第七章：树和割集

7.1 树及其性质

7.2 生成树

7.3 割点、桥和割集

第八章：连通度和匹配

8.1 顶点连通度和边连通度

*8.2 门格尔定理

8.3 匹配、霍尔定理

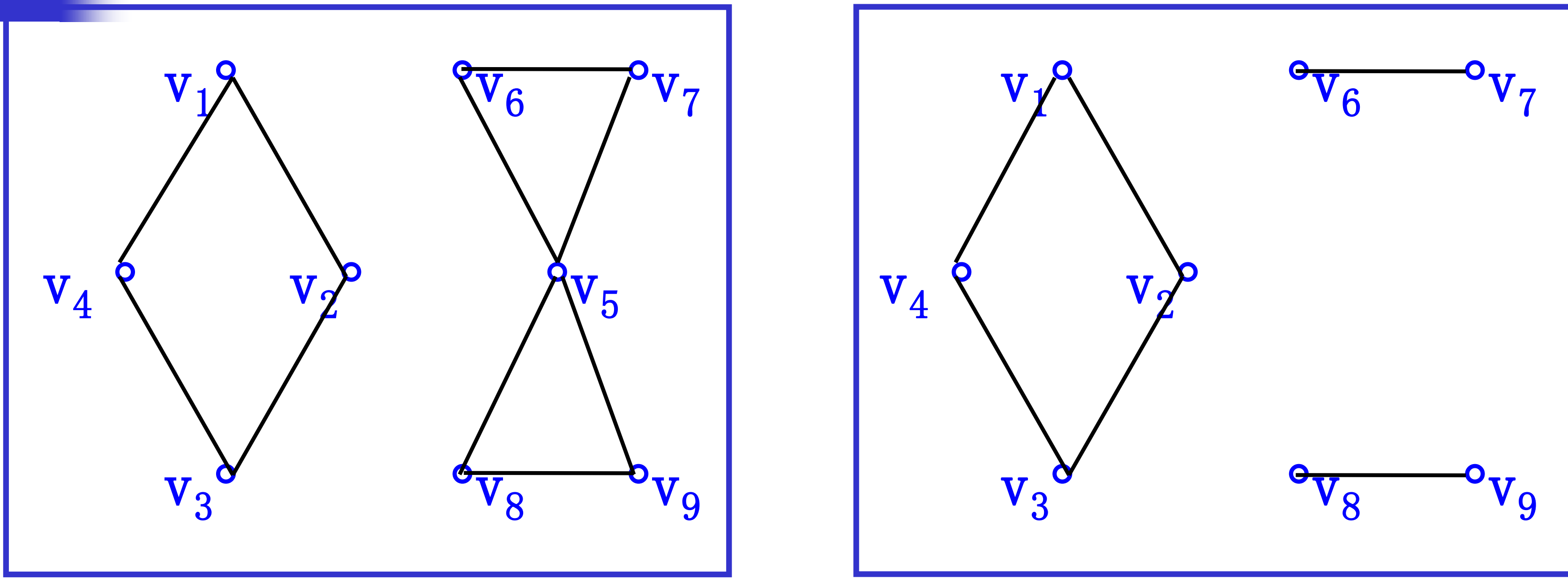
7.3 割点、桥和割集

本节主要内容

1、割点的定义
2、桥的定义
3、割点的性质
4、桥的性质
5、割集的定义
6、割集的性质
7、树的弦和基本圈
8、相对树T的基本割集系统

目的是讨论哪些顶点和哪些边比较重要?

1、割点的定义

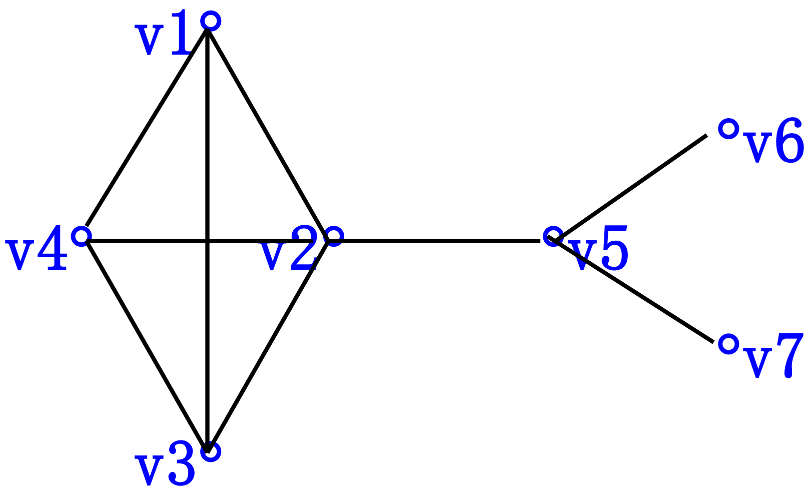


哪些顶点位置重要?

