Concours SMF Junior

Équipe TiSaNe

Problème 2

Auteurs :
Chloé Papin
Etienne Perrot
Victor Quach

May 11, 2017

1 Problème 2

1.1 Partie A

Question 1

On note e_n^d la fonction $x \mapsto e^{in\dot{x}}$ définie sur $\mathbb{T}_d$; on omet l'exposant quand il n'y a pas d'ambiguïté. Le coefficient de Fourier $e_n(m)$ vaut 1 si $n = m$ et 0 sinon. Soit f un polynôme trigonométrique. En calculant les coefficients de Fourier de f,on peut les identifier avec les coefficients du polynôme. On a alors $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(n)e^{in\dot{x}}$ pour tout $x \in \mathbb{T}$. Notons que seuls un ensemble fini de coefficients sont non nuls.

Pour toute mesure bornée μ, on a

$$\begin{aligned}
\mu \star f &= \int_{\mathbb{T}^d} f(t-x)\mu(dx) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(n) \int_{\mathbb{T}^d} e_n(t-x)\mu(dx) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}(n)\hat{\mu}(n)e_n(t) \\
&= T_{\hat{\mu}} f
\end{aligned}$$

Fixons μ une mesure bornée sur $\mathbb{T}^d$. Montrons que la suite de ses coefficients de Fourier est un multiplicateur de $W^{1,1}$.

Soit f un polynôme trigonométrique de $W^{1,1}$. Alors

$$\begin{aligned}
\|T_{\hat{\mu}} f\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^d} |\mu \star f(t)|dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^d} |\int_{\mathbb{T}^d} f(t-x)\mu(dx)|dt \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^d} \int_{\mathbb{T}^d} |f(t-x)|\mu(dx)dt
\end{aligned}$$

On intègre d'abord par rapport à la variable t. Comme la mesure dt est invariante par translation, on a

$$\begin{aligned}
\|T_{\hat{\mu}} f\|_1 &\leq \int_{\mathbb{T}^d} \|f\|_1 \mu(dx) \\
&\leq \mu(\mathbb{T}^d)\|f\|_1
\end{aligned}$$

Pour le deuxième terme de la norme de l'espace de Sobolev, nous devons vérifier que l'on a bien

$$\nabla(\mu \star f) = \mu \star \nabla f$$

Alors, le même calcul que ci-dessus donnera $\|\nabla T_{\hat{\mu}} f_i\|_1 \leq \mu(\mathbb{T}^d)\|\nabla f_i\|_1$ pour chaque composante du gradient, ce qui permettra de conclure

$$\|T_{\hat{\mu}} f\|_{W^{1,1}} \leq \mu(\mathbb{T}^d)\|f\|_{W^{1,1}}$$

Pour cette vérification, soit $1 \leq i \leq d$. On a

$$\begin{aligned}
\partial_i(\mu \star f) &= \partial_i \int_{T^d} f(t-x)\mu(dx) \\
&= \int_{T^d} \partial_i f(t-x)\mu(dx) \\
&= \mu \star \partial_i f
\end{aligned}$$

En effet, l'intégrande est de classe C^∞ par rapport aux variables x et t et il satisfait donc des conditions suffisantes pour permettre la dérivation sous le signe somme.

Nous avons donc montré que quel que soit le polynôme trigonométrique f, on a une constante C (ici nous avons montré que $\mu(\mathbb{T}^d)$ fonctionne) tele que

$$\|T_{\hat{\mu}} f\|_{W^{1,1}} \leq C\|f\|_{W^{1,1}}$$

Question 2

Soit m un multiplicateur de $W^{1,1}(\mathbb{T}^d)$. On note donc $\|m\|$ sa norme.

Soit $n \in \mathbb{T}^d$. Prenons le polynôme trigonométrique e_n. Alors pour tout $t \in \mathbb{T}^d$, on a $T_m e_n(t) = m(n)e_n(t)$ donc

$$\|T_m e_n\|_{W^{1,1}} = |m(n)|\|e_n\|_{W^{1,1}}$$

Par conséquent, comme $\|T_m e_n\|_{W^{1,1}} = \|m\|\|e_n\|_{W^{1,1}}$, on a $|m(n)| \leq \|m\|$.

Ainsi, on a $\sup |m(n)| \leq \|m\|$.

