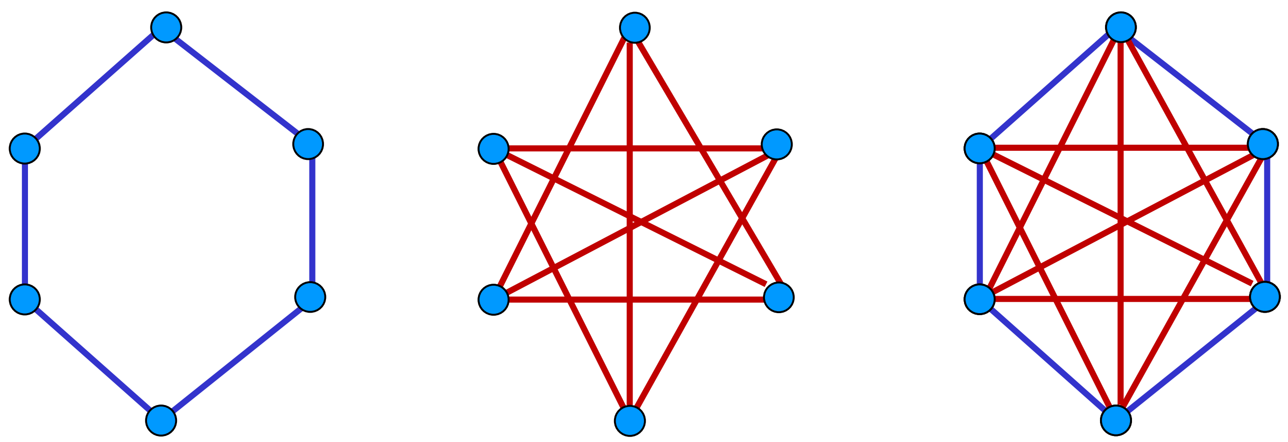
## 二、补图的性质

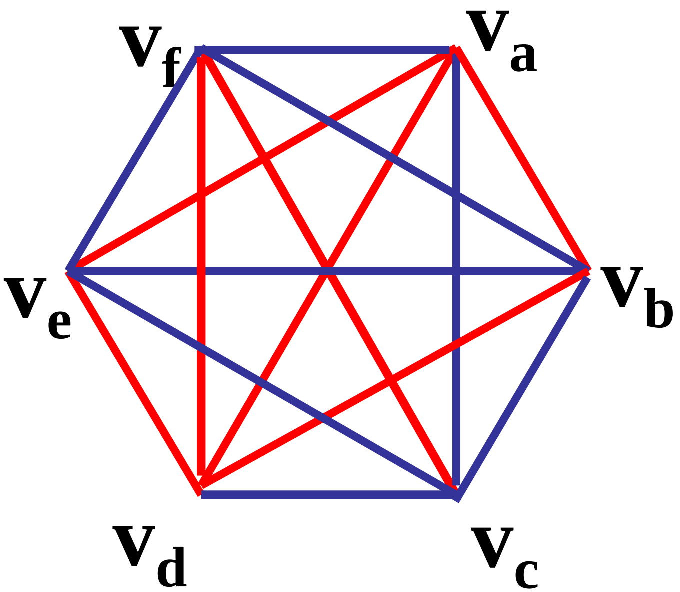
定理6.4.1 对任一有6个顶点的图G, G中或$G^c$中有一个三角形。

在任何6个人的团体中, 存在3个互相认识的人或三个互不认识的人.



