RETOUR VERS LE FUTUR

Sun Qi et Victor Quach

l'X
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

T1

- Soit $k \in \mathcal{E}^{bin} = \{0, \ldots, M\}$.
  Compte-tenu, de la définition de F^{bin}, on a pour $k < M$:
  $$\boxed{P^{bin}(k, k+1) = p\frac{M-k}{M}}$$
  Notons que le membre de droite est nul pour $k = M$.

  De même, pour $k > 0$:
  $$\boxed{P^{bin}(k, k-1) = (1-p)\frac{k}{M}}$$
  Le membre de droite est nul pour $k = 0$.

  Il vient donc, pour $k \in \mathcal{E}^{bin}$,
  $$\boxed{P^{bin}(k, k) = 1 - p + \frac{2kp}{M} + \frac{k}{M}}$$

  Enfin, pour $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$, si $|x - y| > 1$,
  $$\boxed{P^{bin}(x, y) = 0}$$

- Soit $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$.
  En utilisant que $\pi^{bin}(x) = \binom{M}{x} p^x (1-p)^{M-x}$, il vient dans les différents cas :
  — Si $(x, y) = (k, k+1)$
  $$\begin{aligned}
  \pi^{bin}(k)P(k, k+1) &= \binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k} p \frac{M-k}{M} \\
  &= \frac{M-k}{M} \binom{M}{M-k} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1}(1-p) \\
  &= \binom{M-1}{M-k-1} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1}(1-p) \\
  &= \binom{M-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1}(1-p) \\
  &= \frac{k+1}{M} \binom{M}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1}(1-p) \\
  &= \pi^{bin}(k+1)P(k+1, k)
  \end{aligned}$$
  — Si $(x, y) = (k, k)$, L'équation est trivialement vérifiée
  — Sinon, les deux memmbres sont nuls.
  Finalement, pour tout $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$,
  $$\boxed{\pi^{bin}(x)P(x, y) = \pi^{bin}(y)P(y, x)}$$

- Soit X une variable aléatoire de loi π^{bin}. Alors, pour $x \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F^{bin}(X) = x) &= \sum_{y\in\mathcal{E}} \pi^{bin}(y)P^{bin}(y,x) = \sum_{y\in\mathcal{E}} \pi^{bin}(x)P^{bin}(x,y)\\ &= \pi^{bin}(x)P\sum_{y\in\mathcal{E}}{}^{bin}(x,y) = \pi^{bin}(x)\\ &= \mathbb{P}(X = x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{De cela, on déduit que } \pi^{bin} \text{ est invariante pour } F^{bin}.}$$

T2

Il s'agit de calculer :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1) &= \mathbb{P}(\{F_{0,n_0k}(X) = F_{0,n_0k}(Y)\})\\ &= \sum_{x,y} \mathbb{P}(F_{0,n_0k}(x) = F_{0,n_0k}(y))\mathbb{P}(X = x, Y = y)\end{aligned}$$

Or, on a supposé que :

$$\inf_{x,y} \mathbb{P}(F_{0,n_0k}(x) = F_{0,n_0k}(y)) \geq \varepsilon > 0$$

D'où :

$$\mathbb{P}(A_1) \geq \sum_{x,y} \varepsilon\mathbb{P}(X = x, Y = y) \geq \varepsilon\sum_{x,y}\mathbb{P}(X = x, Y = y) \geq \varepsilon$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1) \geq \varepsilon}$$

Montrons par récurrence sur l que :

$$\boxed{\mathbb{P}(S > l) = \mathbb{P}({A_1}^c, {A_2}^c, ..., {A_l}^c) \leq (1-\varepsilon)^l.}$$

Le résultat au rang 1 se déduit du point précédent. Soit $l \geq 1$, supposons le résultat au rang l. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S > l+1) &= \mathbb{P}({A_1}^c, {A_2}^c, ..., {A_l}^c, {A_{l+1}}^c)\\ &= \sum_{x,y} \mathbb{P}(F_{0,n_0}(x) \neq F_{0,n_0}(y), ..., F_{0,n_0(l+1)}(x) \neq F_{0,n_0(l+1)}(y))\mathbb{P}(X = x, Y = y)\\ &= \sum_{x,y} \mathbb{P}(F_{n_0l,n_0(l+1)}(F_{0,n_0l}(x)) \neq F_{n_0l,n_0(l+1)}(F_{0,n_0l}(y)))\\ &\qquad \times \mathbb{P}(F_{0,n_0}(x) \neq F_{0,n_0}(y), ..., F_{0,n_0l}(x) \neq F_{0,n_0l}(y))\mathbb{P}(X = x, Y = y)\\ &\leq (1-\varepsilon)\mathbb{P}(S > l)\\ &\leq (1-\varepsilon)^{(l+1)}\end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence. On en déduit :

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{l\geq 0}\mathbb{P}(S > l) \leq \sum_{l\geq 0}(1-\varepsilon)^l$$

Finalement :

$$\boxed{\mathbb{E}[S] \leq \frac{1}{\varepsilon}}$$

D'une part, $(\mathbb{P}(F_{0,n}(X) = F_{0,n}(Y)))_n \in \mathbb{N}$ est une suite croissante sur n.
D'autre part, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(F_{0,nn_0}(X) = F_{0,nn_0}(Y)) \geq \mathbb{P}(S \leq n)$.
Ainsi,

$$1 - (1-\varepsilon)^n \leq \mathbb{P}(F_{0,nn_0}(X) = F_{0,nn_0}(Y)) \leq 1$$

D'après le théorème d'encadrement et la monotonie de la suite, il vient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(F_{0,n}(X) = F_{0,n}(Y)) = 1}$$

T3

Supposons que π et ν sont deux probabilités invariantes. Alors pour tout $n \geq 0$, $F_{0,n}(X)$ suit la même loi que X, ainsi que Y. Soit φ une fonction continue bornée,

$$\mathbb{E}(\varphi(X - Y)) = \mathbb{E}(\varphi(F_{0,n}(X) - F_{0,n}(Y)))$$

$\varphi(F_{0,n}(X) - F_{0,n}(Y))$ converge en probabilité(d'après la question $T2$), donc en loi vers 0. D'où :

$$\mathbb{E}(\varphi(X - Y)) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(\varphi(F_{0,n}(X) - F_{0,n}(Y))) = 0$$

Donc X et Y suivent la même loi, i.e. $\pi = \nu$. Ainsi il existe au plus une probabilité invariante.