第一章：集合及其应用

1.1 集合的概念

1.2 子集、集合的相等

1.3 集合的基本运算

1.4 余集、DeMorgan公式

1.5 笛卡尔乘积

1.6 有穷集合的基数

1.4—1.6 知识结构图

1.4 余集、DeMorgan公式

容斥原理的证明

1.5 笛卡尔乘积

一一对应

"数数"的数学定义

计数问题

（容斥原理的应用）

1.6 有穷集合的基数

目的/目标

1.4　余集、De Morgan公式

本节主要问题

（1）全集的概念和性质

（2）余集（补集）和性质

（3）De Morgan公式及其证明

（1）全集的概念和性质。

例：A = {张三, 李四, … ,王五}是15级所有学生，现在在这些学生中评优

我们所考虑的学生都属于集合A，因此我们把集合A作为全集

例：在B = {关羽, 张飞, 赵云, 马超, 黄忠}中比赛谁武功最好

只在这5个人中进行比赛，集合B我们看做是全集

判断题：任何集合都可以看做是全集，包括空集

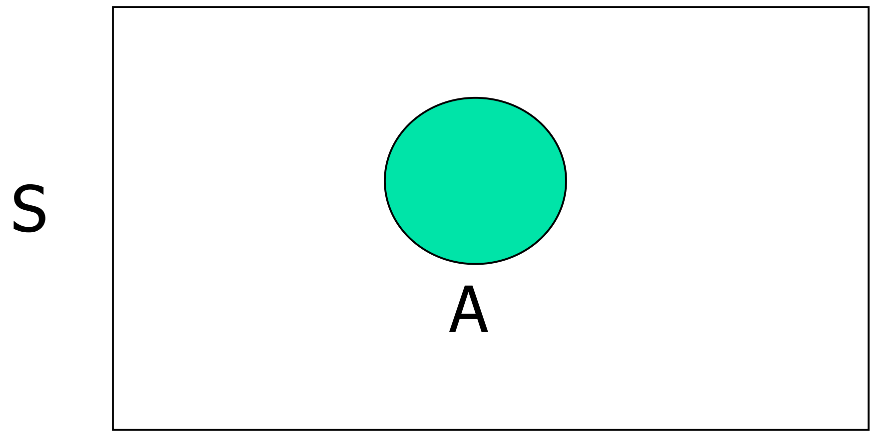
√

假如A是全集，我们假设∀x，x∈A 成立。

（1）全集的概念和性质。

设S是所考虑问题的所有对象构成的集合，则称S为该问题的全集

文氏图



在这种图示法中，用矩形中各点表示全集S的各个元素。矩形中的圆里的点表示S的子集的各元素。

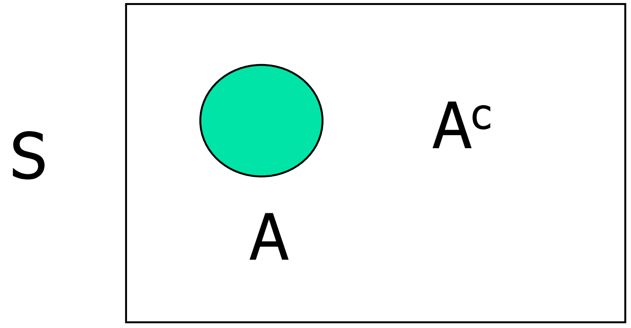
（2）余集的概念和性质。

$S=\{1,2,3,4,5\}$　　$A=\{1,2,3\}$

$S\backslash A=\{4,5\}$

定义1.4.1 设S是一个集合，$A\subseteq S$，差集$S\backslash A$称为集A对集S的余集（也称为补集），记为A^c或C_sA或$\overline{A}$，即$A^c=S\backslash A$。