# 二、补图的性质

问题等价于证明这6个顶点的完全图的边，用红、蓝二色任意着色，必然至少存在一个红色边三角形，或者存在一个蓝色边三角形。



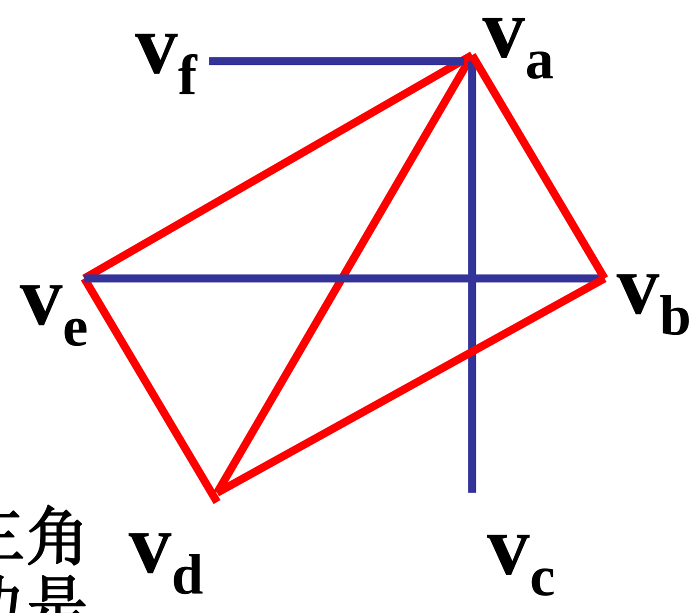
# 二、补图的性质

Va点和其他5个顶点相连有5条边，每条边或着以红色，或着以蓝色。依据鸽巢原理，其中至少有3条边同色，不妨假定有3条边着以红色，

3条边的另外3个端点设为 $v_e$，$v_d$，$v_b$。

这3个端点间的联线或同色或不同色，

若同色。则已存在一个同色三角形，如果不同色，则至少有一条边是红色。



# 二、哈密顿图的性质

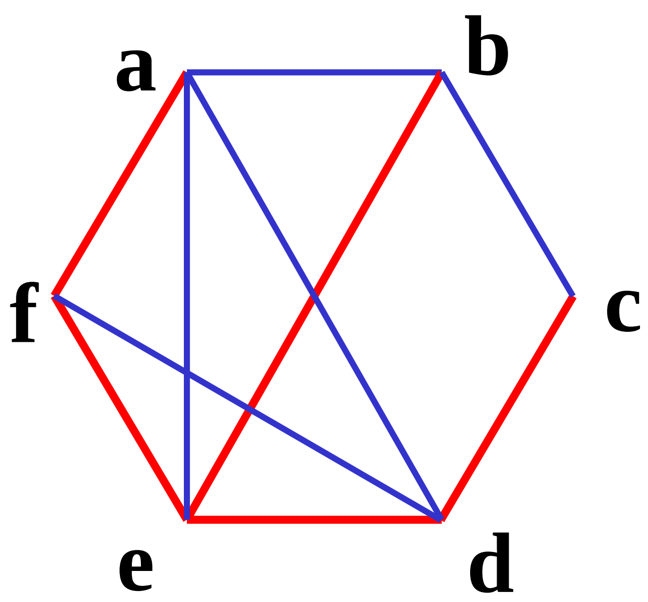
定理6.6.2　设G是一个有p个顶点的图, $p\geqslant 3$. 如果$\delta(G)\geqslant p/2$, 则G是一个哈密顿图.

[证] 等价的命题:“设G是一个p个顶点的非哈密顿图，$p\geqslant 3$, 则G中至少有一个顶点的度小于$p/2$。”

