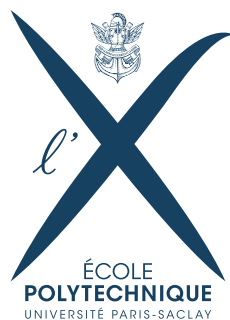


# RETOUR VERS LE FUTUR



---

Sun Qi et Victor Quach



## T1

- Soit  $k \in \mathcal{E}^{bin} = \{0, \dots, M\}$ .

Compte-tenu, de la définition de  $F^{bin}$ , on a pour  $k < M$  :

$$P^{bin}(k, k+1) = p \frac{M-k}{M}$$

Notons que le membre de droite est nul pour  $k = M$ .

De même, pour  $k > 0$  :

$$P^{bin}(k, k-1) = (1-p) \frac{k}{M}$$

Le membre de droite est nul pour  $k = 0$ .

Il vient donc, pour  $k \in \mathcal{E}^{bin}$ ,

$$P^{bin}(k, k) = 1 - p + \frac{2kp}{M} + \frac{k}{M}$$

Enfin, pour  $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$ , si  $|x - y| > 1$ ,

$$P^{bin}(x, y) = 0$$

- Soit  $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$ .

En utilisant que  $\pi^{bin}(x) = \binom{M}{x} p^x (1-p)^{M-x}$ , il vient dans les différents cas :

— Si  $(x, y) = (k, k+1)$

$$\begin{aligned} \pi^{bin}(k) P(k, k+1) &= \binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k} p \frac{M-k}{M} \\ &= \frac{M-k}{M} \binom{M}{M-k} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1} (1-p) \\ &= \binom{M-1}{M-k-1} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1} (1-p) \\ &= \binom{M-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1} (1-p) \\ &= \frac{k+1}{M} \binom{M}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1} (1-p) \\ &= \pi^{bin}(k+1) P(k+1, k) \end{aligned}$$

— Si  $(x, y) = (k, k)$ , L'équation est trivialement vérifiée

— Sinon, les deux membres sont nuls.

Finalement, pour tout  $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$ ,

$$\pi^{bin}(x) P(x, y) = \pi^{bin}(y) P(y, x)$$

- Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\pi^{bin}$ . Alors, pour  $x \in \mathcal{E}$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F^{bin}(X) = x) &= \sum_{y \in \mathcal{E}} \pi^{bin}(y) P^{bin}(y, x) = \sum_{y \in \mathcal{E}} \pi^{bin}(x) P^{bin}(x, y) \\ &= \pi^{bin}(x) P \sum_{y \in \mathcal{E}} \pi^{bin}(x, y) = \pi^{bin}(x) \\ &= \mathbb{P}(X = x)\end{aligned}$$

De cela, on déduit que  $\pi^{bin}$  est invariante pour  $F^{bin}$ . En effet