5$，于是，$G-v$是一个有k个顶点的可平面图，由归纳假设，$G-v$是5可着色的；

9.4 图的顶点着色

1、如果degv≤4,则必有一种颜色,在G-v的一种5-着色时,对与v邻接的顶点着色中未用此色,

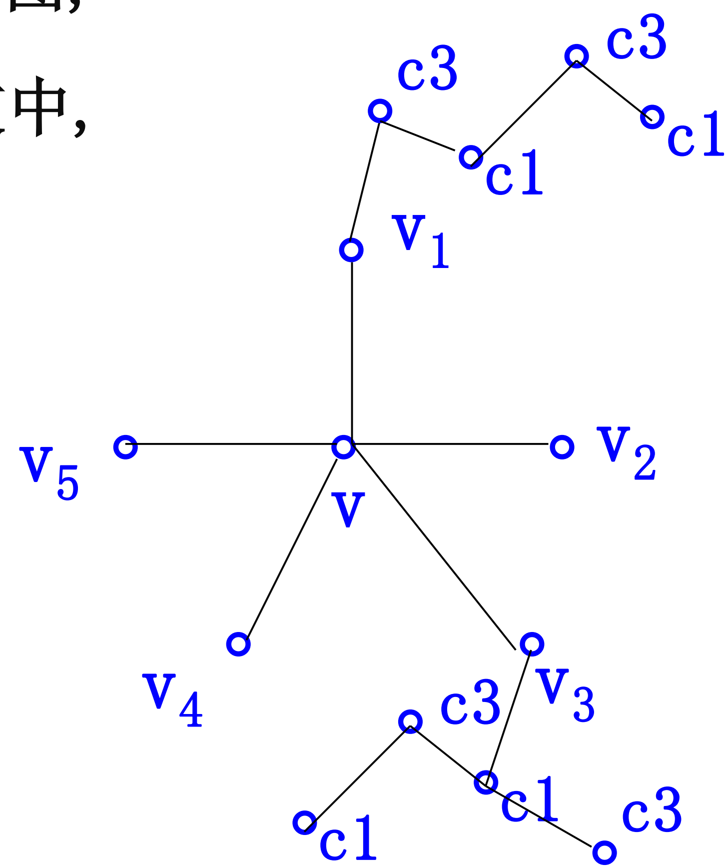
用此色对顶点v着色便得到G的5-着色;

2、degv=5且对G-v的5-着色中,与v邻接的5个顶点v_1, v_2, v_3, v_4, v_5分别着5种颜色c_1, c_2, c_3, c_4, c_5。

9.4 图的顶点着色

令G_{13}为G-v的一个子图，其顶点为着c_1色或c_3色的顶点之集V_{13}，G_{13}就是V_{13}导出的子图，

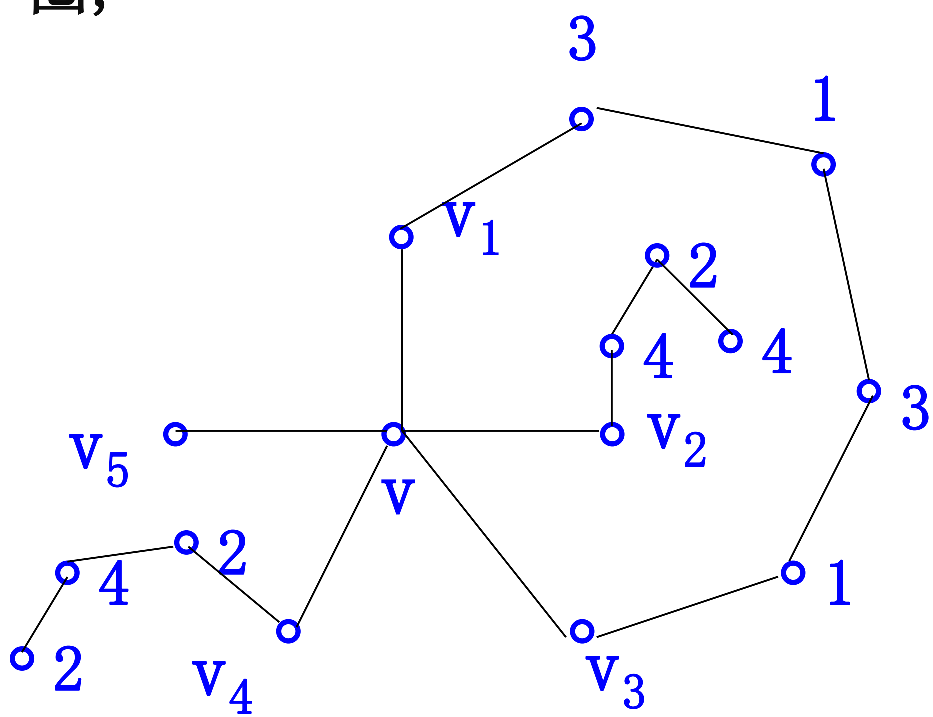
(1)若v_1和v_3在G_{13}的不同支中，则在含v_1的支中交换两种色，即原着c_1色顶点改着c_3色，原着c_3色的顶点改着c_1色，



