



第四章 无穷集合及其基数

4.1 可数集

4.2 连续统集

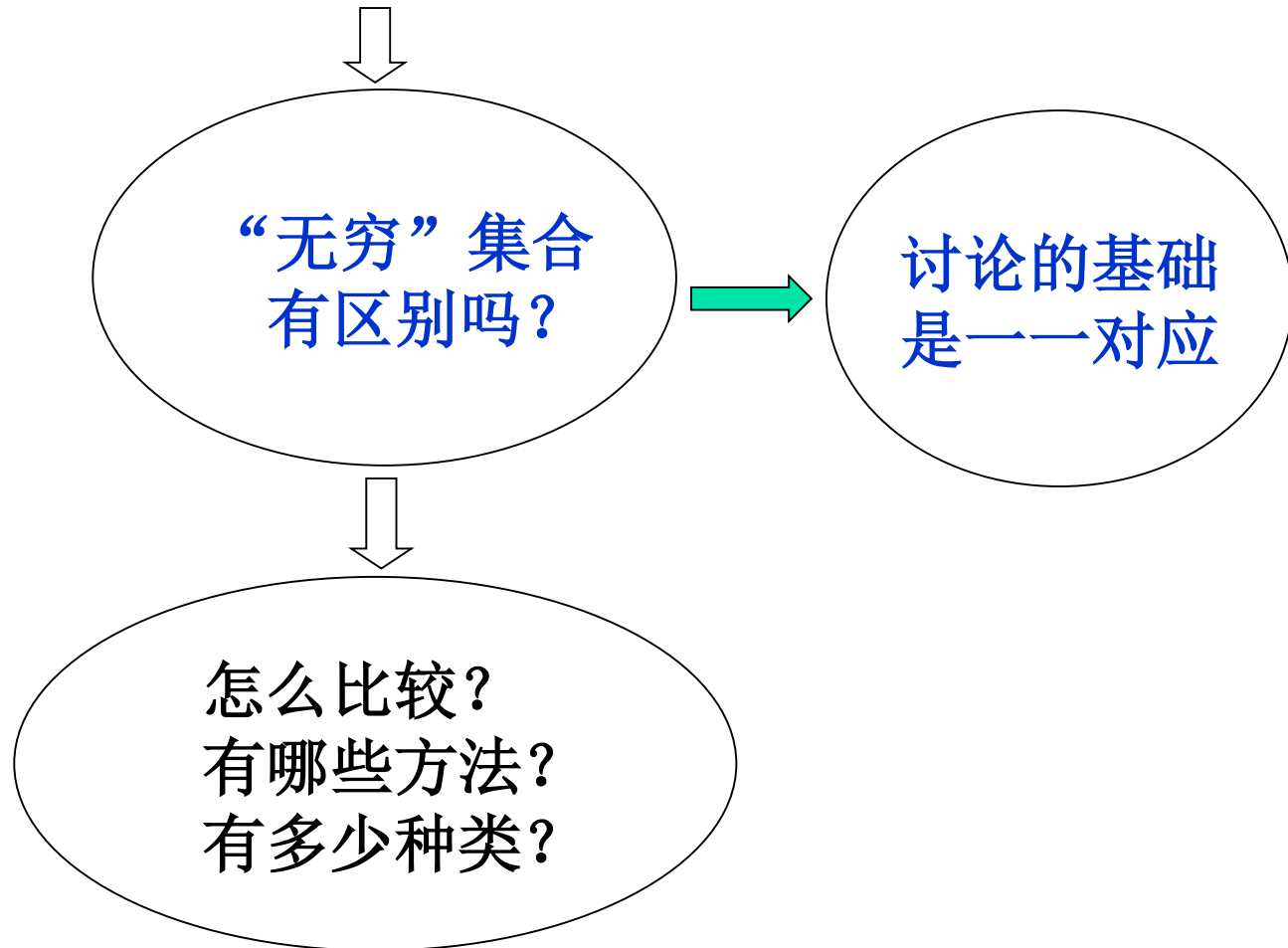
4.3 基数及其比较

4.4 康托-伯恩斯坦定理

*4.5 悖论、公理化集合论介绍

第四章 无穷集合及其基数

无穷集合的元素个数讨论





第1节 可数集

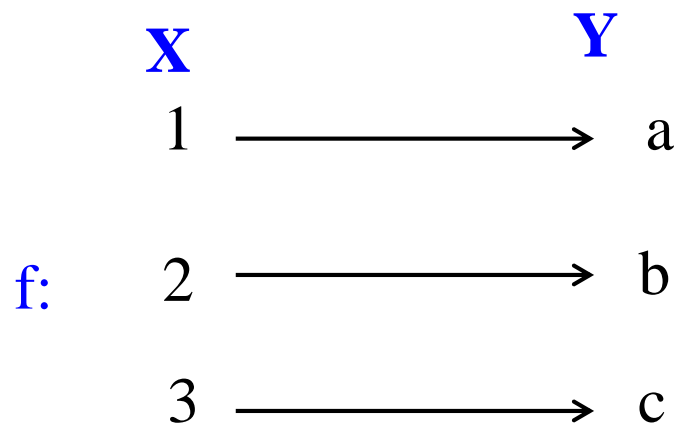
本节主要问题

(1) 可数集的定义

(2) 可数集的性质

(1) 可数集的定义

先说一个概念：如果从集合 X 到集合 Y 存在一一对应，则称集合 X 与 Y 对等，记作 $X \sim Y$ 。



集合 $\{1, 2, 3\}$ 与集合 $\{a, b, c\}$ 对等。

自然数集合采用 $\{1, 2, \dots\}$ 。

(1) 可数集的定义

观察一下下面4个集合，我们能不能像“数数”一样把集合中的数一直数下去，每个数都能数到。

(1) 自然数集合: $\{1, 2, 3, \dots\}$

(2) 整数集合: $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

(3) 有理数集合

(4) $[0, 1]$ 区间中的实数组成的集合

(1) 可数集的定义

(1) 自然数集合: $\{1, 2, 3, \dots\}$

(2) 整数集合: $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

定义4.1.1 如果从自然数集合 \mathbb{N} 到集合 X 存在一个一一对应 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, 则称集合 X 是无穷可数集合, 简称可数集或可列集

如果 X 不是可数集且 X 不是有限集, 则称 X 为不可数无限集, 可简称为不可数集

注意: 可数集与不可数集是对无穷集合而言的, 有限集既不称作不可数集也不称作可数集。

(1) 可数集的定义

例4.1.1 证明整数集 \mathbb{Z} 是可数集。

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

\mathbb{Z} 可变化一下形式

$$\{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

令 $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, 用表达式表示为: $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi(n) = \begin{cases} -2n, & \text{如果 } n < 0 \\ 2n+1, & \text{如果 } n \geq 0 \end{cases}$$

(2) 可数集的性质

定理4.1.1 集合 A 为可数集的充分必要条件是 A 的全部元素可以排成无重复项的序列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

必要性：如果 A 为可数集，则 A 与自然数集之间存在一一对应，按对应的次序：

A 可写成 $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$

充分性：如果 A 可写成 $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ ：

则 A 与自然数集合间可建立一一对应关系：

$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow A, \varphi(n)=a_n$ 。

定义4.1.1 如果从自然数集合 \mathbb{N} 到集合 X 存在一个一一对应 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ ，则称集合 X 是无穷可数集合，简称可数集或可列集。

(2) 可数集的性质

定理4.1.2 无限集A必包含可数子集。

例如：

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$$

(2) 可数集的性质

定理4.1.2 无限集A必包含可数子集。

证明：

1. 从A中取第一个元素,记为 a_1 ;
2. 从 $A \setminus \{a_1\}$ 中取第二个元素, 记为 a_2 ;
-
- n. 从 $A \setminus \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}\}$ 中取第n个元素, 记为 a_n ;

.....

