第三章：关系

3.8 偏序关系与偏序集

本节主要问题

（1）偏序关系的定义

（2）偏序集的定义

（3）全序关系和全序集

（4）偏序集的有关术语

（1）偏序关系的定义

例3.8.1 分析实数集R上"≤"关系的性质。

(1).自反性

对于实数集上任意元素x,x≤x,故自反性成立。

(2).反对称性

∀x,y∈R,如果x≤y,并且y≤x,则x=y,故反对称性成立。

(3).传递性

∀x,y,z∈R,如果x≤y,并且y≤z,则有x≤z,因此,传递性成立。

（1）偏序关系的定义

设X是一个集合，集合的包含于“$\subseteq$”是2^X上的二元关系。

设$X=\{a, b\}$，$2^X=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$$\text{“}\subseteq\text{”} = \{(\varnothing, \varnothing), (\{a\},\{a\}), (\{b\},\{b\}), (\{a,b\},\{a,b\}), (\varnothing,\{a\}), (\varnothing,\{b\}), (\varnothing,\{a,b\}), (\{a\},\{a,b\}), (\{b\},\{a,b\})\}。$$

(1). 自反性 (2). 反对称性 (3). 传递性

满足以上三个性质的关系称作偏序关系。

（1）偏序关系的定义

定义3.8.1 集合X上的二元关系R称为偏序关系，如果R同时满足以下三个性质：

1°.R是自反的，　　当且仅当$I_X \subseteq R$；

2°.R是反对称的，　如果xRy,且yRx,则x=y;

3°.R是传递的，　　当且仅当$R^2 \subseteq R$

当抽象地讨论X上的偏序关系时，常用符号“≤”表示偏序关系。如果a≤b,则读作“a小于或等于b”

约定x≤y且x≠y时，就记为x<y。

（1）偏序关系的定义

X是非空集合，判断以下关系是否是偏序关系？

a. 2^X上集合的包含于“$\subseteq$”关系。√

b. 2^X上集合的真包含于“$\subset$”关系。×

c. I_X √

d. I_X的任一非空真子集$R \subset I_X$ ×

e. 实数集上的“小于或等于”关系“$\leq$” √

f. 实数集上的小于关系“<”? ×

g. 自然数上的模n同余关系。×

h. 映射的核关系。×

i. 自然数的整除关系。√

（2）偏序集的定义

定义3.8.2 设≤是X上的一个偏序关系，则称二元组(X, ≤)为偏序集。

设X={a, b}, 2^X={∅, {a}, {b}, {a, b}}

"⊆" = {(∅, ∅), ({a},{a}), ({b},{b}), ({a,b},{a,b}),
(∅,{a}), (∅,{b}), (∅,{a,b}),
({a},{a,b}),
({b},{a,b})}。

(2^X, "⊆")是一个偏序集

一个集合上可能存在多个偏序集。

（2）偏序集的定义

定义3.8.2　设≤是X上的一个偏序关系，则称二元组(X, ≤)为偏序集。

设X={a, b}, 2^X={∅, {a}, {b}, {a, b}}

"⊇" = {(∅, ∅), ({a},{a}), ({b},{b}), ({a,b},{a,b}),

({a},∅), ({b}, ∅), ({a,b}, ∅),

({a,b}, {a}),

({a,b}, {b})}。

(2^X, "⊇")是一个偏序集。

实数集上存在(R, ≤)和(R, ≥)等偏序集。

（3）全序关系与全序集

定义3.8.3 集合X上的偏序关系 $\le$ 叫做全序关系,如果 $\forall x, y \in X$, $x \le y$ 与 $y \le x$ 至少有一个成立, 全序关系也称为线性序关系。X与全序关系 $\le$ 构成的二元组 $(X, \le)$ 称为全序集。

设 $X=\{a, b\}$, $2^X=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

“$\subseteq$” = {(∅, ∅), ({a},{a}), ({b},{b}), ({a,b},{a,b}),
(∅,{a}), (∅,{b}), (∅,{a,b}),
({a},{a,b}),
({b},{a,b})}。

(2^X, “$\subseteq$”)是不~~是~~全序集？

（3）全序关系与全序集

定义3.8.3 集合X上的偏序关系≤叫做全序关系,如果 $\forall x, y \in X, x \le y$与 $y \le x$ 至少有一个成立,全序关系也称为线性序关系。X与全序关系≤构成的二元组(X, ≤)称为全序集。