定义7.3.1　设v是图G的一个顶点，如果G-v的支数大于G的支数，则称顶点v为图G的一个割点。

上图中v_5是割点，其它都不是割点。

2、桥的定义



哪些边位置重要？

定义7.3.2　图G的一条边x称为G的一座桥，如果G-x的支数大于G的支数。

图中边v_2v_5是桥；

图中边v_5v_6，v_5v_7也是桥。

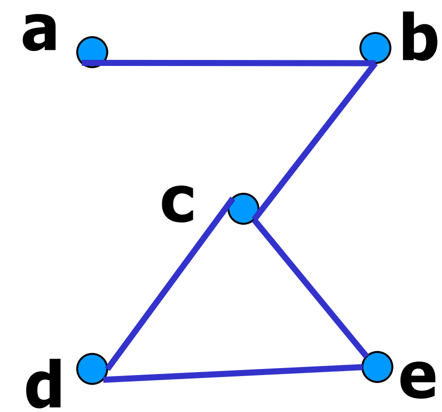
3、割点的性质

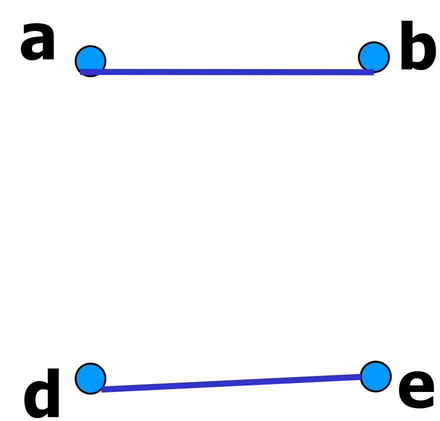
定理7.3.1　设v是连通图G=(V,E)的一个顶点，则下列命题等价：

(1) v是图G的一个割点；

(2) 存在与v不同的两个顶点u和w，v在每一条u到w的路上；

(3) 集合V\{v}有一个二划分{U,W}，∀u∈U,w∈W,v在联结u和w的每条路上。

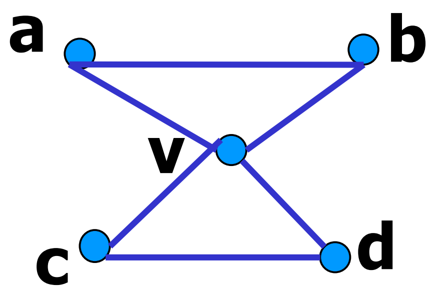




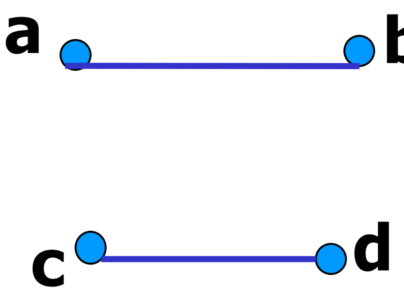
3、割点的性质

(1) v是图G的一个割点；

(2) 存在与v不同的两个顶点u和w，v在每一条u到w的路上；



图G



图G-v

证明：由定义，G-v的支数大于G的支数。

则G-v把连通图G分成多个支

设G_1和G_2是其中的两个支，取$u \in G_1, w \in G_2$

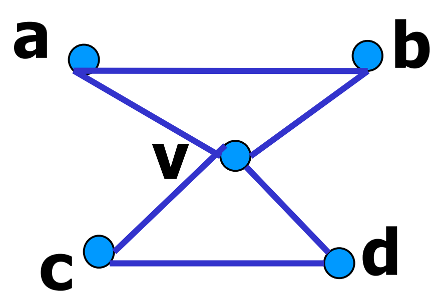
v必然位于所有u到w的路上，否则u和w还连通

与u和w位于两个支上矛盾。

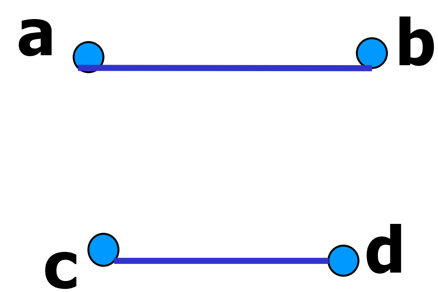
3、割点的性质

(2)存在与v不同的两个顶点u和w，v在每一条u到w的路上；

(3)集合$V\setminus\{v\}$有一个二划分$\{U, W\}$，$\forall u\in U, w\in W$, v位于联结u和w的每条路上。



图G



图G-v

证明：设$U=\{a|a$和u在G-v中位于一个支中$\}$

$W=\{a|a\notin U\}$

显然：U和W是一个2划分，并且$\forall u\in U, w\in W$, v在联结u和w的每条路上。

3、割点的性质

(1) v是图G的一个割点；

⇑

(3) 集合$V\setminus\{v\}$有一个二划分$\{U, W\}$，

$\forall u\in U, w\in W$, v在联结u和w的每条路上。

证明：只证明G-v不连通即可

任取$\forall u\in U, w\in W$, 因为v在联结u和w的每条路上

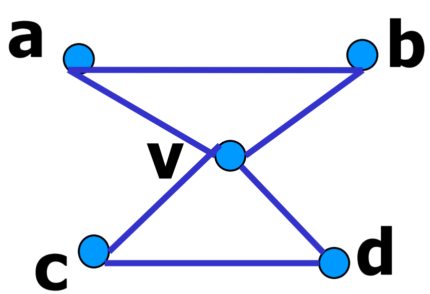
所以u和w在G-v中不连通

因此G-v不连通

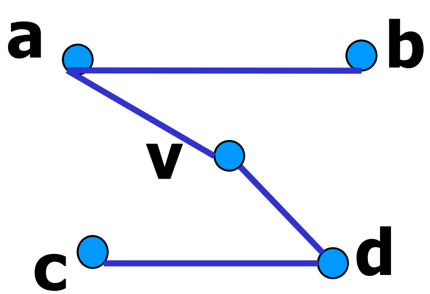
所以v是图G的一个割点。

3、割点的性质

定理7.3.2　每个非平凡的连通图至少有两个顶点不是割点。



图G



图G的生成树T

[证]非平凡图的连通图必有生成树,

非平凡树至少有两个度为1的顶点,它们就是原图的非割点。

最长路的两个端点不是割点。

4、桥的性质

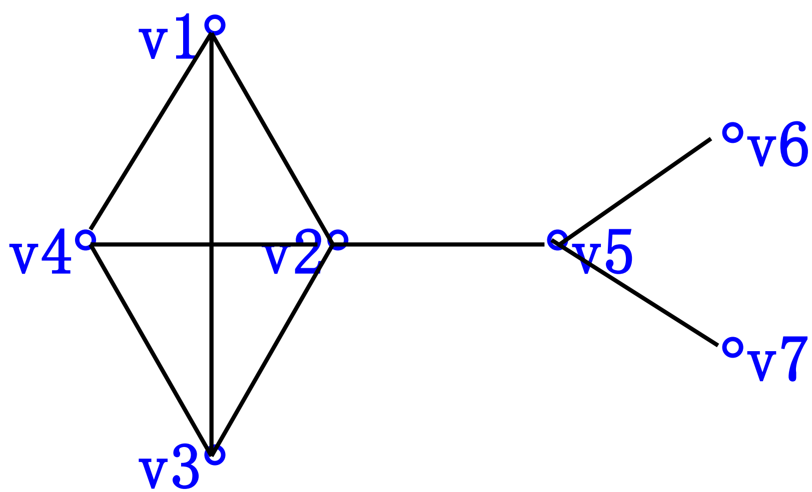
定理7.3.3　设x是连通图G=(V,E)的一条边,则下列命题等价。

(1)x是G的桥;

(2)x不在G的任一圈上;

(3)存在G的两个不同顶点u和v,使得边x在联结u和v的每条路上;

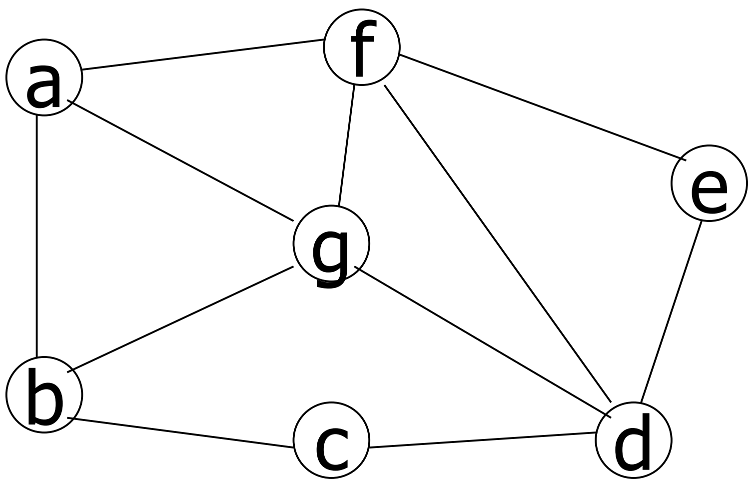
(4)存在V的一个划分{U,W},使得∀u∈U及∀w∈W,x在每一条连接u与w的路上。



与定理7.3.1类似，证明略。

5、割集的定义

定义7.3.3　图G=(V,E),S⊆E,如果从G中去掉S中的所有边得到的图G-S的支数大于G的支数,而去掉S的任一真子集中的边得到的图的支数不大于G的支数,则称S为G的一个割集。