Notons que l'égalité est atteinte dans le cas où m provient d'une mesure, car $\mu(\mathbb{T}^d) = \hat{\mu}(0)$. Cela montre également que la constante trouvée à la question 1 est optimale.

Question 3

Question 4

Pour montrer qu'un contre-exemple en dimension 2 est suffisant pour déduire le cas de la dimension d, montrons que si tout multiplicateur de Fourier en dimension d est la suite des coefficients de Fourier d'une mesure, alors ceci est vrai en dimension 2 également.

Soit d un entier supérieur ou égal à 2.

On définit la projection $p : \mathbb{T}_d \to \mathbb{T}_2$ par

$$p(x_1, \ldots, x_d) = (x_1, x_2)$$

et l'injection $i : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_d$ par

$$i(n_1, n_2) = (n_1, n_2, 0, \ldots, 0)$$

Soit m un multiplicateur de Fourier de $\mathbb{T}_2$. Soit $n = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$. On construit $\tilde{m}'$ un multiplicateur de Fourier en posant

$$\begin{aligned} \tilde{m}'(n) &= m((n_1, n_2)) \text{ si pour } i > 2, n_i = 0 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Vérifions que m' est un multiplicateur de Fourier :

Soit F un polynôme trigonométrique de $\mathbb{T}^d$. On a

$$\begin{aligned} \|T_{m'} F\|_{W^{1,1}} &= \|\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} m_d(n)\hat{F}(n)e_n\|_{W^{1,1}} \\ &= \|\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} m(n)\hat{F}(n,0)e_{n,0}\|_{W^{1,1}} \end{aligned}$$

Posons f la fonction de $\mathbb{T}_2$ définie par

$$f(x) = \int_{\mathbb{T}_{d-2}} F(x,t)dt$$

Calculons ses coefficients de Fourier : soit $n \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \int_{T^2} f(x) e_n^2(-x,0) dx \\
&= \int_{T^2} \left(\int_{\mathbb{T}_{d-2}} F(x,t)dt \right) e_n^2(-x) dx \\
&= \int_{T^2} \int_{\mathbb{T}_{d-2}} F(x,t) e_{n,0}^d(-x,0) dx\, dt \\
&= \int_{T^2} \int_{\mathbb{T}_{d-2}} F(x,t) e_{n,0}^d(-x,t) dx\, dt \\
&= \hat{F}(n,0)
\end{aligned}$$

Alors on reconnaît précisément dans les inégalités ci-dessus

$$\|T_{m'}F\|_{W^{1,1}} = \| \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} m(n) \hat{f}(n) e_n^2 \|_{W^{1,1}}$$

Comme f est un polynôme trigonométrique et m un multiplicateur de Fourier, on a

$$\|T_{m'}F\|_{W^{1,1}} \leq C \|f\|_{W^{1,1}}$$

En outre, on a l'inégalité suivante sur les normes :

$$\begin{aligned}
\|f\|_1 &= \int_{\mathbb{T}}^2 |f(x)| dx \\
&= \int_{T^2} \left| \int_{\mathbb{T}_{d-2}} F(x,t)dt \right| dx \\
&\leq \int_{T^2} \left| \int_{\mathbb{T}_{d-2}} |F(x,t)|\, dt \right| dx \\
&\leq \|F\|_1
\end{aligned}$$

En procédant de la même manière sur les composantes des gradients (vus comme des vecteurs de $\mathbb{C}^2$ ou $\mathbb{C}^d$ munis de la norme 2), on montre

$$\|f\|_{W^{1,1}} \leq \|F\|_{W^{1,1}}$$

Ainsi, on obtient finalement

$$\|T_{m'}F\|_{W^{1,1}} \leq C \|F\|_{W^{1,1}}$$

ce qui achève de montrer que m' est bien un multiplicateur de Fourier.

D'après notre hypothèse, m' est donc la suite des coefficients de Fourier d'une mesure bornée notée μ.

Faisons une courte parenthèse pour rappeler comment on peut construire une mesure de $\mathbb{T}^2$ à partir d'une mesure de $\mathbb{T}^d$. Soit μ_d une mesure bornée sur $\mathbb{T}^d$. On pose, pour toute partie X de $\mathbb{T}^2$, $\mu_2(X) = \mu_d(p^{-1}(X))$. Cela définit bien une mesure : $\mu_2(\emptyset) = 0$. De plus, la σ-additivité de μ_2 découle de celle de μ_d et du fait que

$$\forall X, Y \subset \mathbb{T}^2 \quad X \cap Y = \emptyset \Rightarrow p^{-1}(X) \cap p^{-1}(Y) = \emptyset$$

Enfin, μ_2 est également bornée.