设X={a, b}, 2^X={∅, {a}, {b}, {a, b}}

R = {(∅, ∅), ({a},{a}), ({b},{b}), ({a,b},{a,b}),
(∅,{a}), (∅,{b}), (∅,{a,b}),
({a},{a,b}), ({a}, {b})
({b},{a,b})}。

(2^X, R)是不是全序集。

（3）全序关系与全序集

下面哪种关系是全序关系？

1. 实数间的常用的“小于或等于”关系。√

2. 集合间的包含关系。×

3. 自然数间的整除关系×

（4）偏序集的有关术语－前驱和后继

定义3.8.4 设（X，≦）是一个偏序集。我们称y盖住x,如果x<y，且对每一个 z∈X，若x≦z≦y，则x=z或y=z。如果y盖住x，则记为：

$$x \overset{\infty}{\subset} y$$

并且y成为x的后继，而x称为y的前驱。

例3.8.7 令={2, 3, 6, 12, 24, 36}, X在整除关系“|”下构成一个偏序集(X, |)。

判断下面说法是否正确

6是2, 3的后继，6是12的前驱。√

24是6的后继。

3是2的后继。

（4）偏序集的有关术语 – 哈斯图

哈斯图（Hasse图）的概念：

例3.8.7 令A={2, 3, 6, 12, 24, 36}, A在整除关系“|”下构成一个偏序集（A, |），讨论它的关系图。

“|” ={(2, 2), (2, 6), (2, 12), (2, 24), (2, 36)

(3, 3), (3, 6), (3, 12), (3, 24), (3, 36)

(6, 6), (6, 12), (6, 24), (6, 36)

(12, 12), (12, 24), (12, 36)

(24, 24)

