3 Сравнение двух случайных выборок (нахождение оценок параметров распределения, проверка статистических гипотез)

3.1 Теоретическое введение

3.1.1 Точечные оценки параметров распределения

Распределение случайной величины X характеризуется рядом *параметров* (математическое ожидание, дисперсия и т.д.). Эти параметры называют *параметрами генеральной совокупности*. Важной задачей математической статистики является нахождение по случайной выборке приближенных значений каждого из параметров, называемых *точечными оценками параметров*, или просто *оценками*. Таким образом, *оценкой параметра* β называется функция $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ от случайной выборки, значение которой принимается в качестве приближенного для данного параметра и обозначается $\tilde{\beta}$:

$$\beta \approx \tilde{\beta} = f(X_1, X_2, \dots, X_n). \tag{3.1}$$

Пусть задана повторная случайная выборка $X_1, X_2, \dots, X_n$. *За оценку математического ожидания а* принимается среднее арифметическое элементов выборки:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{3.2}$$

Оценкой дисперсии σ^2 при *неизвестном математическом ожидании* является величина S^2, которую называют *эмпирической дисперсией*:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \tag{3.3}$$

Оценкой среднего квадратического отклонения σ при этом является, соответственно, величина

$$S = \sqrt{S^2} \tag{3.4}$$

Для практических расчетов формулу (3.3) целесообразно преобразовать к следующему виду:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right) \tag{3.5}$$

Вычисление среднего значения $\overline{X}$ и оценки дисперсии S^2 упрощается, если отсчет значений X_i вести от подходящим образом выбранного начала отсчета C и в подходящем масштабе, т.е. сделать линейную замену (кодирование):

$$X_i = C + hU_i \ (i = 1, 2, \dots, n). \tag{3.6}$$

При такой замене формулы (3.2), (3.3), (3.4) принимают следующий вид:

$$\overline{X} = C + h\overline{U}; \qquad \overline{U} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i. \tag{3.7}$$

$$S^2 = \frac{h^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (U_i - \overline{U})^2 = \frac{h^2}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - n\overline{U}^2\right). \tag{3.8}$$

Для контроля правильности вычислений весь расчет следует повторить при другом начале отсчета C: результаты должны совпадать с точностью до величины возможных ошибок округления.

3.1.2 Доверительные интервалы параметров нормального распределения

Доверительным интервалом параметра β называется интервал со случайными границами ($\tilde{\beta}$ – ε_1; $\tilde{\beta} + \varepsilon_2$), который накрывает истинное значение параметра β с заданной вероятностью P, которая называется *доверительной вероятностью*. Величина $\alpha = 1 - P$ называется *уровнем значимости*. При этом обычно требуют, чтобы вероятности выхода за границы доверительного интервала в обе стороны были равны между собой, а именно:

$P(\beta < \tilde{\beta} - \varepsilon_1) = P(\beta > \tilde{\beta} + \varepsilon_2) = (1 - P)/2 = \alpha/2$.

Это дополнительное требование обеспечивает единственность решения задачи.

Пусть задана повторная случайная выборка $X_1, X_2, ..., X_n$ из нормальной генеральной совокупности. Это означает, что результаты эксперимента независимы и подчиняются нормальному закону распределения с одинаковыми параметрами $X_i \sim N(a; \sigma)$.

С вероятностью P математическое ожидание принадлежит интервалу

$$a \in (\overline{X} - \varepsilon,\ \overline{X} + \varepsilon); \tag{3.9}$$

$$\varepsilon = t_{1-\alpha/2}(k)\, S/\sqrt{n} \tag{3.10}$$

где $\overline{X}$ – оценка математического ожидания (3.2); $S = \sqrt{S^2}$ – оценка среднего квадратического отклонения σ (3.4);

$t_{1-\alpha/2}(k)$ – квантиль распределения Стьюдента с k степенями свободы; n – объем выборки; k – число степеней свободы при вычислении оценки S.

Часто доверительный интервал для математического ожидания записывают символически:

$$\alpha = \overline{X} \pm \varepsilon. \tag{3.11}$$

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ при доверительной вероятности $P = 1 - \alpha$ имеет следующий вид:

$$S\sqrt{\frac{k}{\chi^2_{1-\alpha/2}(k)}} < \sigma < S\sqrt{\frac{k}{\chi^2_{\alpha/2}(k)}}, \tag{3.12}$$

где S – оценка среднего квадратического отклонения σ (1.6) при неизвестном математическом ожидании; $\chi_P{}^2(k)$ – квантиль распределения Пирсона с k степенями свободы; k – число степеней свободы оценки S.

3.1.3 Проверка статистических гипотез

Пусть X – наблюдаемая случайная величина. *Статистической гипотезой H* называется предположение относительно параметров или вида распределения случайной величины X. Проверяемая гипотеза называется *нуль-гипотезой* и обозначается H_0. При постановке нуль-гипотезы сразу ставится *альтернативная гипотеза* H_1, т.е. то предположение, которое следует принять, если нуль-гипотеза будет отвергнута.

