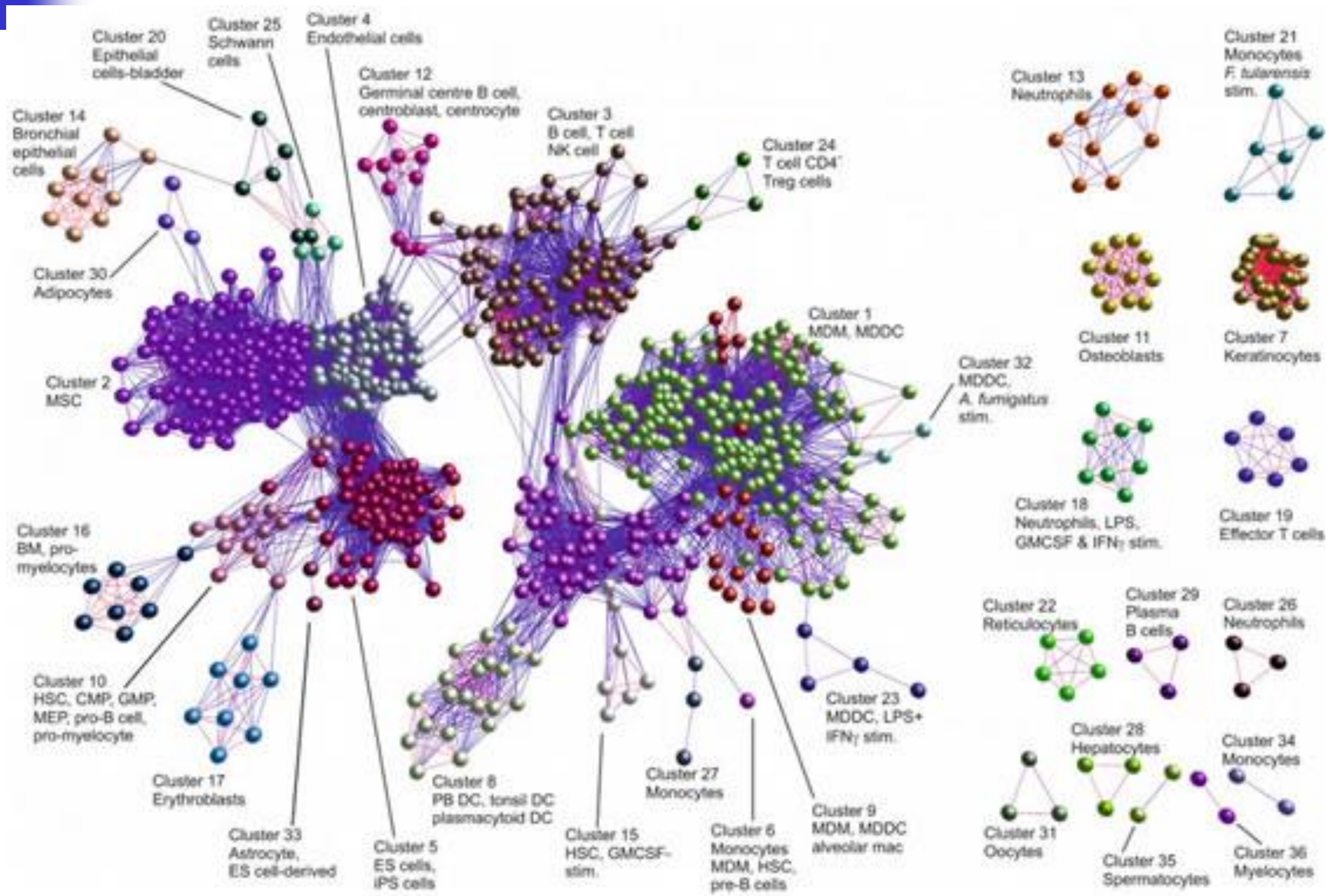
# 课程内容

第一章: 集合及其应用
第二章: 映射
第三章: 关系
第四章: 无穷集合及其基数
*第五章: 模糊集合论
第六章: 图的基本概念
第七章: 树和割集
第八章: 连图度和匹配
第九章: 平面图和图的着色
第十章: 有向图

