第三章：关系

3.1 关系的概念

3.2 关系的性质

3.3 关系的合成运算

3.4 关系的闭包

3.5 关系矩阵和关系图

3.6 等价关系和集合的划分

3.7 映射按等价关系分解

3.8 偏序关系与偏序集

3.9*良序集与数学归纳法

f. 关系幂运算

定义3.3.2　设R是X上的一个二元关系，R的n次幂记作R^n, n为非负整数。

(1) $R^0=I_X$, $R^1=R$, $R^2=R\circ R$;

(2) $R^{n+1}=R^n\circ R$。

例：设X={a, b, c, d}，R是X到X的一个二元关系：R={(a, a), (a, b), (b, c)}

(1) $R^0=I_X$={(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)}

(2) $R^1=R$ ={(a, a), (a, b), (b, c)}

(3) $R^2=R\circ R$={(a, a), (a, b), (a, c)}

(4) $R^3=R^2\circ R$={(a, a), (a, b), (a, c)}。

f. 关系幂运算

定理3.3.5 设R是X上的一个二元关系。

则对任意的非负整数m, n有：

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$,

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$。

对照定义

(1) $R^0 = I_X$,

$R^1 = R$,

$R^2 = R \circ R$;

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

f. 关系幂运算

定理3.3.5 设R是X上的一个二元关系。则对任意的非负整数m, n有：

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$,

用归纳法证明：当n=1时成立。

假设当n=k时成立也就是：

$R^m \circ R^k = R^{m+k}$ 则当n=k+1时：

$R^m \circ R^{k+1} = R^m \circ R^k \circ R$

$= R^{m+k} \circ R$

$= R^{m+k+1}$

因此，命题成立。

复习定义

(1) $R^0 = I_X$,

$R^1 = R$,

$R^2 = R \circ R$;

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

f. 关系幂运算

定理3.3.6 设X是一个有限集合且$|X| = n$，R为X上的任一二元关系，则存在非负整数s, t使得$0 \le s < t \le 2^{n^2}$上且$R^s = R^t$。

[证]

因为$|X|=n$,

所以$|X\times X|=n^2$,

从而$|2^{X\times X}|=2^{n^2}$。

故X上共有2^{n^2}个不同的二元关系

设$2^{n^2}=m$。X 上共有m个不同的二元关系

$R^0,R,R^2,\ldots R^m$是X上的m+1个二元关系

由抽屉原理得到至少有两个是相等的，从而有非负整数s,t,$0\le s<t\le m$，使得$R^s=R^t$。

f. 关系幂运算

定理3.3.7 设R是X上的二元关系。如果存在非负整数s,t,s<t，使得$R^s=R^t$,则:

(1)$R^{s+k}=R^{t+k}$,k为非负整数;

(2)$R^{s+kp+i}=R^{s+i}$,其中p=t-s,而k,i为非负整数;

(3)令$S=\{R^0,R,R^2,\ldots,R^{t-1}\}$,则对任意的非负的整数q有$R^q\in S$。

f. 关系幂运算

定理3.3.7 设R是X上的二元关系。如果存在非负整数s, t, s<t，使得$R^s=R^t$, 则：

(2) $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$, 其中$p=t-s$, 而k, i为非负整数；

用归纳法证明：当k=1时成立。

假设当k=m时成立也就是：

$R^{s+mp+i}=R^{s+i}$，则当k=m+1时：

$$R^{s+(m+1)p+i} = R^{s+mp+i+p}$$

$$= R^{s+mp+i} \circ R^p = R^{s+i} \circ R^p$$

$$= R^{s+p+i} = R^{s+i}$$

因此，命题成立。

f. 关系幂运算

定理3.3.7 设R是X上的二元关系。如果存在非负整数s, t, s<t，使得$R^s=R^t$, 则:

