Concours SMF Junior

Équipe TiSaNe

Problème 8

Auteurs :
Chloé Papin
Etienne Perrot
Victor Quach

May 11, 2017

1 Problème 8

Question 1:

Posons

$$A = \{i \in [\![1, n]\!], a_i \geq 0\}$$

$$B = \{i \in [\![1, n]\!], a_i < 0\}$$

Alors, comme $\sum_{i=1}^n a_i = 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n a_i b_i &= \sum_{i=1}^n a_i b_i - m \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i (b_i - m) \\
&\leq \sum_{i \in A} a_i (b_i - m) && \text{car } \forall i, b_i - m \geq 0 \\
&= \sum_{i \in A} |a_i| (b_i - m)
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n a_i b_i &\leq \sum_{i \in A} |a_i b_i| \left(\frac{b_i - m}{b_i} \right) \\
&\leq \sum_{i \in A} |a_i b_i| \left(\frac{M - m}{M} \right)
\end{aligned}$$

En effet, la fonction $x \mapsto \frac{x-m}{x}$ atteint son maximum sur $[m, M]$ en $x = M$ (car $m > 0$). Donc

$$M \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i \in A} (M - m) |a_i b_i| \tag{1}$$

De façon analogue,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n a_i b_i &= \sum_{i=1}^n a_i b_i - M \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i (b_i - M) \\
&\leq \sum_{i \in B} a_i (b_i - M) && (\text{car } \forall i, b_i - M \leq 0) \\
&= \sum_{i \in B} |a_i| (M - b_i) \\
&\leq \sum_{i \in B} |a_i b_i| \left(\frac{M - b_i}{b_i} \right) \\
&\leq \sum_{i \in B} |a_i b_i| \left(\frac{M - m}{m} \right)
\end{aligned}$$

(Comme M>0, la fonction $x \mapsto \frac{M-x}{x}$ atteint son maximum sur $[m, M]$ en $x = m$.)
Donc

$$m \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{i \in B} (M-m)|a_i b_i| \tag{2}$$

En sommant les équations (1) et (2), comme $\{A, B\}$ est une partition de $[\![1, n]\!]$:

$$(m+M) \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{n} (M-m)|a_i b_i|$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{i} \frac{M-m}{M+m} |a_i b_i|$$

En appliquant le même raisonnement aux $(-ai)_{1 \leq i \leq n}$, on trouve que l'on a aussi

$$\sum_{i=1}^{n} (-a_i) b_i \leq \sum_{i} \frac{M-m}{M+m} |(-a_i) b_i|$$

ce qui implique que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leq \sum_{i} \frac{M-m}{M+m} |a_i b_i|$$

Question 2:

Montrons maintenant que la constante au-dessus est optimale.
Fixons $0 < m \leq M$.
Choisissons maintenant:

$$\begin{cases} a_1 = n-1 \\ b_1 = M \\ \forall i \in [\![2, n]\!], a_i = -1, b_i = m \end{cases}$$

qui vérifie bien les hypothèses de l'énoncé.
On a alors:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| = (M-m)(n-1)$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| = (M+m)(n-1) > 0.$$

Donc

$$\frac{|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i|}{\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|} = \frac{M-m}{M+m}$$

Ainsi, la constante $\frac{M-m}{M+m}$ dans l'égalité de la question 1 est optimale.

Question 3:

Soit $f_+ = \max(0, f)$ et $f_- = \max(0, -f)$ les parties positives et négatives de f.
On a notamment $f_+ \geq 0, f_- \geq 0$ et $f_+, f_- \in L^1(\mu)$.

$$\begin{aligned}
\int_X fg\mathrm{d}\mu &= \int_X fg\mathrm{d}\mu - \alpha \int_X f\mathrm{d}\mu && \text{car } \int_X f\mathrm{d}\mu = 0 \\
&= \int_X f(g-\alpha)\mathrm{d}\mu \\
&= \int_X f_+(g-\alpha)\mathrm{d}\mu + \int_X -f_-(g-\alpha)\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_X f_+(g-\alpha) && \text{car } \int_X -f_-(g-\alpha) \leq 0 \\
&= \int_X f_+ g \frac{g-\alpha}{g}\mathrm{d}\mu && \text{car } g > 0 \text{ p.p} \\
&\leq \int_X f_+ g \frac{\beta-\alpha}{\beta}\mathrm{d}\mu && \text{car } x \mapsto \frac{x-\alpha}{x} \text{croît}
\end{aligned}$$

D'où

$$\beta \int_X fg\mathrm{d}\mu \leq \int_X f_+ g(\beta - \alpha)\mathrm{d}\mu \tag{3}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
\int_X fg\mathrm{d}\mu &= \int_X fg\mathrm{d}\mu - \beta \int_X f\mathrm{d}\mu && \text{car } \int_X f\mathrm{d}\mu = 0 \\
&= \int_X f(g-\beta)\mathrm{d}\mu \\
&= \int_X f_+(g-\beta)\mathrm{d}\mu + \int_X -f_-(g-\beta)\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_X -f_-(g-\beta) && \text{car } \int_X f_+(g-\beta) \leq 0 \\
&\leq \int_X f_-(\beta - g) \\
&= \int_X f_- g \frac{\beta-g}{g}\mathrm{d}\mu && \text{car } g > 0 \text{ p.p} \\
&\leq \int_X f_- g \frac{\beta-\alpha}{\beta}\mathrm{d}\mu && \text{car } x \mapsto \frac{\beta-x}{x} \text{décroît}
\end{aligned}$$

D'où

$$\alpha \int_X fg\mathrm{d}\mu \leq \int_X f_- g(\beta - \alpha)\mathrm{d}\mu \tag{4}$$

Or, $|f| = f_+ + f_-$, d'où en sommant (3) et (4),

$$(\alpha + \beta) \int_X fg\mathrm{d}\mu \leq \int_X |fg|(\beta - \alpha)\mathrm{d}\mu$$

En appliquant ce qui précède avec $-f$ au lieu de f, il vient :

$$(\alpha + \beta) \int_X -fg\mathrm{d}\mu \leq \int_X |-fg|(\beta - \alpha)\mathrm{d}\mu = \int_X |fg|(\beta - \alpha)\mathrm{d}\mu$$

D'où le résultat.