集合A对S的余集A^c可用文氏图表示，如下图：



（2）余集的概念和性质。

A对S的余集A^c有如下性质：

21°. S对S的余集S^c为空集，即：

$$C_s S = S^c = \varnothing$$

22°. $\varnothing^c = S \ (C_s \varnothing = S)$

23°. $A \cap A^c = \varnothing$

24°. $A \cup A^c = S$

若A、B$\subseteq$S，则$A^c = B$当且仅当$A \cap B = \varnothing$并且$A \cup B = S$。

（3）De Morgan公式及证明

设S为任一集合，I为标号集，$\forall \xi \in I$有$A_\xi \subseteq S$，则有：

定理1.4.1　并集的余集等于各余集的交集，即

$$\left(\bigcup_{\xi \in I} A_\xi\right)^c = \bigcap_{\xi \in I} A_\xi^c$$

定理1.4.2　交集的余集等于各余集的并集，即

$$\left(\bigcap_{\xi \in I} A_\xi\right)^c = \bigcup_{\xi \in I} A_\xi^c$$

（3）De Morgan公式及证明

设S为任一集合, I为标号集, $\forall\xi\in I$有$A_\xi\subseteq S$，则有：

定理1.4.1　并集的余集等于各余集的交集, 即

$$(\bigcup_{\xi\in I} A_\xi)^c = \bigcap_{\xi\in I} A_\xi^c$$

证明：

首先考虑概念：

(1) $\forall x\notin S$ 则x与等式两边无关，因此只考虑$x\in S$的情况

(2) $\forall x\notin A^c \Leftrightarrow x\in A$

$\forall x\in A^c \Leftrightarrow x\notin A$。

（3）De Morgan公式及证明

$$\left(\bigcup_{\xi\in I} A_\xi\right)^c = \bigcap_{\xi\in I} A_\xi^c$$

证明（1）

$$\forall x \in \left(\bigcup_{\xi\in I} A_\xi\right)^c \Rightarrow x \notin \bigcup_{\xi\in I} A_\xi \Rightarrow$$

$$\forall \xi \in I, x \notin A_\xi \Rightarrow \forall \xi \in I, x \in A_\xi^c \Rightarrow$$

$$x \in \bigcap_{\xi\in I} A_\xi^c$$

（2）仿（1）可证

（3）De Morgan公式及证明

以上两个定理称为德摩根(De Morgan)公式，当集合数为2时有下面两个公式。

25°. $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$;

26°. $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$。

（3）De Morgan公式及证明

余集、差集、对称差之间的联系

定理1.4.3　设A, B都是S的子集, 则:

25°. $A\backslash B=A\cap B^c$;

26°. $A\Delta B=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)$

27°. $A^c=S\Delta A$。

1.5 笛卡儿乘积

本节主要问题

（1）有序对和笛卡尔乘积

（2）笛卡尔乘积的性质和应用。

（1）有序对和笛卡尔乘积

{a, b}={b, a}　无序对

(a, b)≠(b, a)　有序对

注意：有些书上用(a, b)表示无序对；<a, b>表示有序对

有序对的概念

两个对象a和b(允许a=b)按一定的次序排列的整体叫做一个二元组或有序对。

如果a排在b的前面，则这个有序对就记作(a, b), a称为有序对(a, b)的第一个元素，b称为第二个元素。

规定(a, b)=(c, d)当且仅当a=c, b=d。

（1）有序对和笛卡尔乘积

$A=\{1,2,3\}$　　　　$B=\{1,2\}$

$A\times B=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$

定义1.5.1 设A与B为任意两个集合，则称集合

$\{(a,b)\mid a\in A \text{且} b\in B\}$

为A与B的笛卡尔乘积，记为$A\times B$。

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A \text{且} b\in B\}$$

两个集合A，B的笛卡尔积的元素个数

对任意有穷集合A，B，如果用$|A|$，$|B|$分别表示A和B中元素的个数，那么$|A\times B|=|A|\times|B|$。

（2）笛卡尔乘积的性质和应用

含空集的两个集合的笛卡尔积

由定义可知，对任一集合A，有：

$A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$。

笛卡尔积是否满足交换律?

