第十三届全国大学生数学竞赛初赛
《数学类 B 卷》试题及参考解答

一、(15 分) 设球面$S: x^2+y^2+z^2=1$，求以点$M_0(0,0,a)(a\in\mathbb{R},|a|>1)$为顶点的与$S$相切的锥面方程.

【参考解答】:**【解法一】**设L为过顶点$M_0(0,0,a)$，方向为$\vec{s}=(l,m,n)$，与S相切的锥面上的任意一条母线，则对于L上任意一点$M(x,y,z)$, L的方程可以表示为

$$\frac{x-0}{l}=\frac{y-0}{m}=\frac{z-a}{n}$$

其中$l,m,n\in\mathbb{R}$不全为零. 设L的参数方程为

$$x=lt, y=mt, z=a+nt \qquad (1)$$

其中$t\in\mathbb{R}$为参数. 将直线的参数方程 (1) 代入S中可得

$$\left(l^2+m^2+n^2\right)t^2+2ant+a^2-1=0$$

由直线L与球面S相切的条件可知

$$(2an)^2-4\left(l^2+m^2+n^2\right)\left(a^2-1\right)=0$$

亦即

$$\left(l^2+m^2\right)a^2=\left(l^2+m^2+n^2\right). \qquad (2)$$

由(1)和(2)消去参数t可得锥面方程

$$\left(a^2-1\right)\left(x^2+y^2\right)-(z-a)^2=0(|a|>1).$$

【解法二】设$O(0,0,0)$为球心坐标，$M(x,y,z)$为切锥面与球面的切点，半顶角为$\alpha=\angle\left(\overrightarrow{M_0O},\overrightarrow{M_0M}\right)$，则有$\sin\alpha=\dfrac{1}{|a|}$. 注意到

$$\cos^2\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{M_0O}\cdot\overrightarrow{M_0M}\right|^2}{\left|\overrightarrow{M_0O}\right|^2\left|\overrightarrow{M_0M}\right|^2}, \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

得到$\dfrac{(z-a)^2}{x^2+y^2+(z-a)^2}=\dfrac{a^2-1}{a^2}$，即

$$\left(a^2-1\right)\left(x^2+y^2\right)-(z-a)^2=0(|a>1|).$$

二、(15 分) 设$B\subset R^n(n\geq 2)$是单位开球，函数u,v在$\bar{B}$上连续，在B内二阶连续可导，满足

$$\begin{cases}-\Delta u-\left(1-u^2-v^2\right)u=0, & x\in B\\ -\Delta v-\left(1-u^2-v^2\right)v=0, & x\in B\\ u(x)=v(x)=0, & x\in\partial B\end{cases}$$

其中，$x=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$，

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

∂B 表示 B 的边界. 证明:

$$u^2(x)+v^2(x)\le 1(\forall x\in\bar{B}).$$

【参考证明】: 记 $w=w(x)=u^2(x)+v^2(x)$，则 w 满足问题

$$\begin{cases}-\Delta w-2(1-w)w \\ \quad =-2\left(|\nabla u|^2+|\nabla v|^2\right), & x\in B \\ w(x)=0, & x\in\partial B\end{cases} \quad (1)$$

显然，$w(x)\in C^2(B)\bigcap C(\bar{B})$. 所以，$w(x)$ 必然在 $\bar{B}$ 上达到最大值. 设最大值点为 x_1. 若 $x_1\in B$，则

$$\nabla w\left(x_1\right)=0,-\Delta w\left(x_1\right)\ge 0.$$

于是由（1）得到，在 x_1 处，

$$0\le-\Delta w\le 2(1-w)w-2\left(|\nabla u|^2+|\nabla u|^2\right)\le 2(1-w)w$$

而 $w\left(x_1\right)\ge 0$，故上式表明 $w\left(x_1\right)\le 1$.

若 $x_1\in\partial B$，则由（1），$w\left(x_1\right)=0$. 综上可知，恒有 $0\le w\le 1,x\in\bar{B}$.