然后用c_1给顶点v着色，于是得到G的一种5—着色。

9.4 图的顶点着色

2、若v_1和v_3在G_{13}的同一个支中，则在G_{13}中有一条从v_1到v_3的路，于是，在G中v_1vv_3与这条路合起来形成一个圈，



这个圈或把v_2圈在圈内或把v_4和v_5圈在内，

任一种情况下，不存在联结v_2和v_4的路且路上各顶点或着c_2或着c_4色，

9.4 图的顶点着色

若令G_{24}表示G-v的由着c_2或c_4色的顶点导出的子图，则v_2与v_4属于G_{24}的不同支里，

交换G_{24}的含v_2支中着c_2色顶点与着c_4色顶点的颜色，然后，用c_2色为v着色得到G的一个5着色。

9.4　图的顶点着色

4色猜想　每个可平面图是4—可着色的。

定理9.4.6　每个可平面图是4—可着色的。

9.4　图的顶点着色

8.(2 分)1.若图G 的色数（或顶点色数）为k，则 G 中至少有多少条边？

A. k(k-1)；

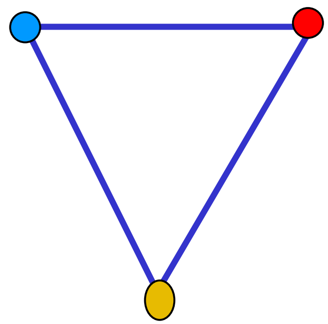
B. k(k+1)；

C. k(k+1)/2；

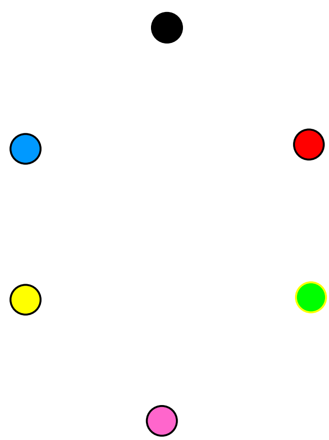
D. k(k-1)/2。

9.4　图的顶点着色

至少1条边



至少3条边



$6 \times 5/2$