$\{1\}\times\{2\}=\{(1,2)\}$ $\{2\}\times\{1\}=\{(2,1)\}$

一般情况下$A\times B\neq B\times A$

是否满足结合律?

当$A\neq\varnothing, B\neq\varnothing, C\neq\varnothing$时,

$(A\times B)\times C$中的元素形如$((x,y),z)$

$A\times(B\times C)$中的元素形如$(x,(y,z))$。

（2）笛卡尔乘积的性质和应用

定理1.5.1 设A,B,C为任意三个集合,则笛卡儿乘积运算对并、交、差运算分别满足分配律，即：

30°.$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

31°.$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;

32°.$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$。

1、首先考虑这是什么问题？　　集合相等！

2、集合元素有什么特点？　　有序对(a, b)

（2）笛卡尔乘积的性质和应用

32°.$A\times(B\backslash C)=(A\times B)\backslash(A\times C)$。

证明（1） $\forall x\in A\times(B\backslash C)$

$\forall$（x, y）$\in A\times(B\backslash C)$ $\Longrightarrow$

$x\in A$, and $y\in B\backslash C$ $\Longrightarrow$

$x\in A$, and $y\in B$, and $y\notin C$ $\Longrightarrow$

（x, y）$\in A\times B$, and （x, y）$\notin A\times C$ $\Longrightarrow$

（x, y）$\in (A\times B)\backslash(A\times C)$

（2）同理可证。

（2）笛卡尔乘积的性质和应用

有序对也叫二元组，二元组可推广到三元组,四元组,一直到n元组。

三元组就是三个元素按一定次序组成的整体，设第一个元素为x,第二个元素为y,第三个元素为z,则这个三元组就记为(x,y,z)。

一般地，一个n元组就是n个元素按一定次序组成的整体，设第一个元素为x_1,第二个元素为x_2,...,第n个元素为x_n,则这个n元组就记为$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$。

称两个n元组$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$与$(y_1,y_2,\ldots,y_n)$相等当且仅当$x_1=y_1,x_2=y_2,\ldots,x_n=y_n$。

（2）笛卡尔乘积的性质和应用

例1.5.4 一个n次整系数多项式的存储问题

$$a_0+a_1x^1+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

例如：假设最高位是3，我们设置一个长度是4的数组即可：int c1[4],c2[4],c3[4];

$2x+4x^3$

c1[0]=0, c1[1]=2, c1[2]=0, c1[3]=4

$5+3x^2+x^3$

c2[0]=5, c2[1]=0, c2[2]=3, c2[3]=1

求上面两个多项式的和

c3[0]=5, c3[1]=2, c3[2]=3, c3[3]=5

$5+2x+3x^2+5x^3$。

（2）笛卡尔乘积的性质和应用

定义1.5.2 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n\geq 2$)为n个集合,

集合$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i=1,2,\ldots,n\}$

称为$A_1, A_2, \ldots, A_n$的笛卡尔乘积,

并记为: $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$。

当$A_1=A_2=\ldots=A_n=A$时，

$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$就简记为$A^n$。

**

1.6 有穷集合的基数

本节主要问题

（1）一一对应的定义、性质和应用

（2）一一对应与笛卡尔积的关系

（3）“数数”的严格定义

（4）容斥原理及应用

（1）一一对应的定义、性质和应用

例如：现有集合：$A=\{a,b,c\}$与$B=\{1,2,3\}$

定义对应法则$\varphi(a)=1,\ \varphi(b)=2,\ \varphi(c)=3$

φ是一一对应

定义1.6.1 设A和B是两个集合,如果有一个法则φ使$\forall x\in A$,根据法则φ在B中有唯一的一个y与x对应，这个y常记为$\varphi(x)$,而且$\forall y\in B$,在A中也有唯一的一个x使x在φ下对应于y。这个法则φ称为从A到B的一个一一对应

性质：若集合A和集合B之间存在一一对应，则$|A| = |B|$

（1）一一对应的定义、性质和应用

例：求n^2个人站成一排和站成n排（方阵）的方案数，并比较两种方案数的大小？

解：9个人站成一排的方案数是9!，

设$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9$是9个人的一排，

可构成一个方阵	给定一个方阵
$a_1a_2a_3$	$b_1b_2b_3$
$a_4a_5a_6$	$b_4b_5b_6$
$a_7a_8a_9$	$b_7b_8b_9$

也唯一确定一排$b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9$

因此这两种站位方式的方案数一样多，都是9!

