第三章：关系

第三章知识结构图

关系的概念、性质、合成、闭包、关系矩阵和关系图、集合的划分、偏序关系和偏序集。

内容

关系

图表示（可视化）

建模

社交网络、生物信息学、数据挖掘、人工智能、XXX预测、……

3.1 关系的概念

本节主要问题

（1）“关系”的定义（“关系”与笛卡尔积的关系）

（2）“关系”和映射的区别

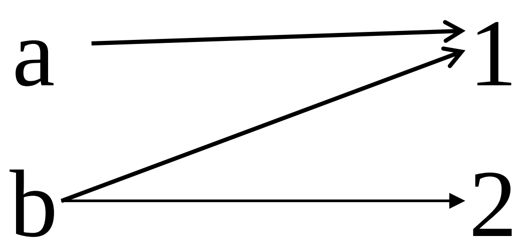
（3） 关系的一些术语

（1）“关系”的定义（“关系”与笛卡尔积的关系）

例3.1.1：设A是一个学校的学生集合，B是这个学校的所有课程的集合。

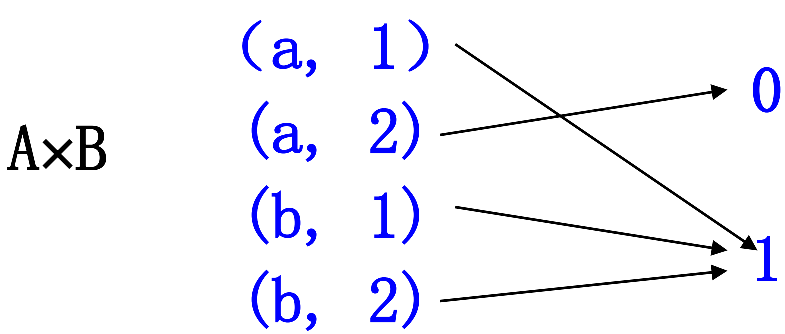
设A={张三，李四}，B={C语言，离散数学}

集合元素用符号代替：A={a，b}，B={1，2}



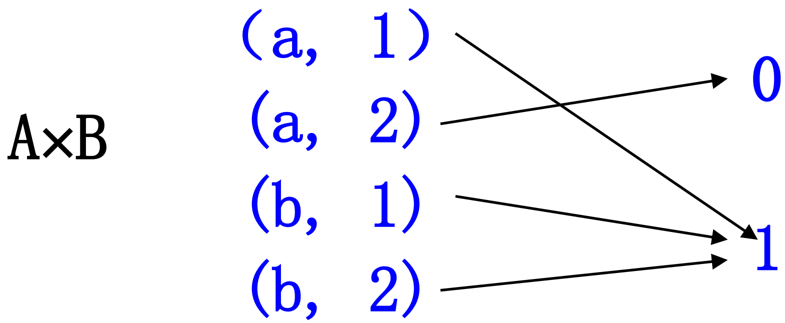
x指向y表示学生x选了课程y

这种选课关系可以看成是一个映射



（1）“关系”的定义（“关系”与笛卡尔积的关系）

这种选课关系可以看成是一个映射。



关系的初始定义：

定义3.1.1　设A, B是两个集合，一个从A×B到{是，否}的映射R，称为从A到B的一个二元关系，或A与B间的一个二元关系。

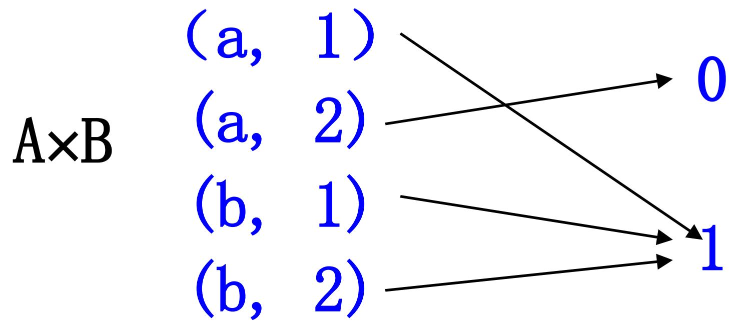
∀(a, b)∈A×B，如果(a, b)在R下的象为“是”，则a与b符合关系R，记为aRb；