如此继续下去,便得到一个无限集合

$$M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$

显然M是可数集且 $M \subseteq A$

集合M即为所求。

(2) 可数集的性质

定理4.1.3 可数集的任一无限子集也是可数集。

例如：自然数集合中的偶数形成的集合：

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$

参考定理4.1.1 集合A为可数集的充分必要条件是A的全部元素可以排成无重复项的序列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

(2) 可数集的性质

定理4. 1. 3 可数集的任一无限子集也是可数集。

证明： 设 A 为可数集,则 A 的全部元素可以排成一个没有重复项的无穷序列: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

设 B 是 A 的一个无穷子集。

由于 $B \subseteq A$,所以 $\forall b \in B, b$ 必在上述序列中出现;

1. 令从左到右发现的 B 中的第一个元素与1对应;
2. 令从左到右发现的 B 中的第二个元素与2对应;
- n . 令从左到右发现的 B 中的第 n 个元素与 n 对应;

因为 B 为无穷集,这样我们就建立了 B 与自然数集合的一一对应,所以 B 是可数集。

(2) 可数集的性质回顾

定理4.1.1 集合 A 为可数集的充分必要条件是 A 的全部元素可以排成无重复项的序列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

定理4.1.2 无限集 A 必包含可数子集。

定理4.1.3 可数集的任一无限子集也是可数集。



推论4.1.1 从可数集 A 中除去一个有限集 M ,则 $A \setminus M$ 仍是可数集。

例如：自然数集合形成的集合：

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$

(2) 可数集的性质

定理4.1.4 设 A 是可数集, M 是有限集,则 $A \cup M$ 是可数集。

例如：自然数集合形成的集合：

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$

英文字母集合：

$\{a, b, c, \dots, x, y, z\}$

证明（略）

定理4.1.1 集合 A 为可数集的充分必要条件是 A 的全部元素可以排成无重复项的序列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

(2) 可数集的性质

定理4.1.5 设 $A_1, A_2, \dots, A_n (n \geq 1)$ 都是可数集, 则它们的并集也是可数集。

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \dots\}$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \dots\}$$

.....

$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, a_{n4}, \dots\}$$

证明 (略)

定理4.1.1 集合 A 为可数集的充分必要条件是 A 的全部元素可以排成无重复项的序列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

(2) 可数集的性质

定理4.1.6 可数个有限集之并至多是可数集。即若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是有限集的可数序列, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 或为有限集, 或为可数集。

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}\}$$

.....

$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, a_{n4}\}$$

.....

证明 (略)

(2) 可数集的性质

定理4.1.7 设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为可数集合的一个无穷序列, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可数集, 即可数个可数集之并是可数集。

(2) 可数集的性质

证: 设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是两两不相交的,
则 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 可写成如下形式:

A_1 的元素排为 $a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \dots a_{1n} \dots$

A_2 的元素排为 $a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ a_{24} \dots a_{2n} \dots$

A_3 的元素排为 $a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ a_{34} \dots a_{3n} \dots$

A_4 的元素排为 $a_{41} \ a_{42} \ a_{43} \ a_{44} \dots a_{4n} \dots$

.....

按照这样的规律排列,称 $p+q$ 为元素 a_{pq} 的高度,按高度大小编号,在同一高度中按 p 的值由小到大编号,这样就将 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 中所有元素编成一系列;

因此: 定理成立。

(2) 可数集的性质

定理4.1.7 设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为可数集合的一个无穷序列, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可数集, 即可数个可数集之并是可数集。

定理4.1.8 全体有理数之集 Q 是可数集。

定理4.1.8 全体有理数之集 Q 是可数集。

证明: $Q=Q_+ \cup Q_- \cup \{0\}$, Q_+ 与 Q_- 对等, 因此只需证 Q_+ 是可数集即可。

每个正有理数当且仅当可写成 p/q 形式, 其中 p 与 q 为自然数。

当 $q=1$ 时: 令 $A_1=\{1, 2, 3, \dots\}$

当 $q=2$ 时: 令 $A_2=\{1/2, 2/2, 3/2, \dots\}$

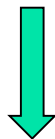
.....

