# RETOUR VERS LE FUTUR

Sun Qi et Victor Quach

l'X
ÉCOLE
POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

# T1

- Soit $k \in \mathcal{E}^{bin} = \{0, \dots, M\}$.
  Compte-tenu, de la définition de $F^{bin}$, on a pour $k < M$ :
  $$\boxed{P^{bin}(k, k+1) = p\frac{M-k}{M}}$$
  Notons que le membre de droite est nul pour $k = M$.

  De même, pour $k > 0$ :
  $$\boxed{P^{bin}(k, k-1) = (1-p)\frac{k}{M}}$$
  Le membre de droite est nul pour $k = 0$.

  Il vient donc, pour $k \in \mathcal{E}^{bin}$,
  $$\boxed{P^{bin}(k, k) = 1 - p + \frac{2kp}{M} + \frac{k}{M}}$$

  Enfin, pour $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$, si $|x - y| > 1$,
  $$\boxed{P^{bin}(x, y) = 0}$$

- Soit $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$.
  En utilisant que $\pi^{bin}(x) = \binom{M}{x}p^x(1-p)^{M-x}$, il vient dans les différents cas :
  — Si $(x, y) = (k, k+1)$
  $$\begin{aligned}
  \pi^{bin}(k)P(k, k+1) &= \binom{M}{k}p^k(1-p)^{M-k}p\frac{M-k}{M} \\
  &= \frac{M-k}{M}\binom{M}{M-k}p^{k+1}(1-p)^{M-k-1}(1-p) \\
  &= \binom{M-1}{M-k-1}p^{k+1}(1-p)^{M-k-1}(1-p) \\
  &= \binom{M-1}{k}p^{k+1}(1-p)^{M-k-1}(1-p) \\
  &= \frac{k+1}{M}\binom{M}{k+1}p^{k+1}(1-p)^{M-k-1}(1-p) \\
  &= \pi^{bin}(k+1)P(k+1, k)
  \end{aligned}$$
  — Si $(x, y) = (k, k)$, L'équation est trivialement vérifiée
  — Sinon, les deux memmbres sont nuls.
  Finalement, pour tout $x, y \in \mathcal{E}^{bin}$,
  $$\boxed{\pi^{bin}(x)P(x, y) = \pi^{bin}(y)P(y, x)}$$

- Soit $X$ une variable aléatoire de loi $\pi^{bin}$. Alors, pour $x \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F^{bin}(X) = x) &= \sum_{y\in\mathcal{E}} \pi^{bin}(y)P^{bin}(y,x) = \sum_{y\in\mathcal{E}} \pi^{bin}(x)P^{bin}(x,y) \\ &= \pi^{bin}(x)P\sum_{y\in\mathcal{E}}{}^{bin}(x,y) = \pi^{bin}(x) \\ &= \mathbb{P}(X = x)\end{aligned}$$

  De cela, on déduit que $\pi^{bin}$ est invariante pour $F^{bin}$. En effe