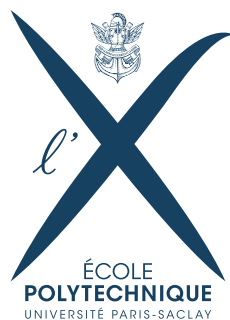


RETOUR VERS LE FUTUR



Qi SUN et Victor QUACH



T1

- Soit $k \in \mathcal{E}^{bin} = \{0, \dots, M\}$.

Compte-tenu, de la définition de F^{bin} , on a pour $k < M$:

$$P^{bin}(k, k+1) = p \frac{M-k}{M}$$

Notons que le membre de droite est nul pour $k = M$.

De même, pour $k > 0$:

$$P^{bin}(k, k-1) = (1-p) \frac{k}{M}$$

Le membre de droite est nul pour $k = 0$.

Il vient donc, pour $k \in \mathcal{E}^{bin}$,

$$P^{bin}(k, k) = 1 - p + \frac{2kp}{M} + \frac{k}{M}$$

Enfin, pour $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$, si $|x - y| > 1$,

$$P^{bin}(x, y) = 0$$

- Soit $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$.

En utilisant que $\pi^{bin}(x) = \binom{M}{x} p^x (1-p)^{M-x}$, il vient dans les différents cas :

— Si $(x, y) = (k, k+1)$

$$\begin{aligned} \pi^{bin}(k) P(k, k+1) &= \binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k} p \frac{M-k}{M} \\ &= \frac{M-k}{M} \binom{M}{M-k} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1} (1-p) \\ &= \binom{M-1}{M-k-1} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1} (1-p) \\ &= \binom{M-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1} (1-p) \\ &= \frac{k+1}{M} \binom{M}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{M-k-1} (1-p) \\ &= \pi^{bin}(k+1) P(k+1, k) \end{aligned}$$

— Si $(x, y) = (k, k)$, L'équation est trivialement vérifiée

— Sinon, les deux membres sont nuls.

Finalement, pour tout $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$,

$$\pi^{bin}(x) P(x, y) = \pi^{bin}(y) P(y, x)$$

- Soit X une variable aléatoire de loi π^{bin} . Alors, pour $x \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F^{bin}(X) = x) &= \sum_{y \in \mathcal{E}} \pi^{bin}(y) P^{bin}(y, x) = \sum_{y \in \mathcal{E}} \pi^{bin}(x) P^{bin}(x, y) \\ &= \pi^{bin}(x) P \sum_{y \in \mathcal{E}} \pi^{bin}(x, y) = \pi^{bin}(x) \\ &= \mathbb{P}(X = x)\end{aligned}$$

De cela, on déduit que π^{bin} est invariante pour F^{bin} .

S1

En faisant varier les paramètres de la simulation (p, M, n) , on obtient toujours le résultat représenté à la FIGURE 1 : $X_n = F_{n,0}^{bin}$ suit la loi binomiale $\text{Bin}(M, p)$.

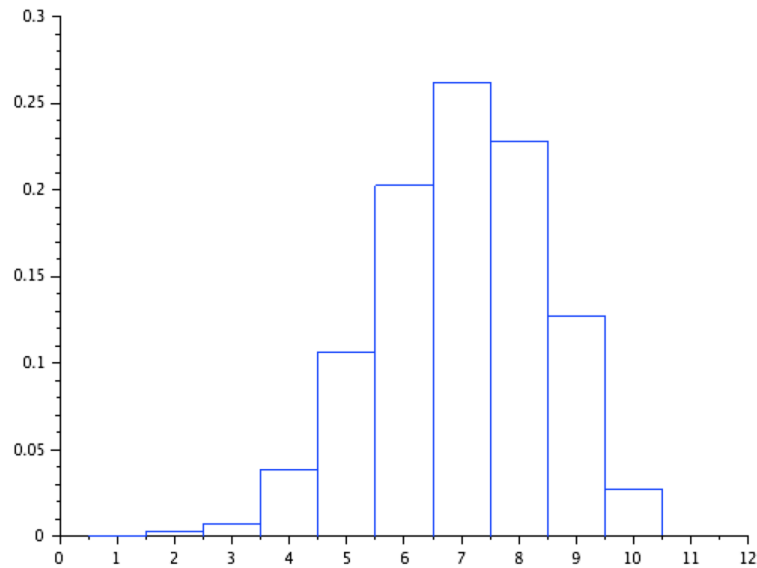


FIGURE 1 – Histogramme de X_{15} pour $p = 0.7$, $M = 10$, 5000 lancers

1

COALESCENCE ET LOI INVARIANTE

S2

On représente n sur l'axe des abscisses et $F_n^{bin}(x)$ sur l'axe des ordonnées pour trois trajectoires rouge, bleue et rose. Sur la FIGURE 2, rose et bleu coalescent à la 28^e itération, puis avec rouge à la

36^e.