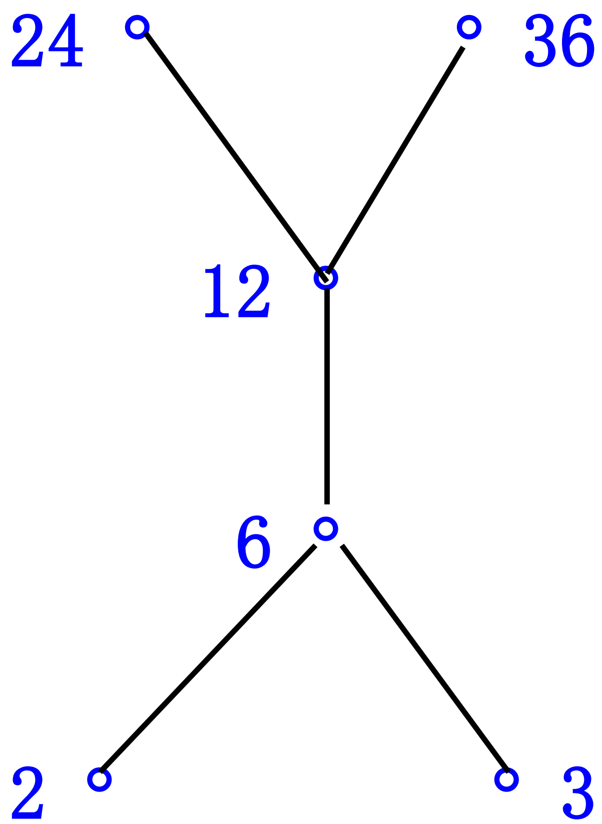
(36, 36)}

关系图太复杂，太麻烦

哈斯图的目的是简化关系图的画法。

（4）偏序集的有关术语－哈斯图

例3.8.7 的哈斯图。



1、偏序关系是自反的，因此其关系图中，每个节点上都有环。既然都有，就可以省略。

2、由于反对称性，x, y之间只能有一条有向边。如果从x到y有边，则把y放在x上方。表示箭头的方向。这样就可以省略箭头。

3、偏序关系是传递的，只要有(x, y)和(y, z)，就必然有(x, z)，因此只要在前驱和后继之间连线即可。

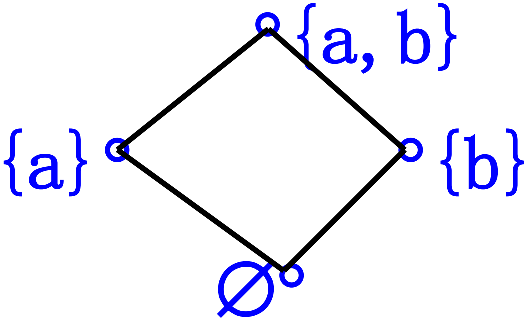
（4）偏序集的有关术语－哈斯图

例：画出下面偏序关系的哈斯图。

设$X=\{a, b\}$，$2^X=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

"$\subseteq$" = $\{(\varnothing, \varnothing), (\{a\},\{a\}), (\{b\},\{b\}), (\{a,b\},\{a,b\}),$
$(\varnothing,\{a\}), (\varnothing,\{b\}), (\varnothing,\{a,b\}),$
$(\{a\},\{a,b\}),$
$(\{b\},\{a,b\})\}$。

$(2^X$，"$\subseteq$"$)$是一个偏序集



（4）偏序集的有关术语 – 链和反链

定义3.8.5设（X，≦）是一个偏序集。A ⊆X。如果∀a, b ∈ A, a≦b 与 b≦a必有一个成立，则称A为X中的链。如果对A中任意两个不同的元素a与b, a≦b 与 b≦a 均不成立，则称A为X中的一个反链。|A|称为链或者反链的长度。