# 图应用例子


社交网络

# 图应用例子

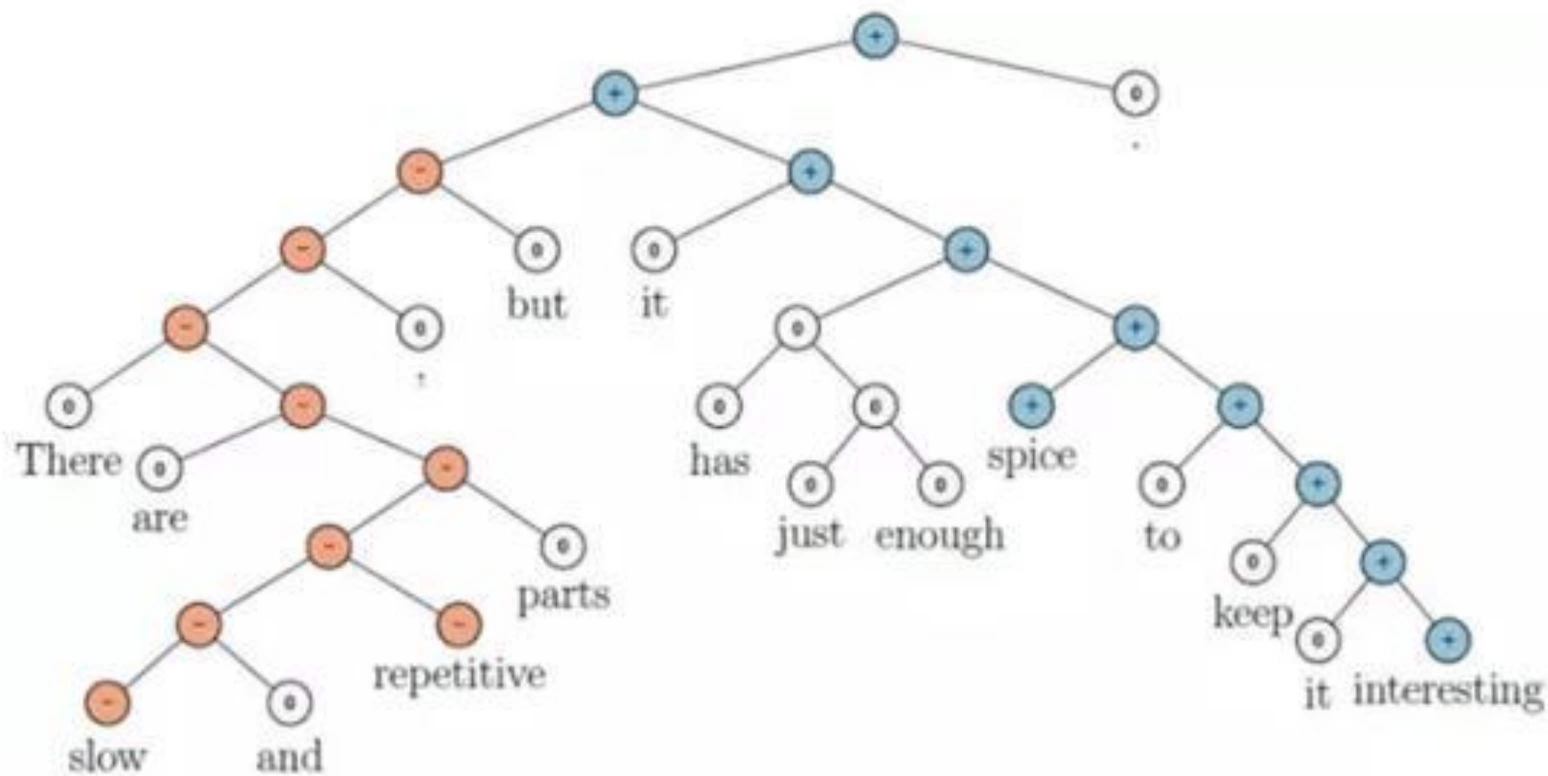



基因蛋白质网络

# 图应用例子

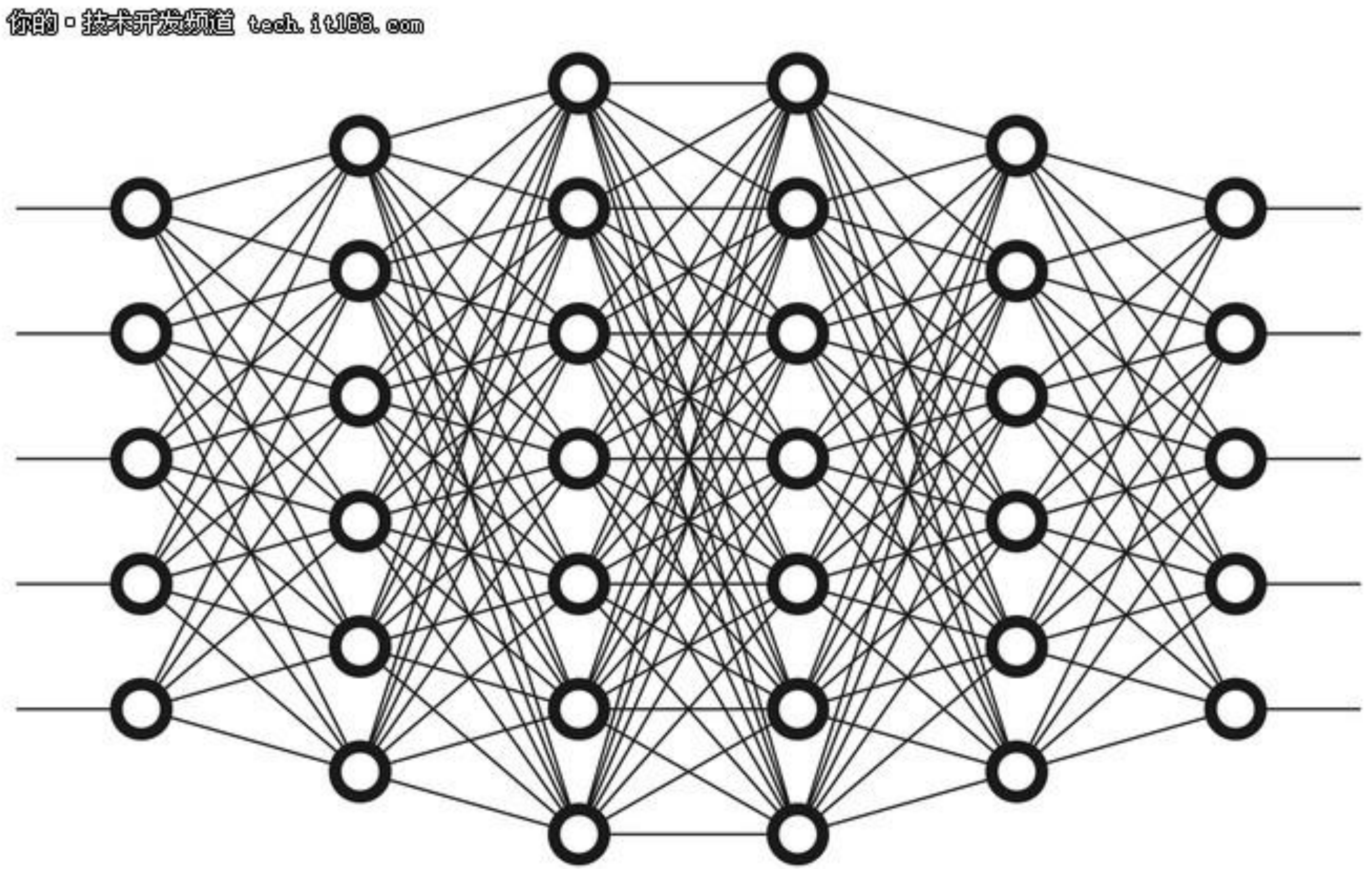

金融网络

# 图应用例子



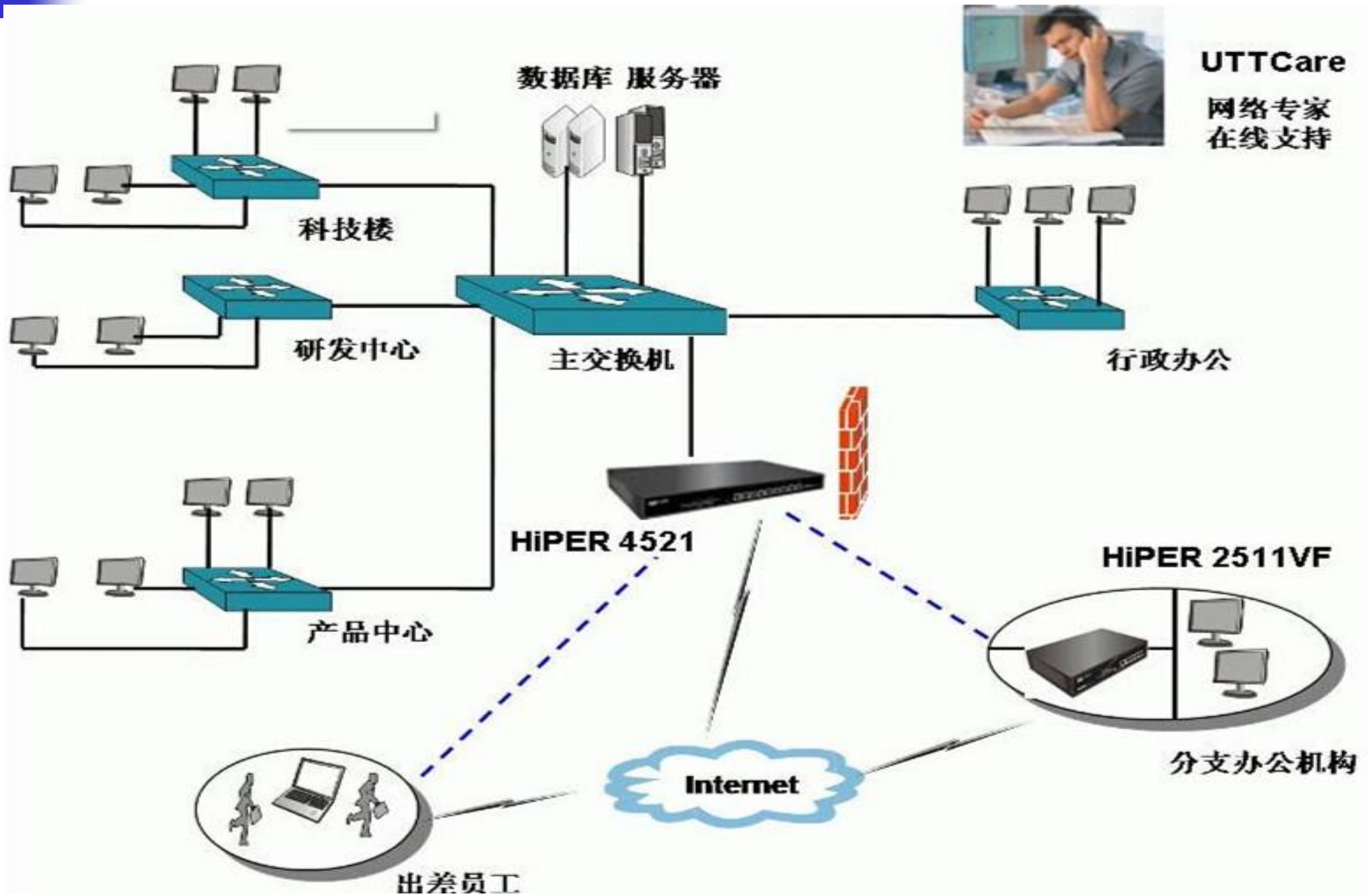

自然语言处理中的语法树

# 图应用例子




卷积神经网络（机器学习）

# 图应用例子



数据库 服务器
UTTCare
网络专家
在线支持
科技楼
研发中心
主交换机
行政办公
HiPER 4521
HiPER 2511VF
产品中心
Internet
分支办公机构
出差员工