(3) 令$S=\{R^0, R, R^2, ..., R^{t-1}\}$, 则对任意的非负的整数q有$R^q \in S$。

设$s=3, t=10$, $R^3=R^{10}$

则对任意的非负的整数q有$R^q \in S$。

$S=\{R^0, R, R^2, ..., R^9\}$,

例如：证明$R^{35} \in S$。

$R^{35} = R^{25} \circ R^{10} = R^{25} \circ R^3 = R^{18} \circ R^{10}$

$= R^{18} \circ R^3 = R^{11} \circ R^{10} = R^{11} \circ R^3 = R^4 \circ R^{10}$

$= R^7$

证明略。

f. 关系幂运算

习题8. p98 是否存在X（|X|=n）上的二元关系R，使得$R, R^2, R^3, \ldots, R^n$两两不相同？

一个元素显然

2个元素设为x_1, x_2

$R=\{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$　　$R^2=\{(x_1, x_1), (x_2, x_2)\}$

3个元素设为x_1,x_2,x_3

$R=\{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3,x_1)\}$

$R^2=\{(x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_3,x_2)\}$

$R^3=\{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3,x_3)\}$

……

n个元素设为$x_1,x_2,\ldots\ldots, x_n$

$R=\{(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots\ldots,(x_{n-1},x_n), (x_n, x_1)\}$。

3.4 关系的闭包

本节主要问题

（1）关系的闭包的定义

（2）传递闭包

（3）自反传递闭包

（4）自反闭包

（5）对称闭包

（1）关系的闭包的定义

关系的闭包的思想是想通过增加一些元素，使原来的关系符合某种性质。

但增加的元素要最少。

例如：A={a, b}，关系R={(a, a), (a, b)}不是自反的，可以通过增加元素使其变为自反的，以下哪一个是R的自反闭包？

$R_1=\{(a, a), (a, b), \cancel{(b, a)}, (b, b)\}$ ×

$R_2=\{(a, a), (a, b), (b, b)\}$ √

（1）关系的闭包的定义

思想是想通过增加一些元素，使原来的关系符合某种性质。

但增加的元素要最少。

下面哪种关系存在闭包？

1、自反关系 √

2、反自反关系

3、对称关系 √

4、反对称关系

5、传递关系 √

6、相容关系 √

（2）传递闭包

令X={a, b, c}, R={(a, b), (b, c)}

求R的传递闭包

增加最少的元素，使它符合传递性。

增加关系(a, c)。

R^{+}={(a, b), (b, c), (a, c)}是R的传递闭包。

（2）传递闭包

定义3.4.1　设R是X上的一个二元关系。X上的一切包含R的传递关系的交称为R的传递闭包，用R^+表示，也有用t(R)表示的，即：

$$R^+ = \bigcap_{R \subseteq R'} R'. \quad R'\text{是传递的}$$

换个说法，更直观：

定义3.4.1*　设R是X上的一个二元关系。X上的一切包含R的传递关系为：$R_1, R_2, \ldots\ldots, R_n$，则R的传递闭包用$R^+$表示,也有用t(R)表示的,即：

$$R^+ = R_1 \cap R_2 \cap \ldots\ldots \cap R_n \text{ 。}$$

（2）传递闭包

定义3.4.1* 设R是X上的一个二元关系。X上的一切包含R的传递关系为：$R_1, R_2, \cdots\cdots, R_n$，则R的传递闭包用$R^+$表示，也有用t(R)表示的，即：

$$R^+=R_1 \cap R_2 \cap \cdots\cdots \cap R_n$$

R^+必须满足传递闭包的三个条件

(1) $R^+ \supseteq R$

(2) R^+是传递的二元关系

(3) R^+是包含R的传递的二元关系中“最小的”。

（2）传递闭包

定义3.4.1*　X上的一切包含R的传递关系为：$R_1, R_2, \ldots\ldots, R_n$，则R的传递闭包$R^+$是传递关系

$$R^+ = R_1 \cap R_2 \cap \ldots\ldots \cap R_n$$

证明：

$\forall (x, y) \in R^+, (y, z) \in R^+$

$\Rightarrow \forall i, (x, y) \in R_i, (y, z) \in R_i$　　**因为Ri是传递的**

$\Rightarrow \forall i, (x, z) \in R_i$

$\Rightarrow (x, z) \in R^+$

因此：命题成立。

（2）传递闭包

定义3.4.1* 设R是X上的一个二元关系。X上的一切包含R的传递关系为：$R_1, R_2, \cdots\cdots, R_n$，则R的传递闭包用$R^+$表示，也有用t(R)表示的，即：