图G

判断下面几个是不是图G的割集

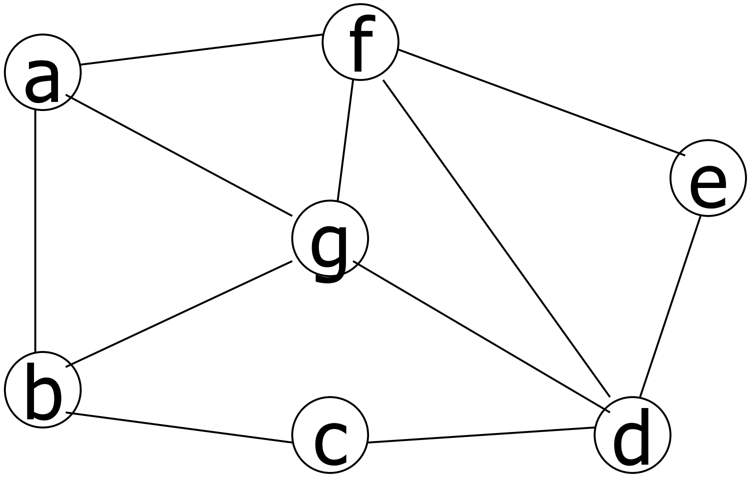
S={fe, ed, fd}

S={fe, ed} √

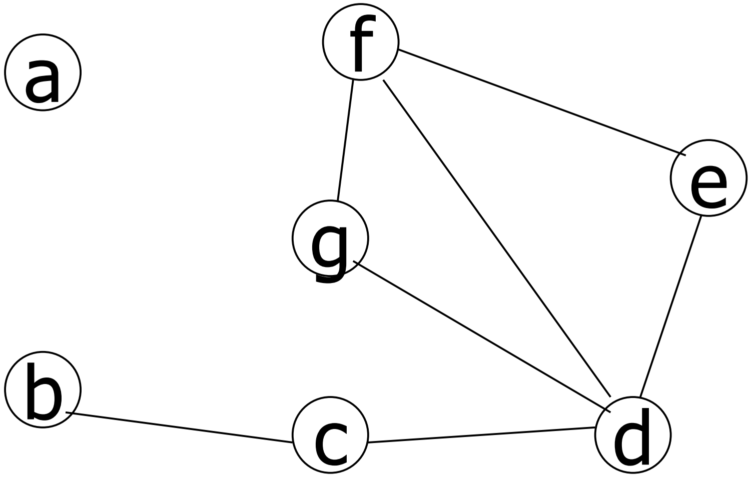
S={af, ag, bg, bc} √

6、割集的性质

定理7.3.4　设S是连通图G=(V,E)的割集，则G-S恰有两个支。



图**G**



图**G-S**

6、割集的性质

定理7.3.4　设S是连通图G=(V, E)的割集，则G-S恰有两个支。

[证]

假如G-S的支数大于2，则把S的边逐一加入G-S中；

每加入一条边至多能把G-S的两个支联结在一起；

将G中边逐一加入G-S中，总有一步使之有两个支；

设加入的边为$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$；

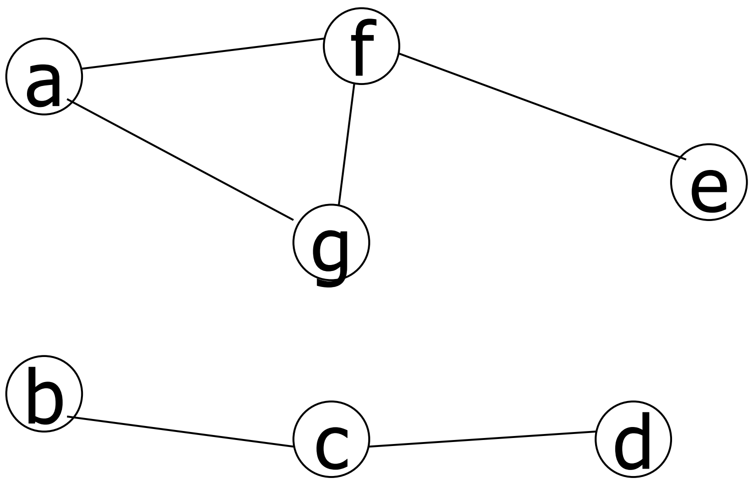
则$S_1=S-\{x_1, x_2, ..., x_n\}$是S的一个真子集；

$G-S_1$的支数也比G的支数多；

这与S是割集矛盾，所以G-S恰有两个支。

6、割集的性质

推论7.3.1　设G是一个有k个支的图，如果S是G的割集，则G-S恰有k+1个支。

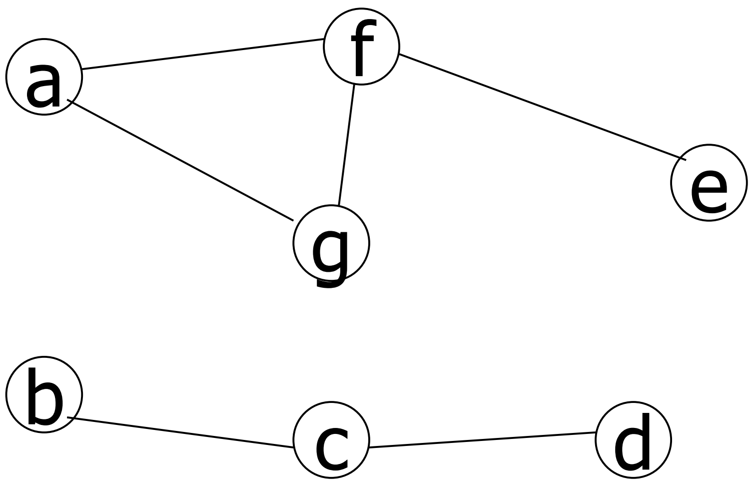


图**G**

[证明略]

6、割集的性质

推论7.3.2 不连通图G的每个割集必是G的某个支的割集。

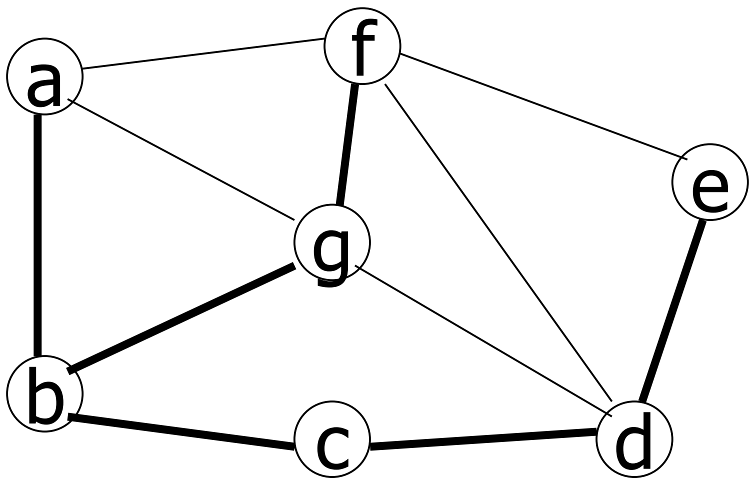


图G

[证明略]

