# 第三章：关系

# 3.5 关系矩阵与关系图

## 本节主要问题

（1）关系矩阵的定义

（2）关系矩阵的性质

（3）关系图的定义

（4）关系图的性质

# （1）关系矩阵的定义

**例3.5.1 设X={1,2,3,4},Y={a,b,c,d,e}**

**R={(1,a),(3,a),(2,b),(2,d),(2,e),**

**(3,d),(3,b),(3,e),(4,c),(4,d)}**

**则R的关系矩阵为:**

$$
B_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \mathrm{a} & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

# （1）关系矩阵的定义

$$B_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

**定义3.5.1 设：$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$。$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$。令R是X到Y的一个二元关系。由R定义一个$m\times n$的矩阵$B=(b_{ij})$如下:$\forall(x_i, y_j)\in X\times Y$,**

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{若 } x_i R y_j \\ 0, \text{若 } x_i \text{与} y_j \text{不符合关系} R \end{cases}$$

矩阵B称为关系R的矩阵。

# （1）关系矩阵的定义

**当R是X(|X|=n)上的二元关系时,R的关系矩阵B是一个n×n布尔矩阵。**

**例3.5.2 设X={1,2,3,4},**

**R={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4),(4,2)}**

**求R的关系矩阵**

$$\boldsymbol{B_R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# （2）关系矩阵的性质

命题3.5.2　设B为X上关系R的矩阵，则：

**(1)R是自反的**

**当且仅当B的对角线上的全部元素都为1;**

**例 设X={1,2,3},**

**R={(1,1),(2,2),(3,3),(1,3),(2,3)}**

**求R的关系矩阵**

$$B_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# （2）关系矩阵的性质

命题3.5.2　设B为X上关系R的矩阵，则：

**(2)R是反自反的**

当且仅当**B**的对角线上的全部元素都为**0;**

例 设**X={1,2,3},**

**R={(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)}**

求**R**的关系矩阵

$$B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# （2）关系矩阵的性质

命题3.5.2　设B为X上关系R的矩阵, 则:

**(3)R是对称的**

$\forall$ $b_{ij}=1$, 　　则$b_{ji}=1$, 　当且仅当B是对称矩阵;

例 设X={1,2,3},

R={(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(3,3)}

求R的关系矩阵

$$B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# （2）关系矩阵的性质

**(4)R是反对称的**

**R是反对称的当且仅当i≠j时;**
**$b_{ij}$与$b_{ji}$不同时为1,**

**例 设X={1,2,3},**
**R={(1,2),(2,3),(1,3)}**
**求R的关系矩阵**

$$B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# （2）关系矩阵的性质

**(5)R是传递的**

**R是传递的当且仅当**

**如果$b_{ij}=1$且$b_{jk}=1$,则$b_{ik}=1$;**

**例 设X={1,2,3},**

**R={(1,2),(2,3),(1,3)}**

**求R的关系矩阵**

$$B_R=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

# （2）关系矩阵的性质

(6) $R^{-1}$的矩阵。

**例 设X={1,2,3},**

**R={(1,2),(2,3),(1,3)}**

**$R^{-1}$={(2,1),(3,2),(3,1)}**

$$B_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵的转置。

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

# 2015-2016集合论有关复试题

**3.设A={1,2,3}，则A上可以定义多少个自反的二元关系？**

A. 16

B. 32

C. 64 √

D. 128

$$\begin{bmatrix} 1 & ? & ? \\ ? & 1 & ? \\ ? & ? & 1 \end{bmatrix}$$

**对角线上必须都是1，其它位置可选0或1，共有6个位置，方案数是$2^6$。**

# 2015-2016集合论有关复试题

22.(2 分)

设X={1,2,3}，则X 上具有多少个反自反且反对称性的二元关系？

$$\begin{bmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & e \\ d & f & 0 \end{bmatrix}$$