9.4 图的顶点着色

8.(2 分)1.若图G 的色数（或顶点色数）为**k**，则**G** 中至少有多少条边？

A. k(k-1)；

B. k(k+1)；

C. k(k+1)/2；

D. k(k-1)/2。 √

任何两种颜色之间都应该有边，否则就可以用一种颜色代替。

图的顶点着色的应用

信号灯数设置问题：

例如：交通信号灯，十字路口要设置多少种颜色的信号灯，才能保证车辆按信号行走相互之间不影响。

（1）建模

（2）算法

图的顶点着色的应用

以如图这样一个简单十字路口为例。

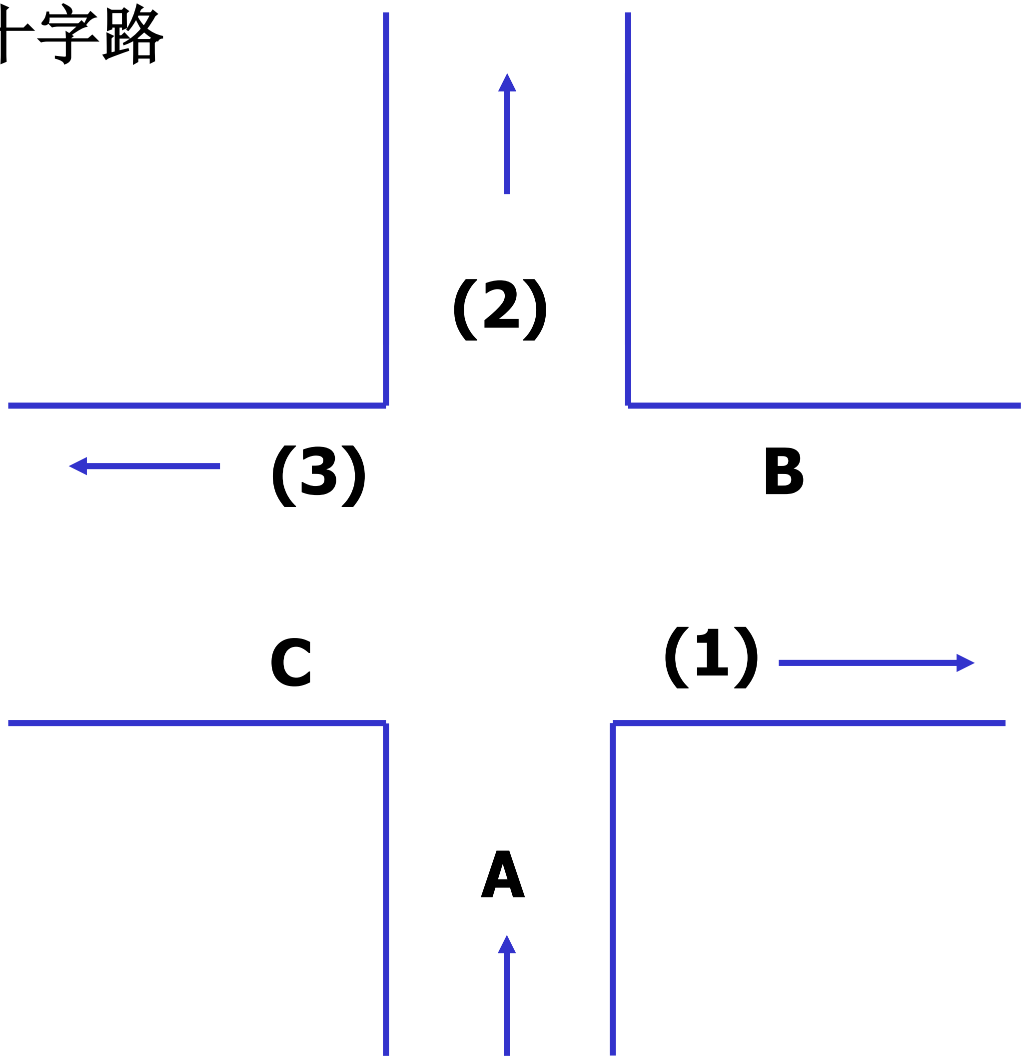
南北方向为单行线

东西方向为双向

其中A，B，C表示车辆来的方向；

(1)，(2)，(3)表示车辆去的方向。

两种符号合起来表示路线。



图的顶点着色的应用

例如：A(1)是一种路线。

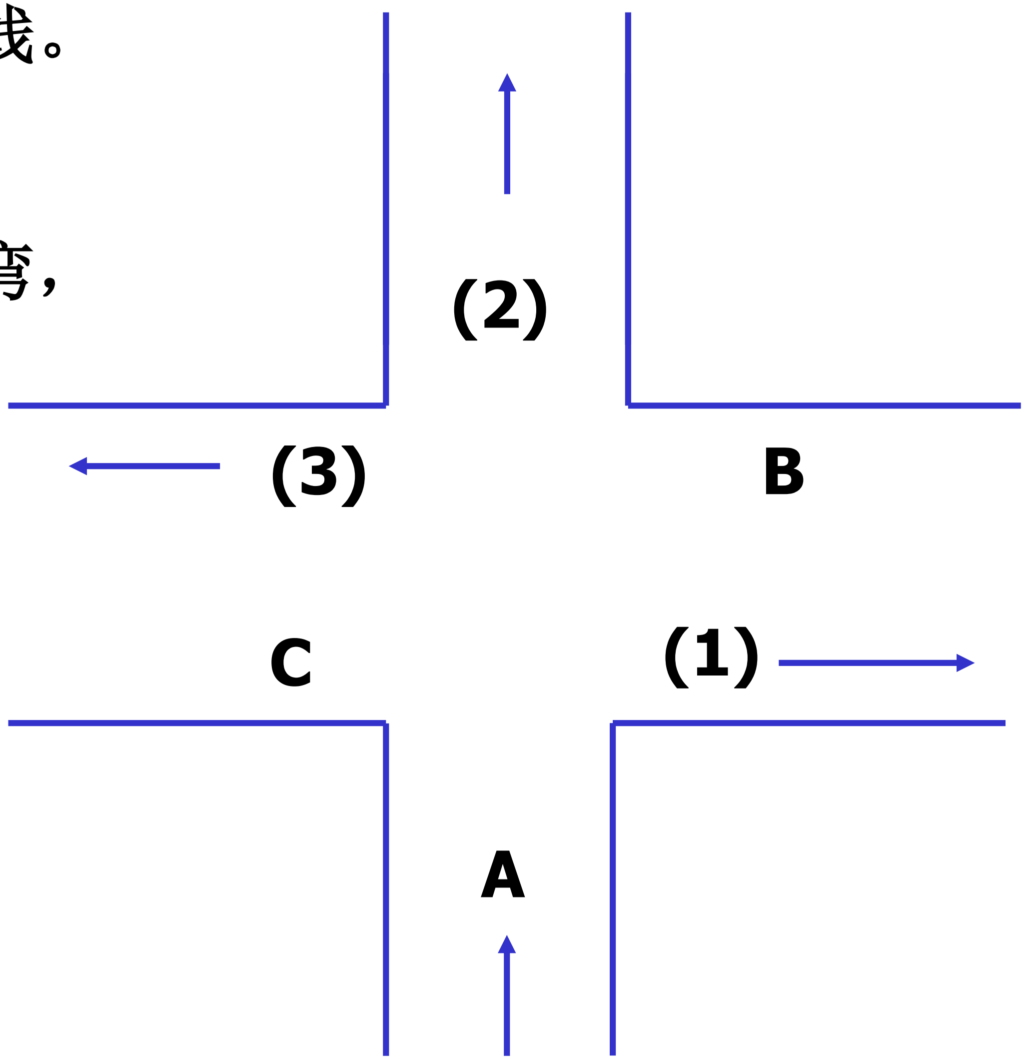
规定只能直行，左转弯，右转弯

总的路线有：

A(1)，A(2)，A(3)，

B(2)，B(3)

C(1)，C(2)



图的顶点着色的应用

路线共有7种：

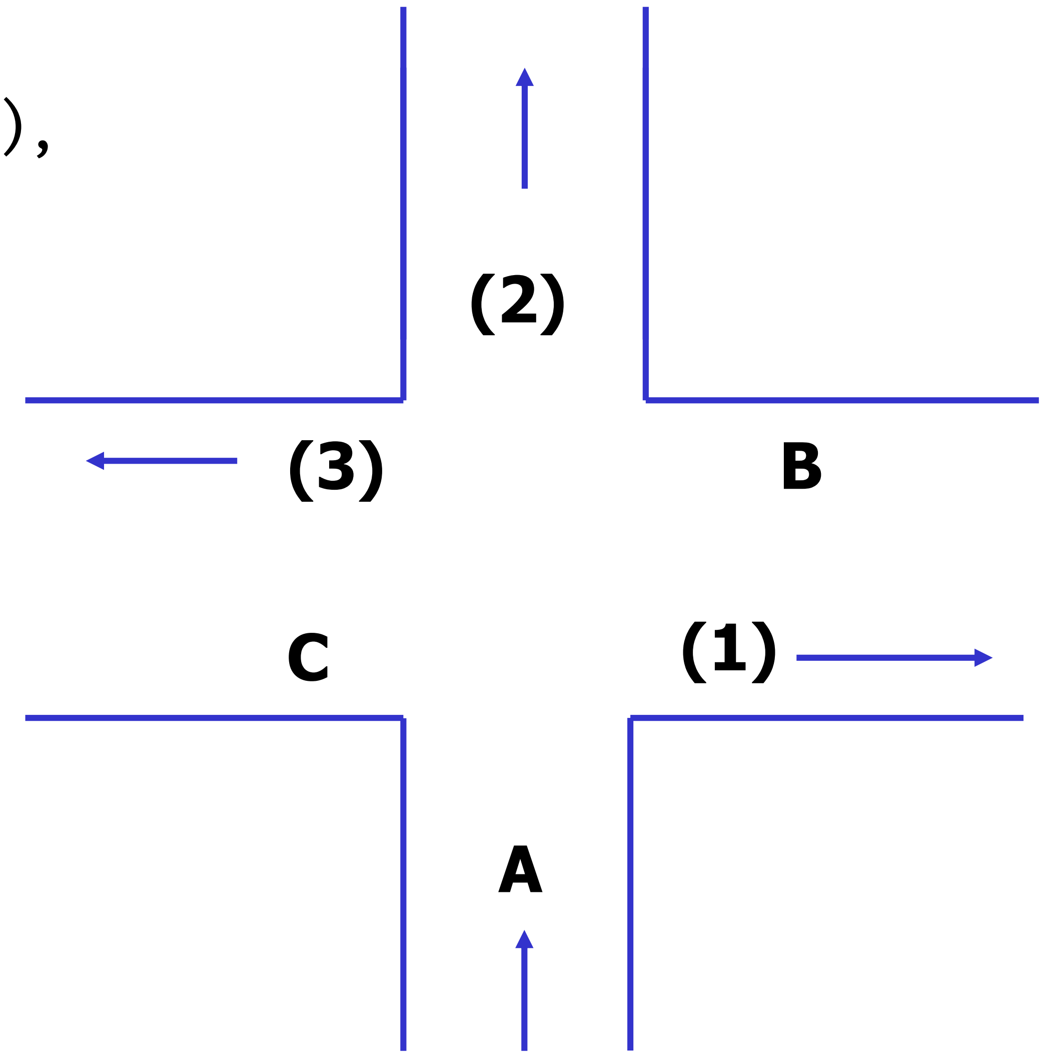
A(1),A(2),A(3),B(2),

B(3),C(1),C(2)