Правило, позволяющее принять или отвергнуть гипотезу H_0 – некоторая функция результатов эксперимента $Q(X_1, X_2, ... , X_n)$, *распределение которой вполне определено при условии истинности гипотезы* H_0.

Пусть заданы две независимые выборки из двух нормальных генеральных совокупностей. Первая выборка имеет объем n_1, элементы выборки $X_i^{(1)} \sim N(a_1; \sigma_1)$; вторая – объем n_2, элементы выборки $X_i^{(2)} \sim N(a_2; \sigma_2)$. Необходимо проверить *гипотезу о равенстве дисперсий* этих двух генеральных совокупностей, т.е. H_0: $\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2$. Математические ожидания a_1 и a_2 неизвестны.

В этом случае по каждой выборке находят несмещенные оценки дисперсий $S_1{}^2$ и $S_2{}^2$ с числами степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$ соответственно. Гипотезу проверяют по критерию Фишера, функция критерия

$$F = S_1^2/S_2^2 \tag{3.13}$$

имеет F-распределение Фишера с k_1 и k_2 степенями свободы, т.е. $F = F(k_1,k_2)$.

Если альтернативная гипотеза H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, то критерий Фишера рассчитывается как отношение большей по величине оценки дисперсии к меньшей:

$$F = (S_{бол})^2/(S_{мен})^2 > 1. \tag{3.14}$$

Гипотеза принимается при выполнении неравенства

$$F < F_{1-\alpha/2}(k_{S_{бол}},k_{S_{мен}}), \tag{3.15}$$

в противоположном случае гипотеза отвергается. Здесь $k_{S_{бол}}$ – число степеней свободы большей оценки дисперсии; $k_{S_{мен}}$ – число степеней свободы меньшей оценки дисперсии.

Если гипотеза о равенстве дисперсий принимается, то за оценку общей σ может быть взята $S = \sqrt{S_{св}^2}$, полученная по формуле для сводной оценки дисперсии:

$$S_{св}^2 = \frac{k_1 S_1^2 + k_2 S_2^2}{k_1 + k_2}; \quad k_j = n_j - 1; \quad j = 1,\ 2, \tag{3.16}$$

где S_1^2, S_2^2 – несмещенные оценки дисперсии первой и второй выборок соответственно.

Пусть заданы две независимые выборки из двух нормальных генеральных совокупностей. Первая выборка имеет объем n_1, элементы выборки $X_i^{(1)} \sim N(a_1;\, \sigma_1)$; вторая – объем n_2, элементы выборки $X_i^{(2)} \sim N(a_2;\sigma_2)$. Математические ожидания a_1 и a_2 неизвестны.

Проверяем *гипотезу о равенстве математических ожиданий* этих двух генеральных совокупностей, т.е. H_0: $a_1 = a_2$. По каждой выборке находим оценки математических ожиданий $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$. При этом дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 неизвестны, но гипотеза о равенстве дисперсий принимается; S_1^2 и S_2^2 – несмещенные оценки дисперсий первой и второй выборок. Находим сводную оценку дисперсии (3.16).

Гипотеза проверяется по критерию Стьюдента, функция критерия

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_{св}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \tag{3.17}$$

имеет t-распределение Стьюдента с k_{CB} степенями свободы, т.е. $t = t(k_{CB})$; $k_{CB} = k_1 + k_2$ – число степеней свободы при вычислении оценки $S_{СВ} = \sqrt{S_{СВ}^2}$. При альтернативной гипотезе H_1: $a_1 \neq a_2$, гипотеза принимается при выполнении неравенства

$$|t| < t_{1-\alpha/2}(k_{CB}), \tag{3.18}$$

в противоположном случае гипотеза отвергается.

Если гипотеза о равенстве математических ожиданий принимается, то за оценку общего математического ожидания может быть взята сводная оценка математического ожидания, которая определяется как средняя по обеим выборкам:

$$\overline{X}_{СВ} = \frac{n_1\overline{X}_1 + n_2\overline{X}_2}{n_1 + n_2}. \tag{3.19}$$

Доверительный интервал для математического ожидания при этом можно пересчитать, заменив в формулах (3.10) – (3.11) $\overline{X}$ на $\overline{X}_{CB}$; S на S_{CB}; k на $k_{CB} = k_1 + k_2$, n на $n_1 + n_2$.

3.1.4 Проверка гипотезы о виде распределения генеральной совокупности

Если распределение случайной величины X не известно, можно рассмотреть гипотезу о том, что X имеет функцию распределения $F(x)$. Критерии значимости для проверки таких гипотез называются *критериями согласия*.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – выборка наблюдений случайной величины X. Проверяется гипотеза H_0, утверждающая, что X имеет функцию распределения $F(x)$.