# 第六章知识结构图

定义、性质、概念、一些特殊的图、图的邻接矩阵、带权图与最短路径。

内容 ↑

**图的基本概念**

↓ 建模

各种关系模型的直观建模：包括数据挖掘、人工智能、各种网络、……

# 第六章：图论的基本概念

6.1 图论的产生与发展概述

6.2 基本定义

6.3 路、圈、连通图

6.4 补图、偶图

6.5 欧拉图

6.6 哈密顿图

6.7 图的邻接矩阵（不讲）

6.8 带权图与最短路问题（不讲）

# 6.1 图论的产生与发展概述

## 本节主要问题

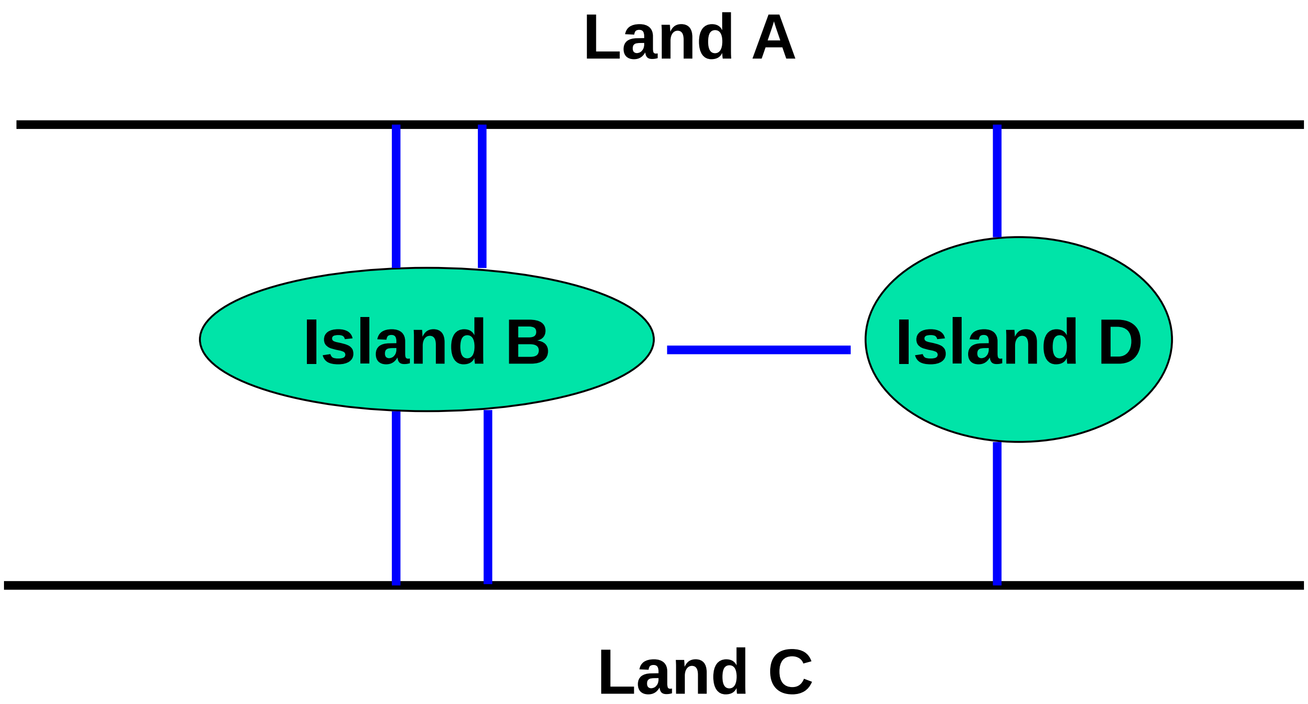
了解两个图论产生过程中的著名问题。

（1）哥尼斯堡城七桥问题

（2）四色定理

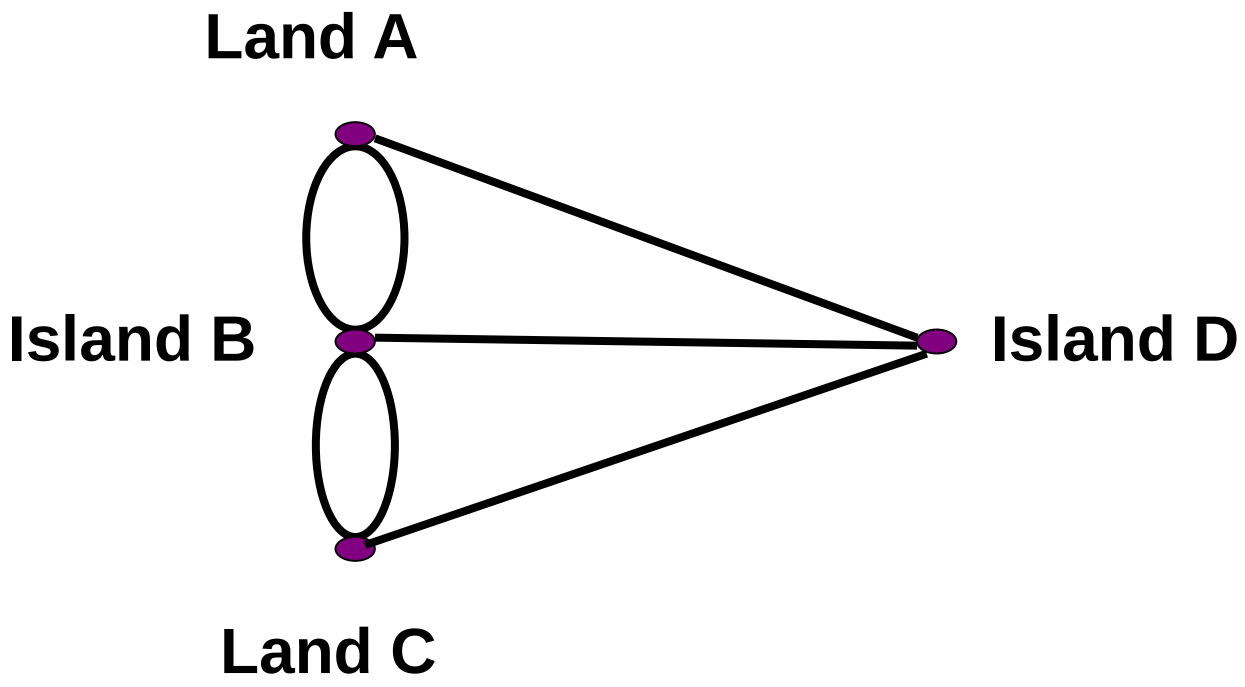
# （1）哥尼斯堡城七桥问题

能否从某地开始，走每一座桥一次，而且只走一次，正好回到开始的地方。



# （1）哥尼斯堡城七桥问题

能否从一个节点开始，走每一条边一次，而且只走一次，正好回到开始节点。




哥尼斯堡城七桥问题的拓扑结构图。

# （2）四色定理

四色定理. 每一个平面图都可以用四种颜色染色，相邻的区域颜色不同。

问题提出：　Francis Guthrie (1852)

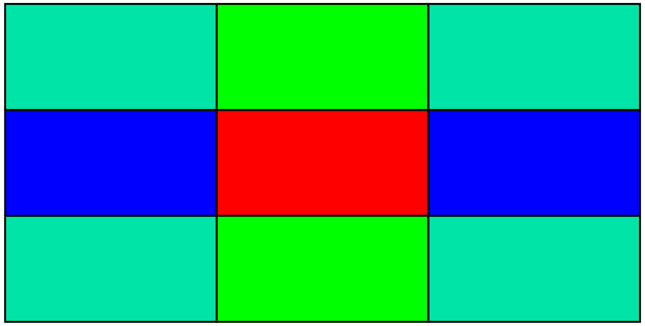
参与数学家：德·摩尔根，哈密顿

错误证明: 肯普(Alfred Kempe)

泰勒(Peter Guthrie Tait) (1878-1880)

发现错误：29岁的赫伍德(1890)