**A. 9**

**B. 27** √

**C. 32**

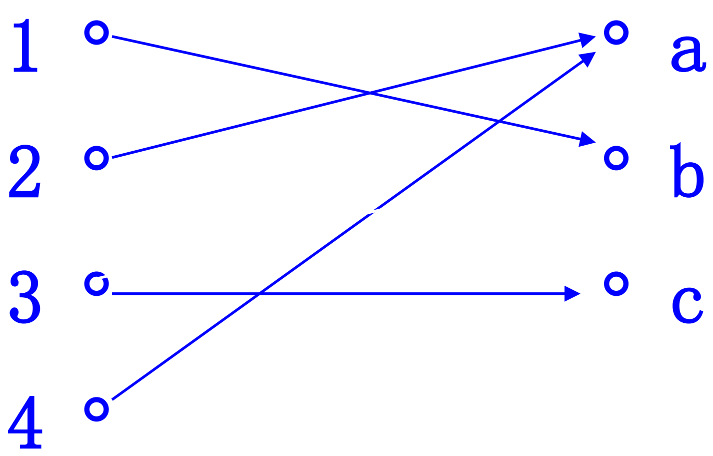
**D. 64**

**对角线上必须都是0，沿对角线对称位置取值不能同时为1，例如：a和b取值不能同时为1，可选0,0；0,1或1,0；相当于3个位置，每个位置有3种选择；方案数是$3^3$。**

# （3）关系图的定义

关系除了用矩阵表示外,还可用图来表示。

例3.5.3　设X={1, 2, 3, 4}, Y={a, b, c},
R={(1, b), (2, a), (4, a), (3, b), (3, c)}
则R的关系图为：



# （3）关系图的定义

## 一、关系图的画法

1、先把X与Y中的元素在纸上用小圆圈表示,并在旁边标注上这个元素的名字。

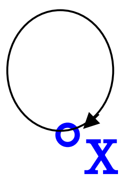
2、然后把R的任一序对(x,y)用从代表x的点画一条指向代表y的点的矢线表示。

得到一个由点线组成的有向图。

# （4）关系图的性质

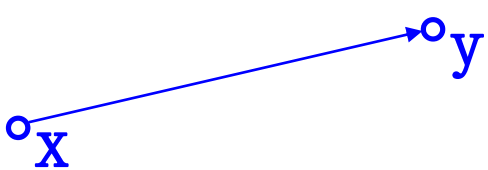
## 二、关系的不同性质在关系图中的体现

### 1 、自反性




每个点上都有一个有向圈

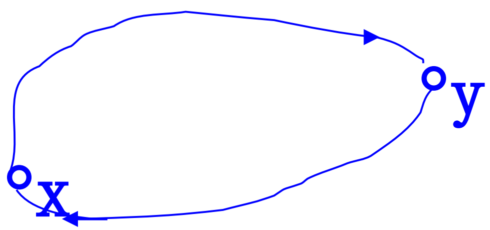
### 2、反自反性




每个点上都没有圈

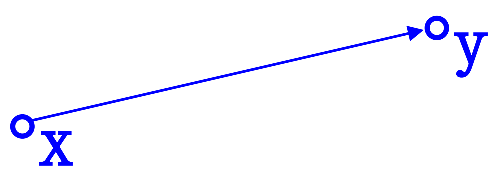
# （4）关系图的性质

## 3、对称性




∀ x, y, 如果有从x到y的有向线，就有从y到x的有向线。

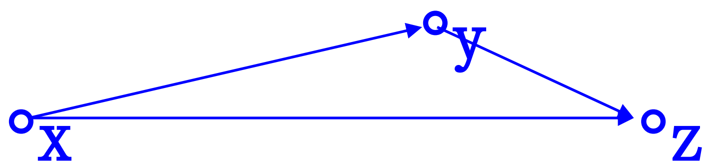
## 4、反对称性




∀ x, y, 从x到y的有向线与从y到x的有向线只能有一条。

# （4）关系图的性质

## 5、传递性




∀ x, y, z, 如果有从x到y的有向线, 同时又有从y到z的有向线，则必有从y到z的有向线。

**

# 第三章：关系

3.1 关系的概念
3.2 关系的性质
3.3 关系的合成运算
3.4 关系的闭包
3.5 关系矩阵和关系图
3.6 等价关系和集合的划分
3.7 映射按等价关系分解
3.8 偏序关系与偏序集
3.9*良序集与数学归纳法

