Concours SMF Junior

Équipe TiSaNe

Problème 5

Auteurs :
Chloé Papin
Etienne Perrot
Victor Quach

May 11, 2017

1 Problème 5

1.1 Discussion préliminaire

On note L la distance horizontale à parcourir et h la distance verticale. Le départ est au point de coordonnées $(0,0)$ et l'arrivée à (L,h) quitte à définir une orientation inhabituelle des axes. On choisit de modéliser le déplacement de la personne par un chemin continu de classe C^1. En pratique, il s'agira d'une fonction $\gamma = (x,y)$ de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}^2$, dérivable sauf sur un ensemble discret et vérifiant la condition d'arrivée :

$$\exists T > 0 : \forall t \geq T \quad \gamma(T) = (L,h)$$

En outre, en tout point avant le point d'arrivée, la dérivée doit être de norme v, après ce point elle est nulle.

On note P l'ensemble des parcours admissibles.

Pour une fonction γ donnée, le temps T_γ est défini comme la borne inférieure des réels T qui vérifient la condition ci-dessus.

Le risque ϕ est vu comme une fonction régulière de la distance aux trottoirs. Nous pouvons simplement demander qu'il soit une fonction de y vérifiant $\phi(h-y) = \phi(h)$. On suppose qu'il s'agit d'une fonction croissante de la distance au trottoir, i.e. croissante sur $[0,h/2]$ et décroissante sur $[h/2,h]$. Il est nul en 0 et h. Le coût en temps et risque d'un trajet donné par une fonction γ est

$$C(\gamma) = vT_\gamma + \int_0^{T_\gamma} \phi(y(t))dt$$

Les deux termes sont positifs, donc le coût C est minoré. On peut donc définir

$$C_{min} := \inf\{C(\gamma), \gamma \in P\}$$

1.2 Existence d'une solution

Montrons l'existence d'une solution. Nous allons la construire en l'approchant par des parcours de plus en plus performants. Par caractérisation de la borne inférieure, on dispose d'une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de P telle que $(C(\gamma_n))$ converge vers C_{min}. Nous disposons du résultat suivant.

Proposition 1.1. *La suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente pour la convergence uniforme et la limite est de classe C^1.*

Proof. La preuve se construit en deux étapes. Nous allons d'abord construire la suite extraite, puis montrer les propriétés de sa limite.

On considérera que les fonctions sont C^1 sauf au point d'arrivée où la dérivée peut présenter une discontinuité (sa norme passe de v à 0) ce qui en fait toutefois des fonctions C^1 par morceaux.

Comme le coût des éléments de la suite est borné, il existe un temps T tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \geq T \quad \gamma_n(t) = (L,h)$ et $\gamma_n'(t) = 0$.

Construction de la suite extraite : Nous construisons cette suite par récurrence. À chaque étape k, nous réalisons une extraction de la suite précédente tout en construisant en parallèle une nouvelle suite extraite notée (g_k). On note $(\gamma_n^{(k)})$ la suite indexée par k que nous allons construire, telle que

$$(\gamma_n^{(k+1)}) \text{ est extraite de } (\gamma_n^{(k)})$$

On pose $(\gamma_n^{(0)}) = (\gamma_n)$. On impose de plus qu'à l'étape k, la suite $\left(\gamma_n'^{(k)}(2^{-k}T \times m)\right)$ converge pour tout $m \in 1, \ldots, 2^k$.

De plus, on ajoute comme exigence que toute fonction de la suite $(\gamma_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ passe à une distance inférieure à 2^{-k} des 2^k points où la convergence est imposée.

Montrons par récurrence l'existence d'une telle suite, puis en construisons (g_k).

Initialisation : La suite $(\gamma_n(0))$ vérifie l'hypothèse, car on a spécifié cela dans la définition de T. Nous posons $g_0 = \gamma_0$.