正确证明：1976, Apple, Haken



**

# 6.2 基本定义

## 本节主要问题

一、无向图的定义和性质

二、有向图的定义和性质

三、子图的定义和性质

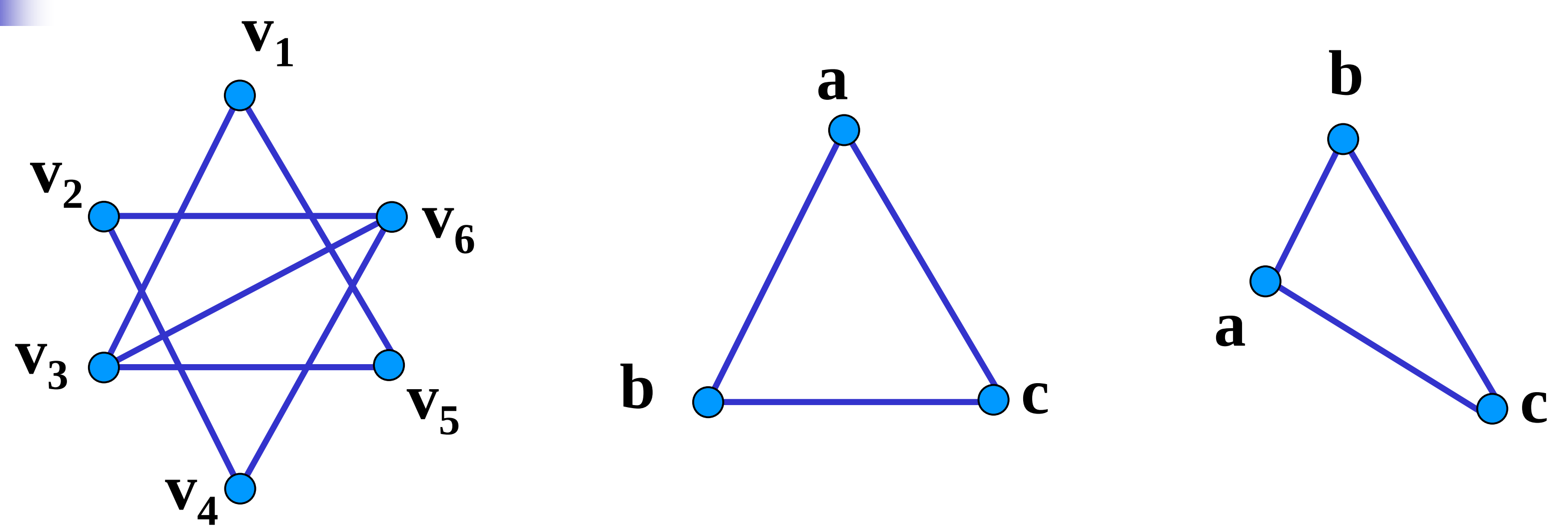
四、生成子图的定义和性质

五、导出子图的定义和性质

六、图的同构的定义和性质

七、顶点的度的定义和性质

# 一、无向图的定义和性质




图由两部分构成，顶点集合V和边集合E，**G=(V, E)**

上面图中**$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$**

**$E=\{\{v_1, v_3\},\{v_1, v_4\},\{v_1, v_5\}, \ldots\ldots\}$**

这里的图是拓扑结构，也就是实体抽象图，与节点的位置和边的长度没有关系。

# 一、无向图的定义和性质—边的讨论

设V是一个非空集合，V的一切二元子集之集合记为$P_2(V)$, 即$P_2(V)=\{ A \mid A \subseteq V, \ |A| = 2 \}$

例如：V={a, b, c}, V的一切二元子集之集合记为$P_2(V)$, 即$P_2(V)=\{\{a, b\},\{a, c\},\{b, c\}\}$

$P_2(V)$有8个子集：

$E_1=\varnothing$, $E_2=\{\{a, b\}\}$,

$E_3=\{\{a, c\}\}$, $E_4=\{\{b, c\}\}$,

$E_5=\{\{a, b\},\{a, c\}\}$, $E_6=\{\{a, b\},\{b, c\}\}$,

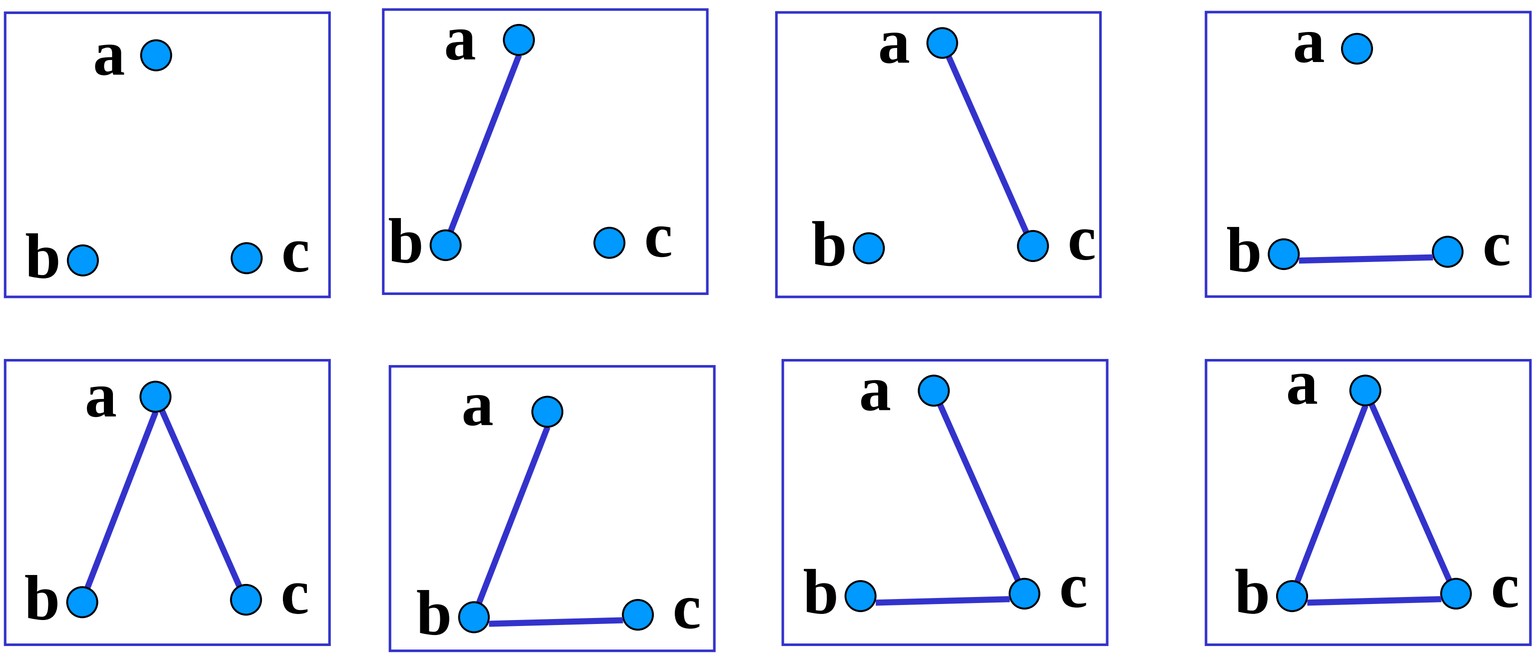
$E_7=\{\{a, c\},\{b, c\}\}$, $E_8=\{\{a, b\},\{a, c\},\{b, c\}\}$。

# 一、无向图的定义和性质

例如：V={a, b, c}, V的一切二元子集之集合记为$P_2(V)$, 即$P_2(V)$={{a, b},{a, c},{b, c}}

$P_2(V)$有8个子集：$E_1=\varnothing$, $E_2$={{a, b}}, $E_3$={{a, c}}, $E_4$={{b, c}}, $E_5$={{a, b},{a, c}}, $E_6$={{a, b},{b, c}}, $E_7$={{a, c},{b, c}}, $E_8$={{a, b},{a, c},{b, c}}.

V与每一个$E_i$构成一个无向图：



# 一、无向图的定义和性质

## 1、无向图的定义

定义6.2.1 设V是一个非空集合,E⊆P $_2$(V), 二元组(V,E)称为一个无向图,V中元素称为无向图的顶点，V为顶点集；E称为边集，E的元素称为图的边,如果{u,v}∈E，则称u与v邻接。

例如：V={a, b, c}，V的一切二元子集之集合记为$P_2$(V), 即$P_2$(V)={{a, b},{a, c},{b, c}}

$P_2$(V)有8个子集：

$E_1=\varnothing$, $E_2$={{a, b}},

$E_3$={{a, c}}, $E_4$={{b, c}},

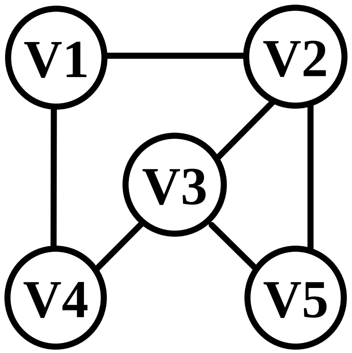
$E_5$={{a, b},{a, c}}, $E_6$={{a, b},{b, c}},

$E_7$={{a, c},{b, c}}, $E_8$={{a, b},{a, c},{b, c}}。

# 一、无向图的定义和性质

## 2、无向图的术语

### (1) 简单图




每个顶点都没有圈

任意两个顶点间最多只有一条边

任意一条边都可用它的两个端点来表示:

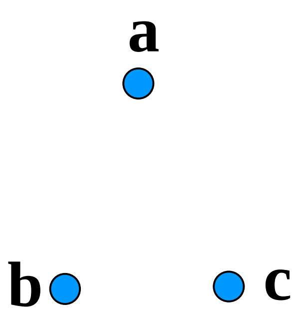
右图有6条边,可表示为$\{v_1,v_2\},\{v_1,v_4\},\{v_2,v_3\}$, ……
也可以表示为：$v_1v_2$, $v_1v_4$, $v_2v_3$ ……

常用小写的英文字母u, v, w表示图的顶点(可以带下标);
常用小写的英文字母x, y, z表示图的边(可以带下标)。

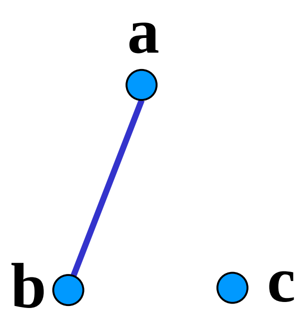
# 一、无向图的定义和性质

## (2) (p, q) 图

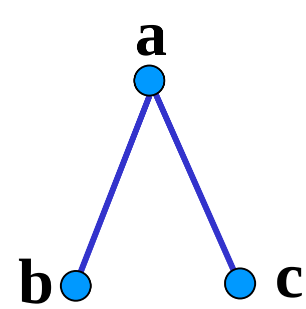
如果|V| = p, |E| = q，则称G为一个(p, q)图，即G是一个具有p个顶点q条边的图。




(3, 0) 图




(3, 1) 图



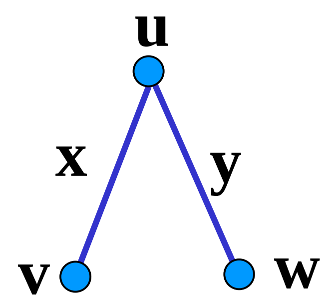

(3, 2) 图


(1, 0) 图又称为平凡图。

# 一、无向图的定义和性质

## (3) 顶点与边的关联,边与边邻接

- 边可以用两端点表示，也可以命名，例如右图{u, v}是一条边，x也是这条边的名;记为x=uv或x=vu;
- 称u和v为边x的端点;
- 称顶点u和v与边x互相关联;
- 称u和v邻接;
- 若x与y是图G的两条边,并且仅有一个公共端点,即 $|x \cap y|=1$,则称边x与y邻接。




