Concours SMF Junior

Équipe TiSaNe

Problème 7

Auteurs :
Chloé Papin
Etienne Perrot
Victor Quach

May 11, 2017

1 Problème 7

1.1 Introduction

Soit f une fonction holomorphe définie sur un domaine de $\mathbb{C}$. On étudie les solutions de l'équation différentielle

$$\phi' = f(\phi)$$

où ϕ est une fonction de variable réelle à valeurs dans le plan complexe. Comme f peut être vue comme une fonction de classe C^∞ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme l'existence locale de solutions de classe C^∞ pour toute condition initiale dans Ω. Ces solutions peuvent être prolongées en solutions maximales.

Nous voulons montrer qu'une telle équation n'admet pas de cycle limite. Pour ce faire, nous prendrons une orbite périodique quelconque et montrerons que tout voisinage de cette orbite contient nécessairement une autre orbite périodique.

Nous commencerons par chercher des solutions de variable complexe à cette équation, dans la perspective de restreindre ces solutions à $\mathbb{R}$. De telles solutions seront holomorphes, mais malheureusement locales et non globales. Nous utiliserons la compacité de l'orbite pour la recouvrir d'un nombre fini d'ouverts où la solution est unique. Enfin nous considérons une trajectoire de variable réelle proche de l'orbite périodique. L'existence d'une solution holomorphe de variable complexe permettra de contrôler le comportement de la seconde trajectoire, qui sera forcée à être périodique.

1.2 Existence de solutions holomorphes locales

La théorie des équations différentielles holomorphes assure l'existence de solutions locales holomorphes pour toute condition initiale.

Soit ϕ une solution de variable réelle de l'équation avec pour condition initiale $\phi(0) = w_0$. Elle se prolonge en solution maximale. On peut également considérer Φ une solution de variable complexe z, telle que $\Phi(0) = w_0$. Cette solution est définie localement, mais trouver une solution globale pose des problèmes de raccordement, sauf dans le cas où l'ouvert de définition est simplement connexe.

Sur un ouvert simplement connexe, en revanche, on peut définir une unique solution maximale.

Supposons qu'on ait deux ouverts U et V simplement connexes. Des solutions maximales existent sur ces ouverts. Si $U \cup V$ est connexe et simplement connexe ainsi que $U \cap V$, et qu'en outre la solution sur U et celle sur V coïncident sur $U \cap V$, alors la solution sur l'intersection se prolonge en une solution maximale sur $U \cup V$. Notons que comme $U \cap V$ est ouvert connexe et simplement connexe, le fait que les deux solutions coïncident en un point est suffisant pour qu'elles coïncident partout.

1.3 Fabrication d'un voisinage de l'orbite

Supposons qu'il existe une orbite périodique non réduite à un point. Soit une orbite périodique qui contient le point w_0, de période T. On note ϕ la solution de variable réelle correspondante.

Le support de l'orbite périodique est compact car c'est l'image d'une période compacte par la solution qui est continue. Ce support est une courbe fermée sans point double. Elle admet en fait une structure de variété différentielle. En effet, ϕ est injective et sa différentielle ne s'annule pas. Pour montrer cela, supposons qu'il existe un réel t_0 tel que $\phi'(t_0) = 0$. Alors $f(\phi(t_0)) = 0$. Or les points d'annulation du champ de vecteurs sont également les points fixes du système, c'est-à-dire que la solution qui passe par ce point est une solution constante, ce qu'on a exclu.

Par conséquent, le support de l'orbite est homéomorphe à la sphère S^1.

Le support admet un voisinage en forme de tuyau homéomorphe à un cylindre. En effet, S^1 admet un tel voisinage donné une couronne de la forme $\{z \in \mathbb{C}/1-r < |z| < 1+r\}$ avec $r > 0$. L'homéomorphisme entre les deux variétés transporte le voisinage de la sphère sur un voisinage du support.

Pour tout point de l'orbite repéré par $t \in [0, T]$, il existe une solution holomorphe $\Phi_t(s)$ définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$ qui contient t, telle que $\Phi_t(t) = \phi(t)$. L'ouvert sur lequel nous avons défini cette solution contient une boule centrée en t de rayon r_t.