如果(a, b)在R下的象为“否”，则说a与b没有或不符合关系R，并记为a$\not{R}$b；

若A=B，则称R为A上的二元关系。

（1）“关系”的定义（“关系”与笛卡尔积的关系）

这种选课关系可以看成是一个映射。



⟷ $\{(a,1),(b,1),(b,2)\}$

从A到B的一个二元关系R就是A×B的一个子集的特征函数。

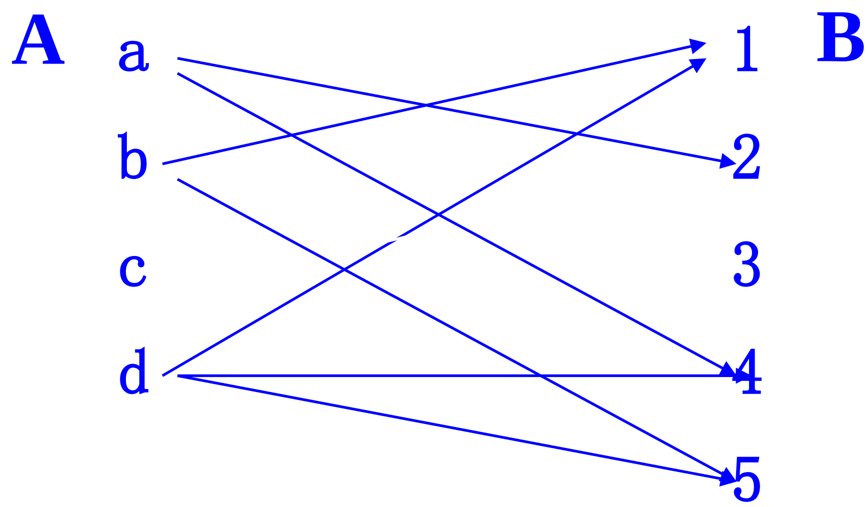
A×B的一个子集的特征函数和这个子集一一对应。

关系的定义：

定义3.1.2 设A到B是两个集合。A×B的任一子集R称为从A到B的一个二元关系。

（2）“关系”和映射的区别

关系图



映射是一个特殊的二元关系

(1)映射：$\forall x \in A$，存在唯一$y \in B$, $f(x)=y$, 即xfy;

(2)关系：对于从A到B的任意二元关系R，$\forall x \in A$，不一定有$y \in B$使得xRy；

(3)关系：如果对某个$x \in A$, 存在$y \in B$, 使得xRy, 那么y不一定唯一，甚至有多个，乃至无穷多个。

关系举例

例3.1.4 设N={1, 2, 3, . . . }, 则N×N可用下图中的表示。

	1	2	3	. . .	n	. . .
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	. . .	(1, n)	. . .
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	. . .	(2, n)	. . .
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	. . .	(3, n)	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n	(n, 1)	(n, 2)	(n, 3)	. . .	(n, n)	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