(3, 2) 图

# 一、无向图的定义和性质

## (4) 图的关系表示

由定义可知,一个无向图G就是一个非空集合V上定义的一个反自反且对称的二元关系E和V构成的系统。

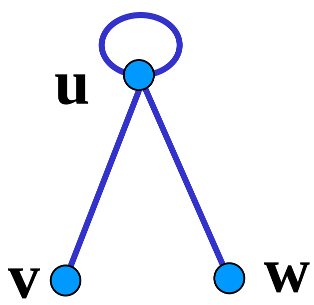
# 一、无向图的定义和性质

**(5) 带环图**

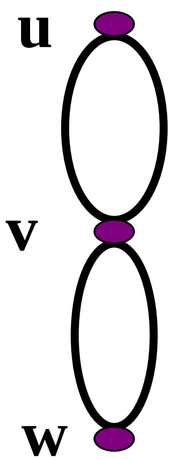
联结一个顶点与其自身的边称为环，允许有环存在的图称为带环图。

**(6) 多重边图**

如果允许两个顶点之间有两个以上的边存在，这样的边称为多重边，允许有环与多重边存在的图，我们称为伪图。




带环图



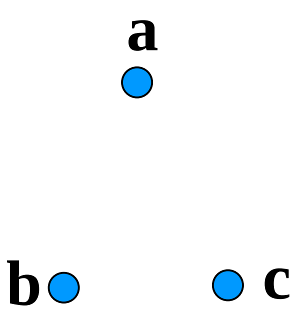

多重边图

# 一、无向图的定义和性质

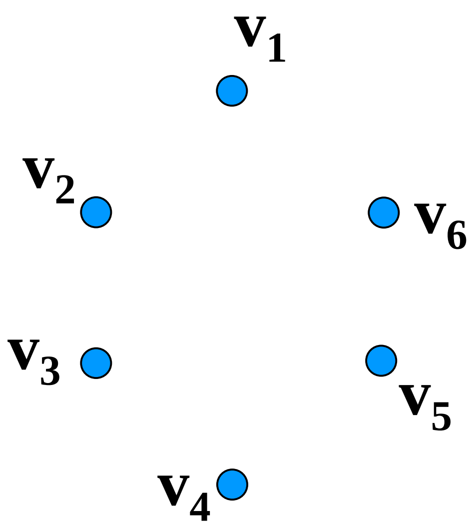
**(7) 零图**

**定义6.6.2 设G=(V,E)为无向图,如果E=∅,则称G为零图。**

**n个顶点的零图称为n阶零图。**




3阶零图




6阶零图

# 一、无向图的定义和性质

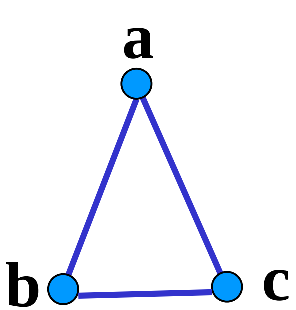
(8) 完全图

定义6.6.3 设G=(V,E)为无向图,如果G中任意两个顶点间都有唯一的边，则称G为完全图。

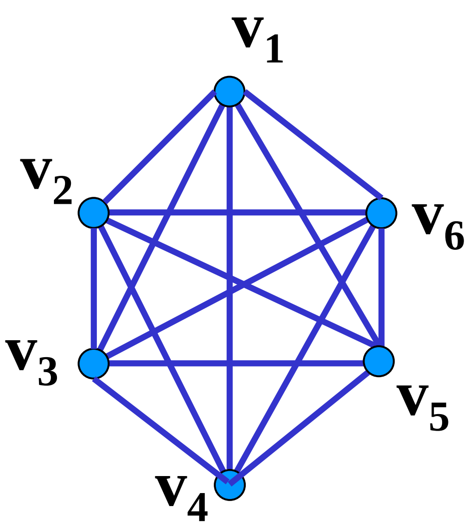
n个顶点的完全图用$K_n$表示。

$K_n$有多少条边？n≥2

$n(n-1)/2$




$K_3$图




$K_6$图

# 一、无向图的定义和性质

问题：以V={v1, v2, …, vn}为顶点的无向图有多少？

总边数$n(n-1)/2$

每条边可以选择出现或不出现，两种选择。

图的个数为$2^{n(n-1)/2}$。

# 二、有向图的定义及性质

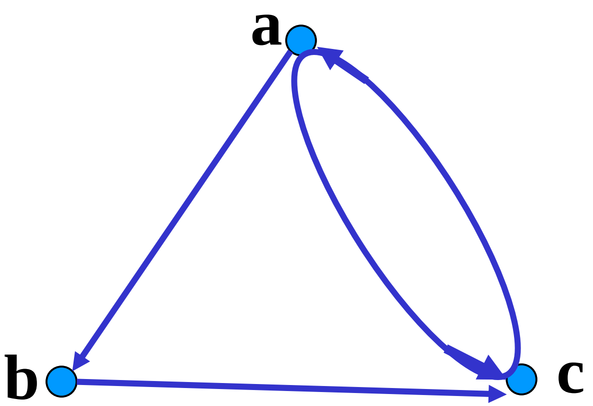
## 3 有向图的定义

定义6.6.3 设V为一个非空有限集：

$A \subseteq V \times V \setminus \{ (u,u) \in V \}$，二元组$D=(V, A)$称为一个有向图，V中的元素称为D的顶点，A中元素(u,v)称为D的从u到v的弧或有向边。

$V=\{a, b, c\}$

$A=\{(a,b), (b,c), (a,c), (c,a)\}$




有向图

# 二、有向图的定义及性质

定义6.6.3 设V为一个非空有限集：

$A \subseteq V\times V \backslash \{ (u,u) \in V \}$, 二元组D=(V, A)称为一个有向图,V中的元素称为D的顶点,A中元素(u,v)称为D的从u到v的弧或有向边。

例如：$V=\{a, b, c\}$,

$$V\times V \backslash \{ (u,u) \in V \}$$

$$=\{ (a, b), (a, c), (b, a), (b,c), (c, a), (c, b)\}$$

具有3个定点a,b,c的有向图有多少种？

64种。

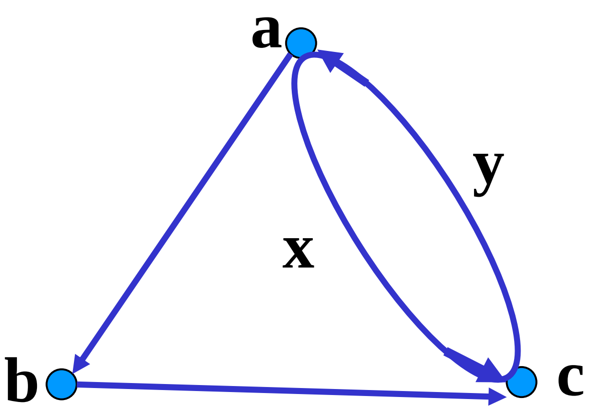
# 二、有向图的定义及性质

## 4、有向图的术语

### (1)弧, 对称弧:

有向图的边也叫做弧。

如果x=(u, v)与y=(v, u)均为A的弧, 则称x与y为一对对称弧.




有向图

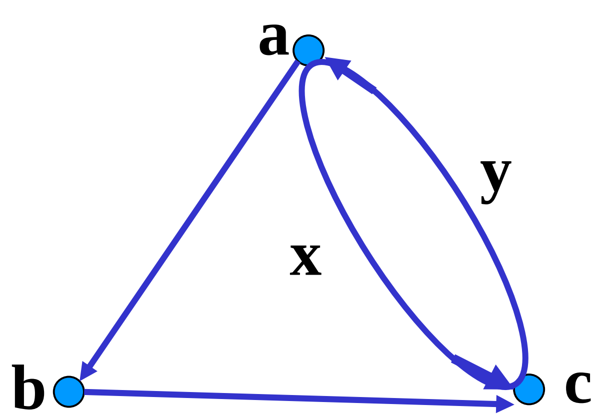
### (2)弧的起点和终点:

如果x=(u, v)是有向图的一条边, 则称弧x为起于顶点u终于顶点v的弧, 或从u到v的弧, u称为x的起点, v为终点。

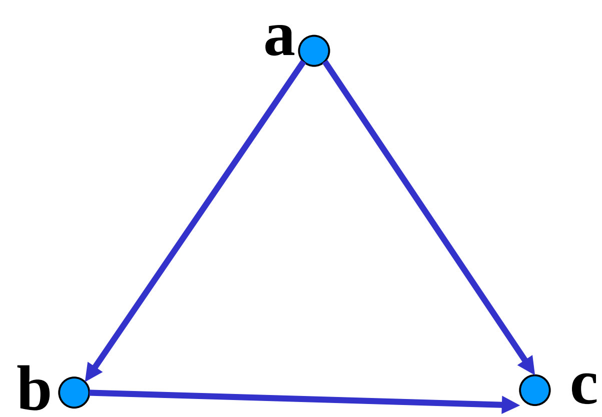
# 二、有向图的定义及性质

## (2) 定向图

定义6.2.4 不含对称弧的有向图称为定向图。



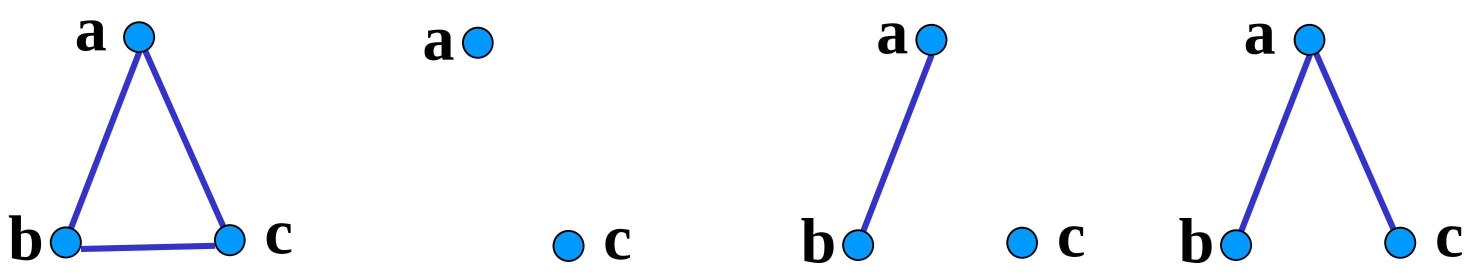

非定向图




定向图

# 三、子图的定义及性质

定义6.2.5 设G = (V, E)是一个图,图H = ($V_1$, $E_1$)称为G的一个子图, 其中$V_1$是V的非空子集且$E_1$是E的子集.




$K_3$图

$K_3$有多少个子图?

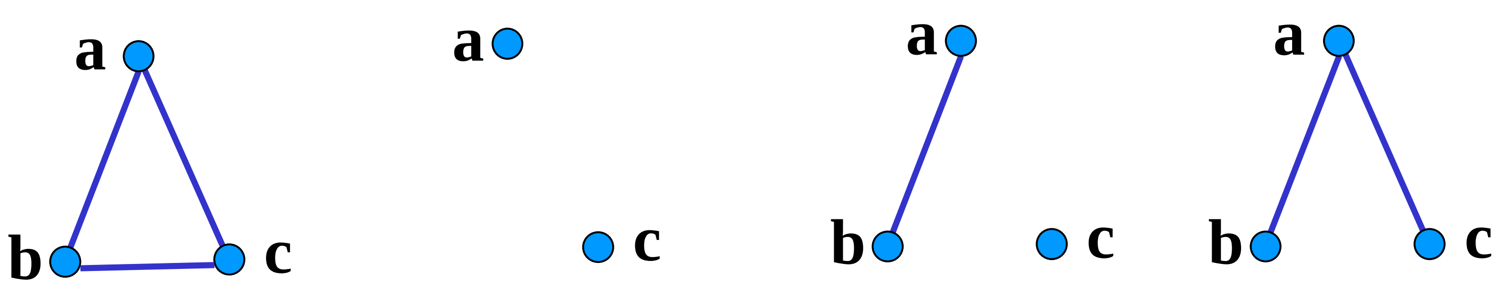
一个顶点的有3个，两个顶点的有6个，3个定点的有8个，17个子图。

# 三、子图的定义及性质

真子图与图的包含关系

设G1和G2是图G的两个子图，如果G1≠G,则称G1是G的真子图。

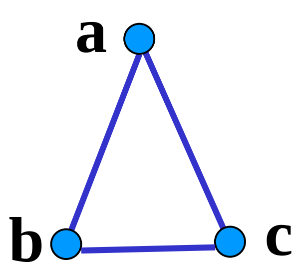
如果G1是G2的子图,则说G2包含G1。



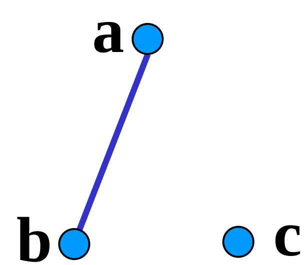

$K_3$图

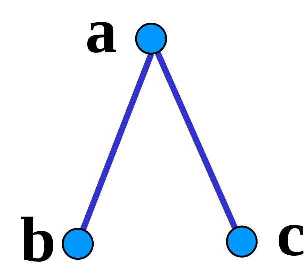
# 四、生成子图的定义和性质

定义6.2.6 设G=(V,E)是一个图, 如果F⊆E,则称G的子图H=(V, F)为G的生成子图.