每条线路作为顶点，如果两条线路有可能造成冲突，就在两条线路之间连一条边。

例如：A(1)与C(1)冲突，就连边，

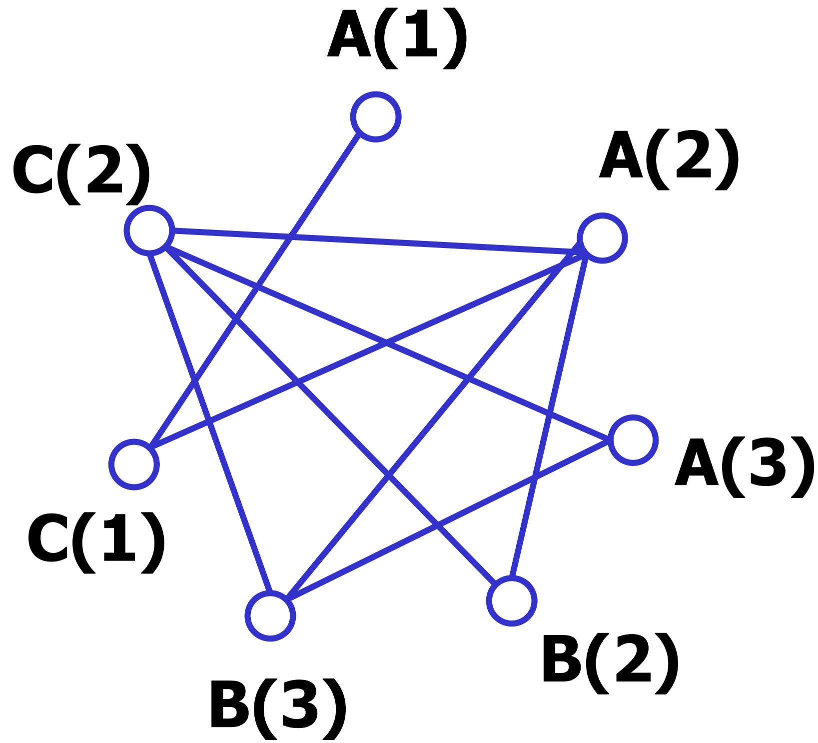
C(1)和B(2)不冲突，就不连边，这样就形成一个图。



图的顶点着色的应用

原问题化为图论的顶点染色问题。

有边相连的顶点间不能用同一种颜色染色。



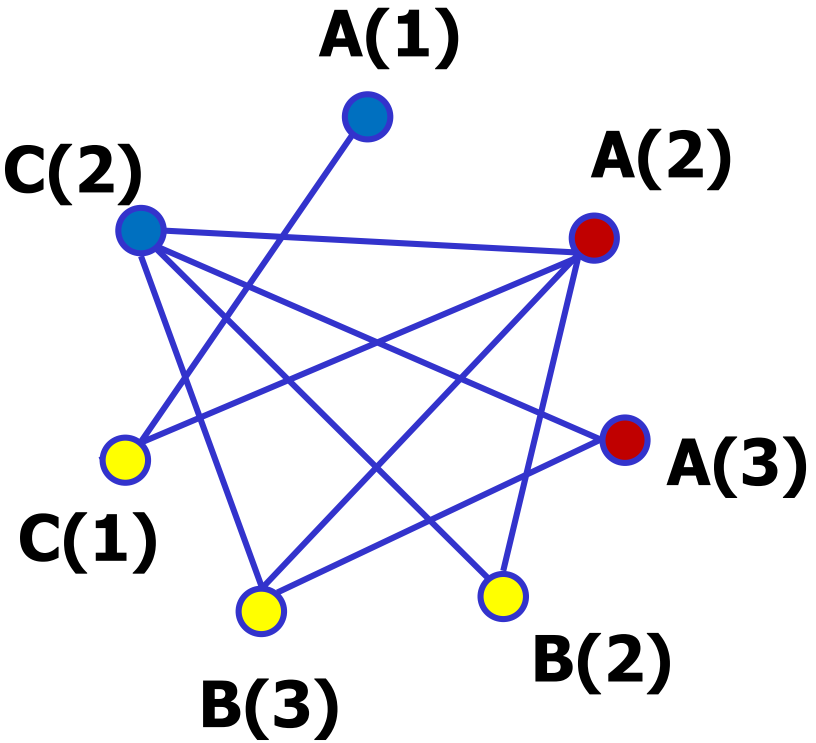
图G

图的顶点着色的应用

如图是一种染色方案。

用三种信号灯，例如：

红灯亮时，只允许A(2)和A(3)两种线路走，不会产生冲突。



图G

图的顶点着色的应用

图的染色问题是组合问题。

最优算法是穷举法：

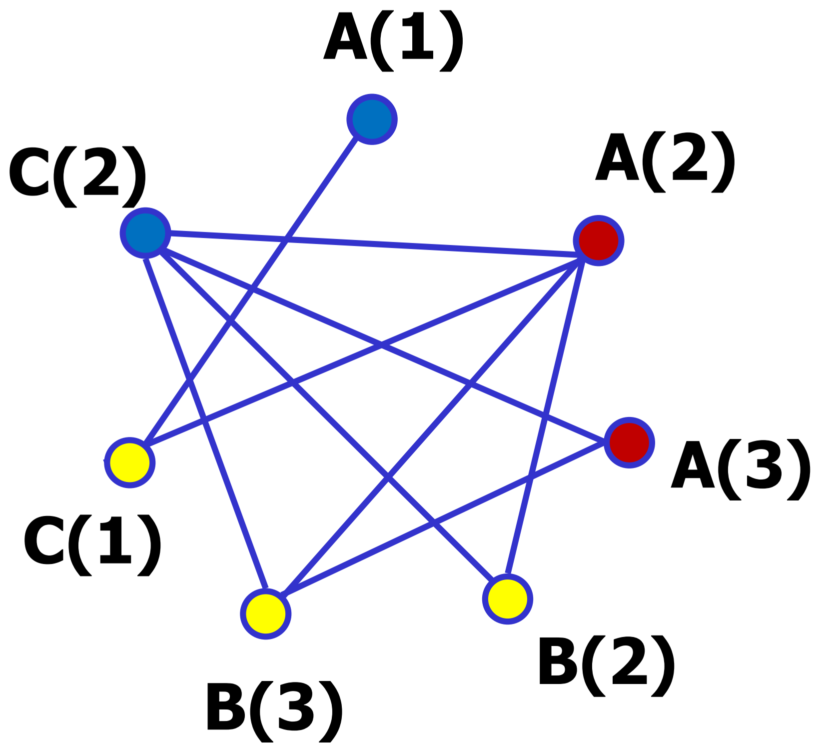
（1）先用一种颜色看看是否可以。

（2）一种颜色不行，再试用两种颜色是否行。

也就是顶点分成两组的可能性都列出来，看看有没有同组中顶点没有边的方案。

(3)试三种颜色。

………



图G

图的顶点着色的应用

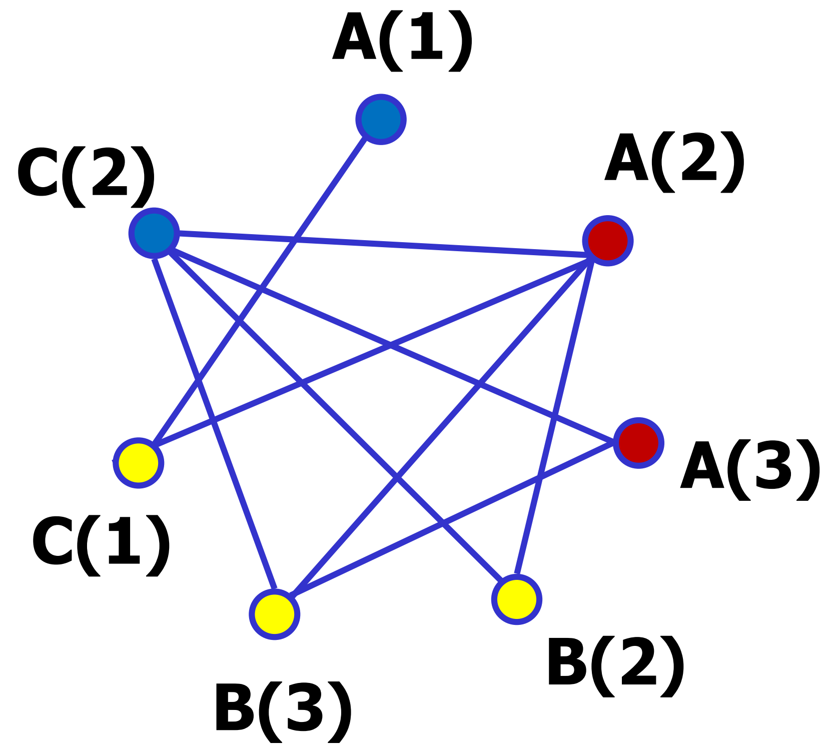
图的染色问题的最优解的时间复杂性很大。

是指数级的。

与汉诺塔问题的时间复杂性是一样的。

一般当顶点数比较大时都采用启发式算法：

下面介绍贪心算法。



图G