$$Q_+ = \bigcup_{q=1}^{\infty} A_q$$

由定理4. 1. 7 Q_+ 是可数集, 从而 Q 是可数集。

(2) 可数集的性质

定理4.1.8 全体有理数之集 \mathbb{Q} 是可数集。



推论4.1.2 区间 $[0,1]$ 中的一切有理数之集是可数集。

(2) 可数集的性质

定理4.1.9 设 M 是一个无限集, A 是有限或可数集,则 $M \sim M \cup A$ 。

例如 $(0, 1) \cup \{1, 2, 3, \dots\}$
与 $(0, 1)$ 存在一一对应

$$(0, 1) = X \cup \{1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$$

$$\begin{aligned} & (0, 1) \cup \{1, 2, 3, \dots\} \\ &= X \cup \{1/2, 1/3, 1/4, \dots\} \cup \{1, 2, 3, \dots\} \end{aligned}$$

定理4.1.2 无限集 A 必包含可数子集。

(2) 可数集的性质

定理4.1.9 设 M 是一个无限集, A 是有限或可数集, 则 $M \sim M \cup A$ 。

[证]只证 A 是可数集的情况

因为 M 是一个无限集, 所以由定理4.1.2知 M 必有一个可数子集 D ,

$$M = (M \setminus D) \cup D \xrightarrow{\quad} D \text{ 是可数集}$$

$$M \cup A = (M \setminus D) \cup D \cup A \xrightarrow{\quad} D \cup A \text{ 是可数集}$$

$$(M \setminus D) \sim (M \setminus D), \quad (D \cup A) \sim D,$$

$$M \sim (M \cup A)$$

定理4.1.2 无限集 A 必包含可数子集。

(2) 可数集的性质

定理4.1.10 设 M 是一个无穷不可数集, A 为 M 的至多可数子集(即 A 有穷或可数), 则 $M \sim M \setminus A$ 。

[证] 因为 M 是无穷不可数集, A 至多可数, 所以 $M \setminus A$ 是无穷集。

由定理4.1.9

$$M \setminus A \sim (M \setminus A) \cup A$$

$$\text{即 } M \setminus A \sim M$$

定理4.1.9 设 M 是一个无限集, A 是有限或可数集, 则 $M \sim M \cup A$ 。

(2) 可数集的性质

与自己的真子集存在一一对应是无穷集合独有的特点，有限集合没有这样的性质。

推论4.1.1 从可数集 A 中除去一个有限集 M ,则 $A \setminus M$ 仍是可数集。

定理4.1.10 设 M 是一个无穷不可数集， A 为 M 的至多可数子集(即 A 有穷或可数),则 $M \sim M \setminus A$ 。

定义4.1.2 凡能与自身的一个真子集对等的集合称为无穷集合,或无限集合。

(2) 可数集的性质

定理4.1.11 设 $A_1, A_2, \dots, A_n (n \geq 2)$ 都为可数集,
则 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 是可数集。

证：对 n 用归纳法

当 $n=2$ 时，证明 $A_1 \times A_2$ 为可数集；

令 $A_1 = \{a_1, a_2, \dots\}$, $A_2 = \{b_1, b_2, \dots\}$

$A_1 \times A_2 = \{(a_i, b_j) | i, j = 1, 2, 3, \dots\}$

令 $B_1 = \{(a_1, b_j) | j = 1, 2, 3, \dots\}$, 则 B_1 是可数集；

$B_2 = \{(a_2, b_j) | j = 1, 2, 3, \dots\}$, 则 B_2 是可数集；

.....

$A_1 \times A_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, 是可数集；

(2) 可数集的性质

定理4.1.11 设 $A_1, A_2, \dots, A_n (n \geq 2)$ 都为可数集, 则 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 是可数集。

假设 $n=k$ 时定理成立, 现证 $n=k+1$ 时成立;

令 $D = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$, 则由归纳假设 D 是可数集;

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{k+1} \sim D \times A_{k+1},$$

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{k+1}$ 是可数集;

因此对一切 $n \geq 2, A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 是可数集。

(2) 可数集的性质

推论4.1.3 整系数代数多项式的全体是一个可数集

一个 n 次整系数多项式可记作一个 $n+1$ 元组;

所有的 n 次整系数多项式与 $n+1$ 个整数集 \mathbb{Z} 的笛卡尔积对等;