1、N上的“小于或等于关系“≤”是表中对角线上及对角线上方的那些序对构成的集合；

2、“大于或等于关系“≥”是表中对角线上及对角线下方那些序对所构成的集合。

（3） 关系的一些术语

全关系、空关系、恒等关系、定义域、值域、关系的个数等概念。

① 全关系

A×B也是A×B的一个子集，按定义A×B也是从A到B的一个二元关系。我们把A×B叫做A到B的全关系

例如：A={a, b}，B={1, 2}

A×B={（a, 1）,(a, 2),(b, 1),(b, 2)}

是A到B的全关系。

（3） 关系的一些术语

全关系、空关系、恒等关系、定义域、值域、关系的个数等概念。

② 空关系

空集$\varnothing$叫做A到B的空关系。

（3） 关系的一些术语

全关系、空关系、恒等关系、定义域、值域、关系的个数等概念。

③ 恒等关系

集合$\{(a,a)|a\in A\}$称为A上的恒等关系或相等关系，并记为I_A

例如：A={a, b}

{（a, a）,(b, b)}

是A到A的恒等关系。

（3） 关系的一些术语

④ 定义域和值域

设$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{a,b,c,d,e\}$

$\{(1,a),(2,b),(2,c),(3,c)\}$是一个二元关系

$\{1,2,3\}$是定义域，$\{a,b,c\}$是值域

定义3.1.3 设$R\subseteq A\times B$，

集合$\{x|x\in A且\exists y\in B使得(x,y)\in R\}$称为R的定义域，并记为dom(R)；

集合$\{y|y\in B且\exists x\in A使得(x,y)\in R\}$称为R的值域，并记为ran(R)；

一般情况下$A\neq dom(R)$；$B\neq ran(R)$

$dom(R)\subseteq A$；$ran(R)\subseteq B$。

（3） 关系的一些术语

⑤ A到B的关系的个数

例如：$A=\{1,2\}$, $B=\{a,b,c\}$

$A\times B=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$

$A\times B$有2^6个子集，因此从A到B就有2^6个关系；

一般地：设$|A\times B|=m$，那么A到B上就有2^m个关系。

（3） 关系的一些术语

二元关系到n元关系的推广

定义3.1.4 设$A_1,A_2,\ldots,A_n$是n个集合，一个$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$的子集R称为$A_1,A_2,\ldots,A_n$间的n元关系，每个$A_i$称为R的一个域。

（3） 关系的一些术语

例3.1.5设

1、A为某单位职工“姓名”的集合;

2、B为“性别”之集合，B={男，女}，

3、C为职工年龄集合 C={1,2,...,100};

4、D表示“文化程度”，

D={小学,初中,高中,大学,硕士,博士};

5、E是“婚否”集合，E={是，否}

6、F表示月工资，F=[0,20000]

（3） 关系的一些术语

姓名 A	性别 B	年龄 C	文化程度 D	婚否 E	工资 F
张三	男	28	大学	是	400
李四	男	50	硕士	是	1400
李晓芬	女	18	高中	否	300

这其实就是关系型数据库的一个数据表；

n元关系是关系数据模型的核心，而关系数据模型是关系型数据库的基础。

**

3.2 关系的性质

本节主要问题

(1) 自反关系
(2) 反自反关系
(3) 对称的关系
(4) 反对称的二元关系
(5) 传递关系
(6) 相容关系
(7) 关系的逆
(8) 关系的集合运算

(1)、自反关系

设A={a, b, c, d}，R是A到A的一个二元关系：

R={(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (c, d)}

R是一个自反关系

定义3.2.1 X上的二元关系R称为自反的，如果

$\forall x \in X, xRx$

在这个定义中，要求X的每个元素x，都有xRx，即

$(x, x) \in R$

设I_X是X上的恒等关系，即：$I_X=\{(x, x) | x \in X\}$

显然，R是自反的，当且仅当$I_X \subseteq R$。

(1)、自反关系

X是一非空集合，判断以下关系是否是自反关系？

a. 2^X上集合的包含于“$\subseteq$”关系。√

b. 2^X上集合的真包含于“$\subset$”关系。×

c. I_X √

d. I_X的任一真子集$R \subset I_X$ ×

e. 实数集上的“小于或等于”关系“$\leqslant$” √

f. 实数集上的小于关系“$<$” ×

g. 设n为任一给定的自然数。对任两个整数m, k, 如果m和k被n除，所得余数相等, 则称m与k为模n同余，并记为: $m \equiv k \pmod{n}$ √