# 二、哈密顿图的性质

证明任何非哈密顿图至少有一个顶点的度小于p/2的思想。

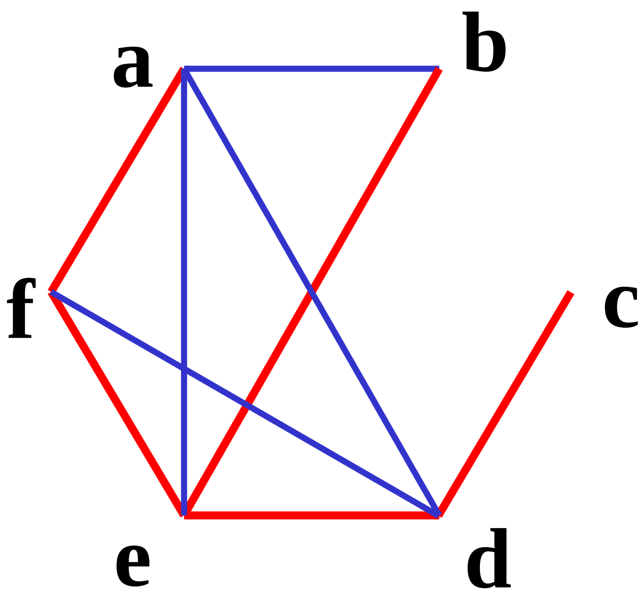
(1) 如果图G不是哈密顿图通过不断加边使之成为一个哈密顿图。




(2) 去掉最后加入的一条边，这时候的图记为G′，是一个有哈密顿路没有哈密段圈的图，只要证明G′中有一个顶点度小于p/2即可。

# 二、哈密顿图的性质

（3）设G′中哈密顿路为$v_1-v_2-v_3-\cdots-v_p$，如果$v_1$与$v_i$邻接，则$v_p$不能与$v_{i-1}$邻接。




图G′

例如：如果c与f邻接

则存在哈密顿圈

图G′有一条哈密顿路

b–a–f–e–d–c

b与a, e邻接，则c不能与路上a或e前面的邻接

b–a–f e–d–c

与G′不是哈密顿图矛盾。

# 二、哈密顿图的性质

定理6.6.2　设G是一个有p个顶点的图, $p\geqslant 3$. 如果 $\delta(G)\geqslant p/2$, 则G是一个哈密顿图.

［证］ 等价的命题:“设G是一个p个顶点的非哈密顿图，$p\geqslant 3$, 则G中至少有一个顶点的度小于p/2。”

因为完全图是哈密顿图，从而G不是完全图;

G中至少有两个不邻接的顶点，把G中不邻接的两顶点间加一条边;

如得到的不是哈密顿图，就重复做下去，经有限步后必得到一个哈密顿图，然后去掉最后一次加进去的边。

# 二、哈密顿图的性质

不妨设这条边为$v_1v_p$，所得到的图记为G′，于是G′与G的顶点相同，并且G′的每一个顶点的度大于或等于该点在G中的度；

因此只需证明G′中至少有一个度小于p/2即可；

由图G′的做法可知，G′中有一条起于$v_1$而终于$v_p$的哈密顿路；

$v_1-v_2-v_3-\cdots-v_p$

# 二、哈密顿图的性质

不妨设此生成路上各顶点依次为$v_1, v_2, ..., v_p$，

设 $degv_1=k$，设G′中与$v_1$邻接的顶点为：

$v_{i1}, v_{i2}, ..., v_{ik}$，其中$2=i_1<i_2<...<i_k\leq p-1$

$$v_1-v_2-v_3-\cdots-v_m-v_{ir}-\cdots-v_p$$

这时路上顶点$v_{ir}$(r=1,2,3,...,k)前面的顶点不能与顶点$v_p$邻接，因为G′有哈密顿圈$v_1v_2...v_m\ v_pv_{p-1}...v_{ir}v_1$；

因此：$v_p$至少与$v_1, v_2, ..., v_{p-1}$，中的k个顶点不邻接。

# 二、哈密顿图的性质

***$deg v_1 = k$, $deg v_p \le p-1-k$,***

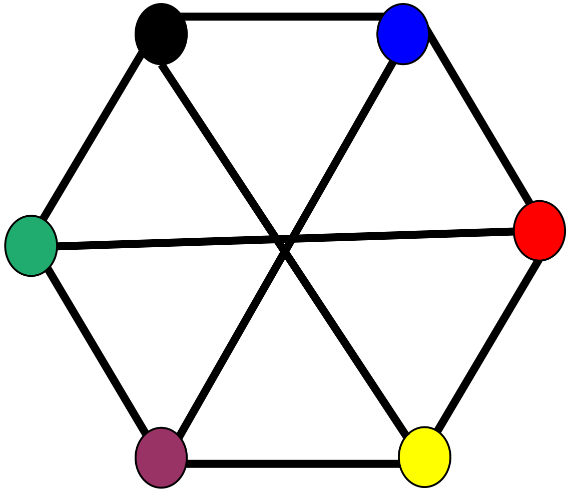
***$deg v_1 + deg v_p \le p-1$,***

因此$v_1$, $v_p$,至少有一个度数小于p/2。

定理6.6.2　设G是一个有p个顶点的图,p≥3.如果δ(G)≥p/2,则G是一个哈密顿图.

# 二、哈密顿图的性质

例6.6.3　某工厂生产由6种不同颜色的纱织成的双色布，双色布中，每一种颜色至少和其他3种颜色搭配，证明：可以挑出3种不同的双色布，它们含有所有6种颜色。



# 二、哈密顿图的性质

[证]

(1) 6个不同的点分别表示6种不同颜色的的纱；

(2) 两个点间联一条线当且仅当，这两点所代表的颜色的纱织成一种双色布；

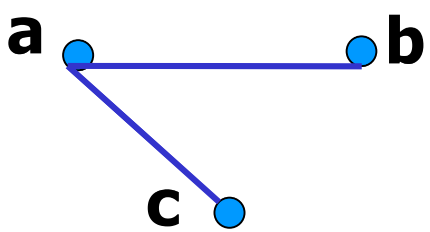
(3)由于每种颜色的纱至少和三种其它颜色的纱搭配，所以G的每个顶点的度至少是3；