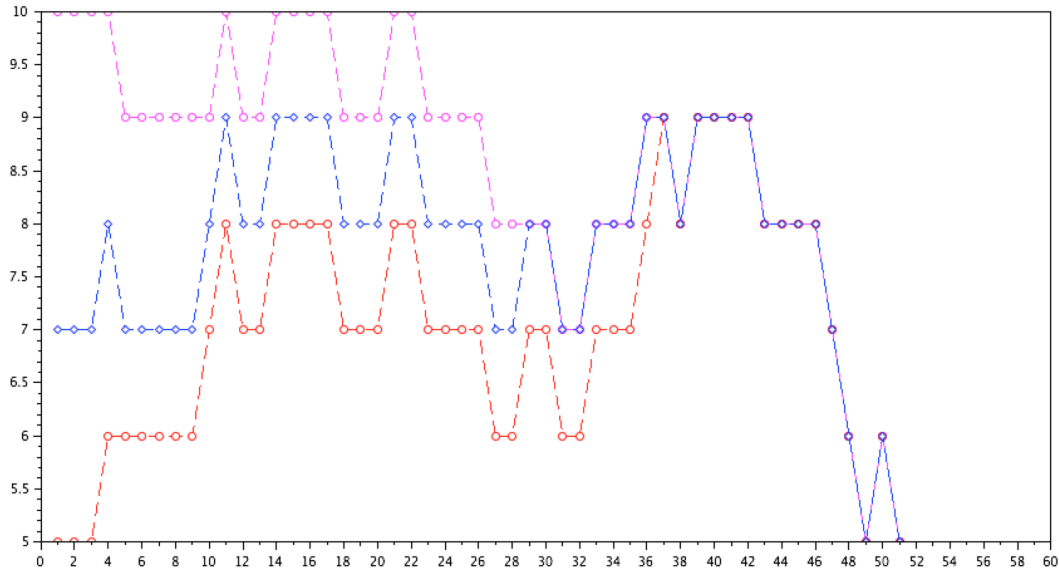


FIGURE 2 – Coalescence de trois trajectoires du système dynamique F^{bin}

T2

- Il s'agit de calculer :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1) &= \mathbb{P}(\{F_{0,n_0k}(X) = F_{0,n_0k}(Y)\}) \\ &= \sum_{x,y} \mathbb{P}(F_{0,n_0k}(x) = F_{0,n_0k}(y)) \mathbb{P}(X = x, Y = y)\end{aligned}$$

Or, on a supposé que :

$$\inf_{x,y} \mathbb{P}(F_{0,n_0k}(x) = F_{0,n_0k}(y)) \geq \varepsilon > 0$$

D'où :

$$\mathbb{P}(A_1) \geq \sum_{x,y} \varepsilon \mathbb{P}(X = x, Y = y) \geq \varepsilon \sum_{x,y} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \geq \varepsilon$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(A_1) \geq \varepsilon$$

- Montrons par récurrence sur l que :

$$\mathbb{P}(S > l) = \mathbb{P}(A_1^c, A_2^c, \dots, A_l^c) \leq (1 - \varepsilon)^l.$$

Le résultat au rang 1 se déduit du point précédent. Soit $l \geq 1$, supposons le résultat au rang l .