例3.8.7 令X={2, 3, 6, 12, 24, 36}, X在整除关系“|”下构成一个偏序集(X, |)。

判断下面说法是否正确

A={12, 24, 36}是一条链

A={2, 6, 12, 24}是一条链

A={2, 3}是一条反链

（4）偏序集的有关术语－上界和下界

定义3.8.6设（X，≤）是一个偏序集。B ⊆X。

如果存在一个元素a ∈X, 使得对B中每个元素x, 有x≤a, 则称a为B的一个上界。

如果存在一个元素b∈X, 使得对B中每个元素x, 有b≤x, 则称b为B的一个下界。

例3.8.7 令X={2, 3, 6, 12, 24, 36}, A在整除关系“|”下构成一个偏序集(X, |)。判断下列小题对错。

判断下面说法是否正确

6和2都是集合B={6, 12, 24, 36}的下界 √

36和24都是集合B={2, 6, 12, 24}的上界 ×

36和24都是集合B={2, 6, 12}的上界 √

（4）偏序集的有关术语－最大（最小）元素

定义3.8.7设（X，≦）是一个偏序集。B $\subseteq$X。

如果存在一个元素a $\in$B, 使得$\forall$x $\in$ B, 有x≦a, 则称a为B中的最大元素。

如果存在一个元素b$\in$B, 使得$\forall$x $\in$ B, 有b≦x, 则称b是B中的最小元素。

例3.8.7 令X={2, 3, 6, 12, 24, 36}, X在整除关系“|”下构成一个偏序集(X, |)。判断下列小题对错。

判断下面说法是否正确

36是集合B={6, 12, 24, 36}的最大元素 ×

24是集合B={2, 6, 12, 24}的最大元素 √

2是集合B={2, 3, 6, 12}的最小元素 ×

（4）偏序集的有关术语－上（下）确界

定义3.8.8设（X，≦）是一个偏序集。B $\subseteq$X。

如果B有上界且B的一切上界之集有最小元素，则这个最小上界称为B的上确界，记为supB。

类似的，如果B有下界且B的一切下界之集有最大元素，则称这个最大下界成为B的下确界，记为inf B。

例3.8.7 令X={2, 3, 6, 12, 24, 36, 48, 72}, A在整除关系“|”下构成一个偏序集(X, |)。判断下列小题对错。

判断下面说法是否正确

72是B={6, 12, 24, 36}的上确界 √

2和3都不是B={6, 12, 24}的下确界 √

72是B={6, 12, 24}的上确界 ×

（4）偏序集的有关术语 – 极大（小）元素

定义3.8.9设（X，≦）是一个偏序集。A ⊆X。

A中元素s称为A的极大元素，如果A中不存在与s不同的元素l，且s≦l。

如果A中有元素d，使得∀x ∈ A, x不等于d，x不小于 d，那么d被称为A的极小元素。

例3.8.7 令X={2, 3, 6, 12, 24, 36}, X在整除关系“|”下构成一个偏序集(X, |)。判断下列小题对错。

判断下面说法是否正确

A={6, 12, 24, 36}中24是极大元素 √

A={2, 3, 6, 12, 24}中2,3都是极小元素 √

**

P126,7.设R是X上的偏序关系。证明：R是X上的全序关系当且仅当$X \times X = R \cup R^{-1}$

证明：

必要性：R是X上的全序关系=>$X \times X = R \cup R^{-1}$

(1) $\forall (x, y) \in X \times X \Rightarrow (x, y) \in R$或者$(y,x) \in R$

$\Rightarrow (x, y) \in R$或者$(x,y) \in R^{-1}$

$\Rightarrow (x, y) \in R \cup R^{-1}$

$\Rightarrow X \times X \subseteq R \cup R^{-1}$

(2) $R \cup R^{-1} \subseteq X \times X$

因此：必要性成立。

P126,7.设R是X上的偏序关系。证明：R是X上的全序关系当且仅当$X\times X=R\cup R^{-1}$

证明：

充分性：$X\times X=R\cup R^{-1}$=>R是X上的全序关系

也就是证明：$\forall x\in X, \forall y\in X \Rightarrow (x, y)\in R$或者$(y,x)\in R$

$\forall x\in X, \forall y\in X \Rightarrow (x, y)\in X\times X$

$\Rightarrow (x, y)\in R$或者$(x,y)\in R^{-1}$

$\Rightarrow (x, y)\in R$或者$(y,x)\in R$

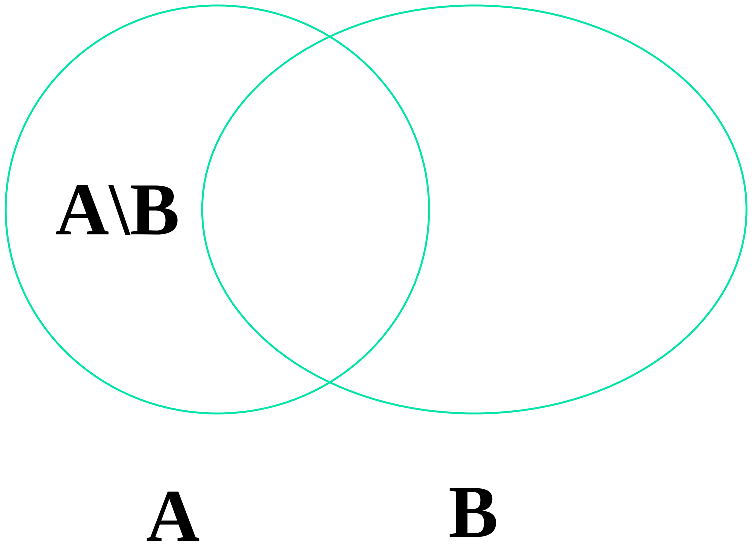
因此：充分性性成立。

2015-2016集合论有关复试题

2015年，共200分，占16分

1.设A,B为集合，使下列两式 $A\backslash B=\not\subset$ 和 $(A\cup B)\backslash B=(A\backslash B)\cup B$ 同时成立的充要条件是什么？

A. $A\subseteq B$
B. $B\subseteq A$
C. $A=B$
D. $A=B=\not\subset$ √



2015-2016集合论有关复试题

2.若映射f和g的合成$g \circ f$是双射，则下列论断哪个是正确的？

A. f 和g都是双射

B. f是单射，g是满射 √

C. f是满射，g是单射

D. 以上论断都不对

2015-2016集合论有关复试题

3.设A={1,2,3}，则A上可以定义多少个自反的二元关系？

A. 16

B. 32

C. 64 √

D. 128

2015-2016集合论有关复试题

4.设A={1,2,3}，则A上至多可以定义多少个等价关系?

A. 4

B. 5 √

C. 6

D. 7

2015-2016集合论有关复试题

5. 自然数集N是可数的，则N×N是否是可数的？N的幂集2^N是否是可数的？

A. 可数，可数

B. 可数，不可数 √

C. 不可数，可数

D. 不可数，不可数

2015-2016集合论有关复试题

6.设A,B,C为任意集合，则下列论断哪个是正确的？

A. 若$A\in B$，$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$

B. 若$A\subseteq B$，$B\in C$，则$A\in C$

C. 若$A\in B$，$B\subseteq C$，则$A\in C$ √

D. 若$A\subseteq B$，$B\in C$，则$A\subseteq C$

2015-2016集合论有关复试题

13.设Z是整数集合，映射f:Z→Z，f(x)=|x|-2x，则f应满足什么性质?

