Retour vers le futur

Qi Sun

22 juin 2015

Table des matières

1 Coalescence et loi invariante

T2.

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(\{F_{0,n_0 k}(X) = F_{0,n_0 k}(Y)\})$$

On en déduit que :

$$\mathbb{P}(A_1) = \sum_{x,y} \mathbb{P}(F_{0,n_0 k}(x) = F_{0,n_0 k}(y))\mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Comme on a supposé que

$$\inf_{x,y} \mathbb{P}(F_{0,n_0 k}(x) = F_{0,n_0 k}(y)) \geq \varepsilon > 0,$$

$$\mathbb{P}(A_1) \geq \sum_{x,y} \varepsilon \mathbb{P}(X = x, Y = y) \geq \varepsilon \sum_{x,y} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \geq \varepsilon$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(A_1) \geq \varepsilon$$

Montrons par récurrence sur l que :

$$\mathbb{P}(S > l) = \mathbb{P}({A_1}^c, {A_2}^c, ..., {A_l}^c) \leq (1 - \varepsilon)^l.$$

Le résultat au rang 1 se déduit du point précédent. Soit $l \geq 1$, supposons le résultat au rang l. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S > l + 1) &= \mathbb{P}({A_1}^c, {A_2}^c, ..., {A_l}^c, {A_{l+1}}^c) \\
&= \sum_{x,y} \mathbb{P}(F_{0,n_0}(x) \neq F_{0,n_0}(y), ..., F_{0,n_0(l+1)}(x) \neq F_{0,n_0(l+1)}(y))\mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_{x,y} \mathbb{P}(F_{n_0 l,n_0(l+1)}(F_{0,n_0 l}(x)) \neq F_{n_0 l,n_0(l+1)}(F_{0,n_0 l}(y))) \\
&\qquad \times \mathbb{P}(F_{0,n_0}(x) \neq F_{0,n_0}(y), ..., F_{0,n_0 l}(x) \neq F_{0,n_0 l}(y))\mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
&\leq (1 - \varepsilon)\mathbb{P}(S > l) \\
&\leq (1 - \varepsilon)^{(l+1)}
\end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence. On en déduit :

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{l \geq 0} \mathbb{P}(S > l) \leq \sum_{l \geq 0} (1 - \varepsilon)^l$$

Donc on trouve :

$$\mathbb{E}[S] \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

Comme $(\mathbb{P}(F_{0,n}(X) = F_{0,n}(Y)))_n \in \mathbb{N}$ est une suite croissante sur n.

Or, on a pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(F_{0,nn_0}(X) = F_{0,nn_0}(Y)) \geq \mathbb{P}(S \leq n)$.
Ainsi,

$$1 - (1-\epsilon)^n \leq \mathbb{P}(F_{0,nn_0}(X) = F_{0,nn_0}(Y)) \leq 1$$

D'après le théorème d'encadrement et la monotonie de la suite, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(F_{0,n}(X) = F_{0,n}(Y)) = 1$$

T3. Supposons que π et ν sont deux probabilités invariantes. Alors pour tout $n \geq 0$, $F_{0,n}(X)$ suit la même loi que X, ainsi que Y. Soit φ une fonction continue bornée,

$$\mathbb{E}(\varphi(X - Y)) = \mathbb{E}(\varphi(F_{0,n}(X) - F_{0,n}(Y)))$$

$\varphi(F_{0,n}(X) - F_{0,n}(Y))$ converge en probabilité(d'après la question $T2$), donc en loi vers 0. D'où :

$$\mathbb{E}(\varphi(X - Y)) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(\varphi(F_{0,n}(X) - F_{0,n}(Y))) = 0$$

Donc X et Y suivent la même loi, i.e. $\pi = \nu$. Ainsi il existe au plus une seulement probabilité invariante.

T4. Soient $x, y \in \mathcal{E}$, on peut montrer par récurrence (de même que dans la question $T2$.) que :

$$\forall l \geq 0, \mathbb{P}({T_+}^{x,y} > n_0 l) = \mathbb{P}(F_{0,n_0 l}(x) \neq F_{0,n_0 l}(y)) \leq (1-\epsilon)^l$$

De plus, $(P({T_+}^{x,y} > n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante, on a :

$$\forall l, \forall n, n_0 l \leq n \leq n_0(l+1) \Rightarrow P({T_+}^{x,y} > n) \leq (1-\epsilon)^l$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_+] &= max_{x,y \in \mathcal{E}} \mathbb{E}[T_+^{x,y}] \\
&\leq \binom{\#\mathcal{E}}{2} n_0 \sum_{l \geq 0} (1-\epsilon)^l \\
&\leq \binom{\#\mathcal{E}}{2} \frac{n_0}{\epsilon}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{E}[T_+]$ est borné par $\binom{\#\mathcal{E}}{2} \frac{n_0}{\epsilon}$.