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S > l + 1) &= \mathbb{P}(A_1^c, A_2^c, \dots, A_l^c, A_{l+1}^c) \\
&= \sum_{x,y} \mathbb{P}(F_{0,n_0}(x) \neq F_{0,n_0}(y), \dots, F_{0,n_0(l+1)}(x) \neq F_{0,n_0(l+1)}(y)) \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_{x,y} \mathbb{P}(F_{n_0 l, n_0(l+1)}(F_{0,n_0 l}(x)) \neq F_{n_0 l, n_0(l+1)}(F_{0,n_0 l}(y))) \\
&\quad \times \mathbb{P}(F_{0,n_0}(x) \neq F_{0,n_0}(y), \dots, F_{0,n_0 l}(x) \neq F_{0,n_0 l}(y)) \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
&\leq (1 - \varepsilon) \mathbb{P}(S > l) \\
&\leq (1 - \varepsilon)^{(l+1)}
\end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence. On en déduit :

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{l \geq 0} \mathbb{P}(S > l) \leq \sum_{l \geq 0} (1 - \varepsilon)^l$$

Finalement :

$$\mathbb{E}[S] \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

- D'une part, $(\mathbb{P}(F_{0,n}(X) = F_{0,n}(Y)))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante sur n .
D'autre part, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(F_{0,nn_0}(X) = F_{0,nn_0}(Y)) \geq \mathbb{P}(S \leq n)$.
Ainsi,

$$1 - (1 - \varepsilon)^n \leq \mathbb{P}(F_{0,nn_0}(X) = F_{0,nn_0}(Y)) \leq 1$$

D'après le théorème d'encadrement et la monotonie de la suite, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(F_{0,n}(X) = F_{0,n}(Y)) = 1$$

T3

Supposons que π et ν sont deux probabilités invariantes. Alors pour tout $n \geq 0$, $F_{0,n}(X)$ suit la même loi que X , ainsi que Y . Soit φ une fonction continue bornée,

$$\mathbb{E}(\varphi(X - Y)) = \mathbb{E}(\varphi(F_{0,n}(X) - F_{0,n}(Y)))$$

$\varphi(F_{0,n}(X) - F_{0,n}(Y))$ converge en probabilité (d'après la question T2), donc en loi vers 0. D'où :

$$\mathbb{E}(\varphi(X - Y)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\varphi(F_{0,n}(X) - F_{0,n}(Y))) = 0$$

Donc X et Y suivent la même loi, i.e. $\pi = \nu$. Ainsi, il existe au plus une probabilité invariante.

T4

Soient $x, y \in \mathcal{E}$. On peut montrer par récurrence (de même que dans la question **T2.**) que :

$$\forall l \geq 0, \quad \mathbb{P}(T_+^{x,y} > n_0 l) = \mathbb{P}(F_{0,n_0 l}(x) \neq F_{0,n_0 l}(y)) \leq (1 - \varepsilon)^l$$

Par ailleurs, $(P(T_+^{x,y} > n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante, d'où :

$$\forall l, \forall n, \quad n_0 l \leq n \leq n_0(l+1) \Rightarrow \mathbb{P}(T_+^{x,y} > n) \leq (1-\varepsilon)^l$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}[T_+^{x,y}] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T_+^{x,y} > n) \leq \sum_{n \geq 0} (1-\varepsilon)^{\lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} = \frac{n_0}{\varepsilon}$$

Les variables aléatoires $T_+^{x,y}$ étant positives, on a :

$$T_+ = \max_{x,y} T_+^{x,y} \leq \sum_{x,y} T_+^{x,y}$$

D'où l'on déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_+] &\leq \mathbb{E}[\sum_{x,y} T_+^{x,y}] \\ &\leq \sum_{x,y} \mathbb{E}[T_+^{x,y}] \\ &\leq \binom{\#\mathcal{E}}{2} \frac{n_0}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{E}[T_+]$ est fini et borné par $\binom{\#\mathcal{E}}{2} \frac{n_0}{\varepsilon}$.

T5

- Montrons par récurrence que $F_{0,n}(x) \sim F_{-n,0}(x)$ pour tout $x \in \mathcal{E}$ et $n \in \mathbb{N}$:
Soit $x \in \mathcal{E}$, $n = 0$, on a directement :

$$F_{0,0}(x) = F_{-0,0}(x)$$

Soit $n \geq 0$, supposons le résultat au rang n , alors soient $x, y \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_{-(n+1),0}(x) = y) &= \mathbb{P}(F_0 \circ F_{-(n+1),-1}(x) = y) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{E}} \mathbb{P}(F_0(z) = y) \mathbb{P}(F_{-(n+1),-1}(x) = z) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{E}} \mathbb{P}(F_{n+1}(z) = y) \mathbb{P}(F_{0,n}(x) = z) \quad (\text{d'après H.R.}) \\ &= \mathbb{P}(F_{n+1} \circ F_{0,n}(x) = y) \\ &= \mathbb{P}(F_{0,n+1}(x) = y) \end{aligned}$$

Ainsi, $F_{-(n+1),0}(x) \sim F_{0,n+1}(x)$. D'où le résultat par récurrence sur n .

- Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_+ \leq n) &= \sum_{z \in \mathcal{E}} \prod_{x \in \mathcal{E}} \mathbb{P}(F_{n,0}(x) = z) \\ &= \sum_{z \in \mathcal{E}} \prod_{x \in \mathcal{E}} \mathbb{P}(F_{0,-n}(x) = z) \\ &= \mathbb{P}(T_- \leq n)\end{aligned}$$

T_+ et T_- ont donc la même fonction de répartition. Ainsi, $T_+ \sim T_-$.

- Soient $x \in \mathcal{E}$ et $n \geq T_-$,

$$\underline{F_{-n,0}(x)} = F_{-T_-,0}(F_{-n,-T_-}(x)) = \underline{F_{-T_-,0}(x)}$$

Soit $x \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F(X^*) = x) &= \mathbb{P}(F \circ F_{-T_-,0}(x_0) = x) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{E}} \mathbb{P}(F_{-T_-,0}(x_0) = y) \mathbb{P}(F(y) = x) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{E}} \mathbb{P}(F_{0,T_-}(x_0) = y) \mathbb{P}(F_{T_-+1}(y) = x) \\ &= \mathbb{P}(F_{0,T_-+1}(x_0) = x) \\ &= \mathbb{P}(F_{-(T_-+1),0}(x_0) = x) \\ &= \mathbb{P}(F_{-T_-,0}(x_0) = x) \\ &= \mathbb{P}(X^* = x)\end{aligned}$$

La loi de X^* est donc invariante par F . D'après l'unicité de probabilité invariante montrée dans la question T3, on a :

$X^* \sim \pi$

S3

Contrairement à ce que l'on espérait la simulation aboutit à un histogramme qui ressemble méchamment à celui d'une loi binomiale $\text{Bin}(M, p)$.

2 COUPLAGE MONOTONE

T6

Il s'agit de montrer que F^{bin} est croissante sur $(\mathcal{E}^{\text{bin}}, \leq)$.

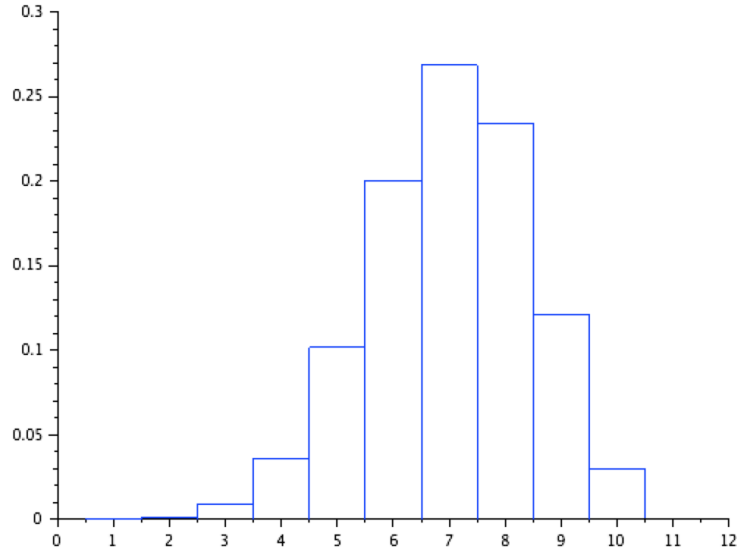


FIGURE 3 – Histogramme de X^{++} pour $p = 0.7$, $M = 10$, 5000 lancers

Soit $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$, avec $x \leq y$. Si $x = y$, le résultat est assuré. Supposons $x < y$. On distingue les cas selon les valeurs de K et U .

- Si $U > p$
 - Si $x < y < K$, $F^{bin}(x) = x < y = F^{bin}(y)$
 - Si $x < K \leq y$, $F^{bin}(x) = x \leq y - 1 = F^{bin}(y)$
 - Si $K \leq x < y$, $F^{bin}(x) = x - 1 < y - 1 = F^{bin}(y)$
- Sinon, $U \leq p$.
 - Si $x < y < K$, $F^{bin}(x) = x + 1 < y + 1 = F^{bin}(y)$
 - Si $x < K \leq y$, $F^{bin}(x) = x + 1 \leq y = F^{bin}(y)$
 - Si $K \leq x < y$, $F^{bin}(x) = x < y = F^{bin}(y)$

Finalement, F^{bin} est croissante sur $(\mathcal{E}^{bin}, \leq)$.