A. 单射 √

B. 满射

C. 双射

D. 以上答案都不对

2015-2016集合论有关复试题

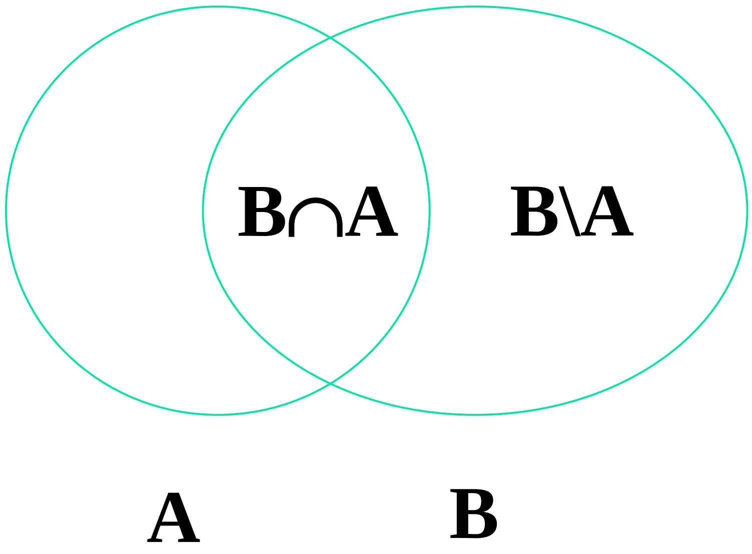
14.设A与B是两个任意集合，若{A∩B,B\A}是A∪B的一个划分，则A和B有何关系？

A. A\B=⊄

B. B\A=⊄

C. A=B=⊄

D. 以上答案都不对



2015-2016集合论有关复试题

2016，不全

6.(2 分) 设N 是自然数集合（0∈N），$f:N\rightarrow N\times N, f(n)=(n,n+1)$，则f 满足下列哪个性质？

A. f 既是单射也是满射，即双射；

B. f 既不是单射也不是满射；

C. f 是单射但不是满射； √

D. f 不是单射但是满射。

2015-2016集合论有关复试题

22.(2 分)

设X={1,2,3}，则X 上具有多少个反自反且反对称性的二元关系？

A. 9

B. 27 √

C. 32

D. 64

2015-2016集合论有关复试题

35.(2 分)8.设X={1,2,3,4}，则X 上可以定义多少个商集基数为2 的等价关系？

A. 5

B. 6

C. 7 √

D. 8

2015-2016集合论有关复试题

37.(2 分)设A,B 是两个集合，若{A∩B}是A∪B 的一个划分，则A 与B 之间的关系是下列结论中哪一个？

A. A=B; √

B. A=B=⊄ ;

C. A?B;

D. B?A;

第一章：集合及其应用

1.1 集合的概念

1.2 子集、集合的相等

1.3 集合的基本运算

1.4 余集、DeMorgan公式

1.5 笛卡尔乘积

1.6 有穷集合的基数

例(多项选择)集合A是以空集为唯一元素的集合,集合 B=P(P(A))，则有：(　)。

(1)¢∈B； √

(2)¢⊆B； √

(3){¢}⊆B； √

(4){{¢},{{¢}}}⊆B； √

(5){¢,{{¢}}}∈B。

$A=\{\varnothing\}$

$P(A)=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$P(P(A))=$
$\{\varnothing, \{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

1、设A、B是集合，证明：$A=\varnothing \Leftrightarrow B=A\Delta B$

证明:$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$

必要性显然,

充分性:如果$A\neq\varnothing$,设$x\in A$,分两种情况:

①$x\in A$且$x\in B$,则$x\notin A\Delta B$;

由$B=A\Delta B$,矛盾

②$x\in A$, $x\notin B$,则$x\in A\Delta B$, $x\notin B$,矛盾

因此$A=\varnothing$。

5(P33)、毕业舞会上，男生与女生跳舞，已知每个男生至少与一个女生跳过舞，但未能与所有女生跳过舞，同样地，每个女生也至少与一个男生跳过舞，但也未能与所有男生跳过舞。

证明：在所有参加舞会的男生与女生中，必可找到两个男生和两个女生，这两个男生中的每一个只与这两个女生中的一个跳过舞，而这两个女生中的每一个也只与这两个男生中的一个跳过舞。