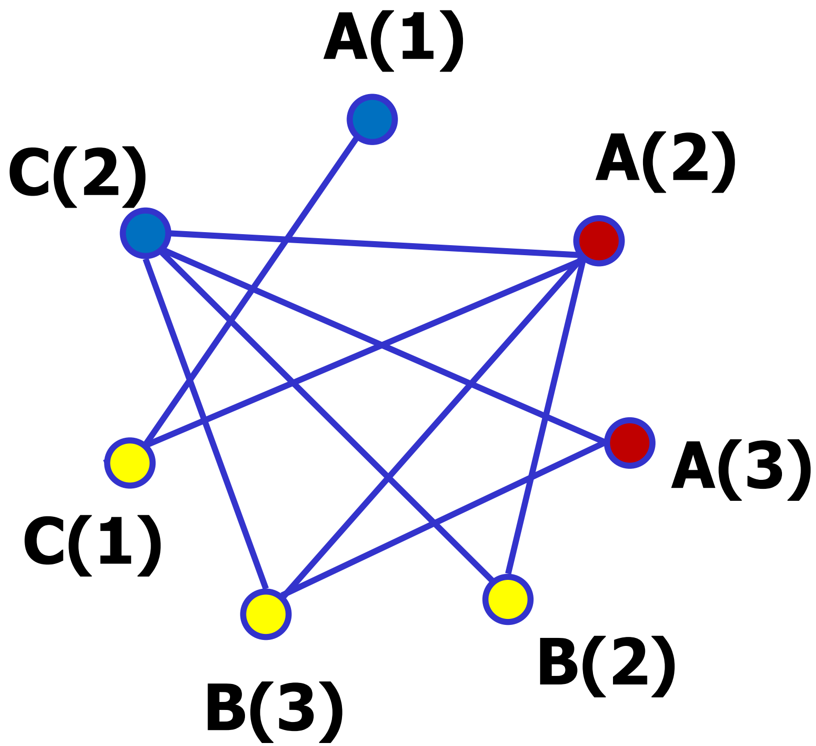
图的顶点着色的应用

图的顶点染色的贪心算法：

（1）任选一种颜色1，任选一个顶点a，给a进行染色。

(2) 任选一个与a不连接的顶点b, 用颜色1染色。

(3) 任选一个既不与a连接也不与b连接的顶点c, 用颜色1染色，这样进行下去，直到不能再用颜色1染色为止。



图G

选第二种颜色，重复上面的过程。

选第三种颜色，重复上面的过程。……

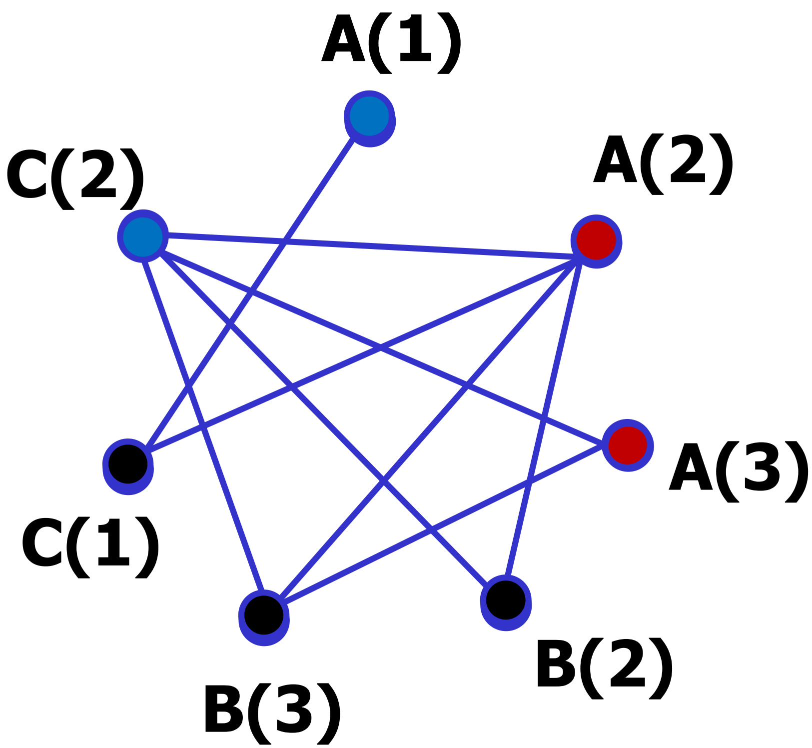
图的顶点着色的应用

图的顶点染色的贪心算法:

（1）选一种颜色（例如蓝色），任选一个没染色的顶点（例如A(1)），用蓝色给A(1)染色。

(2) 任选一个与A(1)不连接的没染色的顶点(例如C(2)),用蓝色给C(2)染色。

(3) 任选一个既不与A(1)连接也不与C(2)连接没染色的顶点,如果找不到，选第二种颜色，例如：黑色。重复第一步。



图G

习 题

1(p294)、设G是一个没有三角形的平面图，应用欧拉公式证明G中有一个顶点v使得degv≤3。

证明：我们可以直接考虑连通图G=(p, q)，

在没有三角形的图中，每个圈的长都是4时，边数最多

由推论9.13，G的每个面都是长为4的圈时，q=2p-4

因此在本题中q≤2p-4

假设每个顶点的度都大于3，也就是大于或等于4

则2q≥4p, 也就是q≥2p

这与q≤2p-4矛盾

习 题