$$R^+=R_1 \cap R_2 \cap \cdots\cdots \cap R_n$$

(1) $R^+ \supseteq R$

(2) R^+是传递的二元关系

(3) R^+是包含R的传递的二元关系中"最小的"。

证明：

$\forall (x, y) \in R^+$

$\Rightarrow \forall i,\ (x, y) \in R_i$

$\Rightarrow \forall i,\ R^+ \subseteq R_i$

因此：命题成立

（2）传递闭包

定理3.4.2　设R为X上的二元关系，则：

$$R^{+}=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^{n}=R\cup R^{2}\cup R^{3}\cup\ldots$$

R^+必须满足三个闭包的条件

(1) $R^+ \supseteq R$

(2) R^+是传递的二元关系

(3) R^+是包含R的传递的二元关系中“最小的”。

（2）传递闭包

定理3.4.2 设R为X上的二元关系，则：

$$R^{+}=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^{n}=R\cup R^{2}\cup R^{3}\cup\ldots$$

(2) 证明R^+是传递的

$\forall(x,y)\in R^+,\ (y,z)\in R^+$

$\Rightarrow\exists\ m\geq 1$，使得$(x,y)\in R^m$

$\Rightarrow\exists\ n\geq 1$，使得$(y,z)\in R^n$

$\Rightarrow(x,z)\in R^m\circ R^n$

$\Rightarrow(x,z)\in R^{m+n}$

$\Rightarrow(x,z)\in R^+$

因此：命题成立

（2）传递闭包

定理3.4.2 设R为X上的二元关系，则：

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$$

(3)证明 R^+是最小的。

$\forall$ 传递关系$R' \supseteq R$, 证明$R^+ \subseteq R'$

$\forall (x, y) \in R^+$ => $\exists$ $m \geq 1$ ，使得$(x, y) \in R^m$ => $(x, y) \in R \circ R^{m-1}$

=>$\exists x_1$，$(x, x_1) \in R$且$(x_1, y) \in R^{m-1}$

=>$\exists x_2$，$(x_1, x_2) \in R$且$(x_2, y) \in R^{m-2}$ => ………

=>$\exists x_{m-1}$，$(x_{m-2}, x_{m-1}) \in R$且$(x_{m-1}, y) \in R$

$(x, x_1) \in R'$, $(x_1, x_2) \in R'$ ……

$(x_{m-2}, x_{m-1}) \in R'$, $(x_{m-1}, y) \in R'$

因为R′是传递的。

=>$(x, y) \in R'$ 因此：命题成立

（2）传递闭包

定理3.4.3　设X为n元集，R为X上的二元关系，则

$$R^{+}=\bigcup_{i=1}^{n}R^{i}$$

（2）传递闭包

例3.4.1 设X为人的集合,R为X上的"父子"关系，看一看xR^+y的实际关系是什么?

解： $$R^+ = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$$

xR^+y当且仅当存在自然数m使得xR^my;

由关系合成的定义,存在$x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, 使得:

$xRx_1, x_1Rx_2, \ldots, x_{m-1}Ry$。

因此，R^+为后代子孙关系。

（2）传递闭包

定理3.4.4　设R,S是X上的二元关系,则

(1)$\varnothing^+=\varnothing$;

(2)$R\subseteq R^+$;

(3)$(R^+)^+=R^+$;

