Concours SMF Junior

Équipe TiSaNe

Problème 6

Auteurs :
Chloé Papin
Etienne Perrot
Victor Quach

May 11, 2017

1 Problème 6

1.1 Étude préliminaire (cas général)

1.1.1 Comportement asymptotique de u

On se place dans le paragraphe dans le cas général où les X_k sont indépendantes, de loi μ avec $\mathbb{E}(X_1) > 0$, de telle sorte que sous $\mathbb{P}^k$, S_n soit une marche aléatoire partant de k et de loi des pas μ.

On note $Y^{(k)} \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ la variable aléatoire définie par

$$Y^{(k)} = \inf\{S_n/n \in \mathbb{N}\}$$

.

$S_n = \sum X_i$ avec les X_i indépendantes, de même loi μ.
Donc, d'après la loi forte des grands nombres, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(X_1) > 1$.
Donc S_n converge presque sûrement vers $+\infty$, ce qui montre que Y est fini presque sûrement.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note:

$$p_n = \mathbb{P}^0(Y = n)$$

Comme de plus $\mathbb{P}^0(Y = -\infty) = 0$, on a donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k = 1$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
u_k &= \mathbb{P}^k(\forall n \geq 0, S_n \geq 0) \\
&= \mathbb{P}^k(Y^{(k)} \geq 0) \\
&= \mathbb{P}^k(Y^{(0)} \geq -k) && \text{par translation verticale} \\
&= \sum_{i \geq -k} p_i
\end{aligned}$$

ce qui tend vers 1 quand k tend vers $+\infty$.
On a bien

$$\lim_{k \to +\infty} u_k = 1$$

1.1.2 Relation de récurrence de u

On suppose maintenant que μ est défini par :

$$\mu = \sum_{k \in [\![-p,q]\!]} p_k \delta_k$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela signifie : $\mathbb{P}(X_n = k) = p_k$.

Pour tout $n < 0$, on a : $u_n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
u_n &= \mathbb{P}^n(\forall k \geq 0, S_k \geq 0) \\
&= \mathbb{P}^n(\forall k \geq 1, S_k \geq 0 \text{ et } S_0 \geq 0) \\
&= \mathbb{P}^n(\forall k \geq 1, S_k \geq 0) \\
&= \sum_{k \in [\![-p,q]\!]} \mathbb{P}^n(S_1 = n+k)\mathbb{P}^n(\forall n \geq 1, S_n \geq 0 \mid S_1 = n+k) \\
&= \sum_{k \in [\![-p,q]\!]} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}^n(\forall n \geq 1, S_n \geq 0 \mid S_1 = n+k) \\
&= \sum_{k \in [\![-p,q]\!]} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}^{n+k}(\forall n \geq 0, S_n \geq 0) && \text{par propriété de Markov} \\
&= \sum_{k \in [\![-p,q]\!]} p_k \mathbb{P}^{n+k}(\forall n \geq 0, S_n \geq 0) \\
&= \sum_{k \in [\![-p,q]\!]} p_k u_{n+k}
\end{aligned}$$

Il s'agira ensuite de déterminer les valeurs de u en s'appuyant de cette relation de récurrence, ainsi que sur les "conditions initiales" (pour tout $n < 0, u_n = 0$ et limite en l'infini).

1.2 Étude du cas particulier

On s'intéresse maintenant au cas où μ est défini par :

$$\mu = \frac{3}{4}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_{(-2)}$$

.

Pour $n \in \mathbb{N}$, cela signifie : $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{3}{4}$ et $\mathbb{P}(X_n = -2) = \frac{1}{4}$.

Par conséquent,

$$\forall k \geq 0,\ u_k = \frac{3}{4}u_{k+1} + \frac{1}{4}u_{k-2}$$

Ou encore,

$$\forall k \geq -2,\ u_{k+3} = \frac{4}{3}u_{k+2} - \frac{1}{3}u_k$$

dont le polynôme caractéristique est

$$\begin{aligned}
P &= X^3 - \frac{4}{3}X^2 + \frac{1}{3} \\
&= (X-1)(X^2 - \frac{X}{3} - \frac{1}{3})
\end{aligned}$$

.

P admet pour racines : 1, $r_1 = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6}$ et $r_2 = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}$, dont on observe que $|r_1| < 1, |r_2| < 1$.