$K_3$图



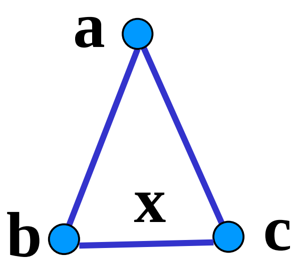

$K_3$有多少个生成子图?

8个生成子图。

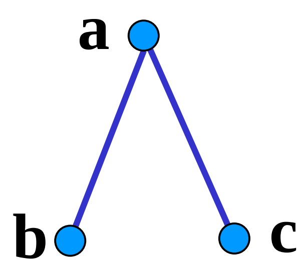
# 四、生成子图的定义和性质

生成子图的表示方法

设x是G的一条边,则G的生成子图(V,E\{x})简记为G-x。

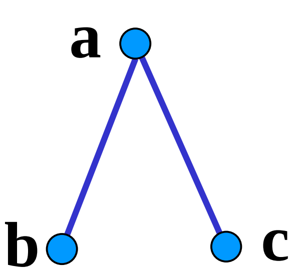



图G

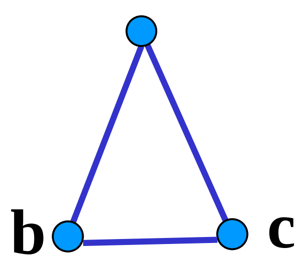



图G-x

如果u和v是G的两个不邻接的顶点,则图(V,E∪{u,v})简记成G+uv,它是在G的图解中,把u与v间联一条线而得到的图。



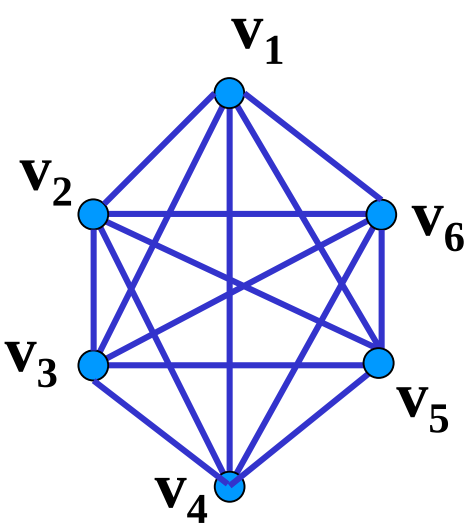

图G




图G+bc

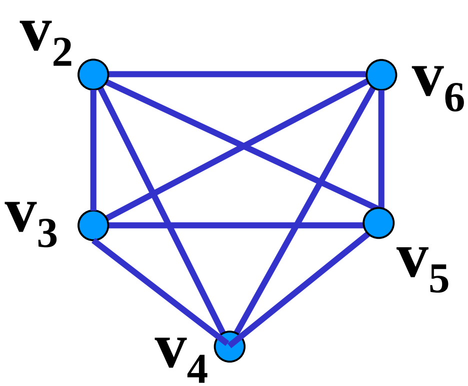
# 五、极大子图的定义和性质

设G的子图H具有某种性质,若G中不存在与H不同的具有此性质且包含H的真子图,则称H是具有此性质的极大子图。




$K_6$图

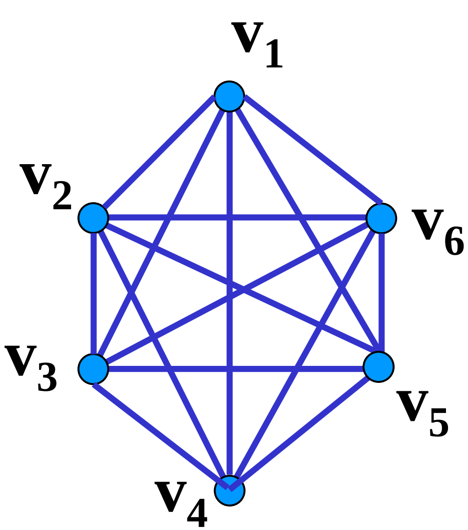
不包含顶点v1
的极大子图



# 六、导出子图的定义及性质

**定义6.2.7** 设S为图G=(V,E)的顶点集V的非空子集,则G的以S为顶点集的极大子图称为由S导出的子图,记为<S>. 形式地,<S>=(S,$P_2$(S)∩E).

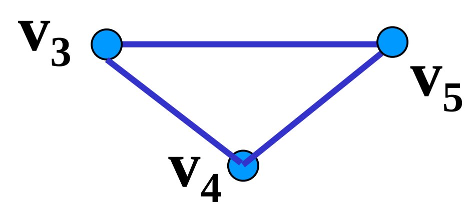
于是,S的两个顶点在<S>中邻接,当且仅当这两个顶点在G中邻接.