由定理6.6.2，G有哈密顿圈，圈上有6条边，对应了6种不同颜色的双色布，间隔取出3条边，它们包含了全部6种颜色。

# 习 题

1(P209).设u和v是图G的两个不同顶点，如果u和v间有两条不同的通道（迹），则G中是否有圈。

(1).设u和v是图G的两个不同顶点，如果u和v间有两条不同的通道，则G中是否有圈。




bac是b到c的一条通道

bacabac是b到c的另一条通道

不能确定

# 习 题

（2）. 设u和v是图G的两个不同顶点，如果u和v间有两条不同的迹，则G中是否有圈。 有

证明：

设u到v有两条不同的迹分别为：

$uu_1u_2\cdots u_mv$

$uv_1v_2\cdots v_nv$

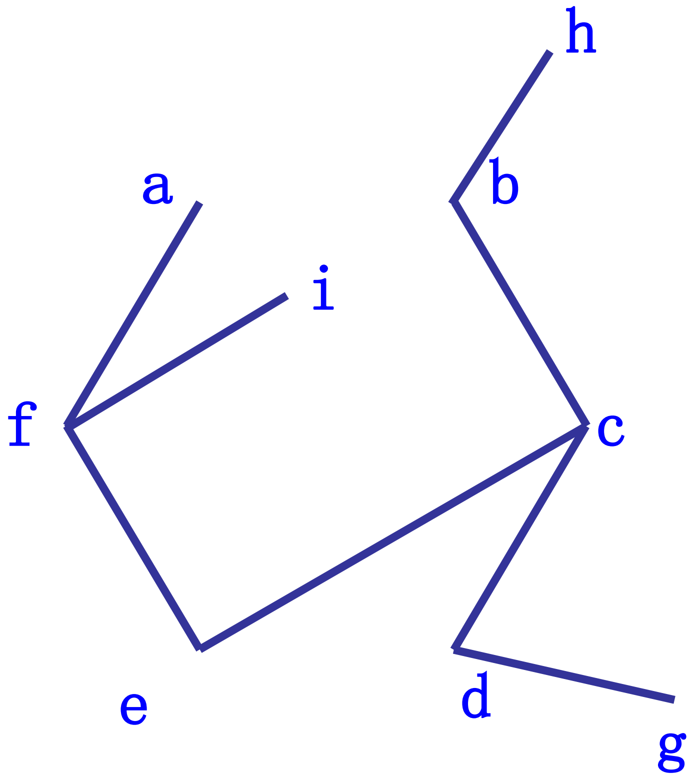
如果这两条迹中的顶点不重复，则他们都是路，也就是u和v间有两条不同的路，这时有圈。

反之：两条不同的迹中至少有一个存在顶点重复不妨设$u_i = u_j$是两个第一次出现重复的点。

$u_i$到$u_j$显然是一个圈。

# 习 题

5(P209).证明在一个连通图中，两条最长的路至少有一个公共顶点。




最长路有：

afecbh

afecdg

ifecbh

ifecdg

# 习 题

5(P209).证明在一个连通图中，两条最长的路至少有一个公共顶点。

证明

假设两条最长的路没有公共顶点

设$L=v_1v_2...v_n$

$M=u_1u_2...u_n$是两条没有公共顶点的最长路

由图的连通性,L中必存在$v_i$与M中的某$u_j$或者直接邻接，或者有不经过L和M中点的其他路。

选择$v_1$到$v_i$或者$v_i$到$v_n$的最长那一截，加上$u_1$到$u_j$或者$u_j$到$v_n$的最长那一截，就会得到一条更长的路。矛盾。

# 习 题

6(P209).在一个有n个人的宴会上，每个人至少有m个朋友（$2 \le m \le n$）。试证：有不少于m+1个人，使得他们按某种方法坐在一张圆桌旁，每人的左右均是他的朋友。

8(P209).设G是图，证明：若$\delta(G) \ge 2$，则G包含至少是$\delta(G)+1$的圈。

证明:

把n个人作为n个顶点，是朋友的顶点间连边构成图G

图G的每个顶点的度数都大于等于m

原题的意思是每个顶点的度数都不小于m的图必有长度至少为m+1的圈。

# 习 题

证明每个顶点的度数都不小于m的图G必有长度至少为m+1的圈。

证明：考虑G的一条最长路L，设为：

$$v_1v_2\cdots v_i\cdots v_j\cdots v_k$$

因为L是最长路，与$v_k$邻接的点都在L上；

图中与vk邻接的顶点最少m个；

所以L上至少有m个点与k邻接。

设在L上与vk邻接的顶点第一个出现的是$v_i$

则$v_iv_{i+1}\cdots v_k$是一个长度至少是m+1的圈。

# 习 题

例1 若G是一个恰有两个奇度顶点u和v的无向图，则G连通⇔G+uv连通。

证明：G连通 ⟹ G+uv连通 显然

G+uv连通 ⟹ G连通

若G是一个恰有两个奇度顶点u和v的无向图，

G+uv的度数全是偶数连通。

如果G+uv连通，则G+uv是欧拉图

G+uv有欧拉闭迹

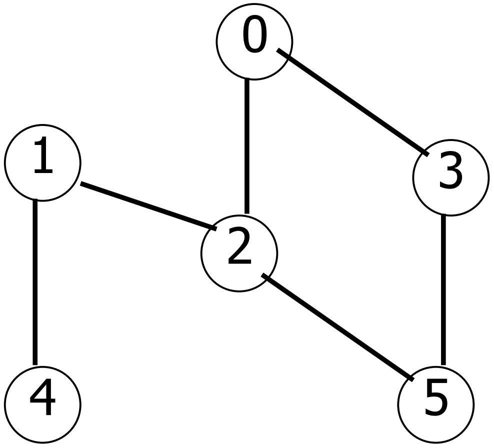
去掉uv的图G存在欧拉迹，则G连通。

# 习 题

例2 设G是连通图，满足下面条件之一的边应具有什么性质 ？

（1）在G的任何生成树中；

（2）不在G的任何生成树中。




答：

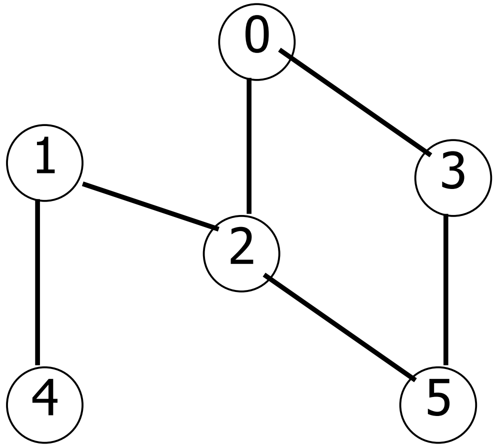
（1）G是桥；

（2）没有这样的边。

# 习 题

例3 证明或否定断言：连通图G的任意边是G的某一棵生成树的弦。

错



# 第7章习题

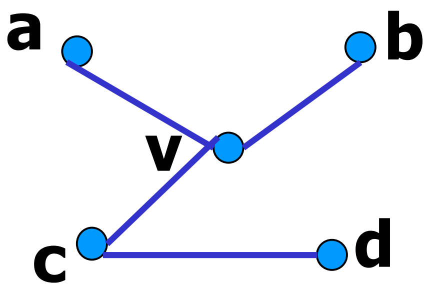
4. (P244)、设G是一棵树且Δ(G)≥k，证明：G中至少有k个度为1的顶点。

证明：

设G的节点数为p，则树的总度数是2p-2；

有一个节点v的度数≥k；

因此其他p-1个节点的度数≤2p-2-k




图G

# 第7章习题

**4. (P244)、设G是一棵树且Δ(G)≥k，证明：G中至少有k个度为1的顶点。**

**因此其他p-1个节点的度数≤2p-2-k**

**如果上述p-1个顶点中1度顶点数小于k；**

**也就是说最多有k-1个1度顶点。**

**也就是至少有p-1-k+1个节点的度数大于或等于2。**

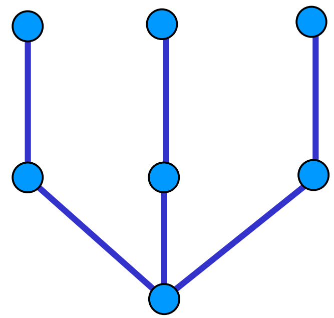
**则这p-1个节点的度数大于或等于2p-2k+k-1,**

**与这个p-1个顶点的度数≤2p-2-k矛盾，**

**所以至少有k个度为1的节点。**

# 第7章习题

**5. (P244)、令G是一个有p个顶点，k个支的森林，证明：G有p-k条边。**



图G

**证明：k个支加k-1条边是树，有p-1条边。**

**去掉加上的k-1条，正好是p-k条边。**

# 第7章习题

7(P244)、设一棵树T中有2n个度为1的顶点,3n个度为2的顶点,n个度为3的节点，为这棵树有多少个顶点和边?