# 3.6 等价关系与集合的划分

## 本节主要问题

（1）等价关系的定义

（2）等价类的定义

（3）集合划分的定义

（4）等价类和集合划分的关系

（5）商集的定义

（6）等价闭包

# （1）等价关系的定义

例3.6.1　考虑整数集{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}上的模3同余关系。

**R={ (1, 1), (1, 4), (1, 7)**
**(2, 2), (2, 5), (2, 8)**
**(3, 3), (3, 6)**
**(4, 1), (4, 4), (4, 7)**
**(5, 2), (5, 5), (5,8)**
**(6, 3), (6, 6)**
**(7, 1), (7, 4), (7, 7)**
**(8, 2), (8, 5), (8, 8)}**

(1). 自反性

(2). 对称性

(3). 传递性

# （1）等价关系的定义

例3.6.1　考虑整数集Z上的模n同余关系。

(1).自反性

$\forall m \in Z$，$m \equiv m \pmod{n}$，故自反性成立。

(2).对称性

$\forall m, k \in Z$，如果$m \equiv k \pmod{n}$，则$k \equiv m \pmod{n}$，故对称性成立。

(3).传递性

$\forall m, k, h \in Z$，如果$m \equiv k \pmod{n}$，并且$k \equiv h \pmod{n}$，那么$m \equiv h \pmod{n}$，因此，传递性成立。

# （1）等价关系的定义

定义3.6.1　集合X上的二元关系R称为等价关系，如果R同时具有以下三个性质：

1°. R是自反的, 即$\forall x \in X$, $xRx$;

2°. R是对称的, 即如果$xRy$, 则$yRx$;

3°. R是传递的, 即如果$xRy$, $yRz$;则$xRz$。

## （1）等价关系的定义

X是一非空集合，判断以下关系是否是等价关系？

a. $2^X$上集合的包含于“$\subseteq$”关系。

b. $2^X$上集合的真包含于“$\subset$”关系。

c. $I_X$

d. $I_X$的任一真子集$R\subset I_X$

e. 实数集上的“小于或等于”关系“$\leq$”

f. 实数集上的小于关系“$<$”

g. 自然数上的模n同余关系。

h. 映射的核关系。

# （2）等价类的定义

例3.6.7　整数集合Z上的模2同余关系可以把整数集合中所有元素分成两个集合。

[0]={...,-4,-2,0,2,4,...}　　　　//与0有关系的一类

[1]={...,-3,-1,1,3,5,...}　　　　//与1有关系的一类

**定义3.6.2**

设R是X上的一个等价关系，$x \in X$, X的子集 $E_x = \{ y \mid y \in X \text{ 且 } x R y\}$称为x关于R的等价类，或简记为x的等价类。

x的等价类常记为[x],即$[x]=\{y \mid y \in X \text{且} x R y\}$。

## （2）等价类的定义

例：求整数集X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}上的模3同余关系的等价类。

R={ (1, 1), (1, 4), (1, 7)
(2, 2), (2, 5), (2, 8)
(3, 3), (3, 6)
(4, 1), (4, 4), (4, 7)
(5, 2), (5, 5), (5,8)
(6, 3), (6, 6)
(7, 1), (7, 4), (7, 7)
(8, 2), (8, 5), (8, 8)}

集合X上的模3同余关系R的等价类是：

[1]={1, 4, 7}
[2]={2, 5, 8}
[3]={3, 6}

## （2）等价类的定义

例　整数集合Z上的模3同余关系可以把整数集合中所有元素分成3个集合。

$[0] = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$

$[1] = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$

$[2] = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$

在这里：$[0] = [-3] = [3] = \ldots$

在这里：$[1] = [-2] = [4] = \ldots$

在这里：$[2] = [-1] = [8] = \ldots$

$[-3] = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$

$[-2] = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$

$[8] = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$

# （3）集合划分的定义

例如,若X={a,b,c,d,e}

由X的子集形成一个集族，A={{a,b},{c},{d,e}}

(1)A的元素中没有空集,

(2)A中任意不相等的集合间没有共同元素,

(3)A中所有集合的并集等于集合X。

A是X的一个划分。

定义3.6.3　设X为集合, X的一些非空子集形成的集族A称为X的一个划分, 如果A具有性质。

1°.　$\forall B, C \in A$, 若$B \neq C$, 则$B \cap C = \varnothing$; 且

2°.　$\bigcup_{B \in A} B = X$

# （3）集合划分的定义

例如,若$X=\{a,b,c,d,e\}$

由X的子集形成一个集族，$A=\{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$

(1)A的元素中没有空集,

(2)A中任意不相等的集合间没有共同元素,

(3)A中所有集合的并集等于集合X。

A是X的一个划分。

换种说法：

定义3.6.3* 设X是一个集合, $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$是X的非空子集，如果集族$A=\{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\}$具有如下性质，则称A是X的一个划分。

