

# CONCOURS SMF JUNIOR

ÉQUIPE TISANE

---

## Problème 4

---

*Auteurs :*

Chloé PAPIN

Etienne PERROT

Victor QUACH

May 11, 2017

# 1 Problème 4

Quel que soit le solide (tétraèdre, icosaèdre, octaèdre) que l'on fait rouler sur le plan, on peut tout d'abord remarquer que chaque dalle du plan est atteignable. La question abordée ici sera donc celle des orientations possibles du solide pour chaque dalle du plan. Nous utiliserons le terme *position* pour désigner la dalle sur laquelle se trouve le solide et le terme *orientation* pour décrire son orientation indépendamment de sa position. Le terme *état* désigne la donnée d'une position et d'une orientation. Enfin, nous appellerons *déplacement* l'action qui transforme un état en un autre état. La position sera généralement donnée par un système de coordonnées cartésiennes et l'orientation par un élément d'un groupe de transformations adapté (dépendant du solide).

Nous pouvons ensuite remarquer qu'il est possible de séparer les dalles et les orientations en deux classes : les dalles triangulaires ont deux orientations possibles, que nous appellerons *endroit* et *envers*. À une dalle à l'endroit, les seules orientations possibles du solide seront les orientations telles que la face du dessous est orientée à l'*endroit*.

Cette deuxième remarque conduit à une observation sur l'octaèdre. Colorons les dalles à l'endroit en rose et celles à l'envers en blanc (voir figure 1).

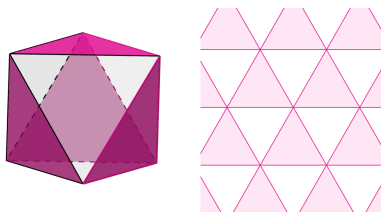


Figure 1: Les dalles à l'endroit sont en rose, celles à l'envers en blanc

Alors un déplacement élémentaire d'un solide s'effectue forcément vers une dalle de la couleur opposée. Nous pouvons également bicolorer l'octaèdre de façon que deux faces qui se touchent soient de couleurs opposées. Supposons qu'à l'instant initial, l'octaèdre soit posé sur une face rose et une dalle rose. Alors à chaque étape du déplacement, la face et la dalle en contact seront de la même couleur. Cela permet de comprendre qu'il est impossible qu'au cours de son déplacement, l'octaèdre revienne à la position de départ dans une orientation qui modifie la couleur de la face de base.

L'octaèdre possède vingt-quatre rotations qui le laissent invariant, mais parmi elles, seules douze préservent la bicoloration. Ainsi, nous pouvons déjà voir que certaines orientations seront incompatibles avec certaines positions.

Remarquons enfin que le problème de l'orientation sur une dalle à l'envers résulte directement du problème sur une dalle qui lui est adjacente. Nous nous intéresserons donc essentiellement aux dalles à l'endroit, pour des raisons que nous allons développer.

## 1.1 Groupe des orientations, des translations, des états

Lors d'un déplacement, l'octaèdre subit une transformation de son orientation et de sa position, donc de son état. Ces transformations forment une structure de groupe dont la compréhension nous permettra de connaître les états possibles.

### 1.1.1 Le groupe des orientations

Comme expliqué ci-dessus, nous nous intéressons aux déplacements entre deux dalles de même orientation. En effet, en l'absence de marque distinctive sur le solide, celui-ci semble avoir subi une simple translation. En fait, il a subi une translation assortie d'une rotation de son groupe d'isométries. Les rotations qu'il peut subir engendrent donc un sous-groupe du groupe d'isométries du solide : nous appellerons ce sous-groupe  $\mathfrak{Ori}$ .

### 1.1.2 Le groupe des translations

Le pavage du plan est engendré par exactement deux translations, que nous noterons  $u$  et  $v$ . La donnée de coordonnées dans  $\mathbb{Z}^2$  est équivalente à la donnée d'une translation d'une dalle endroit vers une autre dalle endroit. Le groupe des translations s'intéresse aux transformations de la position du solide, indépendamment de son orientation. Il est isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ , nous le noterons éventuellement  $\mathfrak{Pos}$ .