$K_6$图

$\{v_3,v_4,v_5\}$

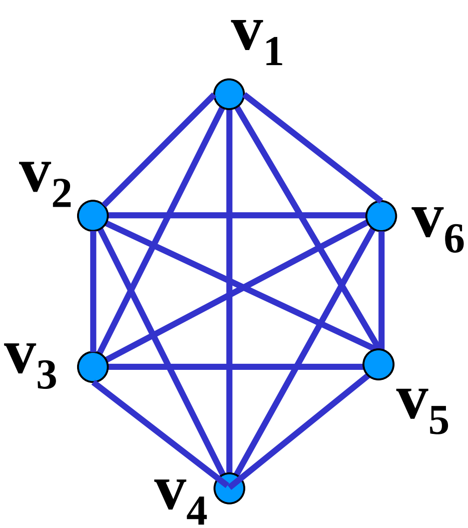
的导出子图



# 六、导出子图的定义及性质

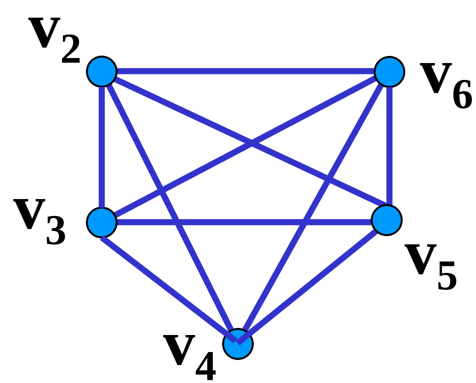
## 导出子图的表示方法

设G=(V,E),v∈V,由V\{v}导出的子图<V\{v}>记成G-v. 从图的图解上看,G-v的图解是从G的图中去掉顶点v及与v关联的边所得到的图解。



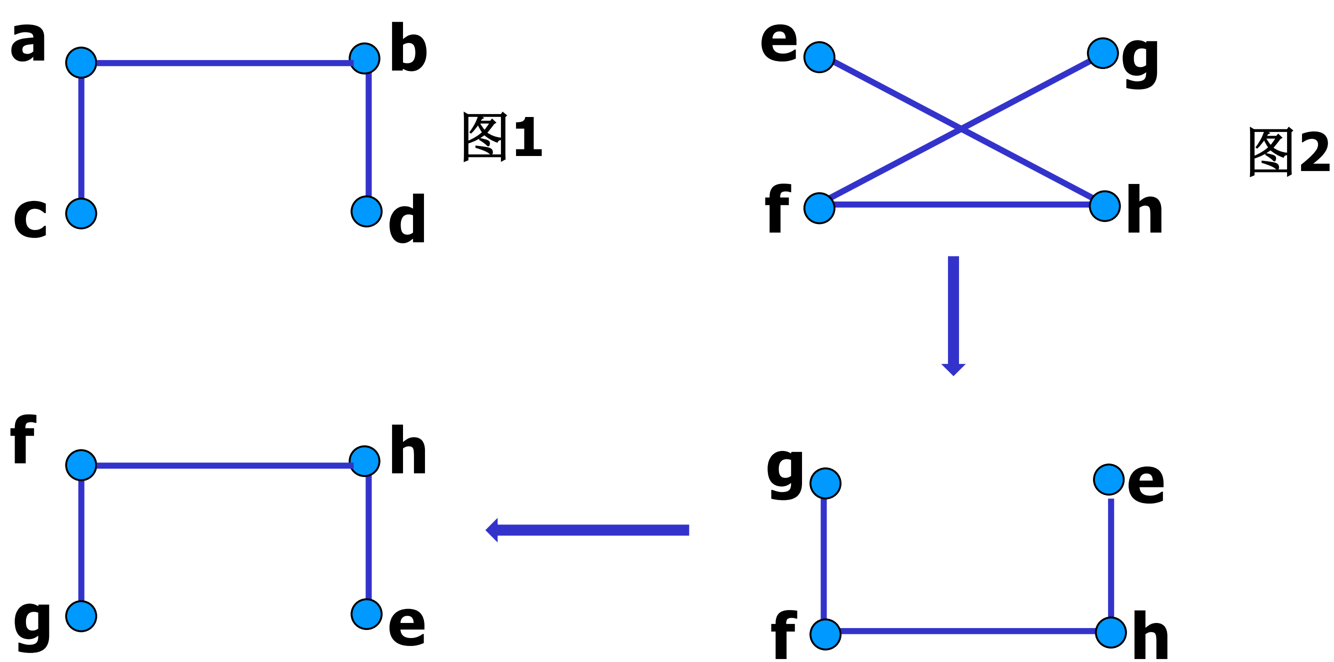

$K_6$图

$K_6$图-v1的导出子图



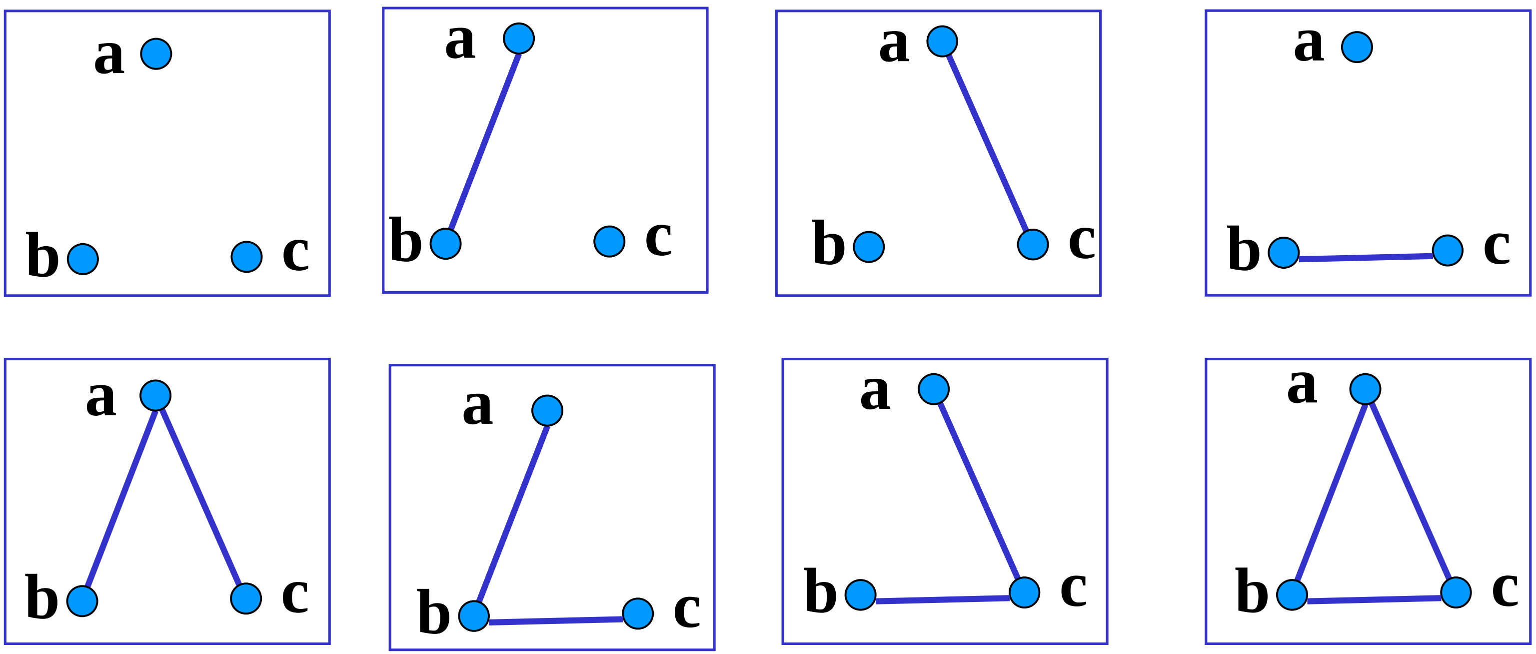
# 七、图的同构定义及性质

定义6.2.8 设G=(V, E), H=(U, F)是两个无向图. 如果存在一个一一对应φ:V→U, 使得uv∈E当且仅当φ(u)φ(v)∈F, 则称G与H同构, 记为G≅H.



# 七、图的同构定义及性质

问题：3个顶点的无向图图有多少种？（注：同构的算一种）




4种。

# 七、图的同构定义及性质

定义6.2.8 设$G=(V,E)$，$H=(U,F)$是两个无向图.如果存在一个一一对应$\varphi:V\to U$，使得$uv\in E$当且仅当$\varphi(u)\varphi(v)\in F$，则称G与H同构，记为$G\cong H$.

乌拉姆猜想 设$G=(V,E)$，$H=(U,F)$是两个图，

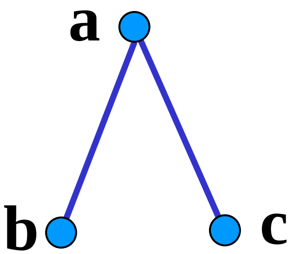
$V=\{v_1, v_2, ..., v_p\}$，

$U=\{u_1, u_2, ..., u_p\}$，$p\geq 3$.

如果对每个i，$G-v_i\cong H-u_i$，则$G\cong H$.

# 八、顶点的度的定义及性质

定义6.2.9　设v为图G=(V,E)的任一顶点，G中与v关联的边的数目称为顶点v的度，记为degv.

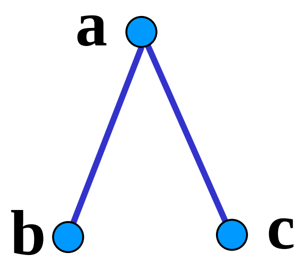



图G

# 八、顶点的度的定义及性质

定理6.2.1(Euler) 设G=(V,E)是一个具有p个顶点q条边的图,则G中各顶点度的和等于边的条数q的两倍,即:

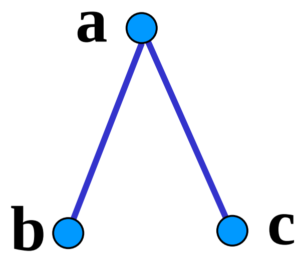
$$\sum_{v \in V} \deg v = 2q$$




图G

# 八、顶点的度的定义及性质

推论6.2.1　任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数.




图G

# 八、顶点的度的定义及性质

推论6.2.1　任一图中，度为奇数的顶点的数目必为偶数.

[证]　设G=(V,E)，令度为奇数的顶点的集合为$V_1$，则$V_2=V\setminus V_1$为度为偶数的顶点之集；

由定理6.2.1有

$$\sum_{v\in V}\deg v=\sum_{v\in V_1}\deg v+\sum_{u\in V_2}\deg u=2q$$

从而

$$\sum_{v\in V_1}\deg v=2q-\sum_{u\in V_2}\deg u=\text{偶数}$$

也就是$|V_1|$个奇数相加是偶数，$|V_1|$的个数必为偶数

# 2015-2016图论有关复试题

## 2015年，共200分， 占14分

7. 设d=(d1, d2, …, dn), 其中di为非负整数， i=1, 2, …, n。若存在n个顶点的(简单)无向图, 使得顶点vi的度为di，则称d是可图解的。下面给出的各序列中哪个是可图解的？

**A.** （1,1,1,2,3） √

**B.** （1,2,2,3,4,5）

**C.** （1,3,3,3）

**D.** （1,3,3,4,5,6,6）

# 八、顶点的度的定义及性质

显然,对(p,q)图的每个顶点v,有$0 \le \deg v \le p-1$

$$\delta(G)=\min_{v\in V}\{\deg v\},$$

$$\Delta(G)=\max_{v\in V}\{\deg v\},$$

**定义6.2.10** 图G称为r度正则图，如果

$$\Delta(G)=\delta(G)=r$$

即G的每个顶点的度都等于r,3度正则图也叫做三次图,一个具有p个顶点的p-1度正则图称为p个顶点的完全图,记为$K_p$。

# 八、顶点的度的定义及性质

推论6.2.2　每个三次图均有偶数个顶点.

度为零的顶点称为孤立顶点,0度正则图就是零图

# 6.3 路、圈、连通图

## 本节主要问题

一、通道与闭通道的定义和性质

二、迹与闭迹的定义和性质

三、路与回路的定义和性质

四、连通图的定义与性质

# 一、通道与闭通道的定义和性质

定义6.3.1 设G=(V,E)是一个图,G的一条通道是G的顶点和边的一个交错序列

$v_0, x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, ..., v_{n-1}, x_n, v_n,$

其中$x_i=v_{i-1}v_i$, i=1,2,...,n, n称为通道的长,这样的通道常称为$v_0-v_n$通道，并简记为$v_0v_1v_2...v_n$

当$v_0=v_n$时，则称此通道为闭通道;

在计算通道的长时，重复走过的边重复计算;