Проверку гипотезы H_0 при помощи критерия χ^2 проводят следующим образом. По выборке находят оценки неизвестных параметров предполагаемого закона распределения случайной величины X. Область возможных значений случайной величины X разбивают на l интервалов. Подсчитывают числа n_i попаданий результатов экспериментов в каждый i-й интервал.

Используя предполагаемый закон распределения случайной величины X, находят вероятности p_i того, что значение X принадлежит i-му интервалу. Затем сравнивают полученные частоты n_i/n с вероятностями p_i. Критерий согласия Пирсона требует принятия гипотезы о пригодности проверяемого распределения с уровнем значимости α, если значение *взвешенной суммы квадратов отклонений*

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{l}\frac{(n_i/n - p_i)^2}{p_i} = \sum_{i=1}^{l}\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}. \qquad (3.20)$$

меньше квантиля распределения χ^2-распределения с $k = l - 1$ степенями свободы, т.е. $\chi^2 < (\chi_{1-\alpha})^2(k)$,

в противоположном случае эта гипотеза отвергается, как противоречащая результатам эксперимента. Если при этом некоторые параметры распределения оценивают по результатам той же выборки, то квантиль χ^2-распределения следует брать для $k = l - 1 - m$ степеней свободы, где m – число оцениваемых параметров.

3.1.5 Построение гистограммы (эмпирической функции распределения)

Для наглядного представления о выборке часто используют график, называемый *гистограммой*. Для построения гистограммы интервал, содержащий все элементы выборки, разбивают на l непересекающихся интервалов (как правило, равной длины). Подсчитывают числа n_i попаданий результатов экспериментов в каждый i-й интервал и строят столбиковую диаграмму, откладывая по оси ординат значения средней плотности $n_i/(nh_i)$, где h_i – длина i-го интервала. Площадь каждого столбика равна n_i/n, что соответствует относительной частоте попадания элементов выборки в i-й интервал. Площадь под всей ступенчатой фигурой равна единице.

При увеличении объема выборки и уменьшении интервалов группировки гистограмма приближается к функции плотности генеральной совокупности. Гистограмма является эмпирической функцией плотности, она дает приближенную функцию плотности генеральной совокупности (ее оценку) по случайной выборке.

3.2 Содержание типового расчета

Заданы результаты двух серий измерений (две случайные выборки) объема n_1 и n_2.

Требуется: По каждой выборке найти оценку математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения. Предполагая, что результаты измерений в каждой серии независимы и имеют нормальное распределение, найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения с доверительной вероятностью $P = 0{,}95$. С уровнем значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезы о равенстве дисперсий и о равенстве математических ожиданий этих двух выборок при альтернативных гипотезах: дисперсии не равны друг другу, математические ожидания не равны друг другу. Проверить гипотезу о нормальном распределении объединения данных двух выборок, используя интервалы равной вероятности в количестве L. Построить гистограмму объединения данных двух выборок.

3.3 Пример выполнения типового расчета

1. Первичная обработка результатов измерений

Рассчитать для каждой выборки оценку математического ожидания, несмещенную оценку дисперсии, оценку среднего квадратического отклонения.

Для упрощения расчетов и последующего контроля результатов вычислений следует провести кодировку данных по формуле (3.6), и найти оценки по формулам (3.7), (3.8), (3.4). Для контроля вычислений весь расчет необходимо повторить с другим началом отсчета. Результаты расчета должны совпасть с точностью до возможных ошибок округления. Пример расчета приведен в задаче 1.

Задача 1. В таблице 1 в первом столбце записаны результаты n = 18 независимых равноточных измерений величины заряда электрона $q = X \cdot 10^{-10}$ (в единицах CGSE), полученных Милликеном. Вычислить оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения величины X, провести контроль правильности расчетов.

Таблица 1. Исходные данные и результаты расчетов (к задаче 1)

Значение X	Результаты расчетов		Контроль правильности расчетов	
	U	U^2	V	V^2
4,761	–19	361	–29	841
4,792	12	144	2	4
4,758	–22	484	–32	1024
4,764	–16	256	–26	676
4,810	30	900	20	400
4,799	19	361	9	81
4,797	17	289	7	49
4,790	10	100	0	0
4,747	–33	1089	–43	1849
4,769	–11	121	–21	441
4,806	26	676	16	256
4,779	–1	1	–11	121
4,785	5	25	–5	25
4,790	10	100	0	0
4,777	–3	9	–13	169
4,749	–31	961	–41	1686

4,781	1	1	–9	81
4,799	19	361	9	81
Сумма	13	6239	–167	7779

Решение. Выберем $C = 4{,}780$ и, полагая $h = 10^{-3}$, подсчитаем значения $U_i = (X_i - C)/h = (X_i - 4{,}780)/10^{-3}$ и U_i^2.

