RETOUR VERS LE FUTUR

Qi Sun et Victor Quach

l'X
ÉCOLE
POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

1 COALESCENCE ET LOI INVARIANTE

T1

- Soit $k \in \mathcal{E}^{bin} = \{0, \dots, M\}$.
  Compte-tenu, de la définition de F^{bin}, on a pour $k < M$:
  $$\boxed{P^{bin}(k, k+1) = p\frac{M-k}{M}}$$
  Notons que le membre de droite est nul pour $k = M$.

  De même, pour $k > 0$:
  $$\boxed{P^{bin}(k, k-1) = (1-p)\frac{k}{M}}$$
  Le membre de droite est nul pour $k = 0$.

  Il vient donc, pour $k \in \mathcal{E}^{bin}$,
  $$\boxed{P^{bin}(k, k) = 1 - p + \frac{2kp}{M} + \frac{k}{M}}$$

  Enfin, pour $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$, si $|x - y| > 1$,
  $$\boxed{P^{bin}(x, y) = 0}$$

- Soit $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$.
  En utilisant que $\pi^{bin}(x) = \binom{M}{x} p^x (1-p)^{M-x}$, il vient dans les différents cas :
  — Si $(x, y) = (k, k+1)$
  $$\begin{aligned}
  \pi^{bin}(k)P(k, k+1) &= \binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k} p\frac{M-k}{M} \\
  &= \frac{M-k}{M}\binom{M}{M-k} p^{k+1}(1-p)^{M-k-1}(1-p) \\
  &= \binom{M-1}{M-k-1} p^{k+1}(1-p)^{M-k-1}(1-p) \\
  &= \binom{M-1}{k} p^{k+1}(1-p)^{M-k-1}(1-p) \\
  &= \frac{k+1}{M}\binom{M}{k+1} p^{k+1}(1-p)^{M-k-1}(1-p) \\
  &= \pi^{bin}(k+1)P(k+1, k)
  \end{aligned}$$
  — Si $(x, y) = (k, k)$, L'équation est trivialement vérifiée

— Sinon, les deux memmbres sont nuls.
Finalement, pour tout $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$,

$$\boxed{\pi^{bin}(x)P(x,y) = \pi^{bin}(y)P(y,x)}$$

- Soit X une variable aléatoire de loi π^{bin}. Alors, pour $x \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F^{bin}(X) = x) &= \sum_{y\in\mathcal{E}} \pi^{bin}(y)P^{bin}(y,x) = \sum_{y\in\mathcal{E}} \pi^{bin}(x)P^{bin}(x,y) \\ &= \pi^{bin}(x)P\sum_{y\in\mathcal{E}}{}^{bin}(x,y) = \pi^{bin}(x) \\ &= \mathbb{P}(X = x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{De cela, on déduit que } \pi^{bin} \text{ est invariante pour } F^{bin}.}$$

T2

- Il s'agit de calculer :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1) &= \mathbb{P}(\{F_{0,n_0k}(X) = F_{0,n_0k}(Y)\}) \\ &= \sum_{x,y} \mathbb{P}(F_{0,n_0k}(x) = F_{0,n_0k}(y))\mathbb{P}(X = x, Y = y)\end{aligned}$$

Or, on a supposé que :

$$\inf_{x,y} \mathbb{P}(F_{0,n_0k}(x) = F_{0,n_0k}(y)) \geq \varepsilon > 0$$

D'où :

$$\mathbb{P}(A_1) \geq \sum_{x,y} \varepsilon\mathbb{P}(X = x, Y = y) \geq \varepsilon \sum_{x,y} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \geq \varepsilon$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1) \geq \varepsilon}$$

- Montrons par récurrence sur l que :

$$\boxed{\mathbb{P}(S > l) = \mathbb{P}({A_1}^c, {A_2}^c, ..., {A_l}^c) \leq (1-\varepsilon)^l.}$$

Le résultat au rang 1 se déduit du point précédent. Soit $l \geq 1$, supposons le résultat au rang l. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S > l+1) &= \mathbb{P}({A_1}^c, {A_2}^c, ..., {A_l}^c, {A_{l+1}}^c) \\ &= \sum_{x,y} \mathbb{P}(F_{0,n_0}(x) \neq F_{0,n_0}(y), ..., F_{0,n_0(l+1)}(x) \neq F_{0,n_0(l+1)}(y))\mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x,y} \mathbb{P}(F_{n_0l,n_0(l+1)}(F_{0,n_0l}(x)) \neq F_{n_0l,n_0(l+1)}(F_{0,n_0l}(y))) \\ &\qquad \times \mathbb{P}(F_{0,n_0}(x) \neq F_{0,n_0}(y), ..., F_{0,n_0l}(x) \neq F_{0,n_0l}(y))\mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &\leq (1-\varepsilon)\mathbb{P}(S > l) \\ &\leq (1-\varepsilon)^{(l+1)}\end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence. On en déduit :