证明：设男生集合为：$\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

设女生集合为：$\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$

设分别与男生$b_1, b_2, \ldots, b_n$跳过舞的女生集合为: $G_1, G_2, \ldots, G_n$。

b_i b_j

G_i G_j

Gi存在g_k没与b_j跳过舞　　Gj存在g_l没与b_i跳过舞

$g_k \in Gi$ 且 $g_k \notin Gj$　　$g_l \notin Gi$ 且 $g_l \in Gj$

证明：在所有参加舞会的男生与女生中，必可找到两个男生和两个女生，这两个男生中的每一个只与这两个女生中的一个跳过舞, 而这两个女生中的每一个也只与这两个男生中的一个跳过舞。

证明：设男生集合为：$\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

设女生集合为：$\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$

设分别与男生$b_1, b_2, \ldots, b_n$跳过舞的女生集合为：$G_1, G_2, \ldots, G_n$。

b_i　　　b_j

G_i　　　G_j

Gi存在g_k没与b_j跳过舞　　Gj存在g_l没与b_i跳过舞

$g_k \in Gi$ 且 $g_k \notin Gj$　　$g_l \notin Gi$ 且 $g_k \in Gj$

如果找不到这样的两个g_k 和 g_l.

则表明对于任意的G_i 和 G_j 要么$G_i \subseteq G_j$要么$G_j \subseteq G_i$

不失一般性：假设$G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_n$。

所有女生都在 G_n。bn与所有女生跳过舞，矛盾。

第二章：映射

2.1 函数的一般概念—映射

2.2 抽屉原理

2.3 映射的一般性质

2.4 映射的合成

2.5 逆映射

*2.6 置换

*2.7 二元和n元运算

2.8 集合的特征函数

令$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$,$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$,问：

(1)有多少个不同的由X到Y的映射？

(2)有多少个不同的由X到Y的部分映射？

(3)有多少个不同的由X到Y的双射？

(4)有多少个不同的从X到Y的单射？

(5)有多少个不同的从X到Y的满射？

令$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$,$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$,问：

(1)有多少个不同的由X到Y的映射？

(2)有多少个不同的由X到Y的部分映射？

(3)有多少个不同的由X到Y的双射？

答 (1) n^m

(2) $(n+1)^m$

(3) 要求$m=n$; $n!$

令$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$,$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$,问：

(4)有多少个不同的从X到Y的单射？

(5)有多少个不同的从X到Y的满射？

(4) 要求$n\geq m$; $C(n,m)m!$

(5)要求$m\geq n$先从m中选出n个，排成一列$C(m,n)n!$

再用剩下的m-n个任意映射Y中元素

$C(m,n)n!n^{m-n}$

令$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$,$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$,问：

有多少个不同的从X到Y的满射?

设Ai为yi没有原象映射集合，则从X到Y的满射个数是：

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right|$$

$$= N - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} |A_i \cap A_j|$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \sum_{h>j} |A_i \cap A_j \cap A_h| + \ldots$$

$$+ (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

$=n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \ldots$

$+(-1)^{n-1}C(n,n-1)1^m+(-1)nC(n,n)0^m$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)^m$$

第三章：关系

13(P114)、设X是一个集合,|X|=n,试求:

(1).X上二元关系的个数

(2).X上自反二元关系的个数

X上反自反二元关系的个数;

(3).X上对称二元关系的个数;

X上反对称二元关系的个数;

(4).X上相容二元关系的个数;

X上自反和反对称的二元关系的个数。

X上反自反和对称的二元关系的个数。

X上反自反和反对称的二元关系的个数

(5).X上自反或对称关系的个数;

X上自反或反对称关系的个数;

X上反自反或对称关系的个数;

X上反自反或对称关系的个数

(6) X上等价关系的个数。

13(P114)、设X是一个集合，|X|=n，试求：

(1). X上关系的个数

答：2^{n^2}

基于关系矩阵怎样理解？

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

13(P114)、设X是一个集合, |X|=n, 试求:

(2). X上自反二元关系的个数

X上反自反二元关系的个数;

例：X={a, b}, 比较X上自反和反自反二元关系

$\{(a,a),(b,b)\}$	$\varnothing$
$\{(a,a),(b,b),(a,b)\}$	$\{(a,b)\}$
$\{(a,a),(b,b),(b,a)\}$	$\{(b,a)\}$
$\{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a)\}$	$\{(a,b),(b,a)\}$