Суммы чисел второго и третьего столбца дают возможность рассчитать $\overline{X}$ и S^2:

$\overline{U} = 13/18 = 0{,}72$;

$\overline{X} = 4{,}780 + 0{,}72 \cdot 10^{-3} = 4{,}7807$;

$S^2 = 10^{-6}(6239 - 13^2/18)/17 = 3{,}66 \cdot 10^{-4}$,

откуда $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{3{,}66 \cdot 10^{-4}} = 1{,}91 \cdot 10^{-2}$.

В последних двух столбцах приведены расчеты при другом начале отсчета $C_1 = 4{,}790$. Новые кодированные значения обозначены как $V_i = (X_i - 4{,}790)/10^{-3}$. Эти расчеты приводят к тем же значениям $\overline{X}$ и S:

$\overline{V} = 167/18 = -9{,}2$, $\overline{X} = 4{,}790 - 9{,}28 \cdot 10^{-3} = 4{,}7807$;

$S^2 = 10^{-6}(7779 - (167^2)/18)/17 = 3{,}66 \cdot 10^{-4}$, $S = 1{,}91 \cdot 10^{-2}$.

Внимание! Для упрощения последующих расчетов при выборе параметров кодировки $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$ первой серии измерений и $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$ второй серии измерений следует одно из начал отсчета $C_j^{(1)}$, $C_j^{(2)}$ сделать одинаковым.

2. Построение доверительных интервалов

По условию, в каждой выборке результаты измерений независимы и имеют нормальное распределение с одинаковыми параметрами. Для каждой выборки необходимо найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения с доверительной вероятностью P, которую задает преподаватель. Построение доверительных интервалов для математического ожидания a и стандартного отклонения σ рассмотрено в задаче 2.

Задача 2. В задаче 1 для $n = 18$ результатов независимых измерений величины заряда электрона $q = x \cdot 10^{-10}$ были вычислены $\overline{X} = 4{,}7807$ и $S = 0{,}0191$. Предполагая, что результаты измерений независимы и имеют нормальное распределение с одинаковыми параметрами. построить доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения с доверительной вероятностью $P = 0{,}95$.

Решение. По формуле (3.10) $\varepsilon = t_{1-\alpha/2}(k)\, S/\sqrt{n}$. В таблице квантилей распределения Стьюдента

находим

$t_{1-\alpha/2}(k) = t_{0{,}975}(17) = 2{,}11$. Тогда

$\varepsilon = 2{,}11 \cdot 0{,}0191/\sqrt{18} \approx 0{,}0095$.

По формуле (3.11) $a = 4{,}7807 \pm 0{,}0095$, т.е. с вероятностью $P = 0{,}95$ выполняется неравенство $4{,}7712 < a < 4{,}7902$.

В таблице квантилей хи-квадрат распределения находим:

$\chi^2_{\alpha/2}(k) = \chi^2_{0{,}025}(17) = 7{,}56$; $\chi^2_{1-\alpha/2}(k) = \chi^2_{0{,}975}(17) = 30{,}2$.

По формуле (3.12) получаем

$$0,0191\sqrt{\frac{17}{30,2}} < \sigma < 0,0191\sqrt{\frac{17}{7,56}},$$

откуда
$\sigma \in (0,0143; 0,0287)$,
т.е. среднее квадратическое отклонение заключено между 0,0143 и 0,0287 с вероятностью 0,95.

3. Проверка гипотез о равенстве дисперсий, о равенстве математических ожиданий

Проверить гипотезу о равенстве дисперсий в двух сериях измерений H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (математические ожидания a_1 и a_2 неизвестны) с уровнем значимости α при альтернативной гипотезе H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
Если гипотеза о равенстве дисперсий отвергается, перейти к проверке гипотезы о нормальном распределении объединения двух случайных выборок, рассмотренной в следующем пункте.
Если же гипотеза о равенстве дисперсий не противоречит экспериментальным данным, найти сводную оценку дисперсии (3.16) и построить доверительный интервал для σ, используя сводную оценку дисперсии.
Проверка указанной гипотезы рассмотрена в задачах 3 и 4.

Задача 3. По случайной нормальной выборке объема $n_1 = 11$ найдена выборочная дисперсия $S_1^2 = 0,373$. По другой случайной нормальной выборке объема $n_2 = 9$ также найдена выборочная дисперсия $S_2^2 = 0,0955$. Проверить гипотезу о равенстве дисперсий H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при альтернативной гипотезе H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ с уровнем значимости $\alpha = 0,05$. Если гипотеза о равенстве дисперсий не противоречит экспериментальным данным, найти сводную оценку дисперсии и построить доверительный интервал для σ, используя сводную оценку дисперсии, с доверительной вероятностью $P = 0,95$.