2(p294)、设G是一个没有三角形的平面图，应用数学归纳法证明G是4—可着色的

证明　对顶点数p用归纳法，

当p=1, 2, 3, 4时显然成立，

假设当p=k时定理成立。

当p=k+1时。

存在一个顶点v，degv≤3,　　　　令G_1=G−v

由归纳假设G_1是4可着色的，

因此：若在G中考虑，则与v邻接的顶点数最多有3个

因此：与v邻接的顶点最多用去3种颜色

用剩余一种颜色给v着色便得到G的一种4着色。

2015-2016图论有关复试题

2015年，共200分，占14分

7. 设d=(d1, d2, …, dn), 其中di为非负整数，i=1, 2, …, n。若存在n个顶点的(简单)无向图, 使得顶点vi的度为di，则称d是可图解的。下面给出的各序列中哪个是可图解的？

A. （1,1,1,2,3） √

B. （1,2,2,3,4,5）

C. （1,3,3,3）

D. （1,3,3,4,5,6,6）

2015-2016集合论有关复试题

8.在一次围棋擂台赛中，双方各出**n**名选手。比赛的规则是双方先各自排个次序，设甲方排定的次序为**x1,x2,…,xn**，乙方排定的次序为**y1,y2,…,yn**。**x1**与**y1**先比赛，胜的一位与对方输的下一位选手比赛。按这种方法进行比赛，直到有一方的最后一位选手出场比赛并且输给对方，比赛就结束。则最多进行多少场比赛可定其胜负（假定比赛不出现平局）。