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{l\geq 0} \mathbb{P}(S > l) \leq \sum_{l\geq 0} (1-\varepsilon)^l$$

Finalement :

$$\boxed{\mathbb{E}[S] \leq \frac{1}{\varepsilon}}$$

- D'une part, $(\mathbb{P}(F_{0,n}(X) = F_{0,n}(Y)))_n \in \mathbb{N}$ est une suite croissante sur n. D'autre part, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(F_{0,nn_0}(X) = F_{0,nn_0}(Y)) \geq \mathbb{P}(S \leq n)$. Ainsi,

$$1 - (1-\varepsilon)^n \leq \mathbb{P}(F_{0,nn_0}(X) = F_{0,nn_0}(Y)) \leq 1$$

D'après le théorème d'encadrement et la monotonie de la suite, il vient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(F_{0,n}(X) = F_{0,n}(Y)) = 1}$$

T3

Supposons que π et ν sont deux probabilités invariantes. Alors pour tout $n \geq 0$, $F_{0,n}(X)$ suit la même loi que X, ainsi que Y. Soit φ une fonction continue bornée,

$$\mathbb{E}(\varphi(X - Y)) = \mathbb{E}(\varphi(F_{0,n}(X) - F_{0,n}(Y)))$$

$\varphi(F_{0,n}(X) - F_{0,n}(Y))$ converge en probabilité(d'après la question $T2$), donc en loi vers 0. D'où :

$$\mathbb{E}(\varphi(X - Y)) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\varphi(F_{0,n}(X) - F_{0,n}(Y))) = 0$$

Donc X et Y suivent la même loi, i.e. $\pi = \nu$. Ainsi, il existe au plus une probabilité invariante.

T4

Soient $x, y \in \mathcal{E}$. On peut montrer par récurrence (de même que dans la question **T2.**) que :

$$\forall l \geq 0, \quad \mathbb{P}(T_+^{x,y} > n_0 l) = \mathbb{P}(F_{0,n_0 l}(x) \neq F_{0,n_0 l}(y)) \leq (1-\varepsilon)^l$$

Par ailleurs, $(P(T_+^{x,y} > n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, d'où :

$$\forall l, \forall n, \quad n_0 l \leq n \leq n_0(l+1) \Rightarrow \mathbb{P}(T_+^{x,y} > n) \leq (1-\varepsilon)^l$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}[T_+^{x,y}] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(T_+^{x,y} > n) \leq \sum_{n\geq 0} (1-\varepsilon)^{\left\lfloor \frac{n}{n_0} \right\rfloor} = \frac{n_0}{\varepsilon}$$

Les variables aléatoires $T_+^{x,y}$ étant positives, on a :

$$T_+ = \max_{x,y} T_+^{x,y} \leq \sum_{x,y} T_+^{x,y}$$

D'où l'on déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_+] &\leq \mathbb{E}[\sum_{x,y} T_+^{x,y}] \\ &\leq \sum_{x,y} \mathbb{E}[T_+^{x,y}] \\ &\leq \binom{\#\mathcal{E}}{2}\frac{n_0}{\varepsilon}\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{E}[T_+]$ est fini et borné par $\binom{\#\mathcal{E}}{2}\frac{n_0}{\epsilon}$.

T5

- Montrons par récurrence que $F_{0,n}(x) \sim F_{-n,0}(x)$ pour tout $x \in \mathcal{E}$ et $n \in \mathbb{N}$:
  Soit $x \in \mathcal{E}$, $n = 0$, on a directement :

  $$F_{0,0}(x) = F_{-0,0}(x)$$

  Soit $n \geq 0$, supposons le résultat au rang n, alors soient $x, y \in \mathcal{E}$,

  $$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_{-(n+1),0}(x) = y) &= \mathbb{P}(F_0 \circ F_{-(n+1),-1}(x) = y) \\ &= \sum_{z\in\mathcal{E}} \mathbb{P}(F_0(z) = y)\mathbb{P}(F_{-(n+1),-1}(x) = z) \\ &= \sum_{z\in\mathcal{E}} \mathbb{P}(F_{n+1}(z) = y)\mathbb{P}(F_{0,n}(x) = z) \qquad \text{(d'après H.R.)} \\ &= \mathbb{P}(F_{n+1} \circ F_{0,n}(x) = y) \\ &= \mathbb{P}(F_{0,n+1}(x) = y)\end{aligned}$$

  Ainsi, $F_{-(n+1),0}(x) \sim F_{0,n+1}(x)$. D'où le résultat par récurrence sur n.