Hérédité : Supposons que nous avons une suite extraite $\gamma_n^{(k)}$ vérifiant les hypothèses. On considère la suite des 2^{k+1}-uplets $\left(\gamma_n'^{(k)}(2^{-k}T), \ldots, \gamma_n'^{(k)}(2^{-k}T \times (2^k - 1), \gamma_n'^{(k)}(T)\right)$. C'est une suite dans un espace vectoriel de dimension finie et elle est bornée (la norme de la vitesse est v) donc d'après de théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède une sous-suite convergente que nous noterons $(\gamma_n'^{(k+1)})$. Alors la suite $\gamma_n^{(k)}$ vérifie les hypothèses. La dernière exigence ne pose pas de problème, quitte à supprimer un nombre fini de termes.

Conclusion de la récurrence : On dispose donc d'une suite $(\gamma_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaisant nos conditions.

On pose alors $g_k = \gamma_k^{(k)}$.

1.3 Convergence de la suite et régularité de la limite

Montrons que la suite (g_k') converge simplement et même uniformément. Soit $t \in [0, T]$. Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand tel que $2^{-n} < \varepsilon$ et $m \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tels que $|t_2^{-n}Tm| < \varepsilon$. On a alors, pour tous $k, p \in \mathbb{N}$

$$\|g_k'(x) - g_p'(x)\| \leq \|g_k'(x) - g_k'(2^{-n}Tm)\| + \|g_k'(2^{-n}Tm) - g_p'(2^{-n}Tm)\| + \|g_p'(2^{-n}Tm) - g_p'(x)\|$$

Comme $\|g_q'\| = v$ pour tout entier positif q (et en particulier pour k et p), par le théorème des accroissements finis, on a

$$\|g_q'(x) - g_q'(2^{-n}Tm)\| \leq v|x - 2^{-n}Tm| \leq v\varepsilon$$

Enfin, la suite $(g_q'(2^{-n}Tm))_{q\in\mathbb{N}}$ converge par construction, et d'après le critère de Cauchy, on dispose de $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq p$ on ait $\|g_k'(2^nTm) - g_p'(2^nTm)\| \leq \varepsilon$. D'après l'exigence que nous avons imposée, $\|g_k'(2^{-n}Tm) - g_p'(2^{-n}Tm)\| \leq 2^{n-1} \leq 2\varepsilon$.

Alors, pour un tel $p \in \mathbb{N}$, pour tout $k \geq p$, on a

$$\|g_k'(x) - g_p'(x)\| \leq 2v\varepsilon + 2\varepsilon$$

Cela montre que la suite $(g_k'(x))$ converge, ce qui achève de montrer la convergence simple de la suite (g_k'). Comme les entiers p et k ne dépendent pas de x, on a en fait une convergence uniforme.

On note $\tilde{g}$ la limite simple de cette suite.

Comme les fonctions g'_k convergent uniformément, et que toutes les fonctions g_k ont la même valeur en 0, la suite (g_k) converge uniformément et sa limite g est dérivable. On a $g' = \tilde{g}$ et g' est continue (car limite uniforme de fonctions continues).

Ainsi, on a exhibé une suite extraite qui converge uniformément vers une fonction de classe C^1.

□

Cela nous fournit une fonction γ_{min} qui est la limite uniforme de la suite, et qui est bien C^1. Cette fonction vérifie la condition arrêt, car sa dérivée est nulle pour t suffisamment grand, donc elle est constante sur la fin de l'intervalle, et sa valeur finale est la limite des valeurs finales de la suite : c'est donc bien (L, h). Enfin, la norme de la dérivée est la limite des normes des dérivées de la suite, donc elle est bien constante égale à v. Ainsi cette limite est dans P.

Par convergence uniforme de la suite, le coût de la limite γ_{min} est la limite des coûts, donc c'est C_{min}.

On a donc prouvé l'existence d'une solution qui minimise le coût du trajet.

1.4 Propriétés qualitatives

Nous allons montrer que toute solution optimale est le graphe d'une fonction. Pour commencer, montrons que x et y sont des fonctions croissantes. Ensuite nous montrerons que x n'est constante sur aucun intervalle.