通道也叫做通路(复杂通路)。

闭通道也叫做回路(复杂回路)。

a y b z d z b y a x c是一条通道

简写为abdbac

abdba是一条闭通道

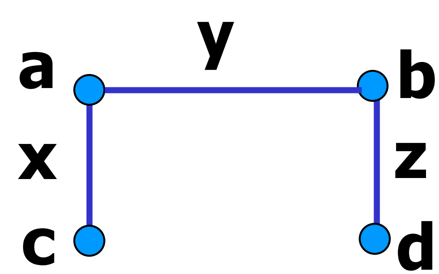



图1

# 二、迹与闭迹的定义和性质

定义6. 3. 2　如果图中一条通道上的各边互不相同, 则称此通道为图的迹，如果一条闭通道上的各边互不相同，则此闭通道称为闭迹。

迹又叫做简单通路，闭迹又叫做简单回路。

cabce是一条迹

cabcedc是一条闭迹

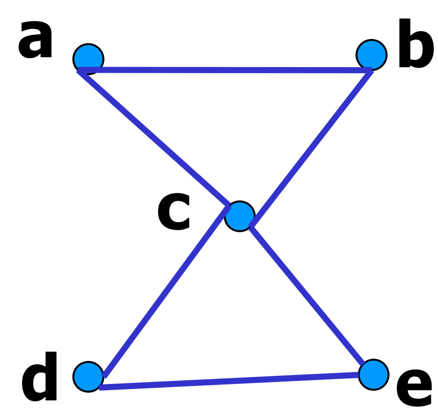



图1

# 三、路与回路的定义和性质

定义6.3.3 如果图中一条通道上的各顶点互不相同，则称此通道为路，如果闭通道上各顶点互不相同，则称此闭通道为圈，或回路。

路又称作初级通路，圈又叫做初级回路。

abced是一条路

abca是一个圈

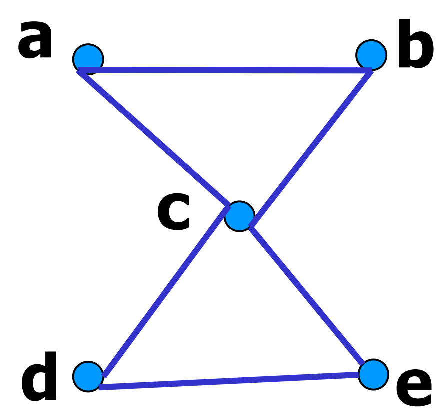
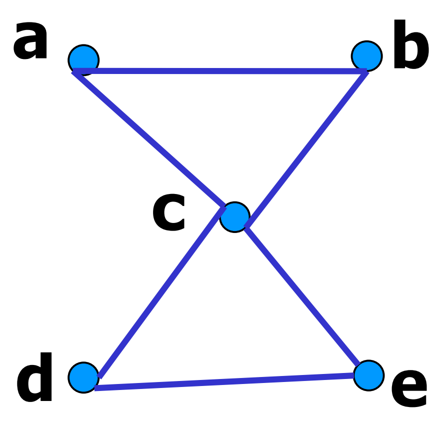


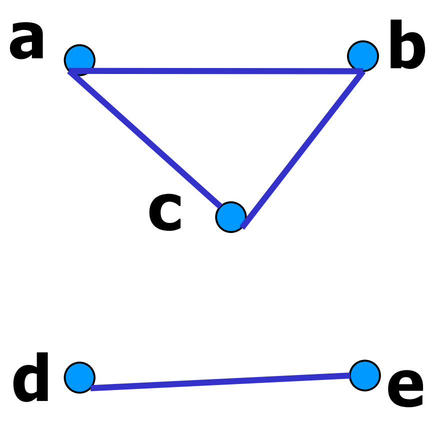

图1

# 四、连通图的定义与性质

定义6.3.4 设G=(V,E)是图,如果G中任两个不同顶点间至少有一条路联结,则称G是一个连通图。




连通图




非连通图

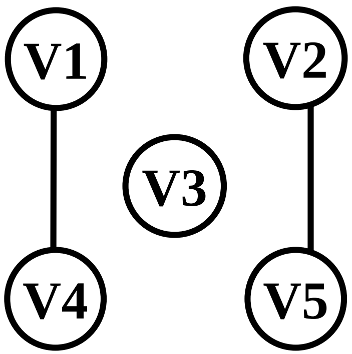
连通图分支

定义6.3.5 图G的极大连通子图称为G的一个支。

# 四、连通图的定义与性质

定义6.3.5 图G的极大连通子图称为G的一个支。

例6.3.2考虑下图的连通分支数并理解极大的含义




连通分支数是3，极大连通子图可理解为含有某一点的极大连通子图。

# 6.3 路、圈、连通图

定理6.3.2 设G=(V,E)是一个有p个顶点的图,若对G的任两个不邻接的顶点u和v:degu+degv≥p-1,则G是连通的。

证明思想:

如果G不连通,则G至少有两个支,设$G_1=(V_1,E_1)$是其中的一个支,其他各支构成的子图为$G_2=(V_2,E_2)$;

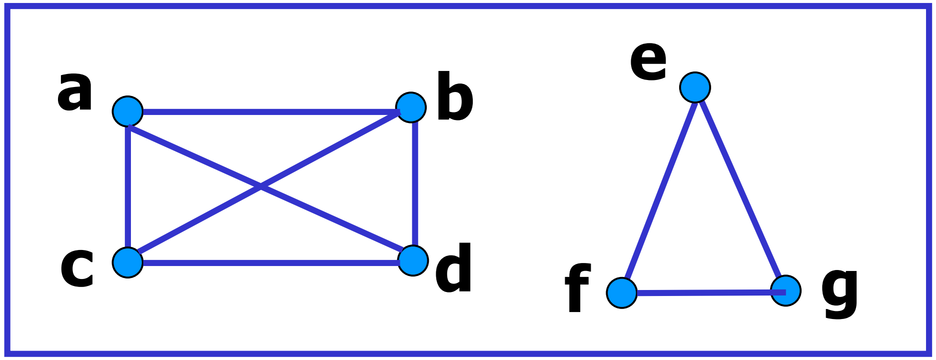



图1

考虑每个支中的最大度数

# 四、连通图的定义与性质

定理6.3.2 设G=(V,E)是一个有p个顶点的图,若对G的任两个不邻接的顶点u和v: $\deg u+\deg v \geqslant p-1$,则G是连通的。

[证]

如果G不连通,则G至少有两个支,设$G_1=(V_1,E_1)$是其中的一个支,其他各支构成的子图为$G_2=(V_2,E_2)$;

设$|V_1|=n_1$,则$|V_2|=p-n_1$,

在$G_1$中,$\forall u\in V_1$, $\deg u\leqslant n_1-1$;

在$G_2$中则$\forall v\in V_2$,有$\deg v\leqslant p-n_1-1$

$\deg u+\deg v\leqslant (n_1-1)+(p-n_1-1)=p-2$

这与定理的假设矛盾,所以G是连通的。

# 四、连通图的定义与性质

定理6.3.3 设G=(V,E)是至少有一个顶点不是弧立顶点的图,如果$\forall u \in V$,degu为偶数,则G中有圈。

证明思想： 考虑图中的最长路aebcd

因为d的度数是偶数，因此d除了与c相连外，还与其他的顶点x相连，x必然在最长路上，否则aebcdx更长，与aebcd是最长路矛盾。

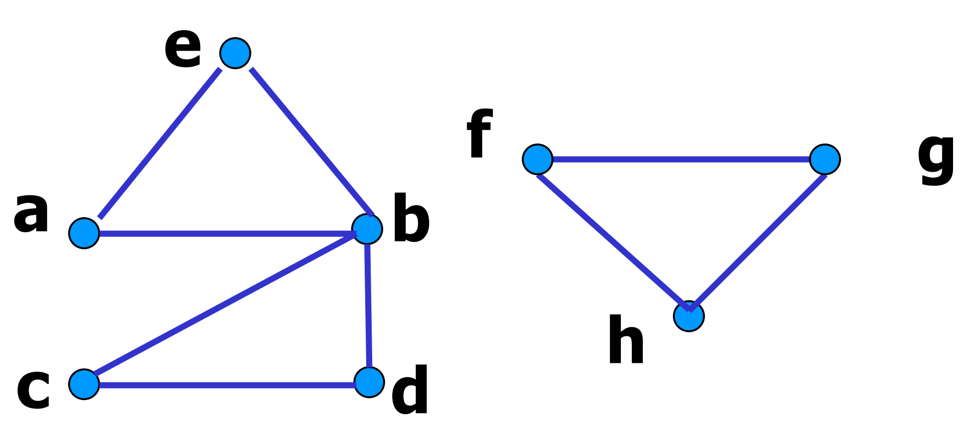



图1

# 四、连通图的定义与性质

定理6.3.3 设$G=(V,E)$是至少有一个顶点不是弧立顶点的图，如果$\forall u\in V$，degu为偶数，则G中有圈。

[证]

令P是G中的一条最长的路，$P=v_1v_2...v_n$，

$\deg v_1\geqslant 2$，除$v_2$外，必有某个顶点u和$v_1$邻接，那么u必在P中，

如果u不在P中，$P1=uv_1v_2...v_n$是一条更长的路；

所以u必是$v_2,...,v_n$中的某个$v_i$，$i\geqslant 3$，于是$P=v_1v_2...v_iv_1$是G的一个圈。

# 四、连通图的定义与性质

定理6.3.4 如果图G中的两个不同顶点u与v间有两条不同路联结，则G中有圈。

证明思想：

a到d有两条路acd和abcd

边bc在abcd上不在acd上，去掉边bc，b到c还有其他路，加上bc形成圈。

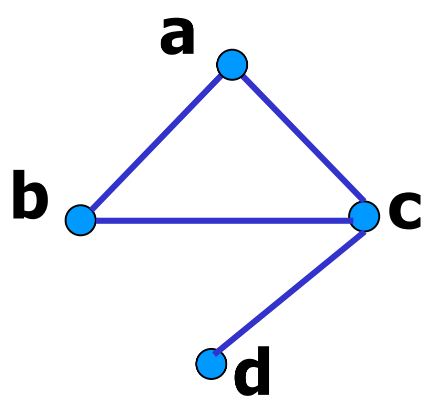



图1

# 四、连通图的定义与性质

定理6.3.4 如果图G中的两个不同顶点u与v间有两条不同路联结，则G中有圈。

[证]

令$P_1$和$P_2$是G中两条不同的u-v路；

因为$P_1 \neq P_2$，所以存在$P_2$的一条边$x=u_1v_1$不在$P_1$上，或者存在$P_1$的一条边$x=u_1v_1$不在$P_2$上；

由$P_1$和$P_2$上的顶点和边构成的G的子图记为$P_1 \cup P_2$

于是$(P_1 \cup P_2)-x$是G的一个连通子图，

所以$(P_1 \cup P_2)-x$中包含一条$u_1-v_1$路P，

于是$P+x=P+u_1v_1$就是G的一个圈。

**