解：设顶点数为p, $p=6n$ (1)

总度数：$2n+6n+3n=2p-2$

$p=(11n+2)/2$ (2)

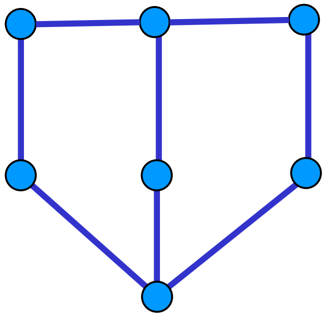
$12n=11n+2$

$n=2$

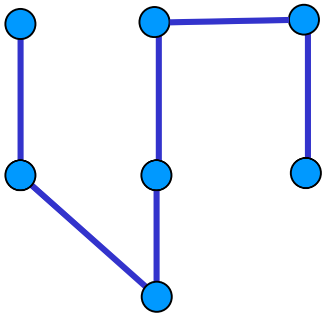
$p=12$，$q=12-1$

# 习 题

1(P252).设G是一个连通图，试证：G的子图G1是G的某个生成树的子图，当且仅当$G_1$没有圈。



图G



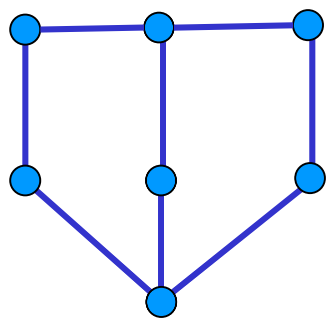
图G的生成树T

必要性：显然

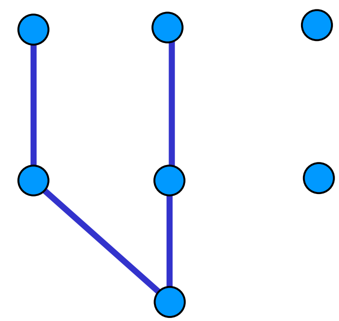
充分性：G1是G的子图，并且没有圈

# 习 题

1(P252).设G是一个连通图，试证：G的子图G1是G的某个生成树的子图，当且仅当$G_1$没有圈。



图G



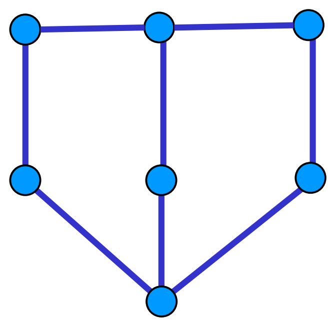
图G的子图$G_1$

(1)$G_1$是生成子图：如果连通，本身就是生成树。

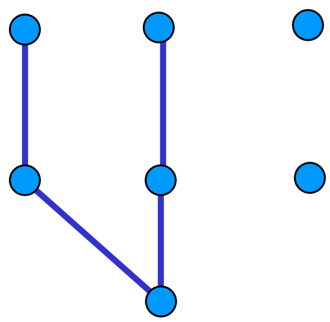
若不连通，设加边使之连通形成的生成树为T1，G1就是T1的子图。

# 习 题

1(P252).设G是一个连通图，试证：G的子图G1是G的某个生成树的子图，当且仅当$G_1$没有圈。



图G

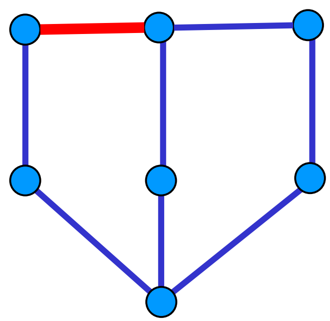


图G的子图$G_1$

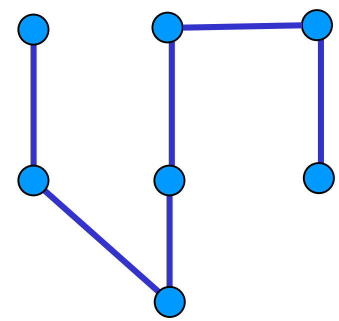
(2)$G_1$不是生成子图。先把所有顶点加上不加边就形成了(1)中的第二种情况。