Решение. Вычислим отношение большей дисперсии S_1^2 к меньшей S_2^2 по формуле (3.14): $F = \frac{0,373}{0,0955} = 3,91$. По таблице квантилей распределения Фишера найдем $F_{0,975}(10; 8) = 4,30$. Так как отношение выборочных дисперсий $F = 3,91$ меньше значения квантили 4,30, гипотеза о равенстве дисперсий принимается (см. формулу (3.15)), как не противоречащая результатам эксперимента с уровнем значимости 0,05. Тогда можно вычислить сводную оценку дисперсии (3.16):

$$S^2_{\text{св}} = \frac{10 \cdot 0,373 + 8 \cdot 0,0955}{10 + 8} = 0,250,$$

с числом степеней свободы $k_{CB} = k_1 + k_2 = 10 + 8 = 18$.
Рассчитаем доверительный интервал для σ. По таблице квантилей хи-квадрат распределения находим: $\chi^2_{\alpha/2}(k) = \chi^2_{0,025}(18) = 8,23$; $\chi^2_{1-\alpha/2}(k) = \chi^2_{0,975}(18) = 31,5$.
По формуле (3.12) получаем: $0,5\sqrt{\frac{18}{31,5}} < \sigma < 0,5\sqrt{\frac{18}{8,23}}$, откуда $0,378 < \sigma < 0,739$.

Задача 4. Задача аналогична задаче 3, но с другими исходными данными: $n_1 = 26$; $S_1^2 = 0,395$; $n_2 = 19$; $S_2^2 = 1,67$.

Решение. Найдем отношение большей дисперсии S_2^2 к меньшей S_1^2 : $F = \frac{1,67}{0,395} = 4,23$. По таблице квантилей распределения Фишера находим $F_{0,975}(18; 25) = 2,35$.
Так как отношение выборочных дисперсий $F = 4,23$ больше значения квантили 2,35, гипотезу о

равенстве дисперсий отвергаем с уровнем значимости α = 0,05.
Затем необходимо проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий в двух сериях измерений H_0: $a_1 = a_2$ при альтернативной гипотезе H_1: $a_1 \neq a_2$ с уровнем значимости α. Если гипотеза о равенстве математических ожиданий отвергается, перейти к выполнению следующего пункта. Если же гипотеза о равенстве математических ожиданий не противоречит экспериментальным данным, найти сводную оценку математического ожидания и доверительный интервал для математического ожидания, используя сводную оценку дисперсии.
Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий рассмотрена в задачах 5 и 6.

Задача 5. По двум случайным нормальным выборкам получены выборочные средние $\overline{X}_1$ = 12,95 и $\overline{X}_2$ = 12,13. Объемы выборок равны соответственно $n_1 = 12$ и $n_2 = 15$. Дисперсии обеих выборок одинаковы. Сводная оценка среднего квадратического отклонения S_{CB} = 0,872 с числом степеней свободы k_{CB} = 25. Проверить гипотезу H_0 о равенстве математических ожиданий при альтернативной гипотезе H_1 : $a_1 \neq a_2$ с уровнем значимости α = 0,05. Если гипотеза о равенстве математических ожиданий не противоречит экспериментальным данным, найти сводную оценку математического ожидания и доверительный интервал для математического ожидания, используя сводную оценку математического ожидания и сводную оценку дисперсии с доверительной вероятностью P = 0,95.
Решение. Найдем значение критерия Стьюдента t по формуле (3.17):

$$t = \frac{12{,}95 - 12{,}13}{0{,}872\sqrt{1/12 + 1/15}} = 2{,}43; \quad |t| = 2{,}43.$$

По таблице квантилей распределения Стьюдента $t_{0,975}(25) = 2{,}06$. Так как вычисленное значение $|t|$ = 2,43 больше этого значения, гипотезу о равенстве математических ожиданий отвергаем с уровнем значимости α = 0,05 (см. формулу (3.18)).

Задача 6. Задача аналогична задаче 5, но с другими исходными данными: $\overline{X}_1$ = 27,43; n_1 = 16; $\overline{X}_2$ = 28,76; n_2 = 21; S_{CB} = 2,35; k_{CB} = 35.
Решение. Найдем значение критерия Стьюдента t по формуле (3.17):

$$t = \frac{27{,}43 - 28{,}76}{2{,}35\sqrt{1/16 + 1/32}} = -1{,}71; \quad |t| = 1{,}71$$

По таблице квантилей распределения Стьюдента $t_{0,975}(35) = 2{,}03$. Так как вычисленное значение $|t|$ = 1,71 меньше табличного, гипотезу о равенстве математических ожиданий принимаем как не противоречащую выборочным данным с уровнем значимости 0,05. Сводную оценку математического ожидания определим по формуле (3.19)

$$\overline{X}_{св} = \frac{16 \cdot 27{,}43 + 21 \cdot 28{,}76}{16 + 21} = 28{,}18,$$