### 1.1.3 Le groupe des déplacements admissibles

Le groupe des déplacements admissibles  $\mathfrak{Dep}$  est plus difficile à comprendre. Nous pouvons déjà comprendre qu'il va résulter d'un couplage des deux groupes précédents. Ce n'est pas a priori le simple produit direct de ces deux derniers, car cela signifierait que tous les états sont possibles (ce qui est faux pour l'octaèdre !).

Pour le comprendre, nous allons étudier un ensemble de déplacements qui l'engendrent.

Depuis la case de base, les déplacements possibles vont tous vers une des trois cases envers autour. Ensuite, soit le solide retourne au départ, soit il va vers une des cases grisées, ce qui justifie que les déplacements donnés engendrent le groupe (voir figure 2).

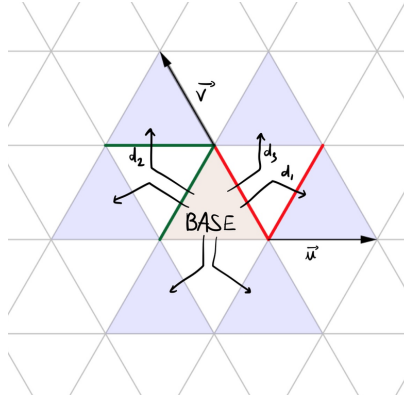


Figure 2: Déplacements admissibles

On remarque que les déplacements associés aux translations  $u$  (resp.  $v$ , resp  $v + u$ ) et  $-u$  (resp.  $-v$ , resp.  $-v - u$ ) sont inverses l'un de l'autre. Nous noterons ces couples  $d_1$  et  $d_1^{-1}$ ,  $d_2$  et  $d_2^{-1}$ ,  $d_3$  et  $d_3^{-1}$ . De plus, nous devons remarquer, qu'indépendamment du solide considéré, on a

$$d_2 \circ d_1 = d_3$$

Pour bien voir cela, nous devons décomposer  $d_1$  et  $d_2$  de manière plus fine. On note  $b_{pos}$ ,  $b_{neg}$  et  $b_{hori}$  les trois basculements possibles d'une position endroit vers une position envers (voir figure 3).

On a  $d_1 = b_{pos}^{-1} \circ b_{neg}$ ,  $d_2 = b_{hori}^{-1} \circ b_{pos}$  et  $d_3 = b_{hori}^{-1} \circ b_{neg}$  d'où la relation ci-dessus.

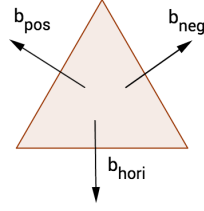


Figure 3: Les trois basculements possibles d'une position endroit vers une position envers

Nous pouvons donc réduire le problème à un groupe à deux générateurs. Notons  $r_1$  et  $r_2$  les transformations de l'orientation respectivement induites par les déplacements  $d_1$  et  $d_2$ . Alors  $\mathcal{Dep}$  est le sous-groupe de  $\mathcal{Pos} \times \mathcal{Ori}$  engendré par

$$(u, r_1) \text{ et } (v, r_2)$$

## 1.2 Orientations possibles sur une dalle

Étant donné un état de départ, nous voulons connaître les états possibles. Cela passe par la connaissance des orientations admissibles sur une dalle donnée, que nous appellerons base. En effet, puisque toute autre dalle est accessible, pour accéder aux autres positions admissibles sur cette autre dalle, il suffit de conjuguer par un déplacement fixé entre cette dalle et la base.

### 1.2.1 Un déplacement qui retourne au départ

Un déplacement qui se termine sur la dalle de base est un élément  $(t, r)$  de  $\mathcal{Dep}$  tel que  $t = 0$  (en notation additive). On remarque que  $\mathcal{Pos}$  est abélien, donc permuter les déplacements élémentaires qui composent  $(t, r)$  ne change pas son point d'arrivée, mais peut changer l'orientation d'arrivée. Plus synthétiquement, nous nous intéressons au noyau de

$$p_1 : \mathcal{Dep} \rightarrow \mathcal{Pos}$$

la projection sur la première coordonnée :  $\ker p_1$  est l'ensemble des déplacements retournant à la base.