Proposition 1.2. *Pour tout $\gamma \in P$ tel que $\gamma = (x, y)$, x et y sont des fonctions croissantes.*

Proof. L'idée de la preuve consiste à remplacer une section de retour en arrière par une ligne droite. Supposons que y ne soit pas croissante. Notons $y_- := \inf\{y \in [0, h]/\exists t, s \in \mathbb{R}_+ \quad t \neq s \wedge y(t) = y(s) = y\}$. Le fait que y ne soit pas croissante combiné avec l'application du théorème des valeurs intermédiaires assure que cet ensemble est non vide, de plus il est borné, donc la borne inférieure est bien définie. On définit y_+ comme la borne supérieure du même ensemble. Par continuité, y_- et y_+ ne sont pas confondues car alors, y serait croissante, ce que l'on a supposé faux.

Il existe deux cas possibles : soit $|y_- - 0| \leq |y_+ - h|$, soit $|y_- - 0| > |y_+ - h|$. Nous traiterons le premier cas, le second s'obtient par symétrie. On a alors $\phi(y_-) \leq \phi(y_+)$. On considère t_{max} et t_{min} les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble $\{t \in \mathbb{R}/y(t) = y_-\}$. Par continuité de y, ce sont des extremums. Alors, pour tout $t \in [t_{min}, t_{max}]$ on a $y(t) \geq y_-$. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait un t_* dans cet intervalle tel que $y(t_*) < y_-$. Par théorème des valeurs intermédiaires, on dispose alors de $t_1 \in [t_{min}, t_*]$ et $t_2 \in [t_*, t_{max}]$ tels que $y(t_1) = y(t_2) = \frac{y_- + y(t_*)}{2}$. On aurait donc $y(t_1) < y_-$ atteint au moins deux fois, ce qui contredit le fait que y_- soit une borne inférieure.

Considérons la portion de courbe sur $[t_{min}, t_{max}]$. La droite qui joint les extrémités de cette courbe a une longueur plus courte et est entièrement située sous la courbe. On suppose que les deux courbes ne sont pas confondues, alors si l'on remplace la portion de courbe par un segment de droite, on diminue le coût en temps. De plus, on diminue le coût en risque comme nous allons le montrer. Par théorème de Rolle, la portion de courbe atteint un extremum y_M qui est forcément un maximum. Nécessairement, ce maximum est inférieur à y_+. En effet, un voisinage à gauche de ce maximum est dans l'ensemble des points atteints au moins deux fois, par théorème des valeurs intermédiaires.

Or $\phi(y_+) \geq \phi(y_-)$. Ainsi, sur cette portion de courbe, $\phi(y(t))$ est borné inférieurement par $\phi(y_-)$. Notons l_c la longueur de la courbe sur la portion et l_d celle du segment de droite. On a $l_c > l_d$. Le coût en risque sur la portion de courbe (dont la longueur est notée l_c) est

$$\begin{aligned} C_{risque}(\text{courbe}) &= \int_{t_{min}}^{t_{max}} \phi(y(t))dt \\ &\geq l_c\phi(y_-) \\ &> l_d\phi(y_-) \\ &> C_{risque}(\text{segment}) \end{aligned}$$

Ainsi, le coût en risque de la portion de courbe est aussi plus important que celui de la portion de droite. On peut ainsi supprimer un "retour en arrière" pour construire un parcours plus performant. Le parcours construit n'est pas C^1, mais on peut l'approcher par une suite de fonctions de classe C^1, ce qui fournit de nouveau un meilleur parcours que le parcours de départ.

À présent, examinons le cas où x n'est pas croissante. C'est un peu différent car ϕ n'est pas constant le long des droites verticales, néanmoins nous pouvons ici nous contenter de rectifier des extremums locaux de x, ce qui n'était pas possible pour y.

La fonction x est continue de classe C^1 et admet donc des extremums locaux. Soit t_* un tel extremum. Prenons une portion de la courbe définie sur un intervalle $[t_0, t_f]$ contenant t_* dans son intérieur telle que la dérivée x' soit de norme inférieure à $v/2$ sur cet intervalle et telle que $x(t_0) = x(t_f)$. La fonction y sur cet intervalle vérifie $|y'|^2 = v^2 - |x'|^2 > 0$ et en appliquant le théorème d'inversion locale, on peut montrer que y est un C^1-difféomorphisme. On remplace cette portion par un segment vertical tel que le parcours reste continu.