- Soit $n \in \mathbb{N}$,

  $$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_+ \leq n) &= \sum_{z\in\mathcal{E}} \prod_{x\in\mathcal{E}} \mathbb{P}(F_{n,0}(x) = z) \\ &= \sum_{z\in\mathcal{E}} \prod_{x\in\mathcal{E}} \mathbb{P}(F_{0,-n}(x) = z) \\ &= \mathbb{P}(T_- \leq n)\end{aligned}$$

  T_+ et T_- ont donc la même fonction de répartition. Ainsi, $T_+ \sim T_-$.

- Soient $x \in \mathcal{E}$ et $n \geq T_-$,

  $$\underline{F_{-n,0}(x)} = F_{-T_-,0}(F_{-n,-T_-}(x)) = \underline{F_{-T_-,0}(x)}$$

Soit $x \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F(X^*) = x) &= \mathbb{P}(F \circ F_{-T,0}(x_0) = x) \\
&= \sum_{y \in \mathcal{E}} \mathbb{P}(F_{-T_-,0}(x_0) = y)\mathbb{P}(F(y) = x) \\
&= \sum_{y \in \mathcal{E}} \mathbb{P}(F_{0,T_-}(x_0) = y)\mathbb{P}(F_{T_-+1}(y) = x) \\
&= \mathbb{P}(F_{0,T_-+1}(x_0) = x) \\
&= \mathbb{P}(F_{-(T_-+1),0}(x_0) = x) \\
&= \mathbb{P}(F_{-T_-,0}(x_0) = x) \\
&= \mathbb{P}(X^* = x)
\end{aligned}$$

La loi de X^* est donc invariante par F. D'après l'unicité de probabilité invariante montrée dans la question T3, on a :

$$\boxed{X^* \sim \pi}$$

2 COUPLAGE MONOTONE

T6

Il s'agit de montrer que F^{bin} est croissante sur $(\mathcal{E}^{bin}, \leq)$.

Soit $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$, avec $x \leq y$. Si $x = y$, le résultat est assuré. Supposons $x < y$. On distingue les cas selon les valeurs de K et U.

- Si $U > p$
  — Si $x < y < K$, $F^{bin}(x) = x < y = F^{bin}(y)$
  — Si $x < K \leq y$, $F^{bin}(x) = x \leq y - 1 = F^{bin}(y)$
  — Si $K \leq x < y$, $F^{bin}(x) = x - 1 < y - 1 = F^{bin}(y)$
- Sinon, $U \leq p$.
  — Si $x < y < K$, $F^{bin}(x) = x + 1 < y + 1 = F^{bin}(y)$
  — Si $x < K \leq y$, $F^{bin}(x) = x + 1 \leq y = F^{bin}(y)$
  — Si $K \leq x < y$, $F^{bin}(x) = x < y = F^{bin}(y)$

Finalement, F^{bin} est croissante sur $(\mathcal{E}^{bin}, \leq)$.

T7

Supposons que F est croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{-n,0}$ est croissante. D'où :

$$\forall x, y \in \mathcal{E}, F_{-n,0}(x) = F_{-n,0}(y) \quad \Longleftrightarrow \quad F_{-n,0}(\hat{0}) = F_{-n,0}(\hat{1})$$

On en déduit :

$$\boxed{T_- = \inf\{n \geq 0 : F_{-n,0}(\hat{0}) = F_{-n,0}(\hat{1})\}}$$

T8

Comme on a montré que $T_+ \sim T_-$ dans la question 5, estimer $\mathbb{E}[T_-]$ revient à trouver une estimation de $\mathbb{E}[T_+]$, avec $T_+ = \inf\{n \geq 0 : F_{0,n}(\hat{0}) = F_{0,n}(\hat{1})\}$.
Ainsi, d'après la question 4, on a :

$$\mathbb{E}[T_+] = \mathbb{E}[T_+^{\hat{0},\hat{1}}] \leq \frac{n_0}{\varepsilon}$$

D'où :

$$\boxed{\mathbb{E}[T_-] \leq \frac{n_0}{\varepsilon}}$$