(4)$(R\cup S)^+\supseteq R^+\cup S^+$。

（3）自反传递闭包

定义3.4.2　设R为X上的二元关系。X上的一切包含R的自反且传递的二元关系的交称为R的自反传递闭包，记为R^*。

由定义知，R^*是自反且传递的二元关系。

令X={a,b,c},R={(a,b),(b,c)}

求R的传递闭包，自反传递闭包。

R^+={(a,b),(b,c),(a,c)}是R的传递闭包。

R^*={(a, a), (b, b), (c, c),(a,b),(b,c),(a,c)}是R的自反传递闭包。

（3）自反传递闭包

定理3.4.5　设R为X上的二元关系。则

$R^*=R^0 \cup R^+$。

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \qquad R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$$

R*必须满足自反传递闭包的四个条件

(1) $R^* \supseteq R$

(2) R*是自反的

(3) R*是传递的

(4) R*是包含R的自反且传递的二元关系中“最小的”。

（3）自反传递闭包

定理3.4.5　设R为X上的二元关系。则

$R^*=R^0 \cup R^+$。

(3) R^*是传递的

证明：

$\forall (x, y) \in R^*, (y, z) \in R^*$

存在4中情况：

(1)　$(x, y) \in R^0, (y, z) \in R^0$

(2)　$(x, y) \in R^0, (y, z) \in R^+$

(3)　$(x, y) \in R^+, (y, z) \in R^0$

(4)　$(x, y) \in R^+, (y, z) \in R^+$

略

（3）自反传递闭包

例3.4.2 设N为自然数集，R为N上的如下定义的二元关系—"后继" 关系：

aRb当且仅当a+1=b。

分析R^+与R^*的实际意义。

(1) 分析xR^+y实际意义。

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

xR^+y当且仅当存在自然数m使得xR^my；

由关系合成的定义，存在$x_1, x_2, ..., x_{m-1}$，使得：$xRx_1, x_1Rx_2, ..., x_{m-1}Ry$。

$y=x+m, m\geqslant 1$。

（3）自反传递闭包

例3.4.2　设N为自然数集，R为N上的如下定义的二元关系—“后继”关系：

aRb当且仅当a+1=b。

分析R^+与R^*的实际意义。

(1)分析xR^*y实际意义。

$$R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$$

xR^*y当且仅当存在自然数m使得xR^my;

由关系合成的定义,存在$x_1, x_2, ..., x_{m-1}$,使得:$xRx_1, x_1Rx_2, ..., x_{m-1}Ry$。

$y=x+m, m \geqslant 0$。

（4）自反闭包

定义3.4.3　设R为X上的二元关系。X上的一切包含R的自反的二元关系的交称为R的自反闭包，记为r(R)。

令**X={a,b,c},R={(a,b),(b,c)}**

求**R**的自反闭包

r(R) = {(a, a), (b, b), (c, c),(a,b),(b,c)} 。

（4）自反闭包

定理3.4.6　设R是X上的二元关系，则

$r(R)=R^0 \cup R$。

r(R)必须满足自反闭包的3个条件

(1) $r(R) \supseteq R$

(2) r(R)是自反的

(3) r(R)是包含R的自反关系中“最小的”。

（5）对称闭包

定义3.4.4　设R为X上的二元关系。X上的一切包含R的对称的二元关系的交称为R的对称闭包，记为s(R)。

令X={a, b, c},R={(a, b), (b, c)}
求R的对称闭包

s(R) = {(a, b), (b, c), (b, a), (c, b)}

（5）对称闭包

定理3.4.7　设R是X上的二元关系，则

$$s(R)=R\cup R^{-1}。$$

s(R)必须满足对称闭包的3个条件

(1) $s(R)\supseteq R$

(2) s(R)是对称的

(3) s(R)是包含R的对称关系中“最小的”。

（5）对称闭包

定理3.4.6　设R是X上的二元关系，则：

(1) $r(s(R))=s(r(R))$

(2) $r(R^+)=r(R)^+=R^*$

(3) $s(R)^+ \supseteq s(R^+)$