1°. $\forall A_i, A_j \in A$, 若$A_i \neq A_j$, 则$A_i \cap A_j = \varnothing$;

2°. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n = X$

# （4）等价类和集合划分的关系

如果A是X的一个划分，则当|A|=k时，A被称为X的一个k-划分。

例　整数集合Z上的模3同余关系可以把整数集合中所有元素分成3个集合。

[0] = {..., -6, -3, 0, 3, 6, ...}

[1] = {..., -5, -2, 1, 4, 7, ...}

[2] = {..., -4, -1, 2, 5, 8, ...}

{[0], [1], [2]}是Z的一个3划分。

# （4）等价类和集合划分的关系

**定理3.6.1 设R是X上的一个等价关系，则R的所有等价类的集合是X的一个划分。**

设R的等价类集合为$\{[x_1], [x_2], \dots, [x_m]\}$

只需证明： (1)$\forall i, [x_i] \neq \varnothing$;

(2)如果$[x_i] \neq [x_j]$, 则$[x_i] \cap [x_j] = \varnothing$,

(3)$[x_1] \cup [x_2] \cup \dots \cup [x_m] = X$。

例3.6.7 整数集合Z上的模2同余关系可以把整数集合中所有元素分成两个集合。

$[0]=\{\dots,-4,-2,0,2,4,\dots\}$

$[1]=\{\dots,-3,-1,1,3,5,\dots\}$

$\{[0], [1]\}$是Z的一个2划分。

# （4）等价类和集合划分的关系

**定理3.6.1 设R是X上的一个等价关系，则R的所有等价类的集合是X的一个划分。**

**例3.6.7 整数集合Z上的模2同余关系可以把整数集合中所有元素分成两个集合。**

**[0]={...,-4,-2,0,2,4,...}**

**[1]={...,-3,-1,1,3,5,...}**

**{[0]，[1]}是Z的一个2划分。**

**设R的等价类集合为$\{[x_1], [x_2], \ldots, [x_m]\}$**

**证明:**

**(1) 由自反性 $\forall i$, $x_i \in [x_i]$，因此 $[x_i] \neq \varnothing$。**

# （4）等价类和集合划分的关系

**定理3.6.1 设R是X上的一个等价关系，则R的所有等价类的集合是X的一个划分。**

例3.6.7 整数集合Z上的模2同余关系可以把整数集合中所有元素分成两个集合。

[0]={...,-4,-2,0,2,4,...}

[1]={...,-3,-1,1,3,5,...}

{[0]，[1]}是Z的一个2划分。

设R的等价类集合为$\{[x_1], [x_2], \ldots, [x_m]\}$

证明:

(2)如果$[x_i] \neq [x_j]$, 且$[x_i] \cap [x_j] = x$,
则$x_i$ R x 且 $x_j$ R x 由对称性，传递性得：
$x_i R x_j$，则 $[x_i]=[x_j]$，矛盾，因此：$[x_i] \cap [x_j] = \varnothing$

# （4）等价类和集合划分的关系

**定理3.6.1 设R是X上的一个等价关系，则R的所有等价类的集合是X的一个划分。**

例3.6.7 整数集合Z上的模2同余关系可以把整数集合中所有元素分成两个集合。

$[0]=\{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\}$

$[1]=\{\ldots,-3,-1,1,3,5,\ldots\}$

{[0]，[1]}是Z的一个2划分。

设R的等价类集合为$\{[x_1], [x_2], \ldots, [x_m]\}$

证明:

(3) $\forall x \in X, x \in [x]$

因此：$[x_1] \cup [x_2] \cup \ldots \cup [x_m] = X$。

## （4）等价类和集合划分的关系

定理3.6.2 设A是集合X的一个划分，令

$$R = \bigcup_{B \in A} B \times B$$

则R是X上的一个等价关系,并且A就是R的等价类之集。

**换种说法：**

**定理3.6.2* 设A={$A_1$, $A_2$, ……, $A_n$}是集合X的一个划分。**

$$\mathbf{R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \ldots\ldots \cup (A_n \times A_n)}$$