A. 2n+1

B. 2n

C. 2n-1 √

D. 2n-2

2015-2016集合论有关复试题

9.若**(**简单**)**无向图**G**与其补图G^C同构，称**G**为自补图，则含**5**个顶点不同构的无向自补图的个数为多少？

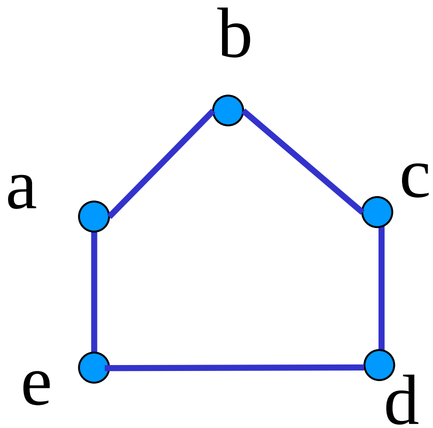
A. 1

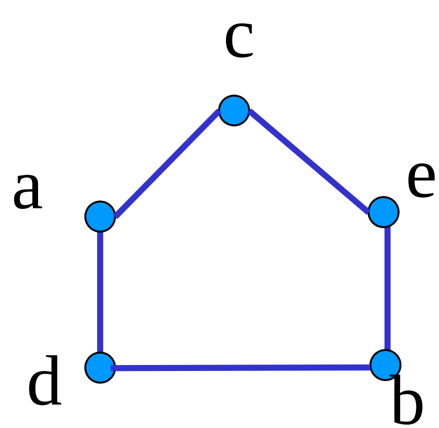
B. 2 √

C. 3

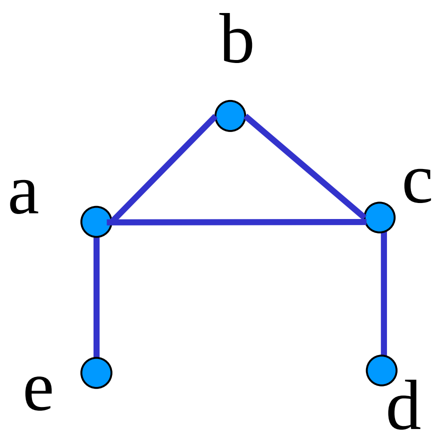
D. 4

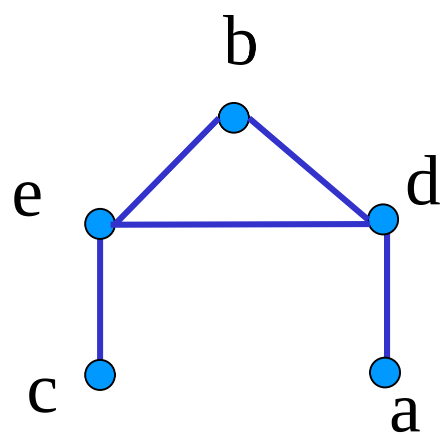
2015-2016集合论有关复试题





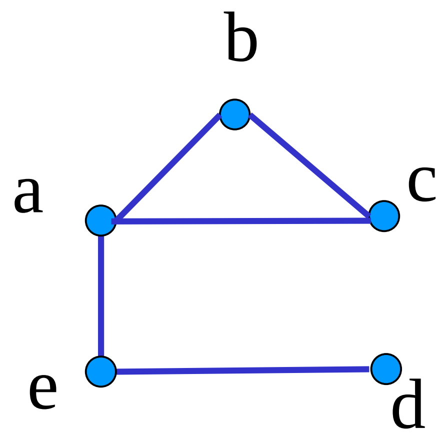
√

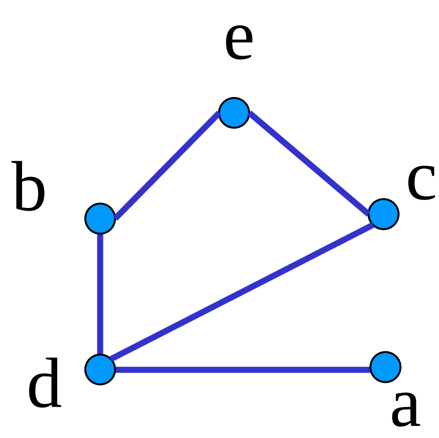


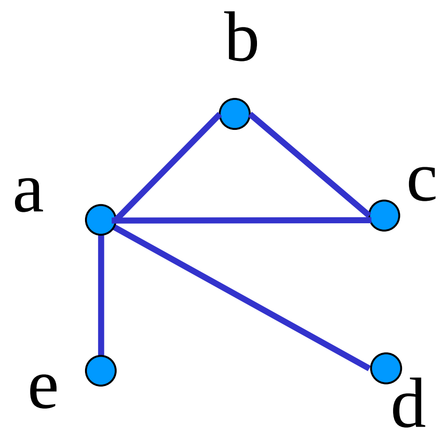


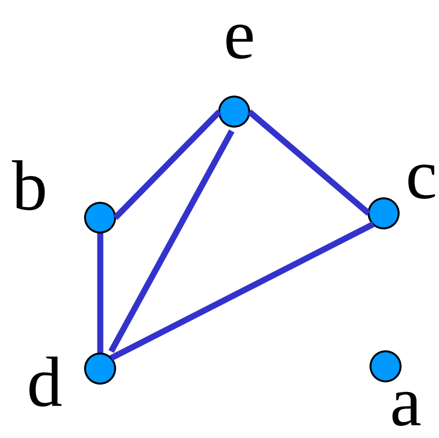
√

2015-2016集合论有关复试题









2015-2016集合论有关复试题

10.含有**5**个顶点、**3**条边的不同构的**(**简单**)**无向图有多少个？

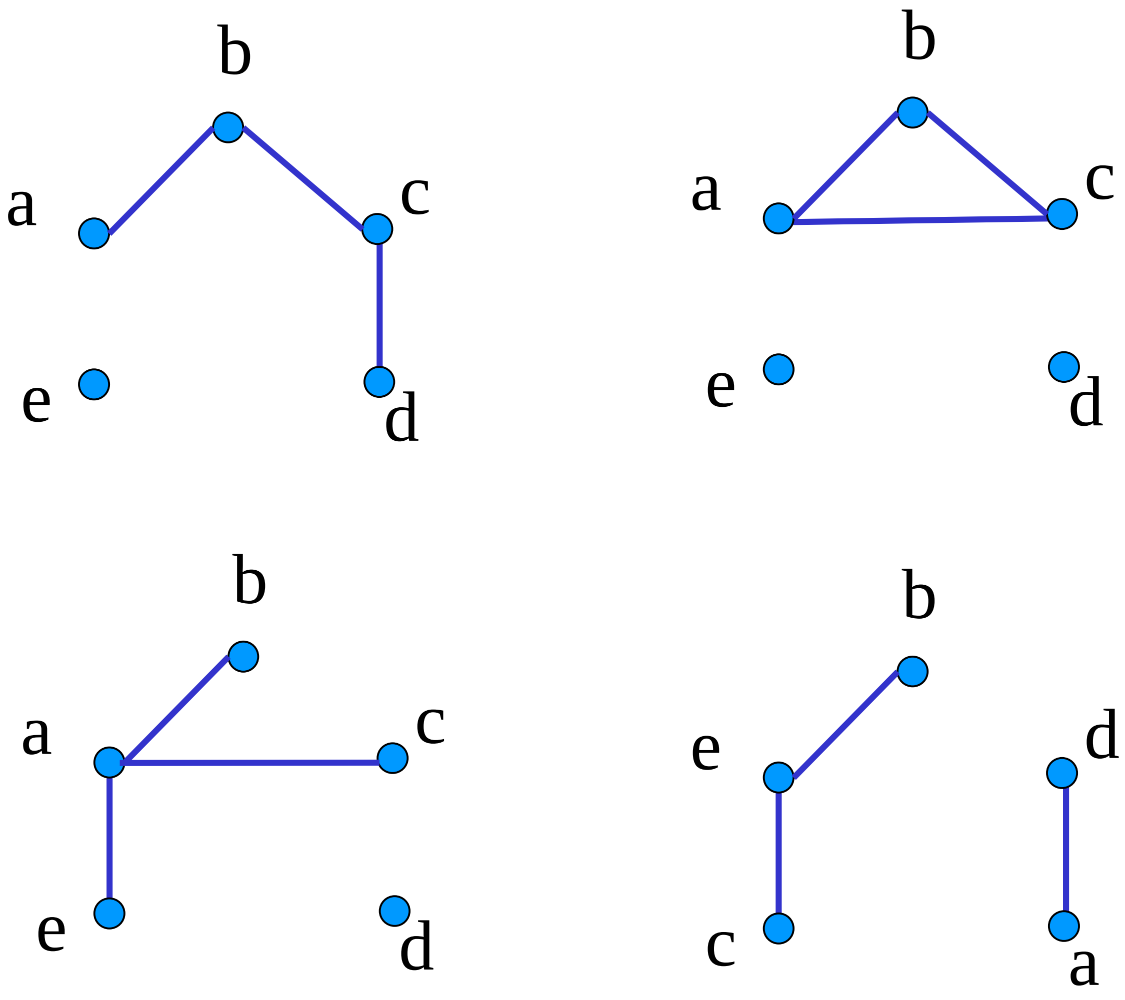
A. 2

B. 3

C. 4 √

D. 5

2015-2016集合论有关复试题



2015-2016集合论有关复试题

11.设树**T**中有**2n**个度为**1**的顶点,有**3n**个度为**2**的顶点,有**n**个度为**3**的顶点,则这棵树**T**有几个顶点和几条边?

A. 11，11

B. 11，10

C. 12，12

D. 12，11 √

2015-2016集合论有关复试题

12. 设G是p(p≥2)阶无向图，G^c为G的补图，已知△(G)=k1,δ(G)=k2，则△(G^c) 和δ(G^c)等于什么？

A. p-k1，p-k2

B. p- k2，p- k1

C. p-1-k1，p-1- k2