### 1.2.2 Le sous-groupe dérivé de $\mathcal{Dep}$

Le sous-groupe dérivé est le sous-groupe engendré par les commutateurs, c'est-à-dire les éléments de la forme  $[g, f] := gfg^{-1}f^{-1}$  où  $f, g \in \mathcal{Dep}$ . Nous notons ce sous-groupe  $D(\mathcal{Dep})$ .

On remarque immédiatement l'inclusion  $D(\mathcal{Dep}) \subset \ker p_1$ . Nous allons montrer que l'autre inclusion est également valide.

À quoi ressemble un élément de  $\ker p_1$  ? La condition de position invariante implique qu'il s'agit d'un produit de la forme  $d_1^{k_1} d_2^{k_2} \dots d_1^{k_{n-1}} d_2^{k_n}$  où les simplifications triviales ont été effectuées (le premier et le dernier facteur du produit ne sont pas imposés) avec la condition

$$\sum_{i \text{ impair}} k_i = 0 \text{ et } \sum_{i \text{ pair}} k_i = 0$$

Soit un élément de  $\mathfrak{Dep}$ , on l'écrit comme ci-dessus et on appelle  $n$  sa longueur. On ne suppose pas que  $n$  est uniquement déterminé (bien qu'il existe un tel  $n$  qui soit minimal, car l'ensemble des longueurs possibles pour écrire un élément est une partie de  $\mathbb{N}$ ).

**Lemme 1.1.** *Tout élément de  $\ker p_1$  est un produit de commutateurs.*

Preuve : Nous montrons ce résultat par récurrence sur la longueur du mot. Nous distinguerons les cas de longueur paire et de longueur impaire.

**Initialisation** : Dans le cas où la longueur est 1, l'élément est de la forme  $d_i^k$ . Alors la condition d'appartenance au noyau de  $p_1$  impose  $k = 0$ , donc  $d_i^k$  est bien un produit de commutateurs (produit vide). Initialisons également le premier cas de longueur paire : de même, si  $d_1^k d_2^l$  appartient à  $\ker p_1$ , on a  $k = l = 0$ . On obtient encore la même chose en permutant  $d_1$  et  $d_2$ .

**Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que tout élément de  $\ker p_1$  de longueur inférieure ou égale à  $n$  s'écrive comme produit de commutateurs. Alors, soit un élément  $g$  de longueur  $n + 1$ . La somme des exposants de  $d_1$  est nulle, ainsi que celle des exposants de  $d_2$ .

Si  $n + 1$  est impair, il s'écrit  $g = d_1^{k_1} d_2^{k_2} \dots d_2^{k_n} d_1^{k_{n+1} + k_1}$  de longueur  $n + 1$ . On a

$$g = d_1^{k_1} (d_2^{k_2} \dots d_2^{k_n} d_1^{k_{n+1} + k_1}) d_1^{-k_1}$$

L'élément entre parenthèses est de longueur  $n$  et les sommes des exposants de  $d_1$  et  $d_2$  sont nulles. Il s'écrit donc comme un produit de commutateurs, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} g &= d_1^{k_1} [g_1, h_1] \dots [g_l, h_l] d_1^{-k_1} \\ &= [d_1^{k_1} g_1 d_1^{-k_1}, d_1^{k_1} h_1 d_1^{-k_1}] \dots [d_1^{k_1} g_l d_1^{-k_1}, d_1^{k_1} h_l d_1^{-k_1}] \end{aligned}$$

Ainsi,  $g$  est lui aussi un produit de commutateurs.