Ainsi, il existe $A, B, C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \geq -2,\ u_k = A \cdot 1^{k+2} + B\left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6}\right)^{k+2} + C\left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}\right)^{k+2}$$

De l'étude préliminaire $\lim u_k = 1$, on déduit que $A = 1$.
Il reste alors exploiter les deux conditions $u_{-1} = u_{-2} = 0$.
Elles permettent d'écrire

$$\begin{cases} B + C & = -1 \\ \frac{\sqrt{13}}{6}(B - C) & = 1 + \frac{1}{6}(B + C) = \frac{5}{6} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} B & = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{\sqrt{13}} - 1\right) \\ C & = -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{\sqrt{13}} + 1\right) \end{cases}$$

Ce qui permet d'écrire

$$\forall k \geq -2,\ u_k = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{\sqrt{13}} - 1\right)\left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6}\right)^{k+2} - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{\sqrt{13}} + 1\right)\left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}\right)^{k+2}$$

1.3 Éléments de réflexion sur une généralisation de la méthode

En s'inspirant du raisonnement au-dessus et en utilisant les résultats préliminaires, nous proposons une piste pour la généralisation.

La méthode consisterait alors à :

- Identifier les racines du polynôme P qui définit la récurrence
- Éliminer celles dont le module est supérieur ou égal à 1 (en effet, la suite u est bornée et converge vers 1). On note alors $x_1, ..., x_r$ les racines restantes. Comme u tend vers 1, on sait alors que u s'écrit sous la forme $u_n = 1 + \sum_{1 \leq k \leq r} c_k x_k^n$ (dans le cas de racines multiples, il faut selon la théorie des suites récurrentes prendre aussi les $n x_k^{n-1}$, etc...)
- Utiliser les conditions initiales pour déterminer les coefficients associés à ces racines (sachant que la constante affectée à 1 est 1 d'après la limite de u) en inversant le système d'équations linéaires si cela est possible.

On peut remarquer que l'on dispose seulement de p conditions initiales ($u_{-k} = 0$ pour $k \in [\![1, p]\!]$).

Pour que la méthode décrite aboutisse dans tous les cas, il faudrait s'assurer que le polynôme P admet au plus p racines (comptées avec ordre de multiplicité) de module strictement plus petit que 1 (en effet, les p équations de conditions initiales sont bien linéairement indépendantes).

Il faudrait donc vérifier si la propriété suivante est valable :

Hypothèse 1.1. *Soient deux entiers $r < t$ et soient t réels positifs $a_1, ..., a_t$ avec $a_t \neq 0$. On définit le polynôme $P(X) = \sum_k a_k(X^k - X^r)$ et on suppose $P'(1) > 0$. Alors P admet au plus $r - 1$ racines de module strictement inférieur à 1.*

(La condition $P'(1) > 0$ traduit la condition $\mathbb{E}(X_1) > 0$)

Preuve : Reprenons le polynôme de notre relation de récurrence dans le cas où $q = 1$. En bousculant une seconde fois les notations, on écrit

$$u_n = p_1 u_{n+1} + p_0 u_0 + \sum_{k=1}^{q} p_{-k} u_{n-k}$$

dont le polynôme caractéristique est

$$P = p_1 X^{q+1} + (p_0 - 1) X^q + \sum_{k=1}^{q} p_{-k} X^{q-k}$$

Or, 1 est racine de ce polynôme, donc en factorisant par $X - 1$,

$$\begin{aligned} P &= (X-1)\left(p_1 X^q + (p_1 + p_0 - 1) X^{q-1} + \cdots + +(p_1 + p_0 + \cdots + p_{-q+1} - 1)\right) \\ &= (X-1)\left(p_1 X^q + \left(\sum_{i=1}^{q} p_{-i}\right) X^{q-1} + \cdots + \left(\sum_{i=q-1}^{q} p_{-i}\right) X + \left(\sum_{i=q}^{q} p_{-i}\right)\right) \end{aligned}$$

Or, l'hypothèse $\mathbb{E}(X_1) > 0$ s'écrit :

$$p_1 > \left(\sum_{i=1}^{q} i p_{-i}\right)$$

D'où pour $k \in [\![1, q]\!]$

$$\left(\sum_{i=k}^{q} p_{-i}\right) < p_1$$

Les relation coefficients-racines montrent alors que les racines du facteur de droite sont de module inférieur à 1

$\square$