доверительный интервал для математического ожидания по формулам (3.10) и (3.11):

$$\varepsilon = t_{1-\alpha/2}(k)\, S_{св}\big/\sqrt{n_{св}} = t_{0,975}(35)\; 2{,}35 \;/\sqrt{16+21} = 0{,}78;$$

$a = \overline{X}_{CB} \pm \varepsilon = 28{,}18 \pm 0{,}78.$

4. Проверка гипотезы о нормальном распределении объединения двух случайных выборок

На этом этапе расчета следует проверить гипотезу о нормальном распределении объединения двух заданных случайных выборок, величину уровня значимости α выбрать ту же, что и в предыдущем пункте расчета.
Для проверки гипотезы о нормальном распределении случайной величины X по критерию

согласия Пирсона весь диапазон возможных значений этой величины разбивается на l интервалов (значение l задано в условии типового расчета), вычисляется p_i – вероятность попадания в каждый из интервалов ($i = 1, 2, ..., l$). Затем вычисляется величина χ^2 по формуле (3.20) и сравнивается с квантилью $\chi^2_{1-\alpha}(k)$ распределения Пирсона. Так как для вычисления вероятностей p_i параметры нормального распределения оцениваются по той же выборке, по которой строится критерий согласия, то число степеней свободы $k = l - 3$. Если $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}(k)$, гипотеза отвергается при заданном уровне значимости $\alpha = 1 - P$. Если $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}(k)$, гипотеза принимается, как не противоречащая результатам эксперимента.

В общем случае вероятности p_i определяются с помощью интеграла вероятностей $\Phi(t)$. При этом оценками параметров нормального распределения являются $\overline{X}$ и S, найденные по объединению данных двух выборок. За оценку математического ожидания принимается среднее арифметическое по объединению двух выборок (3.19).

Оценка среднего квадратического отклонения σ объединения выборок зависит от результата проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий этих выборок. Если гипотеза о равенстве математических ожиданий принимается, то за оценку σ может быть взята $S = \sqrt{S^2_\alpha}$,

полученная по формуле для сводной оценки дисперсии (3.15).

Если гипотеза о равенстве математических ожиданий отвергнута, необходимо рассчитать несмещенную оценку дисперсии объединения выборок по основной формуле (3.3):

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2; \quad n = n_1 + n_2. \tag{3.21}$$

Чтобы не выполнять заново расчет оценок дисперсии, можно использовать следующий прием. Для упрощения расчетов и организации контроля при нахождении оценок математического ожидания и дисперсии по выборкам исходные данные рекомендуется кодировать (см. формулу (3.8)) : $U_i = \dfrac{X_i - C}{h}$, и расчет S_j^2 вести по формуле (3.10):

$$S_j^2 = \frac{h^2}{k_j}\left(\sum_{i=1}^{n_j} U_{ij}^2 - n_j \overline{U}_j^2\right); \; j = 1, 2.$$

Если заранее выбрать h и C одинаковыми для обеих выборок, расчет оценки дисперсии объединения выборок может быть выполнен по формуле:

$$S^2 = \frac{h^2}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n_1}{}' U_i^2 + \sum_{i=1}^{n_2}{}'' U_i^2 - n\overline{U}^2\right); \quad \overline{U} = \frac{n_1\overline{U}_1 + n_2\overline{U}_2}{n_1 + n_2}, \tag{3.22}$$

где первая сумма квадратов Σ' кодированных данных относится к первой выборке, вторая Σ'' – ко второй.

При расчетах будем использовать *интервалы равной вероятности*, т.е. весь диапазон возможных значений случайной величины разобьем на такие интервалы, чтобы вероятности p_i попадания в каждый из них были бы одинаковы, т.е. $p_i = 1/l$. Для нахождения границ таких интервалов x_i необходимо с помощью интеграла вероятностей $\Phi(t)$ найти границы интервалов равной вероятности u_i для случайной величины U, имеющей стандартное нормальное распределение. Тогда оценочные границы интервалов равной вероятности x_i случайной величины X могут быть найдены по формуле

$$x_i = \overline{X} + Su_i. \tag{3.23}$$

Затем для получения χ^2 необходимо найти числа n_i значений величины X, принадлежащих каждому полученному интервалу, и произвести вычисления по формуле (3.20).