（1）一一对应的定义、性质和应用

例 求n^2个人站成一排和站成n排（方阵）的方案数，并比较两种方案数的大小？

9个人站成方阵的方案数为：

$$C(9,3)3!C(6,3)3!C(3,3)3!$$

$$\frac{9!}{6!3!}\bullet 3!\bullet \frac{6!}{3!3!}\bullet 3!\bullet 3! = 9!$$

（1）一一对应的定义、性质和应用

例：集合$A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$,证明：A的子集中包含元素x_1的子集和不包含x_1的子集一样多。

先看一下三个元素的情况 $A=\{a, b, c\}$

不包含a的子集有：$\{\ \}$，$\{b\}$, $\{c\}$, $\{b,c\}$

包含a的子集有： $\{a\}$，$\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,b,c\}$

每个包含a的子集，去掉a就构成一个不包含a的子集。

每个不包含a的子集加进a就构成一个包含a的子集

因此：A的子集中包含元素x_1的子集形成的集合和不包含x_1的子集形成的集合之间存在一一对应。

（2）一一对应与笛卡尔积的关系

例如：现有集合：$A=\{a, b, c\}$ 与 $B=\{1, 2, 3\}$

定义对应法则 $\varphi(a)=1$，$\varphi(b)=2$，$\varphi(c)=3$

φ 是一一对应

把这种对应关系可以写成有序对的集合形式：

$\varphi=\{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$

定义1.6.1′　一个集合A到集合B的一一对应是 $A\times B$ 的子集 φ 使之满足：

1) $\forall x\in A, \exists y\in B$ 使 $(x, y)\in\varphi$；如果 (x, y)、$(x, z)\in\varphi$，则 $y=z$

2) $\forall y\in B, \exists x\in A$ 使得 $(x, y)\in\varphi$；并且如果 (x, y)、$(x', y)\in\varphi$，则 $x=x'$。

如果 $(x, y)\in\varphi$，则把 y 记为 $\varphi(x)$，即 $y=\varphi(x)$。

（3）“数数”的严格定义

定义1.6.2 集合A称为有限集,如果A=∅或A≠∅且存在一个自然数n,使得A与集合{1,2,...,n}间存在一个一一对应。数n称为A的基数，A的基数记为|A|。空集的基数定义为数0，如果A不是有穷集，则称A为无穷集

定义1.6.3 如果A与B的一个真子集间有一个一一对应存在，但A与B之间不存在一一对应，则称|A|小于|B|，记为则称|A|<|B|。

（4）容斥原理及应用

定理1.6.1（加法法则） 设A，B为两个不相交的有限集，则$|A \cup B| = |A| + |B|$。

定理1.6.2（加法法则）设$A_1, A_2, ..., A_n$为n个两两不相交的有限集，则：

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

（4）容斥原理及应用

定理1.6.3（乘法法则） 设A，B为有穷集合，则：$|A\times B|=|A|\bullet|B|$。

定理1.6.4 设$B_1, B_2, ..., B_n$为n个有限集，则：

$$|B_1\times B_2\times \ldots \times B_n| = |B_1|\cdot|B_2|\cdot\ldots\cdot|B_n|$$