T7

Supposons que F est croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{-n,0}$ est croissante. D'où :

$$\forall x, y \in \mathcal{E}, F_{-n,0}(x) = F_{-n,0}(y) \iff F_{-n,0}(\hat{0}) = F_{-n,0}(\hat{1})$$

On en déduit :

$$T_- = \inf\{n \geq 0 : F_{-n,0}(\hat{0}) = F_{-n,0}(\hat{1})\}$$

T8

Comme on a montré que $T_+ \sim T_-$ dans la question 5, estimer $\mathbb{E}[T_-]$ revient à trouver une estimation de $\mathbb{E}[T_+]$, avec $T_+ = \inf\{n \geq 0 : F_{0,n}(\hat{0}) = F_{0,n}(\hat{1})\}$.

Ainsi, d'après la question 4, on a :

$$\mathbb{E}[T_+] = \mathbb{E}[T_+^{\hat{0}, \hat{1}}] \leq \frac{n_0}{\varepsilon}$$

D'où :

$$\mathbb{E}[T_-] \leq \frac{n_0}{\varepsilon}$$

T9

L'algorithme procède au calcul d'une instance de X^* , dont la loi est π .

Il s'agit d'une part d'évaluer T_- , puis de retourner $F_{-T_-,0}(x_0)$, pour un x_0 quelconque. Ici, on se contente de minorer T_- par kN_0 et on choisit $x_0 = \hat{0}$, ce qui est justifié car $kN_0 \geq T_- \Rightarrow F_{-kN_0,0}(x_0) = F_{-T_-,0}(x_0)$ et cette valeur est indépendante du x_0 choisi.

Il est important de réutiliser les instances de F générées dans les itérations précédentes, sinon on se retrouve à sélectionner une suite d'instances de F avec un T_- moins élevé qui, d'autre part, n'assure plus que le résultat renvoyé suive la loi π .

On choisit de doubler N à chaque itération plutôt que de l'incrémenter de 1 simplement pour diminuer le temps de calcul : dans l'algorithme proposé, on choisit de ne calculer qu'une trajectoire pour $N - 1$ trajectoires que l'on ne calcule pas. Cela ne permet pas de trouver explicitement T mais suffit pour renvoyer une instance de X^* .

S4

En faisant varier les paramètres M et p , on constate que X^* suit la loi binomiale $\text{Bin}(M, p)$, comme on le voit sur la FIGURE 4.

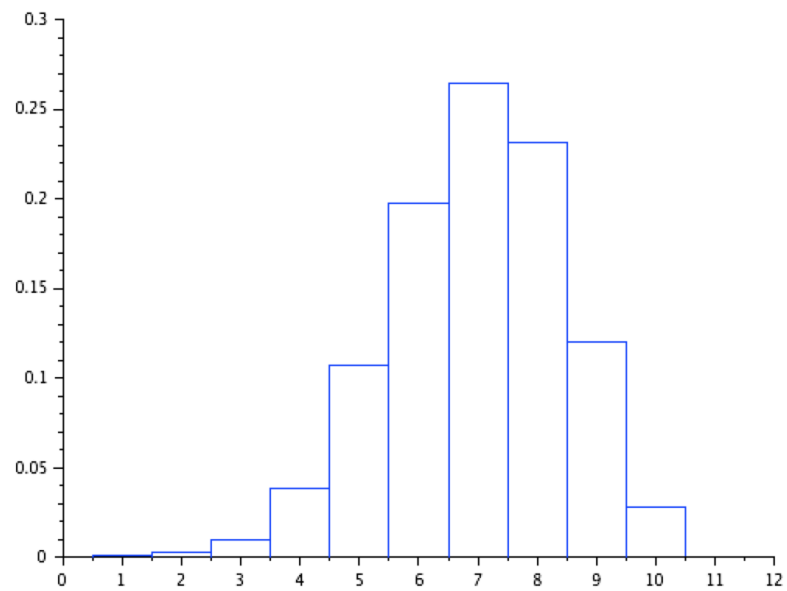


FIGURE 4 – Histogramme de X^* pour $p = 0.7$, $M = 10$, 5000 lancers