Задача 7. Проверить гипотезу о нормальности распределения величины X по случайной выборке объема $n = 51$, выбрав число интервалов равной вероятности $l = 5$. Оценки параметров нормального распределения: $\overline{X} = 28{,}23$; $S = 2{,}37$.
Решение. Если число интервалов равной вероятности $l = 5$, то вероятность попадания в каждый из этих интервалов $p = 1/l = 0{,}2$.
Найдем границы этих интервалов u_i для случайной величины со стандартным нормальным распределением.
Если разбить область под графиком функции плотности стандартного нормального распределения на криволинейные трапеции равной площади, то площадь каждой трапеции будет равна $p = 0{,}2$ (рис. 1), а границы оснований этих трапеций будут искомыми числами u_i.
Следовательно, u_i – соответствующие квантили стандартного нормального распределения. Для их нахождения в первом столбце результатов расчета таблицы (табл. 2) записываем значения функции распределения $F(u)$ в искомых точках u_i (вероятность попадания случайной величины U левее этой точки). Это будут числа, кратные $p = 0{,}2$, начиная с нуля (что соответствует левой бесконечной границе) и кончая единицей (соответствует правой бесконечной границе). Во втором столбце записываем значения интеграла вероятности $\Phi(u)$ в искомых точках: $\Phi(u) = F(u) - 0{,}5$. Используя таблицу значений функции $\Phi(u)$, находим для положительных значений функции $\Phi(u)$ значения u_i как обратной к функции $\Phi(u)$, т.е. по известным значениям функции определяем соответствующие значения аргументов. Для отрицательных значений функции $\Phi(u)$ используем свойство нечетности этой функции: $\Phi(-u) = -\Phi(u)$.

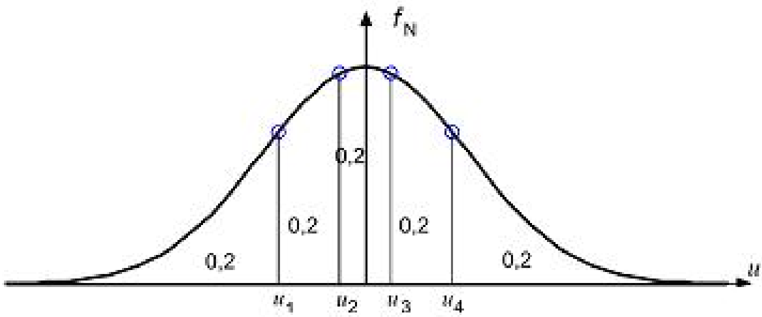

Рис. 1. Пример разбиения области под графиком функции плотности вероятностей на криволинейные трапеции равной площади

При нахождении u_i по значению $\Phi(u_i)$ используем метод линейной интерполяции. Например, значения $\Phi(u) = 0{,}1$ в таблице нет. Выписываем ближайшие значения $\Phi(u)$: 0,0987 и 0,1026. Им соответствуют значения аргумента 0,25 и 0,26. Тогда

$$u_i \approx 0{,}25 + (0{,}26 - 0{,}25)\frac{0{,}1 - 0{,}0987}{0{,}1026 - 0{,}0987} = 0{,}253$$

Границы интервалов равной вероятности x_i для рассматриваемой величины X находим по формуле (3.5). Значения x_i желательно вычислять с одним запасным знаком по сравнению с элементами случайной выборки. Это делается для того, чтобы элементы выборки, по возможности, не попадали на границы интервалов. Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты расчетов границ интервалов равной вероятности (к задаче 7)

$F(u_i)$	$\Phi(u_i)$	u_i	x_i
0	– 0,5	– ∞	– ∞

0,2	– 0,3	– 0,842	26,235
0,4	– 0,1	– 0,253	27,631
0,6	0,1	0,253	28,829
0,8	0,3	0,842	30,225
1,0	0,5	+ ∞	+ ∞

Найдя границы интервалов равной вероятности, подсчитываем числа n_i попадания элементов случайной выборки в каждый из l интервалов. np_i = 51/5 = 10,2. Расчет величины χ^2 по формуле (3.20) дает значение χ^2 = 46,8/10,2 = 4,59. Результаты расчетов приведены в табл. 3.

Таблица 3. Результаты расчетов величины критерия χ^2 (к задаче 7)

i	(x_i, x_{i+1})	n_i	$n_i - np_i$	$(n_i - np_i)^2$
1	(– ∞; 26,235)	12	1,8	3,24
2	(26,235; 27,631)	9	–1,2	1,44
3	(27,631; 28,829)	5	–5,2	27,04
4	(28,829; 30,225)	14	3,8	14,44
5	(30,225; + ∞)	11	0,8	0,64
∑	–	51	0	46,80

Сравнивая найденное значение χ^2 с квантилью $\chi^2_{1-\alpha}(k)$ при уровне значимости α = 0,05 и при k = 5 – 3 = 2, т.е. $\chi^2_{0,95}(2)$ = 5,99, замечаем, что 4,59 < 5,99. Следовательно, можно считать, что при заданном уровне значимости α = 0,05, гипотеза о нормальном распределении величины X не противоречит результатам эксперимента.