6、割集的性质

定理7.3.5　设T是连通图G=(V,E)的任一生成树，则G的每个割集至少包含T的一条边。

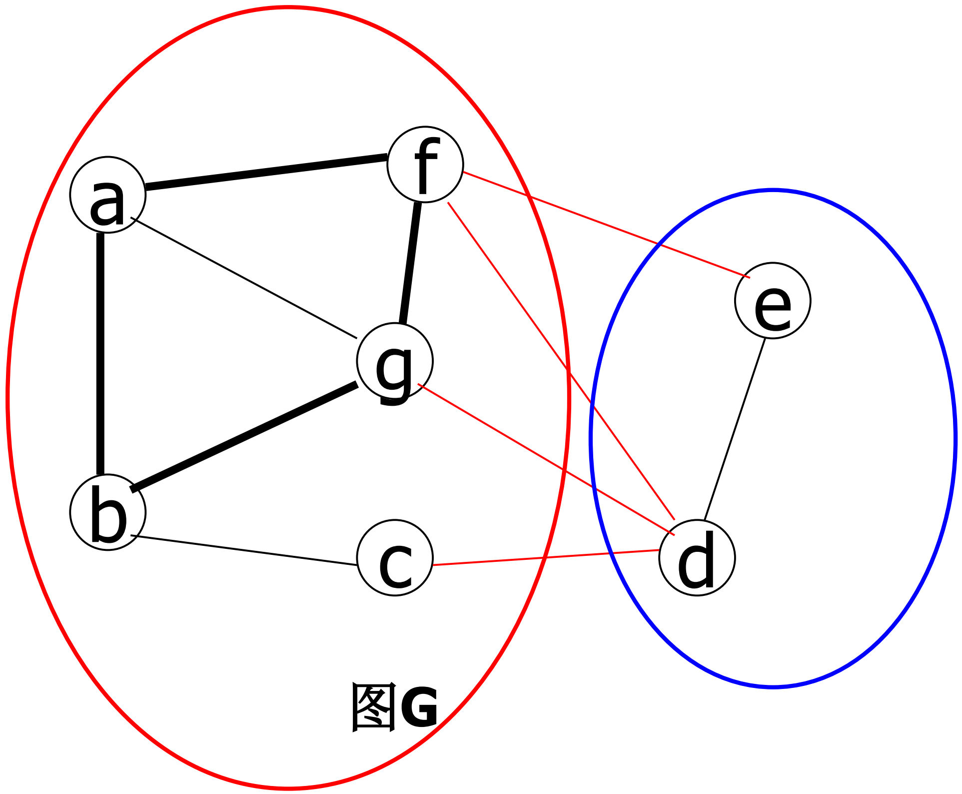


图**G**

证明略。

6、割集的性质

定理7.3.6　连通图G的每个圈与G的任一割集有偶数条公共边。



图G

例如：

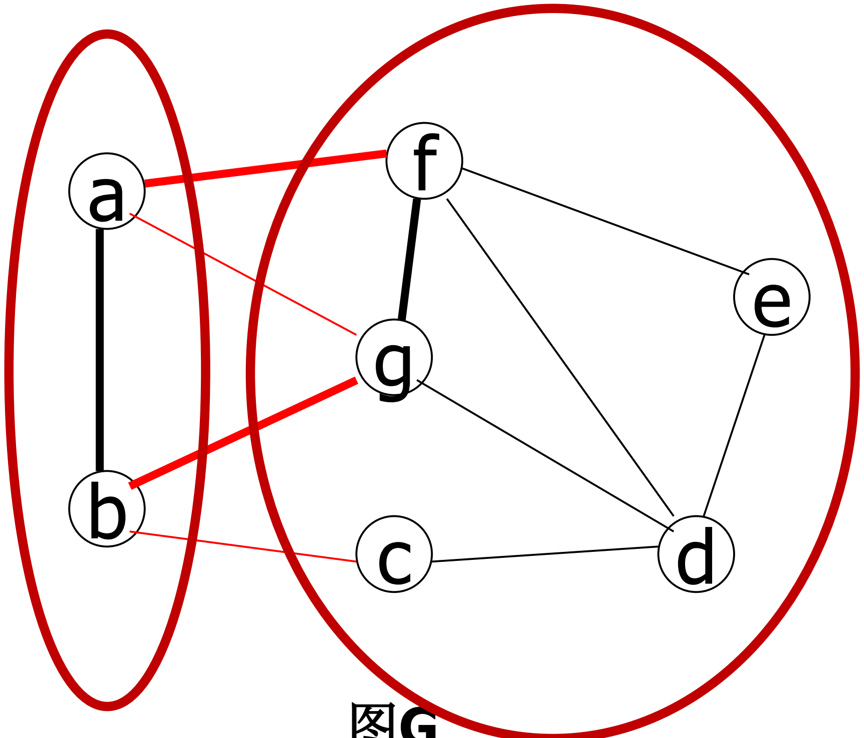
S={fe, fd, gd, cd}

是一个割集

abgfa是一个圈

6、割集的性质

定理7.3.6　连通图G的每个圈与G的任一割集有偶数条公共边。



图G

例如：
S={af, ag, bg, bc}
是一个割集
abgfa是一个圈

6、割集的性质

[证]设C是连通图G中的一个圈,S是G的一个割集,G_1和G_2是G-S的仅有的两个支,

如果C在一个支中,则C与S无公共边,此时公共边数为0,定理成立,

现在假设圈C与割集S有公共边,也就是C上既有G_1的顶点又有G_2的顶点,

当从G_1的一个顶点v开始沿圈周游时,必经过一个端点在G_1里，另一个端点在G_2里的边进入G_2, 然后在某个时候又经过另一条这样的边返回G_1, 如此走下去,当走完圈的边而回到v时经过偶数次这样的边,