(2)、反自反关系

设A={a, b, c, d}，R是A到A的一个二元关系：

R={(a,b),(c,d),(b,c)}

R是一个反自反关系

定义3.2.2　X上的二元关系R称为反自反的，

如果：$\forall x \in X$，都有$(x,x) \notin R$

① 反自反的二元关系必然不是自反的；

② 自反的二元关系必然不是反自反的；

③ 但不是自反的二元关系，却不一定是反自反；

设A={a, b, c, d}，R是A到A的一个二元关系：

R={(a,b),(c,d),(b,c),(a,a)}

既不是反自反的，也不是自反的。

(2)、反自反关系

X是一非空集合，判断以下关系是不是反自反关系？

a. 2^X上集合的包含于“$\subseteq$”关系。

b. 2^X上集合的真包含于“$\subset$”关系。√

c. I_X

d. I_X的任一非空真子集$R \subset I_X$

e. 实数集上的“小于或等于”关系“$\leqslant$”

f. 实数集上的小于关系“$<$” √

g. 设n为任一给定的自然数。对任两个整数m, k, 如果m和k被n除，所得余数相等, 则称m与k为模n同余，并记为:$m \equiv k \pmod{n}$

(2)、反自反关系

判断题

设X是一个集合，则X上的自反二元关系和反自反的二元关系一样多。√

(3) 对称关系

设A={a, b, c, d}，R是A到A的一个二元关系：

R={(a,b),(b,a),(a,a)}

R是一个对称关系。

定义3.2.3 设R为X上的二元关系。如果：

$\forall x, y \in X$，只要xRy就有yRx，则称R是对称的。

(3) 对称关系

X是一非空集合，判断以下关系是否是自反关系？

a. 2^X上集合的包含于"$\subseteq$"关系。

b. 2^X上集合的真包含于"$\subset$"关系。

c. I_X √

d. I_X的任一真子集$R \subset I_X$ √

e. 实数集上的"小于或等于"关系"$\leqslant$"

f. 实数集上的小于关系"<"

g. 设n为任一给定的自然数。对任两个整数m, k, 如果m和k被n除，所得余数相等, 则称m与k为模n同余，并记为:$m \equiv k \pmod{n}$ √

(4) 反对称的二元关系

设A={a, b, c, d}，R是A到A的一个二元关系：

$R=\{(a,b),(a,c),(a,a),(b,c)\}$

R是一个反对称关系。

定义3.2.4　设R为X上的二元关系。对X的任意元素x,y,如果：xRy且yRx，则x=y,那么就称R为反对称的。

（4）反对称关系

X是一非空集合，判断以下关系是否是自反关系？

a. 2^X上集合的包含于“$\subseteq$”关系。 √

b. 2^X上集合的真包含于“$\subset$”关系。 √

c. I_X √

d. I_X的任一真子集$R \subset I_X$ √

e. 实数集上的“小于或等于”关系“$\leq$” √

f. 实数集上的小于关系“<” √

g. 设n为任一给定的自然数。对任两个整数m, k, 如果m和k被n除，所得余数相等，则称m与k为模n同余，并记为:$m \equiv k \pmod n$ ×

（5）传递关系

设A={a, b, c, d}，R是A到A的一个二元关系：

R={(a,b),(b,c),(a,c)}

R是一个传递关系。

定义3.2.5 设R为X上的二元关系。如果对X上的任意x,y,z,只要xRy且yRz,就有xRz，则称R为传递关系。

(5) 传递关系

X是一非空集合，判断以下关系是否是自反关系？

a. 2^X上集合的包含于“$\subseteq$”关系。√

b. 2^X上集合的真包含于“$\subset$”关系。√

c. I_X √

d. I_X的任一真子集$R \subset I_X$ √

e. 实数集上的“小于或等于”关系“$\leq$” √

f. 实数集上的小于关系“<” √

g. 设n为任一给定的自然数。对任两个整数m, k, 如果m和k被n除，所得余数相等，则称m与k为模n同余，并记为: $m \equiv k \pmod{n}$ √