所有的整系数多项式是可数个可数集的并集;

因此结论成立。

(2) 可数集的性质

定义4. 1. 3 整系数代数多项式的根称为代数数, 非代数数称为超越数。

定理4. 1. 12 代数数的全体是可数集。



4.2 连续统集-不可数的无穷集

本节主要问题

- (1) 连续统集的定义
- (2) 连续统集的性质

(1) 连续统集的定义

定理4.2.1 区间 $[0, 1]$ 中的所有实数构成的集合是不可数无穷集合。

证：

约定每个有限位小数后均补以无限多0，例如0写成 $0.000\dots$ 。0.5写成 $0.500\dots$ ；

其中1写成 $0.999\dots$ ；

区间 $[0, 1]$ 中每个实数,都可以写成十进制无限位小数形式 $0.b_1b_2b_3b_4\dots$, 其中: $b_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$;

假定定理不成立, 于是 $[0, 1]$ 中全体实数可排成一个无穷序列: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 。

(1) 连续统集的定义

每个 a_i 写成十进制无限小数形式排成下表

$$a_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\dots a_{1n}\dots$$

$$a_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\dots a_{2n}\dots$$

$$a_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\dots a_{3n}\dots$$

.....

$$a_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\dots a_{nn}\dots$$

.....

其中

$$a_{ij} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}。$$

构造一个新的小数 $b = 0.b_1b_2b_3\dots b_n\dots$

$$b_n = \begin{cases} 2, & \text{若 } a_{nn} = 1 \\ 1, & \text{若 } a_{nn} \neq 1 \end{cases}, n = 1, 2, 3, \dots$$

显然, $b \in [0, 1]$, 但 $\forall n \in \mathbb{N}, b \neq a_n$, 矛盾。

(1) 连续统集的定义

定义4.2.1 凡与集合 $[0,1]$ 对等的集合称为具有“连续统的势”的集合,或简称连续统。

(1) 连续统集的定义

例4.2.1 设 a 与 b 为实数且 $a < b$ ，则区间 $[a, b]$ 中的一切实数之集是个连续统。

建立一一对应。

$$\varphi: [0, 1] \rightarrow [a, b], \forall x \in [0, 1], \quad \varphi(x) = a + (b-a)x,$$

证明单射: $\forall x_1 \neq x_2$

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = (b-a)(x_1 - x_2),$$

因此 $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$

证明满射: $\forall y \in [a, b],$

$$\varphi((y-a)/(b-a)) = y$$

φ 是一个一一对应，从而 $[0, 1] \sim [a, b]$ ，因此 $[a, b]$ 是连续统。

(1) 连续统集的定义

定义4.2.1 凡与集 $[0,1]$ 对等的集称为具有“连续统的势”的集,或简称连续统。

$[0,1] \sim (a,b]$ $(a,b]$ 是一个连续统

$[0,1] \sim [a,b)$ $[a,b)$ 是一个连续统

$(a,b) \sim [0,1]$ (a,b) 是一个连续统

例4.2.1 设 a 与 b 为实数且 $a < b$, 则区间 $[a,b]$ 中的一切实数之集是个连续统。

定理4.1.10 设 M 是一个无穷不可数集, A 为 M 的至多可数子集(即 A 有穷或可数),则 $M \sim M \setminus A$ 。

(2) 连续统集的性质

定理4.2.2 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个两两不相交的连续统, 则 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 是连续统, $\bigcup_{i=1}^n A_i \sim [0, 1]$ 。

证:

把 $[0, 1]$ 区间分成 n 份。

设 $p_0 = 0 < p_1 < p_2 < \dots < p_{n-1} < p_n = 1$

$[0, 1] = [0, p_1) \cup [p_1, p_2) \cup \dots \cup [p_{n-1}, p_n]$

$A_1 \sim [0, p_1), A_2 \sim [p_1, p_2), \dots, A_n \sim [p_{n-1}, p_n]$

由于 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相交

于是 $\bigcup_{i=1}^n A_i \sim [0, 1]$

(2) 连续统集的性质

定理4.2.3 设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为两两不相交的集序列。如果 $A_k \sim [0, 1]$, $k=1, 2, 3, \dots$, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \sim [0, 1]$