两个端点分别在G_1与G_2中,这样的边必在S中, 所以,这时C与S也有偶数条边。

7、与生成树T关联的基本圈系统

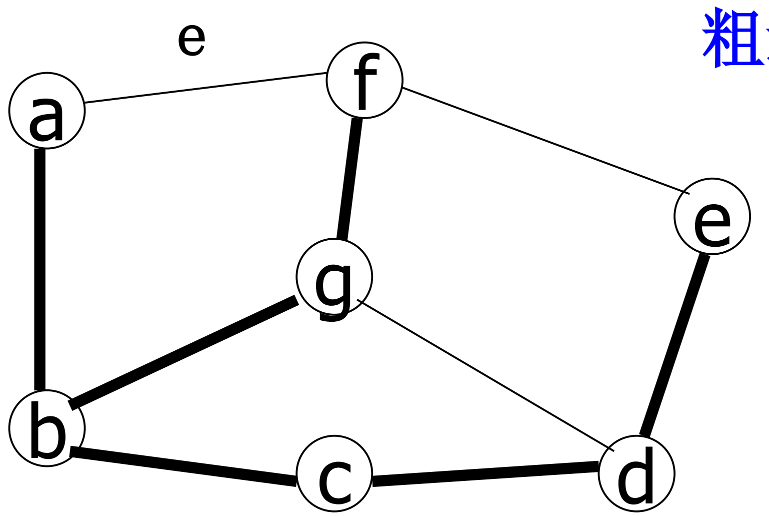
设G=(V, E)是一个连通图, T=(V, F)是G的一个生成树。

E\F中的每条边e为T的弦,

T+e中有唯一的一个圈,

T+e中的唯一圈称为G的相对于生成树T的基本圈,这些基本圈之集称为与T关联的基本圈系统。

判断下面哪些圈是图G中粗边形成的生成树的基本圈



图G

(1) abgfa √

(2) bcdgb √

(3) gdefg ×

(4) bcdefgb √

8、相对树的基本割集系统

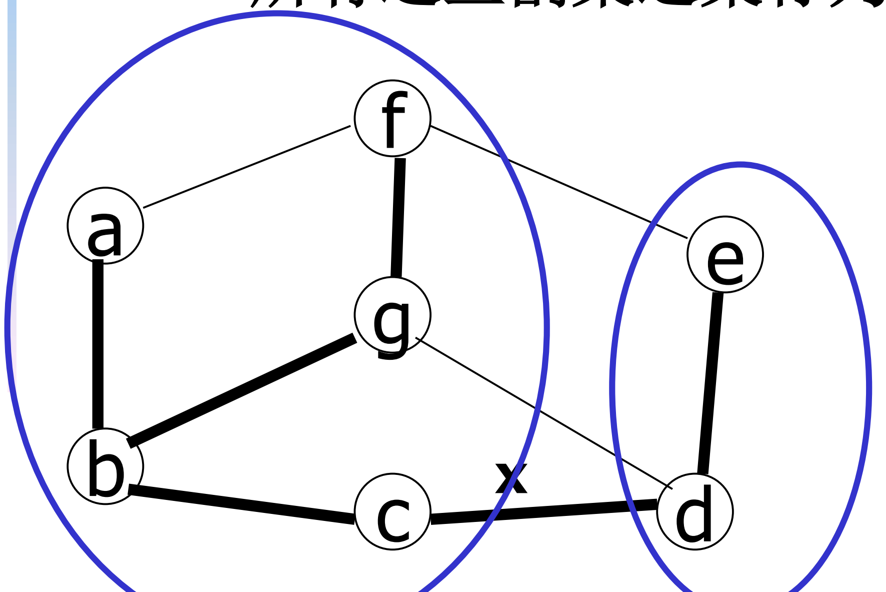
对于T的每条边x,T-x有两个支,于是V被分为两个不相交子集V_1和V_2;

G的一个端点在V_1里,另一个端点在V_2里的边形成了G的一个割集,这个割集是由边x确定的;

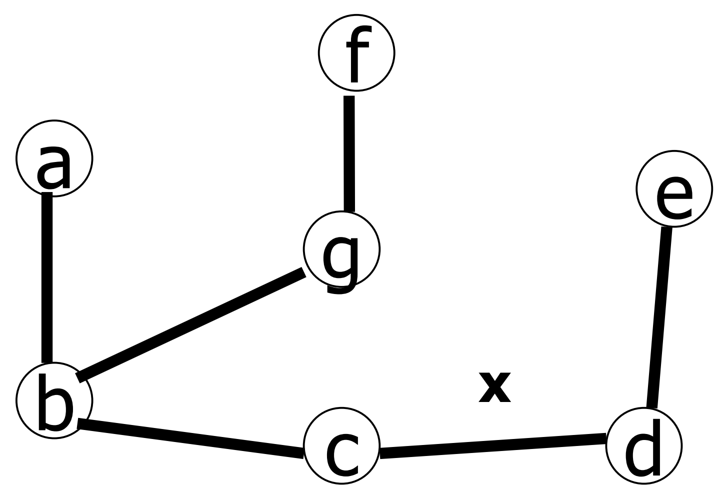
这个割集称由边x确定的基本割集;

T的每条边确定的割集称为G的相对T的基本割集;

所有这些割集之集称为G的相对T的基本割集系统。



图G



图G的生成树T

第八章：连通度和匹配

8.1 顶点连通度和边连通度

***8.2 门格尔定理**

8.3 匹配、霍尔定理

8.1 顶点连通度和边连通度

本节主要内容

1、顶点连通度的定义
2、边连通度的定义
3、顶点连通度、
    边连通度
    最小度的关系
4、n-连通和n-边连通的定义

目的是讨论图
的连通程度

1、顶点连通度的定义

定义8.1.1　设G=(V,E)是一个无向图,V的子集S称为分离图G，如果G-S是不连通的，图G的顶点连通度κ=κ(G)是为了产生一个不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少顶点的数目。

图G的“顶点连通度”，以后简称G的“连通度”。

求以下各图的连通度。

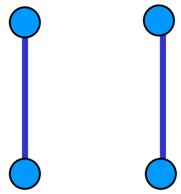


图8.1.1

连通度为0

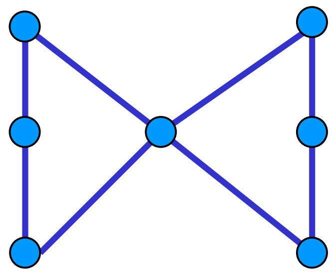


图8.1.2

连通度为1

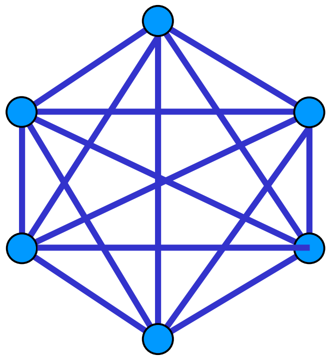


图8.1.3

连通度为5

1、顶点连通度的定义

不连通的图的顶点连通度为0;

有割点的连通图的连通度是1;

完全图K_p的连通度为p-1;

K_1的连通度为0。

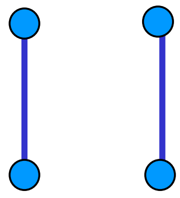


图8.1.1

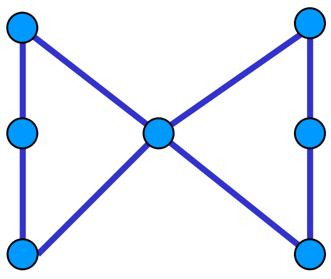


图8.1.2

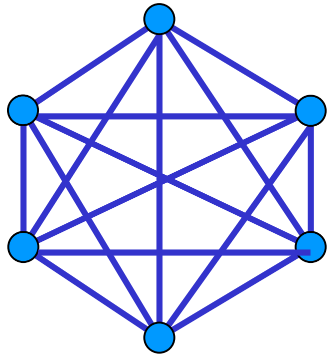


图8.1.3

图8.1.4

2、边连通度的定义

定义**8.1.2** 图G的边连通度λ=λ(G)是为了使G产生不连通图或平凡图所需要从G中去掉的最少边数。

求以下各图的边连通度。

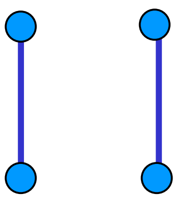


图8.1.1

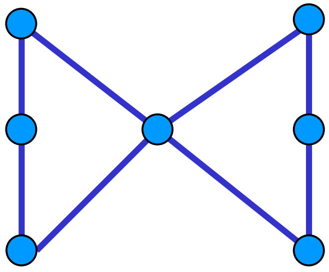


图8.1.2

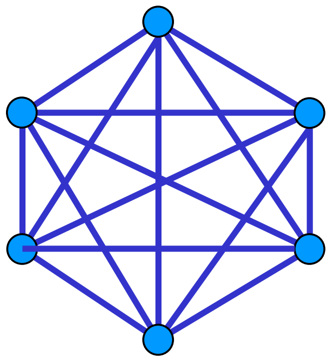


图8.1.3

边连通度为**0**　　边连通度为**2**　　边连通度为**5**

2、边连通度的定义

(1)不连通的图和平凡图的边连通度为0

(2)$\lambda(K_p)=p-1$

(3)非平凡树的边连通度为1;

