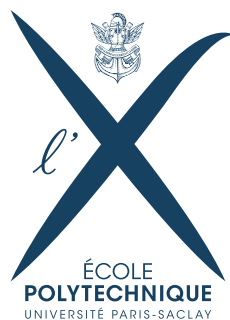


# RETOUR VERS LE FUTUR



Qi SUN et Victor QUACH



## T1

- Soit  $k \in \mathcal{E}^{bin} = \{0, \dots, M\}$ .

Compte-tenu, de la définition de  $F^{bin}$ , on a pour  $k < M$  :

$$P^{bin}(k, k+1) = p \frac{M-k}{M}$$

Notons que le membre de droite est nul pour  $k = M$ .

De même, pour  $k > 0$  :

$$P^{bin}(k, k-1) = (1-p) \frac{k}{M}$$

Le membre de droite est nul pour  $k = 0$ .

Il vient donc, pour  $k \in \mathcal{E}^{bin}$ ,

$$P^{bin}(k, k) = 1 - p + \frac{2kp}{M} + \frac{k}{M}$$

Enfin, pour  $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$ , si  $|x - y| > 1$ ,

$$P^{bin}(x, y) = 0$$

- Soit  $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$ .

En utilisant que  $\pi^{bin}(x) = \binom{M}{x} p^x (1-p)^{M-x}$ , il vient dans les différents cas :

— Si  $(x, y) = (k, k+1)$

$$\begin{aligned} \pi^{bin}(k) P(k, k+1) &= \binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k} p \frac{M-k}{M} \\ &= \frac{M-k}{M} \binom{M}{M-k} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1} (1-p) \\ &= \binom{M-1}{M-k-1} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1} (1-p) \\ &= \binom{M-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1} (1-p) \\ &= \frac{k+1}{M} \binom{M}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1} (1-p) \\ &= \pi^{bin}(k+1) P(k+1, k) \end{aligned}$$

— Si  $(x, y) = (k, k)$ , L'équation est trivialement vérifiée

— Sinon, les deux membres sont nuls.

Finalement, pour tout  $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$ ,

$$\pi^{bin}(x) P(x, y) = \pi^{bin}(y) P(y, x)$$

- Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\pi^{bin}$ . Alors, pour  $x \in \mathcal{E}$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F^{bin}(X) = x) &= \sum_{y \in \mathcal{E}} \pi^{bin}(y) P^{bin}(y, x) = \sum_{y \in \mathcal{E}} \pi^{bin}(x) P^{bin}(x, y) \\ &= \pi^{bin}(x) P \sum_{y \in \mathcal{E}} \pi^{bin}(x, y) = \pi^{bin}(x) \\ &= \mathbb{P}(X = x)\end{aligned}$$

De cela, on déduit que  $\pi^{bin}$  est invariante pour  $F^{bin}$ .

## T2

Il s'agit de calculer :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1) &= \mathbb{P}(\{F_{0,n_0k}(X) = F_{0,n_0k}(Y)\}) \\ &= \sum_{x,y} \mathbb{P}(F_{0,n_0k}(x) = F_{0,n_0k}(y)) \mathbb{P}(X = x, Y = y)\end{aligned}$$

Or, on a supposé que :

$$\inf_{x,y} \mathbb{P}(F_{0,n_0k}(x) = F_{0,n_0k}(y)) \geq \varepsilon > 0$$

D'où :

$$\mathbb{P}(A_1) \geq \sum_{x,y} \varepsilon \mathbb{P}(X = x, Y = y) \geq \varepsilon \sum_{x,y} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \geq \varepsilon$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(A_1) \geq \varepsilon$$

Montrons par récurrence sur  $l$  que :

$$\mathbb{P}(S > l) = \mathbb{P}(A_1^c, A_2^c, \dots, A_l^c) \leq (1 - \varepsilon)^l.$$