# 习 题

2(P252).证明：连通图的任意一条边必然是他的某一个生成树的一条边。



图G



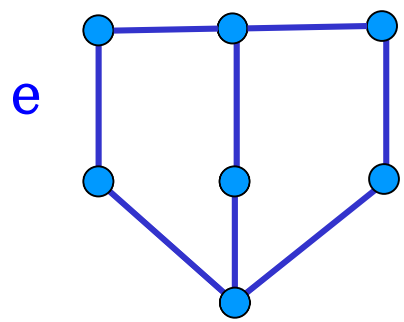
图G的生成树T

证明：∀e∈**E**，设**T**是**G**的生成树，如果**e**是**T**的边，得证；

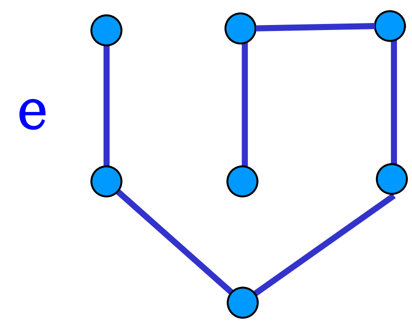
否者在**T**上加上**e**，形成圈，去圈上除**e**外的一条边，还是一个生成树，**e**是这个生成树的边。

# 习 题

4(P252).设G是一个边带权连通图，G的每条边均在G的某个圈上，试证：如果G的边e的权大于G的任一其他的边的权，则e不在G的任一最小生成树中。




图G




图G的生成树T

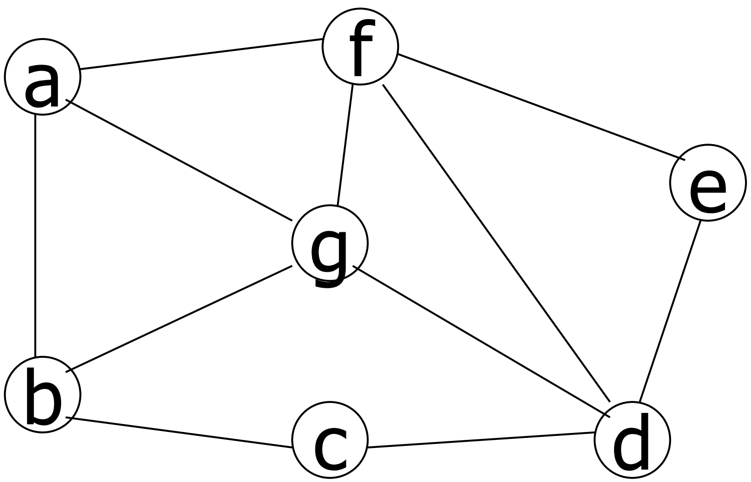
证明：假设e在一个最小生成树中

在T中去掉e得两个支，由假设e位于一个圈上，因此不连通的支之间还有其他边连通，连上。

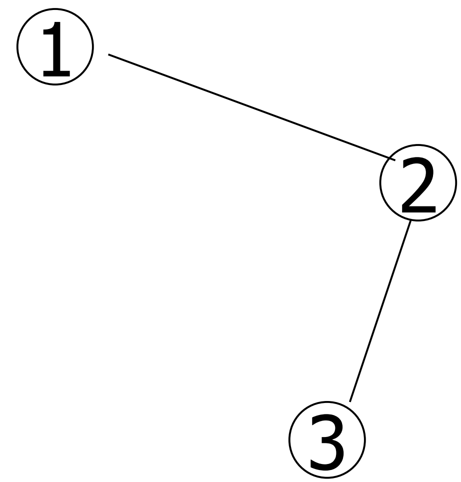
则新得到的树的权小于原树的权。

# 第7章习题

6. (P244)、设T是一个有k+1个顶点的树，证明：如果图G的最小度δ(G)≥k, 则G 有一个与T同构的子图。




图G




树T

# 第7章习题

6. (P244)、设T是一个有k+1个顶点的树，证明：如果图G的最小度$\delta(G) \geq k$, 则G 有一个与T同构的子图。