Le coût en temps de la droite est à nouveau strictement plus faible que celui de la courbe, étant proportionnel à la longueur. Quant au coût en risque de la portion de courbe, il s'écrit grâce à un changement de variables, et en utilisant la majoration $|y'| \leq v$:

$$\begin{aligned} C_{risque}(\text{courbe}) &= \int_{t_0}^{t_f} \phi(y(t))dt \\ &= \int_{y^{-1}(t_0)}^{y^{-1}(t_f)} \phi(u)\frac{1}{y' \circ y^{-1}(u)}du \\ &\geq \frac{1}{v}\int_{y^{-1}(t_0)}^{y^{-1}(t_f)} \phi(u)du \end{aligned}$$

Or le coût en risque sur la portion de droite est tout simplement

$$\frac{1}{v}\int_{y^{-1}(t_0)}^{y^{-1}(t_f)} \phi(u)du$$

d'où

$$C_{risque}(\text{courbe}) > C_{risque}(\text{segment})$$

Ainsi, on construit de nouveau un meilleur parcours en rectifiant une portion, et la suite est identique au cas où y est non croissante.

On a donc montré que tout parcours optimal vérifie x et y croissantes.

□

Le lemme précédent nous a permis de montrer que les fonctions x et y sont croissantes. Pour déterminer si la trajectoire optimale est oui ou non le graphe d'une fonction, il nous suffit de montrer qu'au moins l'une de ces deux fonctions est strictement croissante.

Proposition 1.3. *Soit (x, y) une solution optimale. Alors x est strictement croissante.*

Proof. Supposons qu'un parcours $\gamma = (x, y)$ soit tel que x n'est pas strictement croissante. Si x n'est pas croissante, on a déjà montré que le parcours n'était pas optimal. Supposons que x est croissante. On suppose aussi y croissante : dans le cas contraire, on sait que la solution n'est pas optimale. Alors il existe deux valeurs $t_1 < t_2$ telles que $x(t_1) = x(t_2) =: x_0$. La fonction x est donc constante sur $[t_1, t_2]$. Alors comme la vitesse est constante, $y(t) = y(t_1) + v(t - t_1)$ sur cet intervalle. On peut prendre les bornes les plus larges possibles pour l'intervalle où x est constante.

Comme $L > 0$, $x(t_1)$ est différent de 0 ou différent de L. Supposons qu'il soit différent de L. Le temps t_2 n'est pas le temps d'arrivée. Pour tout $t > t_2$, $x(t) > x_0$.

On considère donc que le parcours est un segment parallèle à l'axe des ordonnées sur une longueur Δy. Pour $t > t_2$ mais suffisamment proche, x est strictement croissante donc le parcours est le graphe d'une fonction notée f : on a $y = f(x)$. Pour Δx suffisamment petit, f est définie sur $[x(t_1), x(t_1) + \Delta x]$. On regarde le parcours κ obtenu à partir de γ mais dans lequel on a remplacé la section entre $x(t_1)$ et $x(t_1) + \Delta x$ par un segment de droite.

La différence de coût entre ces deux parcours est

$$C(\gamma) - C(\kappa) = \left(\frac{\Delta y}{v} + \int_0^{\Delta x} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx + \int_0^{\Delta x} \sqrt{1 + f'(x)^2} r(f(x)) dx\right)$$
$$- \left(\frac{1}{v}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} + \int_0^{\Delta x} \sqrt{1 + \frac{\Delta y}{\Delta x}^2} r(y(t_1) + \frac{\Delta y}{\Delta x} x) dx\right)$$

En réalisant un développement limité à l'ordre 1 en Δx, on obtient

$$C(\gamma) - C(\kappa) = \Delta x \sqrt{1 + f'(y(t_1))^2} \left(\frac{1}{v} + r(f(y(t_1)))\right) + o(\Delta x)$$

Comme r est positif, la différence de coût est strictement positive pour $\Delta x > 0$ suffisamment petit. On obtient ainsi un parcours κ qui réalise un meilleur coût. Comme κ n'est pas de classe C^1, il faut justifier qu'on peut le "lisser" : les fonctions continues sont limites de suites de fonctions de classe C^1 et le coût C est continu, donc on peut trouver une fonction de classe C^1 suffisamment proche de κ et qui réalise elle aussi un meilleur coût que γ.