（4）容斥原理及应用

定理1.6.5（减法法则与淘汰原理）设S为有穷集，A⊆S，则

$$\left|A^c\right| = |S| - |A|$$

（4）容斥原理及应用

定理1.6.6　设A, B为有限集, 则

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

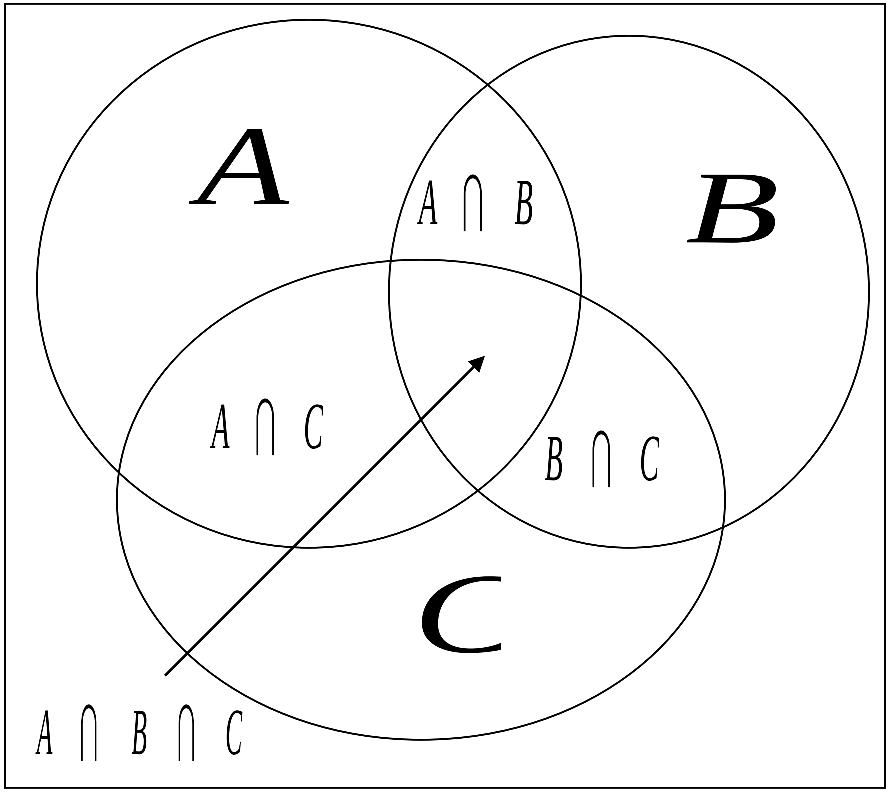
（4）容斥原理及应用

定理1.6.7　设A, B为有限集，则

$$|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

（4）容斥原理及应用

例题 $$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$



（4）容斥原理及应用

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

证明： $|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C|$

$$= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$$

$$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$$

根据：

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$|(A \cup B) \cap C| = |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

（4）容斥原理及应用

定理1.6.8 逐步淘汰原理(或容斥原理)形式之一

设$A_1, A_2, ..., A_n$为n个有穷集, 则:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$-\ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

（4）容斥原理及应用

例1.1.1：一个学校只有数学，物理，化学3门课 。已知修这3门课的学生人数分别有170,130,120人；同时修数学、物理两门课的学生有45人；同时修数学、化学的有20人；同时修物理、化学的有22人；同时修三门课的学生有3人，问这个学校共有多少学生。

解：令M为修数学课的学生集合；P为修物理课的学生集合；C为修化学课的学生集合，按照已知条件：

$$|M|=170,|P|=130,|C|=120$$

$$|M\cap P|=45,|M\cap C|=20,|P\cap C|=22$$

$$|M\cap P\cap C|=3$$

（4）容斥原理及应用

假定学校的学生至少要学一门课程。

$$|M \cup P \cup C| = |M| + |P| + |C| - |M \cap P| - |M \cap C| - |P \cap C| + |M \cap P \cap C|$$

=170+130+120-45-20-22+3

=336。

（4）容斥原理及应用

例1.6.2　N={1, 2, ..., 500}, 求N中至少能被2, 3, 5其中之一除尽的数的数目。

解:

N中被k除尽的数的数目为: $\left\lfloor \frac{500}{k} \right\rfloor$

N中能被a, b同时除尽的数的数目:

设m为a, b的最小公倍数。

$$\left\lfloor \frac{500}{m} \right\rfloor$$

（4）容斥原理及应用

例1.6.3 N={1, 2, ..., 500}，求N中至少能被2, 3, 5其中之一除尽的数的数目。

设A_1, A_2, A_3分别表示N中为2, 3, 5的倍数的集合。

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{500}{2} \right\rfloor = 250 \quad |A_2| = \left\lfloor \frac{500}{3} \right\rfloor = 166 \quad |A_3| = \left\lfloor \frac{500}{5} \right\rfloor = 100$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{500}{2 \times 3} \right\rfloor = 83 \quad |A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{500}{2 \times 5} \right\rfloor = 50$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{500}{3 \times 5} \right\rfloor = 33$$

（4）容斥原理及应用

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{500}{2 \times 3 \times 5} \right\rfloor = 16$$

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 250 + 166 + 100 - 83 - 50 - 33 + 16 \\ &= 366 \end{aligned}$$

（4）容斥原理及应用

定理1.6.9（逐步淘汰原理形式之二）

设$A_1, A_2, ..., A_n$都是有限集S的子集，则：

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right| = |S| - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+\ldots+(-1)^n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

[证]

$$A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^c$$

$$= S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

由淘汰原理可得：

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right| = |S| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$$

（4）容斥原理及应用

例1.6.4　求a, b, c, d, e, f这6个字母的全排列中不允许出现ace和df图像的排列数。

解：

设A_1为出现ace图像的排列集，A_2为出现df图像的排列集。

$$N = 6!,\quad |A_1| = 4!,\quad |A_2| = 5!\quad |A_1 \cap A_2| = 3!$$

不允许出现ace和df的排列数为：

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = N - (|A_1| + |A_2|) + |A_1 \cap A_2|$$

$$= 6! - (5! + 4!) + 3! = 582$$

（4）容斥原理及应用

习题4. 一个人写了十封信和十个信封，然后随机地将信装入信封，试求每封信都装错了的方案数。

解：

设A1, A2, ..., A10分别是第1, 第2, ..., 第10封信分别装对的集合。

$|A_i|=9!,\ i=1,2,...,10$

至少有两封信装对的集合数为：

$|A_i \cap A_j|=8!,\ i<j=1,2,...,10$

共有C(10,2)个。

....

（4）容斥原理及应用

10封信都装对的集合数为：

|A1∩A2∩. . . ∩A10|=1, i<j=1, 2, . . . , 10

共有C(10, 10)个。

10封信都装错对应的方案数为：

$$\left|\bigcap_{i=1}^{10} A_i^c\right| = |S| - \sum_{i=1}^{10}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le 10}|A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le 10}|A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+ \ldots + (-1)^{10}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{10}|$$

$$= 10! - C(10,1)\times 9! + C(10,2)\times 8! - C(10,3)\times 7!$$

$$+ \ldots + C(10,10)\times 1!$$

错排问题

设A_i为第i个元素在原来位置上的排列数

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right|$$

$$=N-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{h>j}|A_i\cap A_j\cap A_h|+\ldots$$

$$+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

（4）容斥原理及应用

$$\left|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\right|$$

$$=N-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}|A_i\cap A_j|$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\sum_{h>j}|A_i\cap A_j\cap A_h|+\ldots$$

$$+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

$$=n!-C(n,1)(n-1)!+C(n,2)(n-2)!-\ldots+(-1)^nC(n,n)$$

$$=n!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!})$$

5(P33)、毕业舞会上，男生与女生跳舞，已知每个男生至少与一个女生跳过舞，但未能与所有女生跳过舞，同样地，每个女生也至少与一个男生跳过舞，但也未能与所有男生跳过舞。

证明：在所有参加舞会的男生与女生中，必可找到两个男生和两个女生，这两个男生中的每一个只与这两个女生中的一个跳过舞，而这两个女生中的每一个也只与这两个男生中的一个跳过舞。