**则R是X上的一个等价关系,并且A就是R的等价类之集。**

## （4）等价类和集合划分的关系

定理3.6.2* 设$A=\{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\}$是集合X的一个划分。

$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \ldots\ldots \cup (A_n \times A_n)$$

则R是X上的一个等价关系, 并且A就是R的等价类之集。

例如：$X = \{a, b, c, d, e\}$,

$A = \{\{a,b,c\}, \{d\}, \{e\}\}$是X的一个划分。

$R = \{\{a,b,c\}\times\{a,b,c\}, \{d\}\times\{d\},\{e\}\times\{e\}\}$

证明: (1) R 是等价关系

(2) A是R的等价类之集。

## （4）等价类和集合划分的关系

定理3.6.2* 设$A=\{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\}$是集合X的一个划分。

$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \ldots\ldots \cup (A_n \times A_n)$$

则R是X上的一个等价关系, 并且A就是R的等价类之集。

例如：$X = \{a, b, c, d, e\}$,

$A = \{\{a,b,c\}, \{d\}, \{e\}\}$是X的一个划分。

$R = \{\{a,b,c\}\times\{a,b,c\}, \{d\}\times\{d\},\{e\}\times\{e\}\}$

证明R是等价的包含以下三项:

(1) $\forall x \in X$, 则$(x, x)\in R$;

(2) $\forall(x, y)\in R$, 则 $(y, x)\in R$;

(3) $\forall(x, y)\in R$, $(y, z)\in R$ 则 $(x, z)\in R$。

# （4）等价类和集合划分的关系

定理3.6.2* 设$A=\{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\}$是集合X的一个划分。

$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \ldots\ldots \cup (A_n \times A_n)$$

则R是X上的一个等价关系, 并且A就是R的等价类之集。

例如：$X = \{a, b, c, d, e\}$,

$A = \{\{a,b,c\}, \{d\}, \{e\}\}$是X的一个划分。

$R = \{\{a,b,c\}\times\{a,b,c\}, \{d\}\times\{d\}, \{e\}\times\{e\}\}$

证明R是自反的： (1) $\forall x \in X$, 则$(x, x)\in R$;

$\forall x \in X$

$\Rightarrow \exists i, x \in A_i$;

$\Rightarrow \exists i, (x, x) \in A_i \times A_i$;

$\Rightarrow (x, x)\in R$

因此，自反性成立。

# （4）等价类和集合划分的关系

定理3.6.2* 设$A=\{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\}$是集合X的一个划分。

$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \ldots\ldots \cup (A_n \times A_n)$$

则R是X上的一个等价关系, 并且A就是R的等价类之集。

例如：$X = \{a, b, c, d, e\}$,

$A = \{\{a,b,c\}, \{d\}, \{e\}\}$是X的一个划分。

$R = \{\{a,b,c\}\times\{a,b,c\}, \{d\}\times\{d\},\{e\}\times\{e\}\}$

证明R是对称的： (2) $\forall(x, y)\in R$, 则 $(y, x)\in R$;

$\forall(x, y)\in R$

$\Rightarrow \exists i, x \in A_i, y \in A_i$;

$\Rightarrow \exists i, (y, x) \in A_i \times A_i$;

$\Rightarrow (y, x)\in R$

因此, 对称性成立。

# （4）等价类和集合划分的关系

定理3.6.2* 设$A=\{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\}$是集合X的一个划分。

$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \ldots\ldots \cup (A_n \times A_n)$$

则R是X上的一个等价关系, 并且A就是R的等价类之集。

例如：$X = \{a, b, c, d, e\}$,

$A = \{\{a,b,c\}, \{d\}, \{e\}\}$是X的一个划分。

$R = \{\{a,b,c\}\times\{a,b,c\}, \{d\}\times\{d\},\{e\}\times\{e\}\}$

证明R是传递的： (3) $\forall(x,y)\in R$, $(y,z)\in R$ 则 $(x, z)\in R$

$\forall(x, y)\in R$, $(y,z)\in R$

$\Rightarrow \exists i, x \in A_i, y \in A_i, z \in A_i$

$\Rightarrow \exists i, (x, z) \in A_i \times A_i$;