证:

把 $[0, 1]$ 区间分成可数集份。

设 $p_0 = 0 < p_1 < p_2 < \dots < p_{n-1} < p_n \dots \dots \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$

例如: $p_n = (n-1)/n$

$[0, 1] = [0, p_1) \cup [p_1, p_2) \cup \dots \cup [p_{n-1}, p_n] \dots \dots$

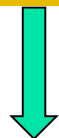
$A_1 \sim [0, p_1), A_2 \sim [p_1, p_2), \dots, A_n \sim [p_{n-1}, p_n] \dots \dots$

由于 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相交, 以及

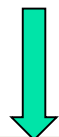
于是 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \sim [0, 1]$

(2) 连续统集的性质

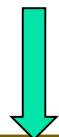
定理4.2.3 设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为两两不相交的集序列。如果 $A_k \sim [0, 1]$, $k=1, 2, 3, \dots$, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \sim [0, 1]$



推论4. 2. 1 全体实数之集是一个连续统。



推论4. 2. 2 无理数之集是一个连续统。



推论4. 2. 3 超越数之集是一个连续统。

(2) 连续统集的性质

定理4.2.4 令 B 为所有0、1的无穷序列所构成的集合，则 $B \sim [0,1]$ 。

例如：1111111111111111.....

1010101010010101.....

0000000000000000.....

.....

需要建立这样的序列和 $[0, 1]$ 区间的数的一一对应。

把 $[0, 1]$ 区间的数都转换成2进制。

例如：1111111111111111.....

对应：0.1111111111111111.....

(2) 连续统集的性质

定理4.2.4 令B为0、1的无穷序列所构成的集合，则 $B \sim [0,1]$ 。

证明：

$[0,1]$ 中任一小数，都可以转换成二进制小数，在有限小数后面补无穷个零。

对于任意一个无穷项二进制小数

$0.a_1 a_2 \dots a_n \dots, \forall i \in \mathbb{N}, a_i = 0 \text{ 或 } 1$

都对应着一个0,1的无穷序列

$a_1 a_2 \dots a_n \dots$

反过来任何一个0,1无穷序列 $b_1 b_2 \dots b_n \dots$ 都对应着一个二进制小数 $0.b_1 b_2 \dots b_n \dots \forall i \in \mathbb{N}, b_i = 0 \text{ 或 } 1$

因此B与 $[0,1]$ 存在一一对应, $B \sim [0,1]$ 。

(2) 连续统集的性质

定理4.2.5 令 $S = \{f / f: N \rightarrow \{0, 1\}\}$, 则:

(1) $S \sim [0, 1]$,

(2) 若 A 为可数集, 则 $2^A \sim [0, 1]$ 。

[证] (1) S 中的任一个映射 f 都可以写成
 $\{(1, x_1), (2, x_2), (3, x_3), \dots\}$ 其中 $\forall i, x_i = 0$ 或 1
因此 S 中的任一个映射 f 与 $0, 1$ 无穷序列
 $x_1 x_2 x_3 \dots$ 一一对应。

由 $0, 1$ 的无穷序列之集与 $[0, 1]$ 对等, 因此 $S \sim [0, 1]$ 。

(2) 连续统集的性质

定理4.2.5 令 $S = \{f / f: N \rightarrow \{0, 1\}\}$, 则:

(1) $S \sim [0, 1]$,

(2) 若 A 为可数集, 则 $2^A \sim [0, 1]$ 。

(2) 由于 $2^A \sim \text{Ch}(A)$

$$\text{Ch}(A) = \{\chi | \chi: A \rightarrow \{0, 1\}\}$$

$\text{Ch}(A) \sim S$, 因此 $2^A \sim [0, 1]$ 。

5. 自然数集 \mathbf{N} 是可数的，则 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 是否是可数的？
 \mathbf{N} 的幂集 $2^{\mathbf{N}}$ 是否是可数的？