（5）传递关系

设R为X={a, b}上的二元关系，如果R=∅，R中没有任何元素，根据定义，讨论以下5种关系。

自反性　×

反自反性√

对称性　√

反对称性√

传递性。√

(6) 相容关系

设A={a, b, c}，R是A到A的一个二元关系：

R={(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)}

R是一个自反且对称的二元关系。

定义3.2.6　集合X上的二元关系R称为是相容关系，如果R是自反的且又是对称的。

(6) 相容关系

X是一非空集合，判断以下关系是否是自反关系？

a. 2^X上集合的包含于“$\subseteq$”关系。

b. 2^X上集合的真包含于“$\subset$”关系。

c. I_X √

d. I_X的任一真子集$R\subset I_X$

e. 实数集上的“小于或等于”关系“$\leqslant$”

f. 实数集上的小于关系“<”

g. 设n为任一给定的自然数。对任两个整数m, k, 如果m和k被n除，所得余数相等，则称m与k为模n同余，并记为: $m\equiv k(\mathrm{mod}\ n)$ √

关系性质举例

例3.2.7　设R为X上的二元关系。如果$R \neq \varnothing$且R是反自反和对称的，则R不是传递的。

证明：

因为$R \neq \varnothing$，$\exists (x, y) \in R$,

因为R是对称的，$(y, x) \in R$

如果R是传递的，则，$(x, x) \in R$

这与R是反自反的矛盾。

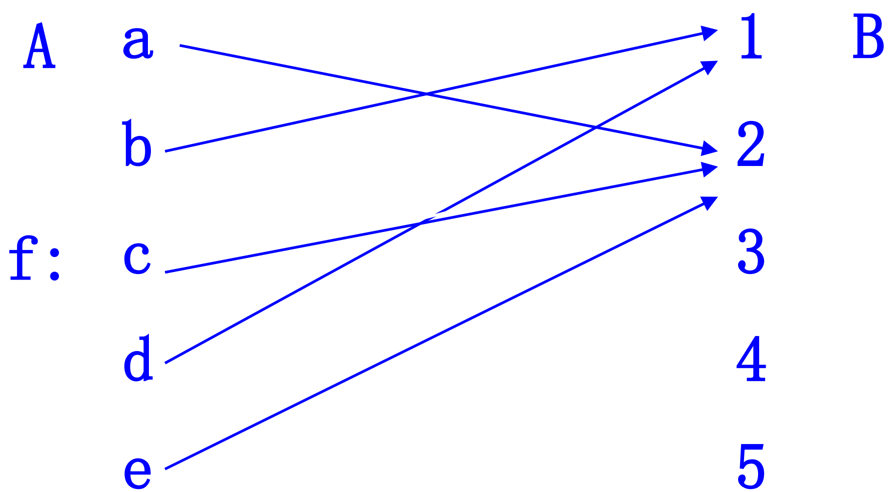
因此：命题成立。

映射的核

例3.2.7　令f:A→B,

Ker(f)={(x, y)| x, y∈A且f(x)=f(y)}

Ker(f)称为f的核。



(1) 自反关系

(2) 反自反关系

(3) 对称的关系

(4) 反对称的二元关系

(5) 传递关系

(6) 相容关系

(7) 关系的逆

例如：设$A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{a,b,c,d,e\}$

$$R=\{(1,a),(2,b),(2,c),(3,c)\}$$

$$R^{-1}=\{(a,1),(b,2),(c,2),(c,3)\}$$

定义3.2.7　设R是A到B的二元关系，

则R的逆记为R^{-1}, R^{-1}是B到A的二元关系且：

$$R^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in R\}$$

(8) 关系的集合运算

X到Y的一个二元关系R就是X×Y的一个子集。

因此可以在关系上定义并、交、差、对称差、余集和笛卡尔积运算。

例如，若R，S都是X到Y的二元关系，则：

$R\cup S=\{(x,y)|(x,y)\in R$或$(x,y)\in S\}$也是X到Y的二元关系,

如果x与y符合$R\cup S$;

记作$xR\cup Sy$,意思是xRy或xSy;