D. p-1- k2，p-1- k1 √

2015-2016集合论有关复试题

15.平面图**G**有两个分支，其顶点数为**8**，边数为**12**，则**G**有多少个面？

A. 10

B. 9

C. 8

D. 7 √

2015-2016图论有关复试题

2016，不全

8.(2 分)1.若图G 的色数（或顶点色数）为k，则G 中至少有多少条边？

A. k(k-1);

B. k(k+1);

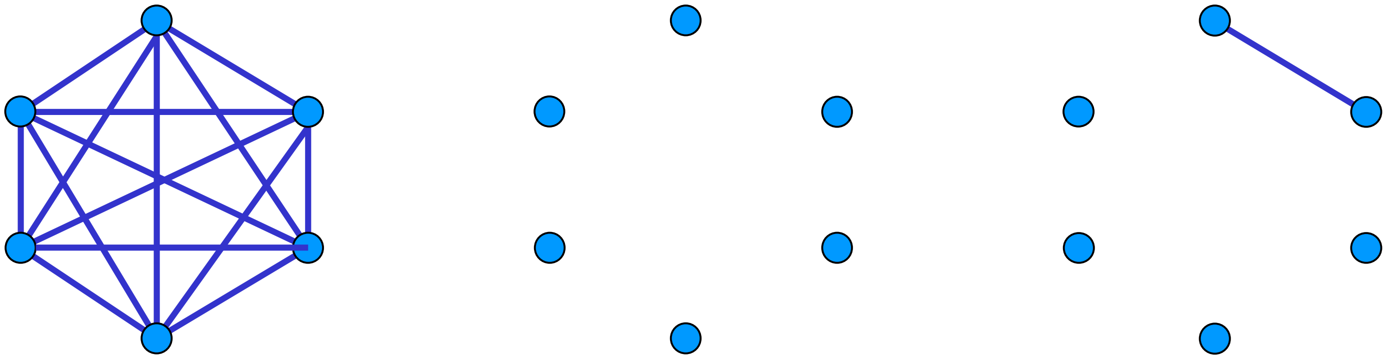
C. k(k+1)/2;

D. k(k-1)/2。 √

2015-2016集合论有关复试题

9.(2 分)

4. 设V={v1,v2,…,vp}，计算以V 为顶点集的无向图的个数有多少？



2015-2016集合论有关复试题

9.(2 分)

4. 设**V={v1,v2,…,vp}**，计算以**V** 为顶点集的无向图的个数有多少？

解：**p**个顶点的完全图的边的个数是**p(p-1)/2**

以V为顶点集的无向图当且仅当是它的完全图的生成子图。

每个边都可以选择出现和不出现

共有：

$2^{p(p-1)/2}$

9.(2 分)

4. 设V={v1,v2,…,vp}，计算以V 为顶点集的无向图的个数有多少？

A. 2^(p(p-1)/2)； √

B. 2^(p(p-1))；

C. p(p-1)/2；

D. p(p-1)。

2015-2016集合论有关复试题

10.(2 分)3. 设G 是一个无三角形的(p,q)平面图，则下列哪一个结论正确？

A. $q=3p-6$

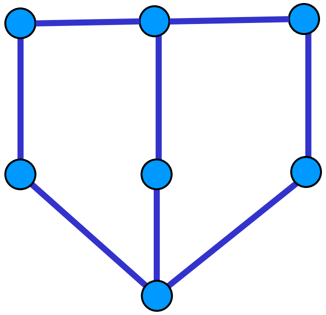
B. $q=4p-2$；

C. $q\leq 2p-4$； √

D. $q\leq 3p-6$。

2015-2016集合论有关复试题

23.(2 分)2. 设G 是一个(p,q)连通图，则G 中至少有多少个圈?



2015-2016集合论有关复试题

23.(2 分)2. 设G 是一个(p,q)连通图，则G 中至少有多少个圈?

A. p-q+1；

B. q-p+1; √

C. q-p；

D. p-q。