Le résultat au rang 1 se déduit du point précédent. Soit  $l \geq 1$ , supposons le résultat au rang  $l$ . Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S > l + 1) &= \mathbb{P}(A_1^c, A_2^c, \dots, A_l^c, A_{l+1}^c) \\ &= \sum_{x,y} \mathbb{P}(F_{0,n_0}(x) \neq F_{0,n_0}(y), \dots, F_{0,n_0(l+1)}(x) \neq F_{0,n_0(l+1)}(y)) \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x,y} \mathbb{P}(F_{n_0l,n_0(l+1)}(F_{0,n_0l}(x)) \neq F_{n_0l,n_0(l+1)}(F_{0,n_0l}(y))) \\ &\quad \times \mathbb{P}(F_{0,n_0}(x) \neq F_{0,n_0}(y), \dots, F_{0,n_0l}(x) \neq F_{0,n_0l}(y)) \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &\leq (1 - \varepsilon) \mathbb{P}(S > l) \\ &\leq (1 - \varepsilon)^{(l+1)}\end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence. On en déduit :

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{l \geq 0} \mathbb{P}(S > l) \leq \sum_{l \geq 0} (1 - \varepsilon)^l$$

Finalement :

$$\mathbb{E}[S] \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

D'une part,  $(\mathbb{P}(F_{0,n}(X) = F_{0,n}(Y)))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante sur  $n$ .  
D'autre part, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{P}(F_{0,nn_0}(X) = F_{0,nn_0}(Y)) \geq \mathbb{P}(S \leq n)$ .  
Ainsi,

$$1 - (1 - \varepsilon)^n \leq \mathbb{P}(F_{0,nn_0}(X) = F_{0,nn_0}(Y)) \leq 1$$

D'après le théorème d'encadrement et la monotonie de la suite, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(F_{0,n}(X) = F_{0,n}(Y)) = 1$$

### T3

Supposons que  $\pi$  et  $\nu$  sont deux probabilités invariantes. Alors pour tout  $n \geq 0$ ,  $F_{0,n}(X)$  suit la même loi que  $X$ , ainsi que  $Y$ . Soit  $\varphi$  une fonction continue bornée,

$$\mathbb{E}(\varphi(X - Y)) = \mathbb{E}(\varphi(F_{0,n}(X) - F_{0,n}(Y)))$$

$\varphi(F_{0,n}(X) - F_{0,n}(Y))$  converge en probabilité (d'après la question T2), donc en loi vers 0. D'où :

$$\mathbb{E}(\varphi(X - Y)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\varphi(F_{0,n}(X) - F_{0,n}(Y))) = 0$$

Donc  $X$  et  $Y$  suivent la même loi, i.e.  $\pi = \nu$ . Ainsi, il existe au plus une probabilité invariante.

### T4

Soient  $x, y \in \mathcal{E}$ .

On peut montrer par récurrence (de même que dans la question **T2.**) que :

$$\forall l \geq 0, \quad \mathbb{P}(T_+^{x,y} > n_0 l) = \mathbb{P}(F_{0,n_0 l}(x) \neq F_{0,n_0 l}(y)) \leq (1 - \varepsilon)^l$$

Par ailleurs,  $(\mathbb{P}(T_+^{x,y} > n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante, d'où :

$$\forall l, \forall n, \quad n_0 l \leq n \leq n_0(l + 1) \Rightarrow \mathbb{P}(T_+^{x,y} > n) \leq (1 - \varepsilon)^l$$

D'où :

$$\mathbb{E}[T_+^{x,y}] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T_+^{x,y} > n) \leq \sum_{n \geq 0} (1 - \varepsilon)^{\lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} = \frac{n_0}{\varepsilon}$$

Les variables aléatoires  $T_+^{x,y}$  étant positives, on a :

$$T_+ = \max_{x,y} T_+^{x,y} \leq \sum_{x,y} T_+^{x,y}$$

D'où l'on déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_+] &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{x,y} T_+^{x,y}\right] \\ &\leq \sum_{x,y} \mathbb{E}[T_+^{x,y}] \\ &\leq \binom{\#\mathcal{E}}{2} \frac{n_0}{\varepsilon}\end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{E}[T_+]$  est fini et borné par  $\binom{\#\mathcal{E}}{2} \frac{n_0}{\varepsilon}$ .