Si  $n + 1$  est pair, on écrit

$$\begin{aligned} g &= d_1^{k_1} d_2^{k_2} \dots d_2^{k_{n-1}} d_1^{k_n} d_2^{k_{n+1}} \\ &= d_1^{k_1} d_2^{k_2} \dots d_2^{k_{n-1}} (d_2^{k_{n+1}} (d_1^{k_n} d_1^{-k_n}) d_2^{-k_{n+1}}) d_1^{k_n} d_2^{k_{n+1}} \\ &= d_1^{k_1} d_2^{k_2} \dots d_2^{k_{n-1}} d_2^{k_{n+1}} d_1^{k_n} (d_1^{-k_n} d_2^{-k_{n+1}} d_1^{k_n} d_2^{k_{n+1}}) \\ &= d_1^{k_1} d_2^{k_2} \dots d_2^{k_{n-1} + k_{n+1}} d_1^{k_n} [d_1^{-k_n}, d_2^{k_{n+1}}] \end{aligned}$$

Le facteur  $d_1^{k_1} d_2^{k_2} \dots d_2^{k_{n-1} + k_{n+1}} d_1^{k_n}$  qui est de longueur  $n$  vérifie la condition sur les sommes des exposants de  $d_1$  et  $d_2$ . Par hypothèse de récurrence, c'est un produit de commutateurs, donc  $g$  aussi.

On a donc prouvé que les éléments de  $\ker p_1$  de longueur  $n + 1$  sont des produits de commutateurs.

**Conclusion** : Le principe de récurrence nous permet donc de montrer que tout élément de  $\ker p_1$ , quelle que soit sa longueur, est dans  $D(\mathfrak{Dep})$ .

□

Ce lemme est important car il nous permet de caractériser les orientations possibles du solide sur la face de base : ce seront exactement les éléments de  $D(\mathfrak{Ori})$ . Ainsi, connaissant le groupe des rotations du solide, il suffira de déterminer le sous-groupe dérivé pour obtenir toutes les orientations possibles.

## 1.3 Détermination du groupe des orientations pour les solides étudiés

Nous allons appliquer les résultats précédents aux trois solides : le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre. Dans un premier temps, nous déterminerons leur groupe des rotations et expliciterons l'isomorphisme avec un sous-groupe de groupe symétrique. Ensuite, nous donnerons  $r_1$  et  $r_2$  ou plutôt les permutations qui leur correspondent, que j'ai déterminés avec des dessins et des manipulations. Enfin nous donnerons  $\mathfrak{O}_T$  et son sous-groupe dérivé.

### 1.3.1 Orientations du tétraèdre

Le groupe des rotations du tétraèdre est constitué de douze éléments. Il y a l'identité, 8 rotations autour des hauteurs, et 3 rotations autour des droites joignant les milieux de deux arêtes opposées. Ce groupe est isomorphe à  $\mathfrak{A}_4$ . Pour cela, on peut observer l'action du groupe des isométries sur les quatre sommets : chaque permutation de sommets est équivalente à une isométrie du tétraèdre.

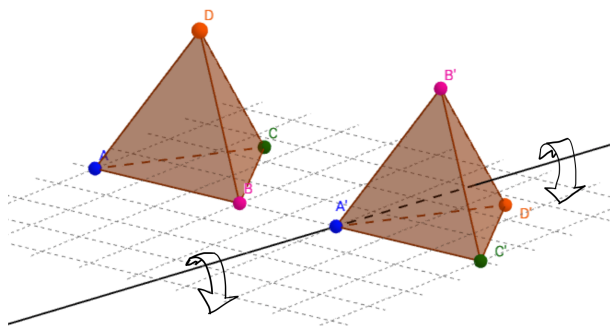


Figure 4: Une rotation agit sur les sommets. Ici, on représente la permutation  $(2\ 3\ 4)$

Les permutations impaires correspondent aux symétries et les paires aux rotations : c'est pourquoi, dans notre cas, le groupe à considérer est le groupe alterné.

En se représentant le mouvement (éventuellement graphiquement), on observe que  $r_1$  et  $r_2$  sont du même type et agissent en échangeant deux couples de sommets : ce sont  $(12)(34)$  et  $(13)(24)$  (Autrement dit, des rotations autour de droites joignant les milieux de deux arêtes).