X上自反和反自反的二元关系是一一对应的。

反自反二元关系的个数为:

$|X|=n$, $|X\times X|=n^2$,

从$|(X\times X)\setminus I_x|=n^2-n=n(n-1)$

$(X\times X)\setminus I_x$关系的个数为$2^{n(n-1)}$

X上自反二元关系的个数为$2^{n(n-1)}$；

X上反自反二元关系的个数也是$2^{n(n-1)}$；

基于关系矩阵怎样理解？

X上自反二元关系的个数为$2^{n(n-1)}$；

X上反自反二元关系的个数也是$2^{n(n-1)}$；

基于关系矩阵怎样理解？

$$\begin{bmatrix} 1 & b & c \\ d & 1 & f \\ g & h & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ d & 0 & f \\ g & h & 0 \end{bmatrix}$$

13(P114)、设X是一个集合，|X|=n，试求：

(3). X上对称二元关系的个数；

X上反对称二元关系的个数；

例：X={a, b}上对称的二元关系

$\varnothing$

{(a, a)}

{(b, b)}

{(a, a), (b, b)}

{(a, b), (b, a)}

{(a, a), (a, b), (b, a)}

{(b, b), (a, b), (b, a)}

{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)}

(a, b)与(b, a)同时出现，我们把他们作为一个整体

设R是X上对称的二元关系；

如果$(x, y)\in R$，则$(y, x)\in R$，

如果$x\neq y$，则(x, y)与(y, x)作为整体参与计算

$|X|=n$, $|X\times X|=n^2$,

x与y相等的有序对有n个

x与y不相等的有序对是n^2-n个

x与y不相等的有序对的一半是$(n^2-n)/2$个

参与计算的有序对是$[(n^2-n)/2]+n=(n^2+n)/2$

X上对称二元关系的个数是$2^{n(n+1)/2}$；

基于关系矩阵怎样理解？

X上对称的二元关系；

基于关系矩阵怎样理解？

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & d_1 \\ c_2 & d_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

X上对称二元关系的个数是$2^{n(n+1)/2}$；

13(P114)、设X是一个集合, |X|=n, 试求：

(3). X上反对称二元关系的个数;

例：X={a, b}上反对称的二元关系

$\varnothing$

{(a,a)}, {(b,b)}, {(a,b)}, {(b,a)}

{(a,a),(b,b)},{(a,a),(a,b)},{(a,a),(b,a)},

{(b,b),(a,b)},{(b,b),(b,a)}

{(a,a),(b,b),(a,b)}

{(a,a),(b,b),(b,a)}

(a, b)与(b, a)不能同时出现。

利用关系矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

设关系矩阵中元素形如a_{ij}

i≠j时，要求aij和aji不同时为1

i≠j时，aij和aji的选择有4种；分别为0和1；1和0；0和0；1和1。

要保证反对称，当i≠j时，aij和aji的选择有3种；分别为0和1；1和0；0和0；

这样的对称位置有n(n-1)/2个；

对角线上有n个元素，每个有2中选择；

反对称二元关系 $3^{n(n-1)/2} \bullet 2^{n}$

13(P114)、设X是一个集合，|X|=n，试求：

(4). X上相容二元关系的个数

X上反自反和对称的二元关系的个数

都是$2^{n(n-1)/2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

13(P114)、设X是一个集合, |X|=n, 试求:

(4). X上自反和反对称的二元关系的个数

X上反自反和反对称的二元关系的个数

反对称二元关系 $3^{n(n-1)/2}\bullet 2^{n}$

自反反对称二元关系 $3^{n(n-1)/2}$

反自反反对称二元关系 $3^{n(n-1)/2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

13(P114)、设X是一个集合,|X|=n,试求:

(5).X上自反或对称关系的个数;

X上反自反或对称关系的个数;

X上自反或反对称关系的个数;

X上反自反或对称关系的个数

由前几题综合可得

13(P114)、设X是一个集合, |X|=n, 试求:

(6). X上等价关系的个数。

讨论。

X集合的划分数

例 设R是A上的二元关系，下面的结论是否正确？并证明你的结论.