(4)有桥的连通图的边连通度为1。

图8.1.1

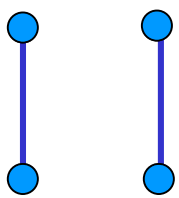


图8.1.2

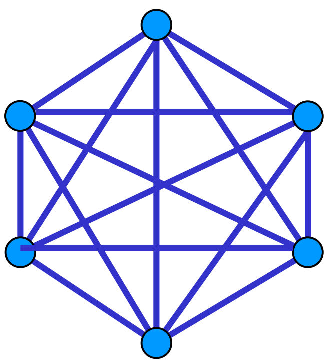


图8.1.3

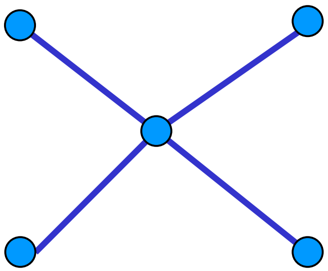


图8.1.4

3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

图的连通度、边连通度、最小度之间有以下的关系：

定理8.1.1 对任一图G,有

$$\kappa(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$$

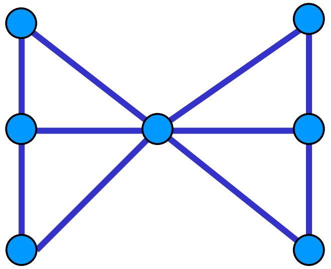


图8.1.4

3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

图1(平凡图)

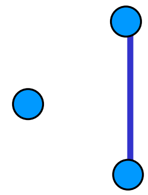


图2

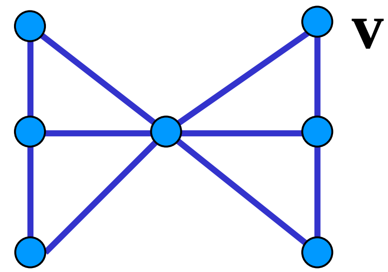


图3

[证] 证明：$\lambda(G)\leq\delta(G)$:

如果$\delta(G)=0$, 则G是平凡图或不连通, 则$\lambda(G)=0$, 这时有$\lambda(G)\leq\delta(G)$;

$\delta(G)>0$, 不妨设$\deg v=\delta(G)$,

从G中去掉与v关联的$\delta(G)$条边后, 得到的图中v是孤立顶点。

所以, 这时$\lambda(G)\leq\delta(G)$;

因此对任何图G有$\lambda(G)\leq\delta(G)$。

3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

证明： $\kappa(G) \leq \lambda(G)$

分2种情况讨论：

（1） 平凡图或不连通图

（2） $\lambda(G) \geq 1$

(1)平凡图或不连通图，因为$\kappa(G) = \lambda(G)$

所以此时成立。

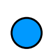


图1(平凡图)

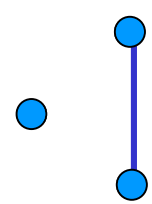


图2

3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

（2）$\lambda(G) \geqslant 1$；

从G中去掉$\lambda(G)$条边得到一个不连通图，这时从G中去掉这$\lambda(G)$条边的每一条的某个端点后，至少去掉了这$\lambda(G)$条边，于是，产生了一个不连通图或平凡图，从而$\kappa(G) \leqslant \lambda(G)$。

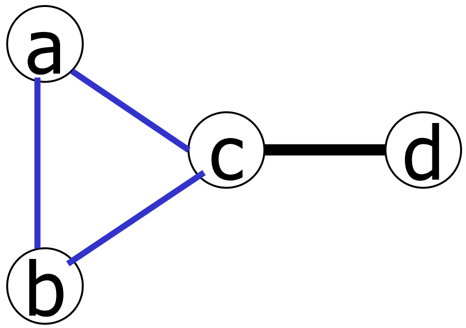


图1

图2

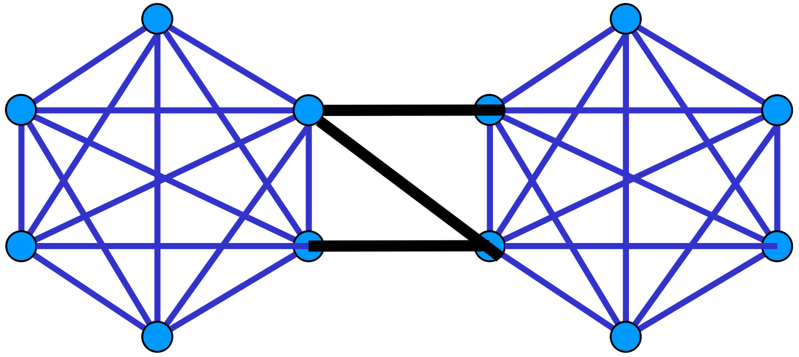


图3

3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

定理8.1.2 对任何正整数a, b, c, $0 < a \le b \le c$, 存在一个图G使得

$\kappa(G)=a$, $\lambda(G)=b$, $\delta(G)=c$。

分以下几种情况讨论：

(1) a=b=c,

(2) a=b<c,

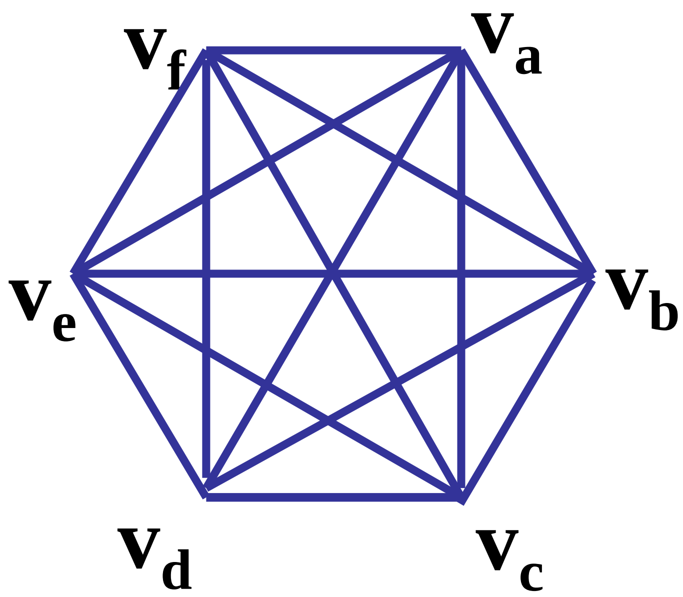
(3) a<b=c,

(4) a<b<c,

3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

(1) a=b=c,

图G=K_{a+1}就是所要求的图。

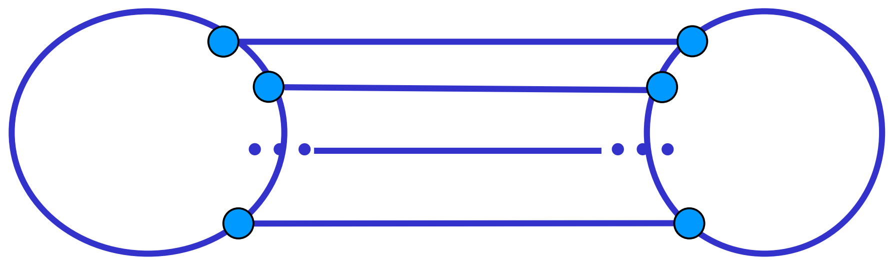


例如：6个顶点的完全图其顶点连通图，边连通度，最小度都是5

3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

(2) a=b<c,

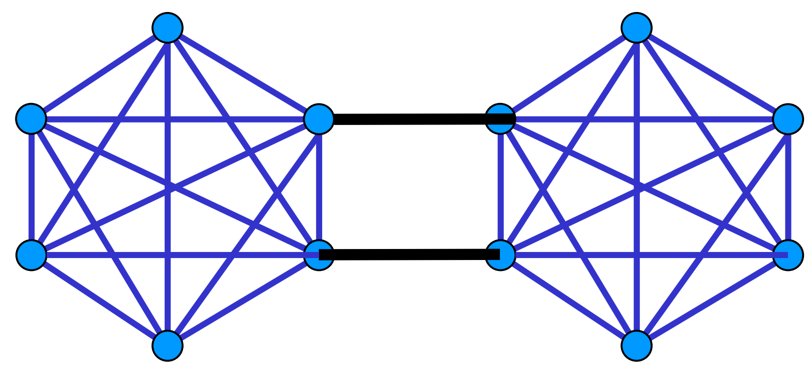
则所要求的图G的图解如下:



K_{c+1} K_{c+1}

例如：2=2<5,

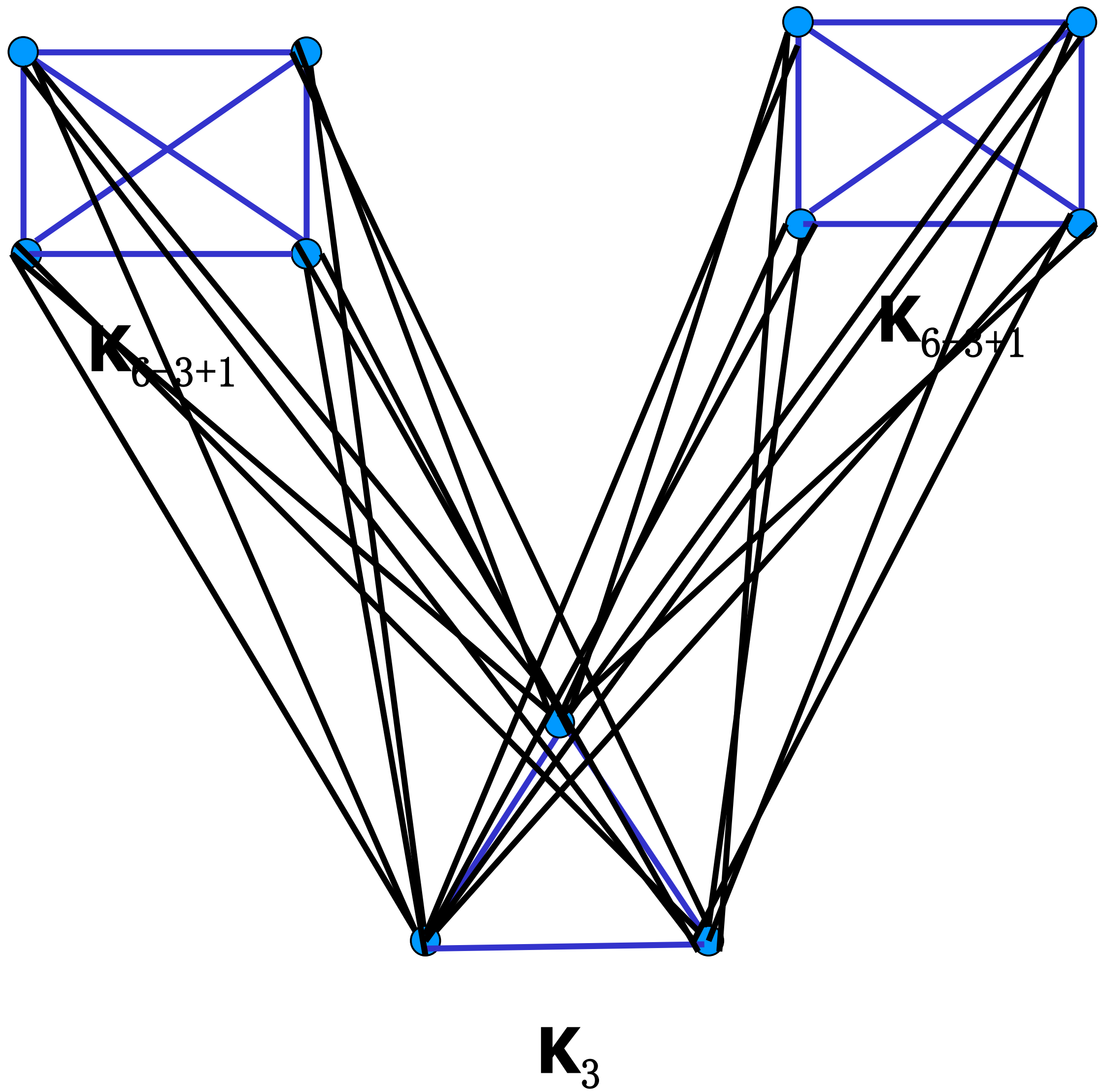
则所要求的图G的图解如下:



K_{5+1} K_{5+1}

3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

(3)、3<6=6,

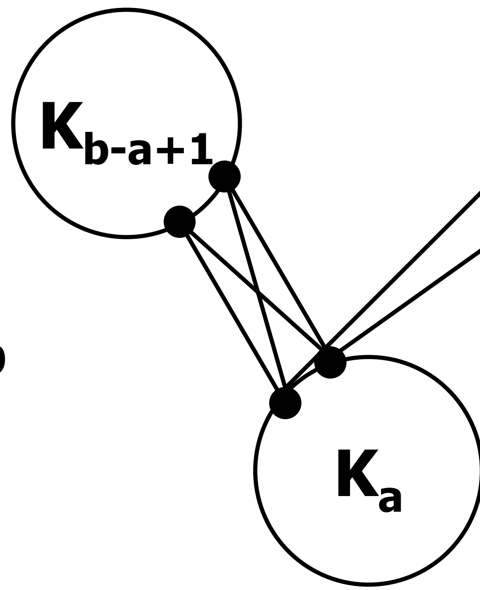


3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

(3)、如果a<b=c,

任意一个顶点都与Ka的任意一个顶点相连,各顶点度数为b

任意一个顶点都与Ka的任意一个顶点相连,各顶点度数为b



各顶点度数为

a-1+2(b-a+1)=2b-a+1

K_a与每个K_{b-a+1}的之间的边数为a(b-a+1)