- A. 可数，可数
- B. 可数，不可数 ✓
- C. 不可数，可数
- D. 不可数，不可数

(2) 连续统集的性质

定理4.2.7 设 A_1, A_2 均为连续统, 则
 $A_1 \times A_2 \sim [0, 1]$ 。

[证] 已知 $A_1 \sim [0, 1], A_2 \sim [0, 1]$,

$\forall (x, y) \in A_1 \times A_2$,

x 对应的二进制小数为 $0.x_1x_2x_3\cdots$,

y 对应的二进制小数为 $0.y_1y_2y_3\cdots$,

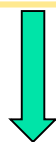
令 $\varphi((x, y)) = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\cdots$

则 φ 是从 $A_1 \times A_2$ 到 $[0, 1]$ 的一一对应;

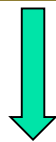
因此 $A_1 \times A_2 \sim [0, 1]$ 。

(2) 连续统集的性质

定理4.2.7 设 A_1, A_2 均为连续统, 则
 $A_1 \times A_2 \sim [0, 1]$ 。



推论4.2.1 平面上所有点的集合是一个连续统。



推论4.2.8 若 A_1, A_2, \dots, A_n 均为连续统, 则: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \sim [0, 1]$ 。

(2) 连续统集的性质

定理4.2.9 设 $I \sim [0,1]$, 并且 $\forall m \in I, A_m \sim [0,1]$,
则 $\bigcup_{m \in I} A_m \sim [0,1]$

意思是连续统个连续统的并集还是连续统。

- (1) 平行于X轴的直线上的点与实数对等
是一个连续统。
- (2) 平行于X轴的直线有多少个?
是Y轴上点的个数, 是连续统个。

证明 (略)

4.3 基数及其比较

本节主要问题

- (1) 无穷集合基数的定义
- (2) 无穷集合基数的性质

(1) 无穷集合基数的定义

基数即个数，无穷集合的个数怎么定义？

定义4.3.1 集合A的基数是一个符号，凡与A对等的集合都赋以同一个记号,集合A的基数记为 $|A|$,也记作 $\text{card}A$ 。

定义4.3.1' 所有与集合A对等的集构成的族称为A的基数。

(1) 无穷集合基数的定义

定义4.3.2 集合A的基数与集合B的基数称为是相等的，当且仅当 $A \sim B$ 。

定义4.3.3 α, β 是任意两个基数，A, B是分别以 α, β 为其基数的集。如果A与B的一个真子集对等，但A却不能与B对等，则称基数 α 小于基数 β ，记为 $\alpha < \beta$ 。

(1) 无穷集合基数的定义

规定 $\alpha \leq \beta$ 当且仅当存在单射 $f: A \rightarrow B$ 。

规定 $\alpha < \beta$ 当且仅当存在单射 $f: A \rightarrow B$, 且不存在 A 到 B 的双射。

如果用 a 表示可数集合的基数, c 表示具有连续统之集合的基数, 则 $|\mathbb{N}|=a$, $|[0, 1]|=c$

由定理4.2.1, 显然有 $a < c$, 这种多少的概念是建立在一一对应的基础上的。

(1) 无穷集合基数的定义

无穷集合的基数也称超穷数，超穷数也可以比较大小。

- (1) 平面上的点多还是线多？
- (2) 一维空间的点多还是 n 维空间的点多？
- (3) 平面上的点多还是平面上的圆多？
- (4) 集合 $[0,1]$ 中的数多还是自然数集 \mathbf{N} 中的数多？
- (5) 有理数多还是自然数多？

(2) 无穷集合基数的性质

康托的连续统假设:

我们用 a 表示可数集合的基数, c 表示具有连续统之集合的基数,那么有没有一个基数 b ,使得 $a < b < c$,

1、存在一个集合 S , S 是无穷集但不是可数无穷集;

2、 S 不与 $[0, 1]$ 对等但能与 $[0, 1]$ 的一个不可数真子集对等。

康托认为没有这样的集合, 这就是康托的连续统假设。

(2) 无穷集合基数的性质

无穷基数有多少？

有没有最大的无穷基数？

无穷基数有无穷多个。

并且没有最大的。

设 N 是可数集

则 2^N 是连续统

则 2^{2^N} 不与连续统对等

.....