（1）R是自反的，则R·R也是自反的 √

（2）R是对称的，则R·R也是对称的。 √

（3）R是反自反和传递的，则R是反对称的。√

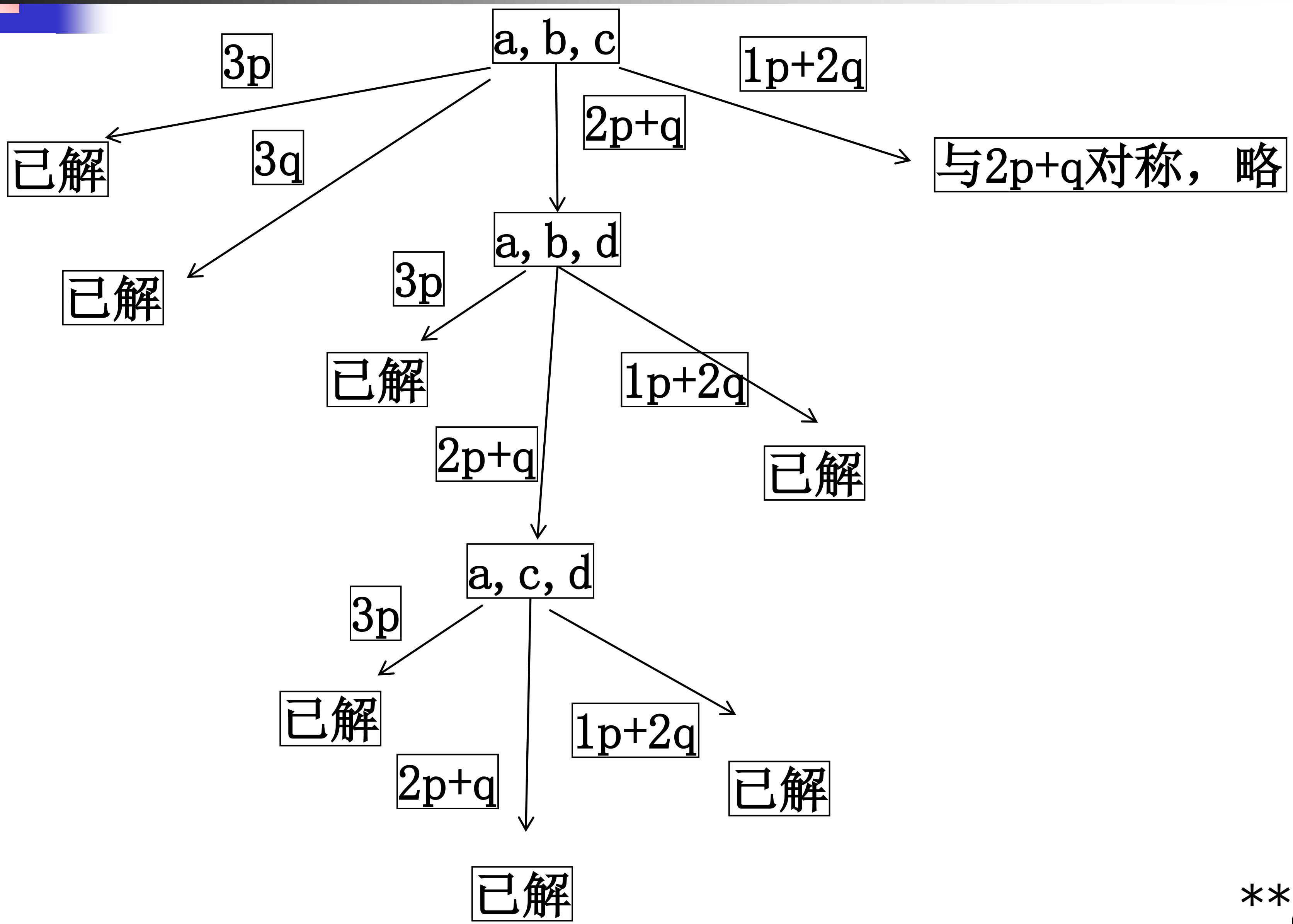
集合论复习

P44,6.珍珠4颗，有真有假，真珍珠重量相同且为p,假珍珠重量相同且为q，p>q,用秤（不是天平）仅称量3次，查出真假，应该怎么做?

解：设4颗珍珠分别为a,b,c,d

思想：先选3个一起称，如果确定不了，更换其中一个再称。

集合论复习



a, b, c
3p
已解
3q
已解
2p+q
1p+2q
与2p+q对称，略
a, b, d
3p
已解
1p+2q
已解
2p+q
a, c, d
3p
已解
2p+q
已解
1p+2q
已解