## T5

Montrons par récurrence que  $F_{0,n}(x) \sim F_{-n,0}(x)$  pour tout  $x \in \mathcal{E}$  et  $n \in \mathbb{N}$  :

Soit  $x \in \mathcal{E}$ ,  $n = 0$ , on a directement :

$$F_{0,0}(x) = F_{-0,0}(x)$$

Soit  $n \geq 0$ , supposons le résultat au rang  $n$ , alors soient  $x, y \in \mathcal{E}$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_{-(n+1),0}(x) = y) &= \mathbb{P}(F_0 \circ F_{-(n+1),-1}(x) = y) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{E}} \mathbb{P}(F_0(z) = y) \mathbb{P}(F_{-(n+1),-1}(x) = z) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{E}} \mathbb{P}(F_{n+1}(z) = y) \mathbb{P}(F_{0,n}(x) = z) \quad (\text{d'après H.R.}) \\ &= \mathbb{P}(F_{n+1} \circ F_{0,n}(x) = y) \\ &= \mathbb{P}(F_{0,n+1}(x) = y)\end{aligned}$$

Ainsi,  $F_{-(n+1),0}(x) \sim F_{0,n+1}(x)$ . D'où le résultat par récurrence sur  $n$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_+ \leq n) &= \sum_{z \in \mathcal{E}} \prod_{x \in \mathcal{E}} \mathbb{P}(F_{n,0}(x) = z) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{E}} \prod_{x \in \mathcal{E}} \mathbb{P}(F_{0,-n}(x) = z) \\ &= \mathbb{P}(T_- \leq n)\end{aligned}$$

$T_+$  et  $T_-$  ont donc la même fonction de répartition. Ainsi,  $T_+ \sim T_-$ .

Soient  $x \in \mathcal{E}$  et  $n \geq T_-$ ,

$$\underline{F_{-n,0}(x)} = F_{-T_-,0}(F_{-n,-T_-}(x)) = \underline{F_{-T_-,0}(x)}$$

Supposons que  $X^*$  suit la loi  $\nu$ , alors soit  $x \in \mathcal{E}$  :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_{-(T_-+1),0}(x_0) = x) &= \mathbb{P}(F_0(F_{-T_-,0}(x_0)) = x) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{E}} \mathbb{P}(F_{-T_-,0}(x_0) = y) \mathbb{P}(F_0(y) = x) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{E}} \nu(y) \mathbb{P}(F_0(y) = x)\end{aligned}$$

Or,  $\mathbb{P}(F_{-(T_-+1),0}(x_0) = x) = \mathbb{P}(F_{-T_-,0}(x_0) = x) = \nu(x)$  d'après le point précédent.  $\nu$  est donc une loi invariante. D'après l'unicité de probabilité invariante montrée dans la question T3, on a :

$$X^* \sim \pi$$

## T6

Il s'agit de montrer que  $F^{bin}$  est croissante sur  $(\mathcal{E}^{bin}, \leq)$ .

Soit  $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$ , avec  $x \leq y$ . Si  $x = y$ , le résultat est assuré. Supposons  $x < y$ . On distingue les cas selon les valeurs de  $K$  et  $U$ .

- Si  $U > p$ 
  - Si  $x < y < K$ ,  $F^{bin}(x) = x < y = F^{bin}(y)$
  - Si  $x < K \leq y$ ,  $F^{bin}(x) = x \leq y - 1 = F^{bin}(y)$
  - Si  $K \leq x < y$ ,  $F^{bin}(x) = x - 1 < y - 1 = F^{bin}(y)$
- Sinon,  $U \leq p$ .
  - Si  $x < y < K$ ,  $F^{bin}(x) = x + 1 < y + 1 = F^{bin}(y)$
  - Si  $x < K \leq y$ ,  $F^{bin}(x) = x + 1 \leq y = F^{bin}(y)$
  - Si  $K \leq x < y$ ,  $F^{bin}(x) = x < y = F^{bin}(y)$

Finalement,

$$\underline{F^{bin} \text{ est croissante sur } (\mathcal{E}^{bin}, \leq)}.$$