Ces deux éléments sont d'ordre 2 et engendrent un groupe d'ordre 4 isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2)^2$ . Comme ce groupe est abélien, son sous-groupe dérivé est trivial. Par conséquent, l'orientation du tétraèdre sur la face de base est toujours la même. Par conjugaison, à chaque position correspond une seule orientation possible.

### 1.3.2 Orientations de l'octaèdre

Commençons par déterminer les rotations laissant invariant l'octaèdre : on compte l'identité, 9 rotations non triviales autour d'axes joignant deux sommets opposés d'ordre 2 ou 4 (RS2/RS4), 8 rotations non triviales (d'ordre 3) d'axe joignant les centres de deux faces opposées (RF), et 6 rotations d'axe joignant les milieux de deux arêtes opposées (RA), soit 24 rotations en tout. Le groupe  $\mathfrak{S}_4$  contient le même nombre d'éléments avec les mêmes

ordres. Ces deux groupes sont en fait isomorphes et il existe une manière de visualiser cet isomorphisme.

Pour cela, utilisons quatre couleurs (notées R,V,J,B) et colorons de la même couleur les faces opposées. Il y a quatre couples de faces opposées, à présent chacun identifié par une couleur.

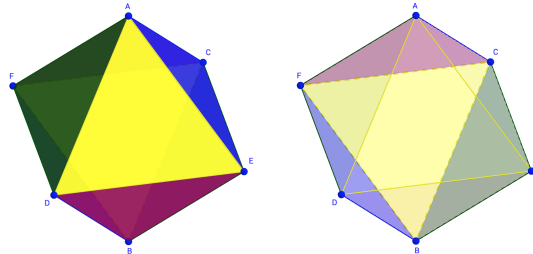


Figure 5: Vue avant et arrière de l'octaèdre

De toute rotation découle une permutation des couleurs. La composition des rotations est compatible avec la composition des permutations : cela définit un morphisme de groupes. Ce morphisme est injectif. En effet, prenons une rotation laissant invariantes les couleurs. Regardons la première face verte  $V_1$ . Elle est entourée, dans le sens trigonométrique, des faces  $J_1$ ,  $R_1$ ,  $B_1$ . Si la rotation envoie  $V_1$  sur elle-même,  $J_1$  est envoyée sur une face jaune adjacente à  $V_1$ , donc sur  $J_1$ . Cela oblige les trois sommets de  $V_1$  à être fixes, donc la rotation, ayant trois points fixes, est l'identité. Cependant,  $V_1$  ne peut pas être envoyée sur  $V_2$ , car l'octaèdre subirait alors une symétrie centrale, qui est une isométrie indirecte et n'est donc pas une rotation. Cela prouve l'injectivité du morphisme ; l'égalité des cardinaux des groupes implique que ceux-ci sont isomorphes.

On note qu'il n'est plus question ici que les permutations impaires correspondent à des symétries !

De nouveau, une manipulation expérimentale ou un dessin représentant les colorations de faces montrent que  $d_1$  et  $d_2$  sont deux 3-cycles non inverses l'un de l'autre. Ils engendrent donc le sous-groupe  $\mathfrak{A}_4$ . Son sous-groupe dérivé est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2)^2$ .

Cela détermine quatre orientations possibles du tétraèdre sur la dalle de base. Ces orientations sont obtenues par des rotations de type (RS2), des demi-tours autour d'un axe entre deux sommets. Sur chaque dalle, les quatre orientations seront obtenues par ces mêmes transformations à partir d'une orientation de base.

On retrouve notre observation de l'introduction : non seulement seules certaines faces peuvent se retrouver en contact avec la dalle de base, mais en fait les quatre faces pour lesquelles nous n'avions pas écarté cette possibilité le peuvent. Notons que pour une face donnée sur la base, Une seule orientation est possible (sinon, on aurait un 3-cycle dans  $D(\mathfrak{Otri})$ ).

### 1.3.3 Orientations de l'icosaèdre

Le groupe des rotations de l'icosaèdre est plus compliqué à visualiser du fait de sa taille. Il est constitué de rotations autour des sommets (RS) d'ordre 5, autour des arêtes (RA) d'ordre 2 et autour des faces (RF) d'ordre 3. Comme il y a 6 couples de sommets, 15 d'arêtes et 10 de faces, on a en plus de l'identité 24 rotations (RS), 15 rotations (RA) et 20 rotations (RF) soit 60 rotations en tout. Ce groupe est isomorphe à  $\mathfrak{A}_5$ , nous allons construire cet isomorphisme.