三、(15 分) 设 $f(x)=x^{2021}+a_{2020}x^{2020}+a_{2019}x^{2019}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ 为整系数多项式，$a_0\ne 0$. 设对任意 $0\le k\le 2020$ 有 $\left|a_k\right|\le 40$，证明：$f(x)=0$ 的根不可能全为实数.

【参考证明】: 设 $f(x)=0$ 的 2021 个根分别为 $x_1,x_2,\ldots,x_{2021}$. 由于 $a_0\ne 0$，所以 $x_i\ne 0,1\le i\le 2021$. 若 $x_1,x_2,\ldots,x_{2021}$ 都是实数，由 Cauchy 不等式有

$$\sum_{i=1}^{2021}x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{2021}\frac{1}{x_i^2}\ge\left(\sum_{i=1}^{2021}x_i\cdot\frac{1}{x_i}\right)^2=22021^2$$

由 Vieta 定理，

$$\sum_{i=1}^{2021}x_i=-a_{2020},\quad \sum_{1\le i<j\le 2021}x_ix_j=a_{2019}$$

由此得到

$$\sum_{i=1}^{2021}x_i^2=\left(\sum_{i=1}^{2021}x_i\right)^2-2\sum_{1\le i<j\le 2021}x_ix_j=a_{2020}^2-2a_{2019}$$

注意到 $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\ldots,\frac{1}{x_{2021}}$ 是多项式

$$g(x)=x^{2021}f\left(\frac{1}{x}\right)=a_0x^{2021}+a_1x^{2020}+a_2x^{2019}+\cdots+a_{2019}x^2+a_{2020}x+1$$

的根. 继续由 Vieta 定理，

$$\sum_{i=1}^{2021}\frac{1}{x_i}=-\frac{a_1}{a_0},\quad \sum_{1\le i<j\le 2021}\frac{1}{x_i}\cdot\frac{1}{x_j}=\frac{a_2}{a_0}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{2021}\frac{1}{x_i^2}=\left(\sum_{i=1}^{2021}\frac{1}{x_i}\right)^2-2\sum_{1\le i<j\le 2021}\frac{1}{x_i}\cdot\frac{1}{x_j}=\frac{a_1^2}{a_0^2}-\frac{2a_2}{a_0}$$

因为对任意$0\le k\le 2020$有$\left|a_k\right|\le 40$，又a_0为非零整数，故$\left|a_0\right|\ge 1$，所以

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2021}x_i^2\cdot\sum_{i=1}^{2021}\frac{1}{x_i^2}&=\left(a_{2020}^2-2a_{2019}\right)\left(\frac{a_1^2}{a_0^2}-\frac{2a_2}{a_0}\right)\\&\le\left(40^2+2\cdot 40\right)\left(40^2+2\cdot 40\right)=1680^2\end{aligned}$$

矛盾. 证毕.

四、(20 分) 设$R=\{0,1,-1\}$，Γ为R上的 3 阶行列式全体，即

$$\Gamma=\left\{\det\left(a_{ij}\right)_{3\times 3}\mid a_{ij}\in R\right\}.$$

证明：$\Gamma=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$.

【参考证明】：首先，通过直接检验可知

$$\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1,\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=2,$$

$$\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=3,\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=4$$

其次，由于交换两行行列式值改变符号，因此有

$$\Gamma\supseteq\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}.$$

第三，证明：$\forall\left(a_{ij}\right)_{3\times 3},a_{ij}\in R$，总有$\left|\det\left(a_{ij}\right)\right|\le 4$. 事实上，由对角线法则可知

$$\begin{aligned}\det\left(a_{ij}\right)=&\,a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}\\&-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}&b_1=a_{11}a_{22}a_{33},b_2=a_{12}a_{23}a_{31},b_3=a_{13}a_{32}a_{21}\\&b_4=-a_{13}a_{22}a_{31},b_5=-a_{12}a_{21}a_{33},b_6=-a_{11}a_{32}a_{23}\end{aligned}$$