Ains, γ n'est pas optimale. Par contraposition, tout parcours optimal sera le graphe d'une fonction.

□

Pour une solution optimale, par continuité, pour tout $x \in [0, L]$ il existe un instant t tel que $x(t) = x$, et nous venons de prouver que cet instant t est unique. Par conséquent, la solution optimale dont nous avons prouvé l'existence est le graphe d'une fonction :

$\{(x, f(x)), x \in [0, L]\}$ pour une certaine fonction f. Cette fonction est même de classe C^1 partout où x' ne s'annule pas.

Notons f la fonction dont notre solution est le graphe, f est définie sur [0,L]. Notons Γ la fonction de coût pour un trajet défini par son graphe. L'expression de ce coût est

$$\Gamma : f \mapsto \int_0^L \sqrt{1 + f'(x)^2}(1 + \phi(f(x)))dx$$

On reconnaît un problème de Lagrange à extrémités fixes, et on en déduit l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\left(\frac{f'(x)(1 + \phi(f(x)))}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}\right)' = \sqrt{1 + f'(x)^2}\phi'(f(x))$$

Une fonction f deux fois dérivable réalisant une solution minimale doit être solution de cette équation différentielle avec les conditions aux limites $f(0) = 0$ et $f(L) = h$.

Cette équation se simplifie en

$$\frac{f''}{1 + f'^2} = \frac{\phi'(f)}{1 + \phi(f)}$$

Si on suppose que f' ne s'annule pas sur des intervalles (ce qu'on a déjà exclu), alors elle devient

$$\frac{f'f''}{1 + f'^2} = \frac{f'\phi'(f)}{1 + \phi(f)}$$

On reconnaît les expressions de dérivées. En intégrant ces fonctions entre 0 et x, comme $\phi(f(0)) = 0$, on trouve

$$\ln\left(\frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}\right) = \ln\left(1 + \phi(f(x))\right)$$

d'où (par positivité des carrés et de ϕ)

$$f'^2 = \phi(f)(1 + f'^2(0)) + f'^2(0)$$

Nous nous sommes donc ramenés à la résolution d'une équation différentielle d'ordre 1. La constante $f'^2(0)$ est reliée à la vitesse autorisée v.

La courbure du graphe peut être déduite par des raisonnements qualitatifs. Si l'on prend une corde entre deux points quelconques d'un parcours situés au sud du milieu de la route, alors la courbe entre les deux points sera située sous la corde : elle est convexe. En effet, supposons que la courbe soit au moins en partie au-dessus de la corde. Quitte à prendre une autre paire de points sur cette corde, on peut supposer que la portion de courbe est entièrement au-dessus de la corde.

Évaluons alors la différence de coût entre les deux trajets : la corde a un coût en temps plus faible, car le coût en temps est minimal pour les droites. Elle a également un coût en risque plus faible, car le risque croît en fonction de y. On peut donc remplacer la portion du parcours par la corde, quitte à lisser en approximant par les fonctions C^1, pour obtenir un parcours meilleur.

La portion de la fonction entre le départ et la traversée du milieu de la route est donc convexe. Par un raisonnement symétrique, on montre que la portion entre le milieu de la route et l'arrivée est concave.

Dans le cas où la fonction f est deux fois dérivable, les équations différentielles permettent de répondre beaucoup plus rapidement : ϕ' est positif au sud du milieu de la route et négatif au nord, or la dérivée seconde est du même signe que ϕ'. Ainsi, on retrouve le fait que la première partie du trajet est convexe et la seconde concave.

L'unicité de la trajectoire est facile à démontrer dans le cas où la solution est deux fois dérivable. Dans ce cas, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'unicité de la solution de la première équation différentielle étant données deux conditions aux limites. On remarque que la fonction $\tilde{f} : x \mapsto h - f(L - x)$ est aussi solution de la même équation différentielle. Or $\tilde{f}$ représente le même parcours, après une rotation de π. Par unicité, le trajet présente donc une symétrie centrale, ce qui était supposable étant données les symétries du problème.