仿照并集运算,就可以由集合的运算定义关系的其它运算。

(8) 关系的集合运算

二元关系的笛卡尔积定义：

设R是A到B的二元关系，S为C到D的二元关系，则定义R×S为A,B,C,D间的一个四元关系：

R×S={(a,b,c,d)|(a,b)∈R且(c,d)∈S},为A,B,C,D间的一个四元关系；

而不是{((a,b),(c,d))|(a,b)∈R且(c,d)∈S}

二元关系R的余积定义

$R^c=(A\times B)\backslash R$。

（8）关系的集合运算

习题5. p86 设R与S是X上的二元关系，证明：

$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

证明：

（1）$\forall(x, y)\in(R\cap S)^{-1}$

$\Rightarrow (y, x)\in R\cap S$

$\Rightarrow (y, x)\in R$ 且 $(y, x)\in S$

$\Rightarrow (x, y)\in R^{-1}$ 且 $(x, y)\in S^{-1}$

$\Rightarrow (x, y)\in R^{-1}\cap S^{-1}$

（2）$\forall(x, y)\in R^{-1}\cap S^{-1}$

$\Rightarrow (y, x)\in R$ 且 $(y, x)\in S$

$\Rightarrow (y, x)\in R\cap S$

$\Rightarrow (x, y)\in(R\cap S)^{-1}$

由(1)和(2),命题得证。

**

3.3 关系的合成运算

本节主要问题

（1）关系合成运算的定义

（2）关系的合成运算的性质

a. 合成运算不满足交换律

b. 合成运算满足结合律

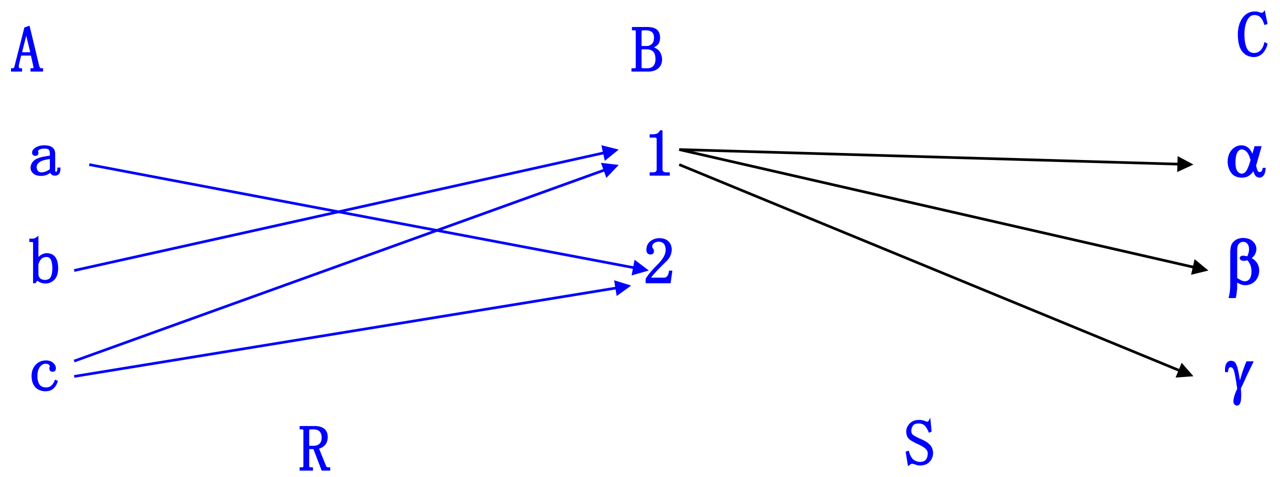
c. 合成运算对并、交运算的分配关系

d. 合成运算对差运算不满足分配律

e. 关系的逆的合成

f. 关系幂运算的定义

（1）关系合成运算的定义

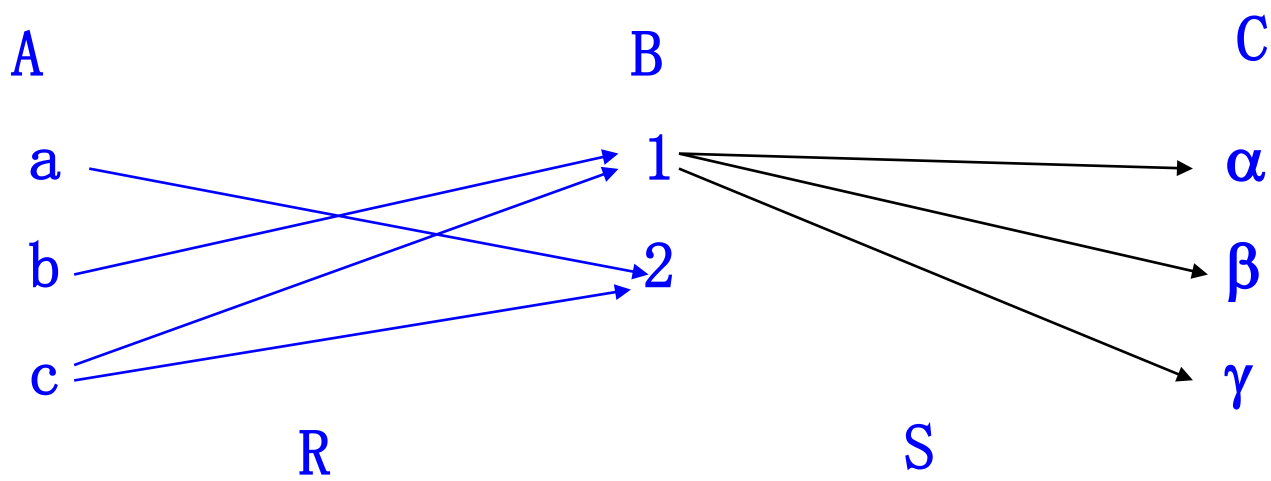


$R=\{(a,2),(b,1),(c,1),(c,2)\}$

$S=\{(1,\alpha),(1,\beta),(1,\gamma)\}$

$R \circ S=\{(b,\alpha),(b,\beta),(b,\gamma),(c,\alpha),(c,\beta),(c,\gamma)\}$,

（1）关系合成运算的定义



定义3.3.1　设R是A到B，S是B到C的二元关系。R与S的合成是A到C的一个二元关系，记成$R\circ S$，并且

$$R\circ S=\{(x,z)\mid \exists y\in B\text{使得}xRy\text{且}ySz\}。$$

b. 合成运算满足结合律

定理3.3.1 设R_1, R_2, R_3分别是从A到B，B到C，C到D的二元关系，则$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

[证]

(1) $\forall (a, d) \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

$\exists$ $c \in C$，使得$(a, c) \in R_1 \circ R_2$且$(c, d) \in R_3$

