# RETOUR VERS LE FUTUR

Sun Qi et Victor Quach

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

# T1

- Soit $k \in \mathcal{E}^{bin} = \{0, \dots, M\}$.
  Compte-tenu, de la définition de $F^{bin}$, on a <u>pour $k < M$</u> :
  $$\boxed{P^{bin}(k, k+1) = p\frac{M-k}{M}}$$
  Notons que le membre de droite est nul pour $k = M$.

  De même, <u>pour $k > 0$</u> :
  $$\boxed{P^{bin}(k, k-1) = (1-p)\frac{k}{M}}$$
  Le membre de droite est nul pour $k = 0$.

  Il vient donc, <u>pour $k \in \mathcal{E}^{bin}$</u>,
  $$\boxed{P^{bin}(k, k) = 1 - p + \frac{2kp}{M} + \frac{k}{M}}$$

  Enfin, <u>pour $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$, si $|x - y| > 1$</u>,
  $$\boxed{P^{bin}(x, y) = 0}$$

- Soit $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$.
  En utilisant que $\pi^{bin}(x) = \binom{M}{x} p^x (1-p)^{M-x}$, il vient dans les différents cas :
  — Si $(x, y) = (k, k+1)$
  $$\begin{aligned} P^{bin}(k)P(k, k+1) &= \binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k} p \frac{M-k}{M} \\ &= \frac{M-k}{M} \binom{M}{M-k} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1} (1-p) \\ &= \binom{M-1}{M-k-1} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1} (1-p) \\ &= \binom{M-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1} (1-p) \\ &= \frac{k+1}{M} \binom{M}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1} (1-p) \\ &= P^{bin}(k+1) P(k+1, k) \end{aligned} \tag{1}$$
  — Si $(x, y) = (k, k)$, L'équation est trivialement vérifiée
  — Sinon, les deux memmbres sont nuls.
  Finalement, pour tout $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$,
  $$\boxed{P^{bin}(k)P(k, k+1) = P^{bin}(k+1)P(k+1, k)}$$