证明：设男生集合为：$\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

设女生集合为：$\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$

设分别与男生$b_1, b_2, \ldots, b_n$跳过舞的女生集合为：$G_1, G_2, \ldots, G_n$。

b_i b_j

G_i G_j

G_i存在g_k没与b_j跳过舞　　G_j存在g_l没与b_i跳过舞

$g_k \in G_i$ 且 $g_k \notin G_j$　　$g_l \notin G_i$ 且 $g_l \in G_j$

证明：在所有参加舞会的男生与女生中，必可找到两个男生和两个女生，这两个男生中的每一个只与这两个女生中的一个跳过舞，而这两个女生中的每一个也只与这两个男生中的一个跳过舞。

证明：设男生集合为：$\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

设女生集合为：$\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$

设分别与男生$b_1, b_2, \ldots, b_n$跳过舞的女生集合为: $G_1, G_2, \ldots, G_n$。

b_i b_j

G_i G_j

Gi存在g_k没与b_j跳过舞　　Gj存在g_l没与b_i跳过舞

$g_k \in Gi$ 且 $g_k \notin Gj$　　$g_l \notin Gi$ 且 $g_k \in Gj$

如果找不到这样的两个g_k 和 g_l.

则表明对于任意的G_i 和 G_j 要么$G_i \subseteq G_j$要么$G_j \subseteq G_i$

不失一般性：假设$G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_n$。

所有女生都在 G_n。bn与所有女生跳过舞，矛盾。

（4）容斥原理及应用

例1.6.5　求不超过120的素数的个数。

解： $P = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$, p_i为质数, $i = 1,2,\ldots,k$

因为11^2=121, 因此不超过120的合数的质因子必然有小于11的质数，也就是不超过120的合数至少是2, 3, 5, 7中之一的倍数，

（4）容斥原理及应用

设A_i为不超过120的数同时又是i的倍数的集合，i=2, 3, 5, 7.

$$|A_2| = \left\lfloor \frac{120}{2} \right\rfloor = 60 \qquad |A_3| = \left\lfloor \frac{120}{3} \right\rfloor = 40$$

$$|A_5| = \left\lfloor \frac{120}{5} \right\rfloor = 24 \qquad |A_7| = \left\lfloor \frac{120}{7} \right\rfloor = 17$$

（4）容斥原理及应用

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 3} \right\rfloor = 20 \qquad |A_2 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 5} \right\rfloor = 12$$

$$|A_2 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 7} \right\rfloor = 8 \qquad |A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{3\times 5} \right\rfloor = 8$$

$$|A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{3\times 7} \right\rfloor = 5 \qquad |A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{5\times 7} \right\rfloor = 3$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 3\times 5} \right\rfloor = 4 \qquad |A_2 \cap A_3 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 3\times 7} \right\rfloor = 2$$

$$|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 5\times 7} \right\rfloor = 1 \qquad |A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{3\times 5\times 7} \right\rfloor = 1$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left\lfloor \frac{120}{2\times 3\times 5\times 7} \right\rfloor = 0$$

（4）容斥原理及应用

$$\left|\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_5}\cap\overline{A_7}\right| = 120-|A_2|-|A_3|-|A_5|-|A_7|$$

$$+|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_5|+|A_2\cap A_7|+|A_3\cap A_5|+|A_3\cap A_7|+|A_5\cap A_7|$$

$$-|A_2\cap A_3\cap A_5|-|A_2\cap A_3\cap A_7|-|A_2\cap A_5\cap A_7|-|A_3\cap A_5\cap A_7|$$

$$+|A_2\cap A_3\cap A_5\cap A_7|$$

$$=120-(60+40+24+17)+(20+12+8+8+5+3)$$

$$-(4+2+1+1)=27$$

注意：27包括了1这个非素数，另外2, 3, 5, 7本身是素数没有计算在内，因此满足要求的素数是27+4−1=30个。

***