5. Построение гистограмм распределения объединения двух случайных выборок

На этом этапе расчета следует построить гистограмму распределения объединения двух заданных выборок, разбив диапазон изменения значений элементов выборок на l интервалов равной длины. В качестве l для определенности взять число интервалов равной вероятности, используемых при проверке гипотезы о нормальности распределения на предыдущем этапе расчета.

Для построения гистограммы диапазон изменения значений элементов выборки накрывают отрезком чуть более широким, чтобы наибольшее и наименьшее значения выборки являлись внутренними точками этого отрезка. Полученный отрезок разбивают на l интервалов равной длины, подсчитывают числа n_i попаданий элементов выборки в каждый i-й интервал. При этом желательно, чтобы элементы выборки не попадали на границы интервалов. Затем строят столбиковую диаграмму, откладывая по оси ординат величины, пропорциональные n_i (можно откладывать значения n_i).

Задача 8. Построить гистограмму по случайной выборке объема n = 50. Наибольший элемент выборки 12,73, наименьший 9,51, значения всех элементов выборки записаны с двумя знаками после запятой. Выбрано число интервалов l = 5.

Решение. Длина диапазона изменения элементов выборки равна 12,73 – 9,51 = = 3,22. Увеличим эту длину до ближайшего числа, которое при делении на l дает частное с числом знаков после запятой не большим, чем у элементов выборки. В данной задаче таким числом является 3,25, т.е. длину диапазона необходимо увеличить на 0,03. При этом левую границу сдвинем влево, например, на 0,01, правую границу сдвинем вправо на 0,02. Получаем отрезок [9,50; 12,75], для которого все элементы выборки являются внутренними точками. Делим отрезок на 5 интервалов равной длины, длина каждого интервала равна h = 3,25/5 = 0,65. Полученное разбиение на интервалы имеет недостаток: элементы выборки могут попасть на границы интервалов. Этого можно избежать, если сдвинуть полученный выше отрезок на половину последнего разряда значений элементов выборки, т.е. на величину 0,005. Сдвинем отрезок на эту величину, например, влево. Получим отрезок [9,495; 12,745] с шагом разбиения h = 0,65. Затем подсчитаем числа n_i попаданий элементов выборки в каждый интервал (табл. 4) и построим гистограмму (рис. 2.)

Таблица 4. Результаты расчетов(к задаче 8)

Номер	Граница интервала	n_i
1	(9,495; 10,145)	3
2	(10,145; 10,795)	10
3	(10,795; 11,445)	18
4	(11,445; 12,095)	13
5	(12,0925; 12,745)	6
$\sum$	–	50

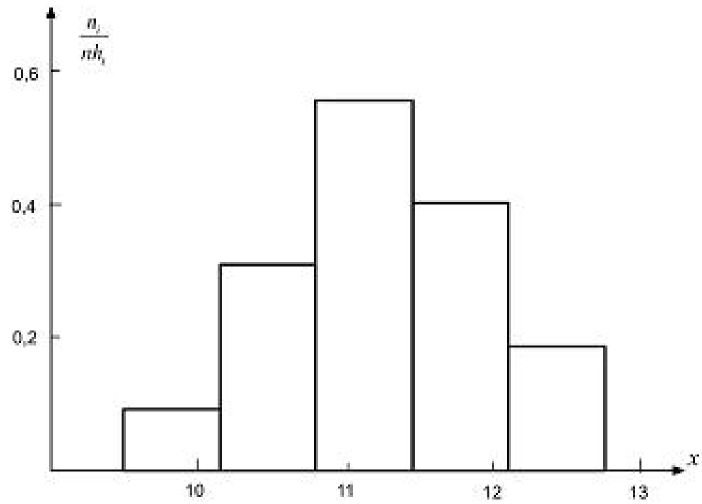

Рис. 2. Гистограмма

3.4 Выводы по результатам типового расчета

После выполнения типового расчета необходимо сделать выводы о результатах проверок статистических гипотез в следующем порядке.

1. Результат проверки гипотезы о равенстве дисперсий. Если гипотеза отвергнута, привести оценки дисперсии и среднеквадратического отклонения по каждой выборке с соответствующими доверительными интервалами для σ. Если гипотеза принята, привести сводные оценки дисперсии и среднеквадратического отклонения, а также уточненный интервал для σ.

2. Результат проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий или информации о том, что эта гипотеза не проверялась. Если гипотеза отвергнута, привести оценки

математического ожидания и соответствующие доверительные интервалы для каждой выборки отдельно. Если гипотеза принята, привести сводную оценку математического ожидания и соответствующий уточненный доверительный интервал.
3. Результат проверки гипотезы о нормальном распределении объединения двух серий измерений.

Литература

1. В.А.Карасев, С.Н. Богданов, Г.Д. Лёвшина. Теория вероятностей и математическая статистика. Раздел 2. Математическая статистика. Учебно-методическое пособие. . // М.: Изд-во "Учеба" (МИСиС). – 2006. – 116 с.