Pour cela, munissons-nous de 5 couleurs (R,V,J,B,O) et colorons d'une même couleurs certains ensembles de six arêtes (appelés *hexamiaous*).

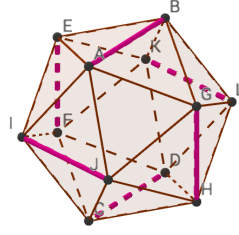


Figure 6: L'ensemble des 6 arêtes roses foncées représentent un *hexamiaou*

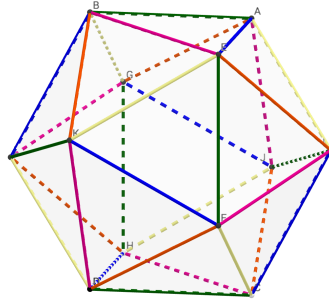


Figure 7: On colorie chaque hexamiaou d'une couleur différente

Ce sont les ensembles constitués d'une arête et de toutes celles qui lui sont parallèles ou orthogonales (voir figure 6). Cela définit une partition des arêtes de l'icosaèdre et les parties sont semblables.

Comme les rotations préservent le parallélisme, une rotation envoie les hexamiaous sur les hexamiaous, et définit ainsi une permutation de l'ensemble des hexamiaous (identifié à  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ). Comme précédemment, cette définition est compatible à la composition et l'identité des rotations est envoyée sur la permutation identité. Par égalité des cardinaux, il suffit une fois de plus de montrer l'injectivité du morphisme. De nouveau, supposons qu'une rotation laisse tout hexamiaou invariant. Considérons un hexamiaou particulier, par exemple l'hexamiaou orange : ses arêtes sont notées  $O_1, \dots, O_6$ .

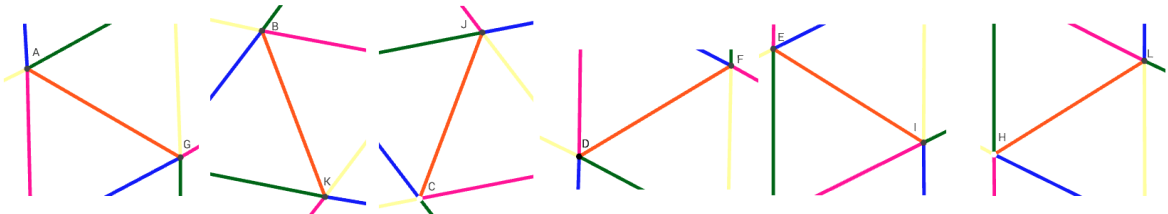


Figure 8: le raccordement des autres arêtes colorées est différent sur chacune des arêtes  $O_i$

La manipulation de l'icosaèdre coloré montre que le raccordement des autres arêtes colorées est différent sur chacune des arêtes  $O_i$ , or les rotations préservent ce raccordement,



donc l'hexamiau est envoyé sur lui-même sans changement d'orientation. Il contient un trièdre qui suffit à déterminer la rotation, qui est donc l'identité.

On a donc défini un isomorphisme entre le groupe des rotations de l'icosaèdre et le groupe  $\mathfrak{A}_5$ . C'est pratique pour calculer les compositions de rotations. Toujours par manipulation ou dessin, on établit que  $r_1$  et  $r_2$  sont des 3-cycles non inverses l'un de l'autre et de support n'ayant qu'un élément en commun. On vérifie que ces deux éléments engendrent  $\mathfrak{A}_5$  entier. Or le sous-groupe dérivé de  $\mathfrak{A}_5$  est lui-même ! Ainsi, les orientations possibles de l'icosaèdre sur la dalle de base sont obtenues par l'ensemble des rotations laissant invariant l'icosaèdre. Autrement dit, si l'on souhaite mettre l'icosaèdre dans une orientation quelconque sur la dalle de base, il est possible de trouver un déplacement qui réalise cela.