证明：用归纳法：当k=1时，成立；

假设当k=m时成立；证明当k=m+1时，成立。

当k=m+1时，

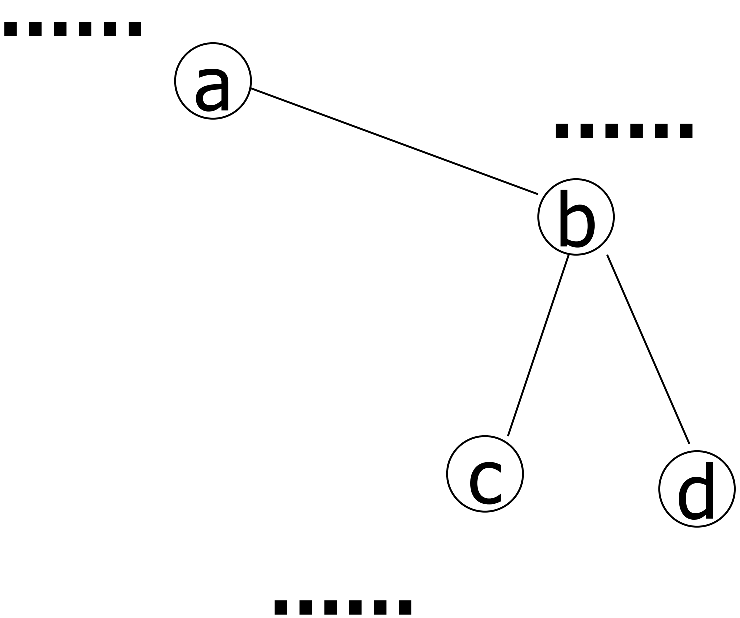
$\delta(G) \geq m+1$,

设T是一个m+2个顶点的树，取树的一个一度顶点，设为v, 设v与u连接，去掉v, 则T-v 是一个m+1个顶点的树$T_1$。

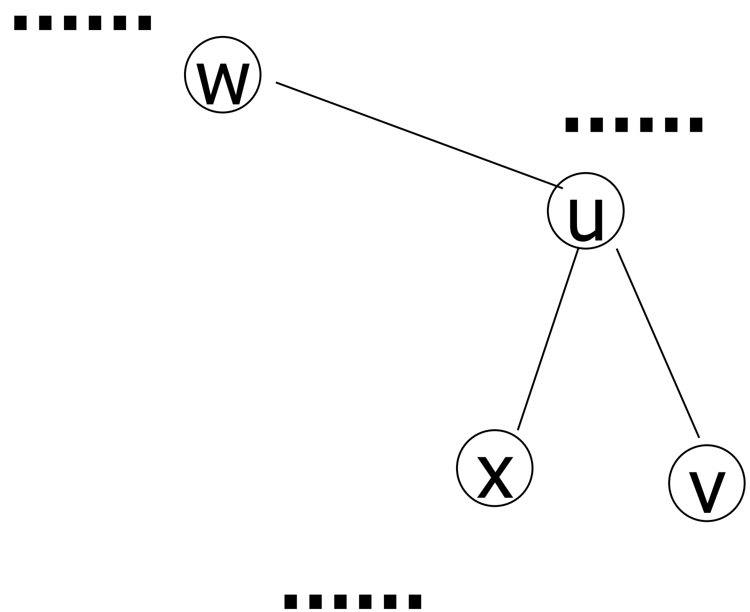
则G有一个同构于$T_1$的子图$G_1$。

# 第7章习题

设T是一个m+2个顶点的树，取树的一个一度顶点，设为v, 设v与u连接，去掉v, 则T-v 是一个m+1个顶点的树$T_1$。则G有一个同构于$T_1$的子图$G_1$。




图G




树T

$\delta(G) \geq m+1$,

# 第7章习题

设子图$G_1$顶点为$v_1,v_2,\ldots,v_{m+1}$.

对应树$T_1$的顶点为$t_1,t_2,\ldots t_i,u,t_{i+2}\ldots t_{m+1}$.

设子图$G_1$中对应u的顶点是$v_i$, $v_i$的度数大于或等于m+1,

除子图$G_1$中的顶点外，还有一个顶点w在原图中与$v_i$相连，

在树中恢复节点v和边vu

在子图中加节点w和与$v_i$相连的边，可证是同构的。

# 考试题型

一、选择题　**20**分

二、判断题　**10**分

三、简答题　**40**分

四、证明题　**15**分

五、计算题　**15**分