由$(a, c) \in R_1 \circ R_2$，$\exists$ $b \in B$, $(a, b) \in R_1$且$(b, c) \in R_2$,

由$(b, c) \in R_2$, 且$(c, d) \in R_3$, 知$(b, d) \in R_2 \circ R_3$;

又由$(a, b) \in R_1$, 因此$(a, d) \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$。

因此$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 \subseteq R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$, 反之亦然。

c. 合成运算对并、交运算的分配关系

定理3.3.2　设R_1是A到B的二元关系，R_2，R_3是从B到C的二元关系，设R_4是从C到D的二元关系，则：

(1) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$

(2) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$

(3) $(R_2 \cup R_3) \circ R_4 = (R_2 \circ R_4) \cup (R_3 \circ R_4)$

(4) $(R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$

c. 合成运算对并、交运算的分配关系

定理3.3.2 设R_1是A到B的二元关系，R_2，R_3是从B到C的二元关系，设R_4是从C到D的二元关系，则：

(4) $(R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$

[证]

(1) $\forall (b,d) \in (R_2 \cap R_3) \circ R_4$

$\Rightarrow \exists\ c \in C$，使得$(b,c) \in R_2 \cap R_3$且$(c,d) \in R_4$

$\Rightarrow \exists\ c \in C$，使得$(b,c) \in R_2$且$(c,d) \in R_4$

使得$(b,c) \in R_3$且$(c,d) \in R_4$

$\Rightarrow (b,d) \in (R_2 \circ R_4)$

$(b,d) \in (R_3 \circ R_4)$

$\Rightarrow (b,d) \in (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$

$\Rightarrow (R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$

d.一般说来，合成运算对差运算不满足分配律：

$$R_1 \circ (R_2 \backslash R_3) \neq (R_1 \circ R_2) \backslash (R_1 \circ R_3)$$

$$(R_2 \backslash R_3) \circ R_4 \neq (R_2 \circ R_4) \backslash (R_3 \circ R_4)$$