On obtient ainsi un recouvrement du segment $[0, T]$ par les boules ouvertes de rayon r_t sur lesquelles sont définies les Φ_t. Par compacité du segment, on peut en extraire un recouvrement fini noté V constitué des boules $B(0, r_0), B(t_1, r_{t_1}), \dots, B(t_k, r_{t_k})$. On peut exiger de ce recouvrement que le centre d'une boule soit situé dans la boule adjacente. Soit deux boules consécutives $B(t_i, r_{t_i})$ et $B(t_{i+1}, r_{t_{i+1}})$. La restriction de Φ_i à $\mathbb{R}$ est bien définie sur la boule et coïncide avec ϕ donc $\Phi_i(t_{i+1}) = \phi(t_{i+1}) = \Phi_{i+1}(t_{i+1})$. Les solutions complexes sur les deux boules coïncident donc en un point, et comme la réunion des boules est simplement connexe, on peut raccorder les deux solutions de manière unique. Par récurrence, on montre ainsi l'existence et l'unicité d'une solution Φ définie sur V et satisfaisant $\Phi(0) = w_0$. Sur l'axe réel, on a de plus $\Phi_{|\mathbb{R}} = \phi$.

1.4 Suivi d'une orbite proche

L'ouvert V considéré comme un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contient un rectangle $[0, T]\times] - r, r[$ où $r > 0$.

Soit un point $(0, \varepsilon)$ dans ce rectangle. On pose $w_1 = \Phi(0 + i\varepsilon)$. On veut s'intéresser à la solution à variable réelle ϕ_ε telle que $\phi_\varepsilon(0) = w_1$.

La fonction $t \mapsto \Phi(t + i\varepsilon)$ vérifie les conditions, elle est donc égale à ϕ_ε par l'unicité donnée par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

On a alors $\phi_\varepsilon(T) = \Phi(T + i\varepsilon)$.

Considérons l'équation différentielle (avec une fonction de variable réelle)

$$l' = if(l)$$

On observe directement que $l_\lambda : t \mapsto \Phi(\lambda + it)$ vérifie l'équation avec la condition initiale $l(0) = \Phi(\lambda)$.

Or les solutions l_0 et l_T vérifient la même condition initiale car $\Phi(0) = \Phi(T)$. Elles sont donc égales, et en particulier elles prennent la même valeur en $t = \varepsilon$. Ainsi, $\Phi(T + i\varepsilon) = \Phi(0 + i\varepsilon)$ donc $\phi_\varepsilon(T) = \phi_\varepsilon(0)$.

Enfin, par les propriétés du flot d'un champ de vecteurs, comme ϕ_ε prend deux fois la même valeur, c'est une trajectoire périodique.

On a donc trouvé une orbite périodique à une distance inférieure ou égale à εM de notre orbite de départ, où M est un majorant de $|f|$ sur un voisinage compact suffisamment grand de l'orbite de w_0. En prenant ε aussi petit qu'on le souhaite, on peut ainsi montrer que tout voisinage de l'orbite contient une autre orbite périodique.

1.5 Conclusion

Nous avons donc montré que notre orbite périodique ne pouvait pas être un cycle limite. Nous avons même montré un résultat plus fort : toute orbite dans un voisinage suffisamment petit d'une orbite périodique est également périodique, de même période.

Remarquons que ceci est faux pour une orbite triviale. Rappelons qu'une orbite périodique non triviale est homéomorphe à un cercle et que la surface fermée qu'elle délimite contient un point fixe. C'est une conséquence du théorème de la boule chevelue : on fabrique une boule S^2 en identifiant les frontières de deux copies du "disque" délimité par l'orbite. Le champ f dessus est continu et ne s'annule pas sur l'orbite, mais il doit pourtant s'annuler quelque part. Cela montre que f s'annule dans le "disque".

Ce rappel permet d'étudier le contre-exemple $f : z \mapsto z^2$. Ce système n'a qu'un seul point fixe (0). S'il avait des orbites périodiques, elles entoureraient l'origine. Or les fonctions $\phi : t \mapsto \frac{1}{C-t}$ ont pour images les demi-axes des réels strictement positifs et négatifs. Aucune trajectoire ne peut donc couper l'axe des réels, donc il est impossible qu'une orbite périodique entoure 0. Ainsi, ce que nous avons montré ne s'applique qu'aux orbites non triviales.