## 1.4 Le cas du tétraèdre sur un icosaèdre

Pour visualiser ce cas sans refaire les raisonnements que nous avons déjà fait, nous allons nous placer dans un référentiel particulier : celui du plan de contact entre les deux solides. On considérera donc que les deux solides pivotent simultanément sur leurs arêtes. On se représente donc un tétraèdre roulant sur un plan dallé et un icosaèdre copiant ses mouvements sur l'autre face du plan.

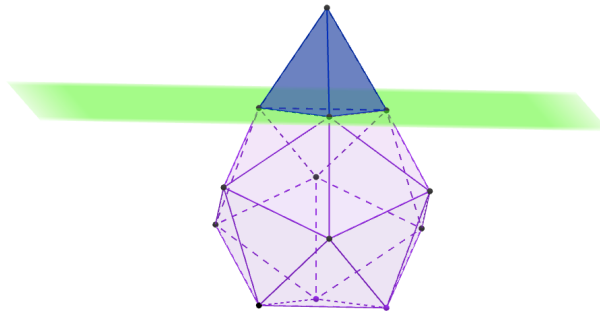


Figure 9: Le tétraèdre roule sur le plan dallé vert et un icosaèdre copie ses mouvement de l'autre côté du plan

On note en indice la lettre  $I$  ou  $T$  pour préciser si les transformations sont relatives à l'icosaèdre ou au tétraèdre. On définit les déplacements élémentaires qui engendrent le groupe des déplacement comme précédemment, excepté le fait qu'on ne s'intéresse plus à la position, mais à un couple d'orientation.

Le groupe  $\mathfrak{Dep}$  est défini comme le sous-groupe de  $\mathfrak{Ori}_I \times \mathfrak{Ori}_T$  engendré par

$$D_1 := (r_{I1}, r_{T1}) \text{ et } D_2 := (r_{I2}, r_{T2})$$

Un élément de  $\mathfrak{Dep}$  donne l'orientation du tétraèdre par rapport à l'icosaèdre. Nous allons montrer que n'importe quelles orientations sont possibles, c'est-à-dire que chaque couple de faces peut être en contact, et ceci dans les trois orientations relatives des deux faces l'une par rapport à l'autre. Pour cela, il faut montrer  $\mathfrak{Dep} = \mathfrak{Ori}_I \times \mathfrak{Ori}_T = \mathfrak{A}_5 \times \mathfrak{A}_4$ .

Il suffit de montrer que les éléments  $(Id_I, r_{Ti})$  et  $(r_{Ii}, Id_T)$  pour  $i = 1$  et  $i = 2$  sont dans  $\mathfrak{Dep}$ , puisque ces éléments engendrent  $\mathfrak{Ori}_I \times \mathfrak{Ori}_T$ . Cependant, comme  $r_{Ii}$  est d'ordre 5 et  $r_{Ti}$  d'ordre 3, les éléments ci-dessus sont respectivement égaux à  $D_i^{10}$  et  $D_i^{21}$ . Cela achève la preuve de notre affirmation.

## 1.5 Conclusion

En considérant des groupes engendrés par les déplacements des solides sur un plan dallé, nous avons pu répondre au problème des positions et orientations possibles pour les solides considérés. Tous peuvent se déplacer sur n'importe quelle dalle, mais seul l'icosaèdre peut s'y retrouver dans n'importe quelle orientation (pourvu qu'une de ses faces soit superposée à la dalle sur laquelle il se trouve). L'octaèdre possède vingt-quatre orientations qui le laissent invariant, mais seulement quatre d'entre elles sont réalisables sur une dalle donnée. Quant au tétraèdre, sa position impose de manière univoque son orientation : quel que soit le circuit qu'on lui fasse faire, il reviendra au départ dans la même position.

Dans le cas du tétraèdre sur l'icosaèdre, en revanche, le tétraèdre peut se retrouver sur n'importe quelle case avec n'importe quelle orientation par rapport à l'icosaèdre.