可证是大于或等于b的。

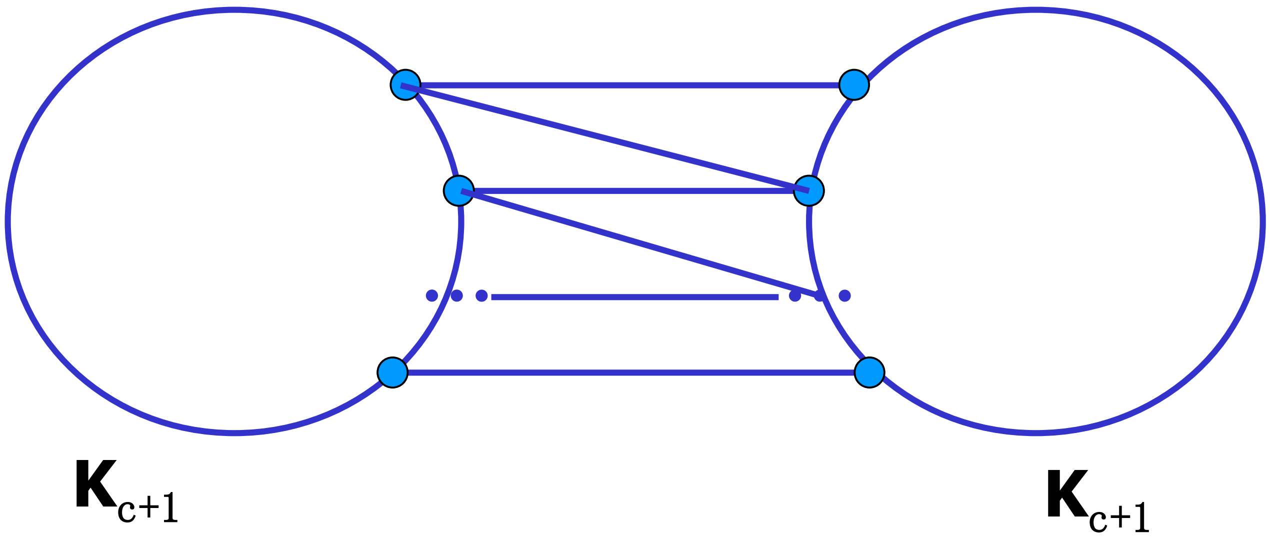
(1)、最小度数为b=c

(2)、最小边连通度为b

(3)、最小顶点连通度为a

3、顶点连通度、边连通度、最小度的关系

(4)如果**a**<**b**<c, 则所要的图G的图解如下



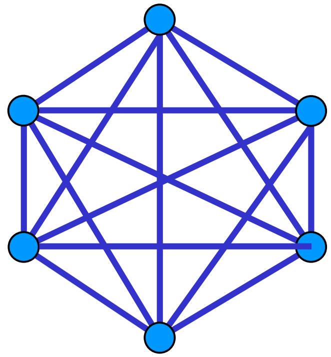
1) 两个K_{c+1}保证了最小度是**c**

2) 在两个K_{c+1}上各任选**a**个顶点，建立一一对应连边
保证了顶点连通度为**a**

3) 在两个K_{c+1}上选定的顶点间加**b-a**条边。
保证了边连通度**b**。

4、n-连通和n-边连通的定义

定义8.1.3 设G是一个图,如κ(G)≥n,则称G是n-顶点连通图，简称n-连通；如果λ(G)≥n,则称G是n-边连通的



连通度为5

是5连通的，当然也是4、3、2、1连通的。

习 题

判断题

1、如果G的子图连通，则G连通 ×

2、如果G的生成子图连通，则G连通 √

3、如果G有生成树，则G连通 √

4、如果G是连通的，则G有生成路 ×

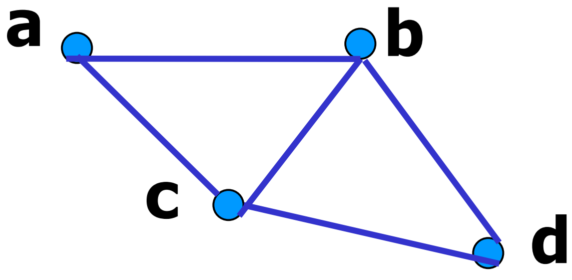
习 题

填空题

一个无圈的连通图有几棵生成树？　　1棵

一个长为n的圈有几棵生成树？　　n棵

下图有几棵生成树？　　8棵



第7章习题

8(P244)、一棵树T有n_2个度为2的顶点，n_3个度为3的顶点，...，n_k个度为k的顶点，问T有多少个度为1的顶点？

解：设T有n_1个度为1的顶点

所有顶点的个数为：

$p=n_1+n_2+n_3+...+n_k$

所有顶点的度数和为：

$n_1+2n_2+3n_3+...+kn_k$

$n_1+n_2+n_3+...+n_k-1=(n_1+2n_2+3n_3+...+kn_k)/2$

$$n_1=\sum_{i=2}^{k} in_i-2\sum_{i=2}^{k} n_i+1$$

习 题

1(P257).p个顶点的图中，最多有多少个割点?

答：1个顶点的图没有割点；

当$p \geq 2$,至少有两个不是割点；

割点数不超过$p-2$;

P个顶点的路由$p-2$个割点;

因此p个顶点的图中，最多有$p-2$个割点。

习 题

2(P257).证明：恰有两个顶点不是割点的连通图是一条路。

证明：用归纳法，设顶点数为n

当n=2时成立

假设n ≤ k是成立。证明当n=k+1时成立。

考虑最长路$v_1v_2v_3\cdots v_i\cdots v_j\cdots v_{m-1}v_m$

（1）最长路都以v1和v2为端点

因为最长路的端点不是割点，如（1）不成立则与恰有两个顶点不是割点矛盾。

（2）v2不能与这条最长路以外的节点u相连，否则$uv_2v_3\cdots v_i\cdots v_j\cdots v_{m-1}v_m$也是最长路。u也不是割点

习 题

考虑最长路$v_1v_2v_3\cdots v_i\cdots v_j\cdots v_{m-1}v_m$

（1）最长路都以v1和v2为端点

（2）v2不能与这条最长路以外的节点相连

v1和vm不是割点，其它都是割点。

关键想证明v1是1度顶点

若v1除与v2相连外还与vi相连，则v1v2…viv1是一个圈，v2不是割点，矛盾，所以v1是一度顶点。

去掉v1与其他节点没有关系。

也就是说去掉v1,其他顶点除v2和vm外还是割点。

只有v2和vm不是割点，按归纳假设，是一条路

加上v1还是一条路。

习 题

3(P257).证明：有一条桥的三次图中至少有10个顶点。

证明：

去掉桥，形成两个支；

在每个支中，有一个2度顶点，其他都是3度顶点；

设支中顶点少的那个支顶点数为p，则其边数为(3p-1)/2。

可证：p=1,2,3,4都不行，因此p至少是5

两个分支顶点数最少是10.

习 题

4(P257).设v是图G的一个割点,试证v不是G的补图G^C的割点。

证明:

假设v是图G的一个割点,

$G_1=G-v$是一个不连通图,

216页的第1题,若图G不是连通图,则G^C是连通图,

因此G_1的补图是一个连通图,

因此v不是G^C的割点

习 题

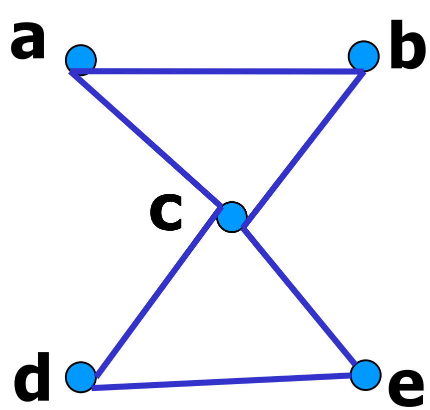
9(P258).

(1)有割点的连通图是否一定不是欧拉图?

(2)是否一定不是哈密顿图?

(3)有桥的连通图是否一定不是欧拉图和哈密顿图?

解:



(1)有割点的连通图有可能是欧拉图;

习 题

9(P258).

(1)有割点的连通图是否一定不是欧拉图?

(2)是否一定不是哈密顿图?

(3)有桥的连通图是否一定不是欧拉图和哈密顿图?

解:

(2)一定不是哈密顿图;

(3)有桥的连通图一定不是哈密顿图也不是欧拉图。