$\Rightarrow (x, z)\in R$

因此, 传递性成立。

# （4）等价类和集合划分的关系

定理3.6.2* 设A={$A_1$, $A_2$, ……, $A_n$}是集合X的一个划分。

$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \cdots\cdots \cup (A_n \times A_n)$$

则R是X上的一个等价关系, 并且A就是R的等价类之集。

例3.6.7 整数集合Z上的模2同余关系可以把整数集合中所有元素分成两个集合。

[0]={...,-4,-2,0,2,4,...}

[1]={...,-3,-1,1,3,5,...}

{[0]，[1]}是Z的等价类之集。

证明A就是R的等价类之集，需要三部分。

（1）$\forall A_i$, $A_i$中的元素相互之间有关系R。

（2）$\forall A_i$, $\forall A_j$, $i \neq j$, $A_i$和$A_j$中的任何元素无关系。

（3）$\forall x \in X$, $\exists A_i$, $x \in A_i$。

# （4）等价类和集合划分的关系

定理3.6.1 设R是X上的一个等价关系，则R的所有等价类的集合是X的一个划分。

1. X的一个等价关系确定X的一个划分。

定理3.6.2* 设$A=\{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\}$是集合X的一个划分。

$$R = (A_1\times A_1)\cup(A_2\times A_2)\cup\ldots\ldots\cup(A_n\times A_n)$$

则R是X上的一个等价关系, 并且A就是R的等价类之集。

2. X的一个划分确定一个等价关系。

定理3.6.3 集合X上的二元关系R是一个等价关系,当且仅当存在X的一个划分A，使得xRy的充分必要条件是$\exists B\in A$，使$x,y\in B$。

3. X的一个划分和X的等价关系是一一对应的。

# （4）等价类和集合划分的关系

1、X上的等价关系与X的划分是一一对应的，并且互相确定。

2、等价关系R确定的划分是R的所有等价类之集$\{[x] \mid x \in X\}$。

# 2015-2016集合论有关复试题

**4.设A={1,2,3}，则A上至多可以定义多少个等价关系?**

A. 4

B. 5 √

C. 6

D. 7

**等价关系数等于集合的划分数!**

**1划分?**

**{{1,2, 3}}，1个;**

**2划分?**

**{{1, 2},{3}}，{{1, 3},{2}}**

**{{2, 3},{1}}，3个;**

**3划分?**

**{{1}, {2}, {3}}，1个。**

# （5）商集的定义

**定义3.6.4 设R是X上的等价关系,由R所确定的X的划分，也就是R的所有等价类之集，称为X对R的商集，并记作X/R。**

**于是X/R={[x]|x∈X,[x]是x的等价类}。**

**例 整数集合Z上的模3同余关系R可以把整数集合中所有元素分成3个集合。**

**[0]={...,-6,-3,0,3,6,...}**
**[1]={...,-4,-1,1,4,7,...}**
**[2]={...,-5,-2,2,5,8,...}**

**Z/R={[0],[1],[2]}。**

# 2015-2016集合论有关复试题

35.(2 分)8.设X={1,2,3,4}，则X 上可以定义多少个商集基数为2 的等价关系？

A. 5

B. 6

C. 7 √

D. 8

等价关系数商集基数为2，对应集合的二划分！

2划分？

1-3划分？ 4种；

2-2划分？ 3种。

# （6）等价闭包

**R的等价闭包(R的自反对称传递闭包)，记为e(R), e(R)是X上包含R的那些等价关系的交集。**

**定理3.6.4 设R为X上的一个二元关系，则：**

$$e(R)=(R\cup R^{-1})^{*}。$$

**

# 关系性质分析

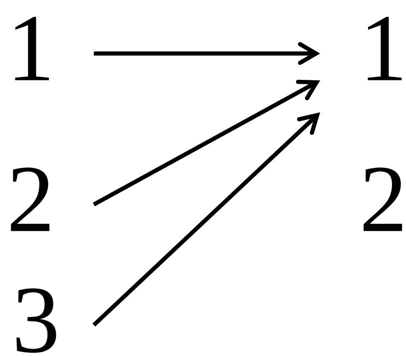
设X是一个非空集合，例如：X={a, b, c}, 问：在集合的包含意义下，X上符合以下关系的最小的关系是什么？最大的关系是什么？