直接观察可知：每个a_{ij}在单项b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6中共出现两次，且

$$b_1b_2b_3b_4b_5b_6=-a_{11}^2a_{12}^2a_{13}^2a_{21}^2a_{22}^2a_{23}^2a_{31}^2a_{32}^2a_{33}^2$$

因此立即可得：若有某个$a_{ij}=0$，则$b_1,\dots,b_6$中至少有两个为 0，从而$\left|\det\left(a_{ij}\right)\right|\le 4$. 倘若每个$a_{ij}$都不等于 0 ，则由$a_{ij}=\pm 1$得$b_1,\dots,b_6$之积$=-1$，从而至少有一个$b_i$为$-1$，同时也至少有一个$b_j$为 1，否则与$b_1b_2b_3b_4b_5b_6=-1$矛盾. 结果$b_i$与$b_j$互相抵消，仍有$\left|\det\left(a_{ij}\right)\right|\le 4$.

综上即得$\boldsymbol{\Gamma} = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$，$\boldsymbol{\Gamma}$共由 9 个元素所组成.

五、（15 分）设函数 f 在$[-1,1]$内有定义，在 $x=0$ 的某邻域内连续可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a>0$. 证明：级 数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{n}\right)$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$发散.

【参考证明】:由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=a>0$知 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$. 又$f(x)$在$x=0$的某邻域内连续可导，则$f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$. 于是

$$0<a=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0).$$

由于$f'(x)$在$x=0$的某邻域内连续,存在正数$\delta>0$,使得$\forall x\in[0,\delta]$,有 $f'(x)>0$. 因此，在$[0,\delta]$上$f(x)$单调增加. 于是存在正整数$N>\dfrac{1}{\delta}$，当$n>N$时，$f\left(\dfrac{1}{n}\right)>0$且 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)>f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$. 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$知 $\lim\limits_{N\to\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$， 且$\sum\limits_{n=N}^{\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{n}\right)$为交错级数，由莱布尼兹判别法，级数$\sum\limits_{n=N}^{\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{n}\right)$收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{n}\right)$收敛.

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{1/n}=a>0$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$发散.

六、(20 分)设$f(x)=\ln\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{nx}}{n^2}$. 证明函数$f$在$(-\infty,0)$内为严格凸的，并且对任意$\xi\in(-\infty,0)$，存在$x_1,x_2\in(-\infty,0)$使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

称(a,b)内的函数S为严格凸的，如果对任何$\alpha\in(0,1)$以及$x,y\in(a,b),x\neq y$成立

$$S(\alpha x+(1-\alpha)y)<\alpha S(x)+(1-\alpha)S(y).$$

【参考证明】: 记$g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{nx}}{n^2}$. 我们有

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)},\quad f''(x)=\frac{g''(x)g(x)-\left(g'(x)\right)^2}{g^2(x)}$$

又因为$g'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{nx}}{n},g''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{nx}$. 于是，由 Hölder 不等式，

$$g''(x)g(x)-\left(g'(x)\right)^2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{nx}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2}\right)-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n}\right)^2>0$$

从而函数$f(x)$为严格凸的. 记

$$h(x)=f(x)-\big(f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)\big).$$

则$h''(x)>0$及$h'(\xi)=h(\xi)=0$. 于是函数$h(x)$在$(-\infty,\xi)$上严格递减, 在$(\xi,0)$上严格增加. 任取 $a\in(-\infty,\xi), b\in(\xi,0)$, 则 $h(a)>0, h(b)>0$. 取 $c\in(0,\min\{h(a),h(b)\})$, 则存在$x_1\in(a,\xi), x_2\in(\xi,b)$使得$h\left(x_1\right)=h\left(x_2\right)=c$. 于是

$$\begin{aligned}0&=h\left(x_2\right)-h_2\left(x_1\right)\\&=f\left(x_2\right)-\left(f(\xi)+f'(\xi)\left(x_2-\xi\right)\right)-f\left(x_1\right)+f(\xi)+f'(\xi)\left(x_1-\xi\right)\\&=f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)-f'(\xi)\left(x_2-x_1\right)\end{aligned}$$

于是$f'(\xi)=\dfrac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}$.