例3.3.3 设$X=\{a, b, c\}$, $R_1=\{ (a, a),(a, b) \}$,
$R_2=\{(a, a), (b, c)\}$, $R_3=\{(a, c),(b, b)\}$

$R_2 \backslash R_3= \{(a,a), (b,c)\}$

$R_1 \circ (R_2 \backslash R_3)= \{(a,a), (a,c)\}$

$(R_1 \circ R_2)= \{(a,a), (a,c)\}$

$(R_1 \circ R_3)= \{(a,c), (a,b)\}$

$(R_1 \circ R_2) \backslash (R_1 \circ R_3)= \{(a,a)\}$。

e. 关系的逆的合成：

定理3.3.3　设R, S是集合X上的两个二元关系，则

(1) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

(2) $R \circ R^{-1}$是对称的。

e. 关系的逆的合成:

定理3.3.3 设R, S是集合X上的两个二元关系, 则

(2) $R \circ R^{-1}$是对称的。

[证]

(1) $\forall (x, z) \in R \circ R^{-1}$

$\Rightarrow \exists\ y \in X$，使得$(x, y) \in R, (y, z) \in R^{-1}$

$\Rightarrow \exists\ y \in X$，$(y, x) \in R^{-1}, (z, y) \in R$

$\Rightarrow (z, x) \in R \circ R^{-1}$

因此：命题成立

3.3 关系的合成运算

定理3.3.4　设R是X上的二元关系，则R是传递的当且仅当：$R \circ R \subseteq R$。

需要证明：(1)必要性

$\forall (x, y) \in R$，$(y, z) \in R$　则　$(x, z) \in R$

=> $R \circ R \subseteq R$

略。

(2)充分性

$R \circ R \subseteq R$

=> $\forall (x, y) \in R$，$(y, z) \in R$　则　$(x, z) \in R$

略。

关系的定义：

定义3.1.2 设A到B是两个集合。A×B的任一子集R称为从A到B的一个二元关系。

例：设X={a, b, c, d}，R是X到X的一个二元关系：R={(a, a), (a, b), (b, c)}

怎么理解？设X是一个集合，集合的包含于“⊆”是2^X上的二元关系。

设X={a, b}，2^X={∅, {a}, {b}, {a, b}}

“⊆” = {(∅, ∅), ({a},{a}), ({b},{b}), ({a,b},{a,b}),
(∅,{a}), (∅,{b}), (∅,{a,b}),
({a},{a,b}),
({b},{a,b})}。

例：考虑整数集{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}上的模3同余关系。

R={ (1, 1), (1, 4), (1, 7)
(2, 2), (2, 5), (2, 8)
(3, 3), (3, 6)
(4, 1), (4, 4), (4, 7)
(5, 2), (5, 5), (5,8)
(6, 3), (6, 6)
(7, 1), (7, 4), (7, 7)
(8, 2), (8, 5), (8, 8)}

2015-2016集合论有关复试题

3.设A={1,2,3}，则A上可以定义多少个自反的二元关系？

A. 16

B. 32

C. 64 √

D. 128

有序对个数3×3=9

自反关系必须包含(1,1),(2,2),(3,3)这三个有序对

其它6个有序对可出现，可不出现

方案数是2^6。

关系性质分析

设X是一个非空集合，例如：X={a, b, c}, 问：在集合的包含意义下，X上符合以下关系的最小的关系是什么？最大的关系是什么？

（1）自反关系	恒等关系Ix和全关系X×X
（2）反自反关系	空关系∅和(X×X)\ Ix
（3）对称的关系	空关系∅和全关系X×X
（4）反对称的二元关系	空关系∅和???
（5）传递关系	空关系∅和全关系X×X
（6）相容关系	恒等关系Ix和全关系X×X。