| | |
|---|---|
| (1) 自反关系 | 恒等关系**Ix**和全关系**X×X** |
| (2) 反自反关系 | 空关系∅和**(X×X)\ Ix** |
| (3) 对称的关系 | 空关系∅和全关系**X×X** |
| (4) 反对称的二元关系 | 空关系∅和（没有最大的） |
| (5) 传递关系 | 空关系∅和全关系**X×X** |
| (6) 相容关系 | 恒等关系**Ix**和全关系**X×X**。 |
| (7) 等价关系 | 恒等关系**Ix**和全关系**X×X**。 |

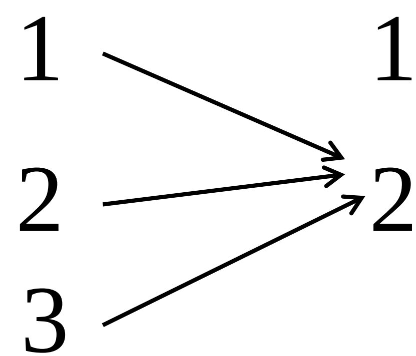
# 关系性质分析

**P113, 3题：** 设X={1, 2, 3}， Y={1, 2}，

$S = \{f \mid f:X\to Y\}$。≅是S上的一个二元关系，定义如下：$f, g \in S$， $f \cong g$ 当且仅当 $\{f^{-1}(y) \mid y\in Y\}=\{g^{-1}(y) \mid y\in Y\}$，证明： ≅是S上的等价关系，求等价类之集。

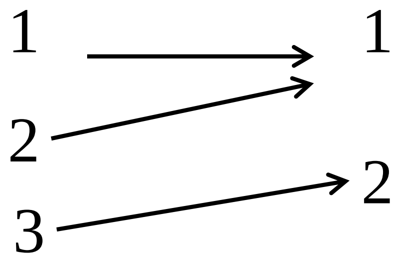


$\{\{1, 2, 3\}, \varnothing\}$

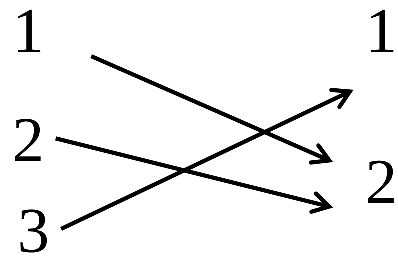


$\{\{1, 2, 3\}, \varnothing\}$

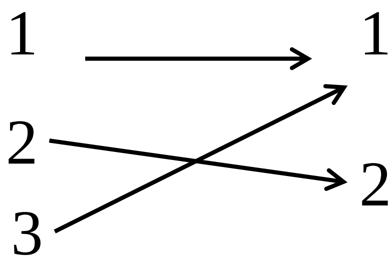
# 关系性质分析



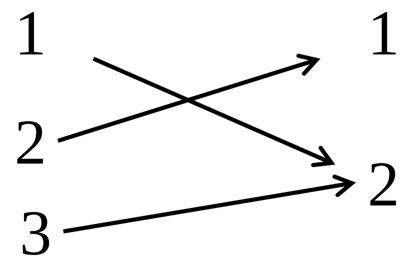
$\{\{1,2\},\{3\}\}$



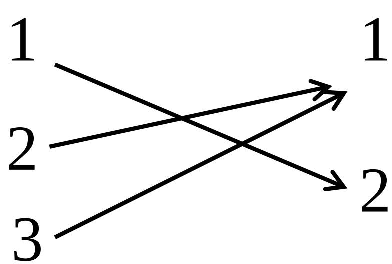
$\{\{1,2\},\{3\}\}$



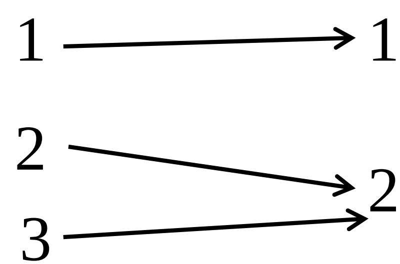
$\{\{1,3\},\{2\}\}$



$\{\{1,3\},\{2\}\}$



$\{\{2,3\},\{1\}\}$



$\{\{2,3\},\{1\}\}$