Pour toute fonction mesurable f de $\mathbb{T}^2$, on a $\mu_2(f) = \mu_d(f \circ p)$.

Appliquons cela à la mesure μ dont la suite des coefficients de Fourier est donnée par m'. Alors posons $\mu_0(f) = \mu(f \circ p)$ pour toute fonction mesurable f de $\mathbb{T}^2$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}^2$,

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_0(n) &= \int_{\mathbb{T}^2} e_n^2(x)\mu_0(dx) \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} e_n^2(p(z))\mu_0(dz) \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} e_(n,0)^d(z)\mu_0(dz) \\
&= \hat{\mu}(n,0) \\
&= m(n)
\end{aligned}$$

Ainsi, les coefficients de Fourier de μ_0 sont égaux aux termes du multiplicateur m.

Par conséquent, nous venons de montrer que si tout multiplicateur de Fourier de $\mathbb{T}^d$ découle d'une mesure bornée, il en va de même sur $\mathbb{T}^2$.

En conclusion, pour prouver qu'il existe en dimension d des multiplicateurs de Fourier qui ne proviennent pas d'une mesure bornée, il nous suffit de le montrer en dimension 2.

1.2 Partie B

Question 1

Question 2

Soit a_j une suite finie de complexes et X_j des variables aléatoires de Bernoulli. Comme dans l'énoncé. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La grandeur

$$\mathbb{E}\left(|\lambda + \sum a_j X_j|^2\right)$$

est positive. Or c'est un polynôme unitaire en λ :

$$\mathbb{E}\left(|\lambda + \sum a_j X_j|^2\right) = \lambda^2 + 2\lambda\mathbb{E}\left(\mathrm{Re}(\sum a_j X_j)\right) + \mathbb{E}\left(|\sum a_j X_j|^2\right)$$

La condition de positivité se traduit donc par la positivité du discriminant. Remarquons d'abord, comme $\mathbb{E}(X_i X_j) = \delta_{ij}$:

$$\mathbb{E}\left(|\sum a_j X_j|^2\right) = \sum a_i \overline{a_j}\mathbb{E}\left(X_i X_j\right) = \sum |a_j|^2$$

Le discriminant suivant est donc positif :

$$4\mathbb{E}\left(\mathrm{Re}(\sum a_j X_j)\right)^2 - 4\sum |a_j|^2 \geq 0$$

Comme la partie réelle d'un complexe est, en valeur absolue, inférieure à son module, l'inégalité

$$\mathbb{E}\left(|\sum a_j X_j|\right)^2 - \sum |a_j|^2 \geq 0$$

est aussi vérifiée.

d'où, en passant à la racine carrée,

$$\left(\sum |a_j|^2\right)^{1/2} \leq \mathbb{E}\left(|\sum a_j X_j|\right)$$

Question 3

Montrons que la suite $m := \left(\frac{\varepsilon_n}{(|n|^2+1)^{1/2}}\right)$ est un multiplicateur de Fourier.

Soit f un polynôme trigonométrique de $W^{1,1}$.

Alors pour tout $t \in \mathbb{T}^d$

$$T_m f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \frac{\varepsilon_n}{(|n|^2+1)^{1/2}} \hat{f}(n) e_n(t)$$

On a pour tout $t \in \mathbb{T}^d$

$$|T_m f(t)|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\hat{f}(n)|^2$$

donc $\|T_m f\|_2 \leq \|f\|_2$

Par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, on dispose donc d'une constante C_1 telle que $\|f\|_2 \leq C_1 \|f\|_{W^{1,1}}$, tandis qu'on minore l'autre côté de l'inégalité grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|T_m f\|_1 \leq C_1 \|f\|_{W^{1,1}}$$

C'est un polynôme trigonométrique ; en dérivant par rapport à la variable t_k, on obtient

$$\partial_k T_m f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \frac{\varepsilon_n i n_k}{(|n|^2+1)^{1/2}} \hat{f}(n) e_n(t)$$

Or $\|\nabla T_m f\|_2^2 = \sum_{k=1}^d |\partial_k T_m f|_2^2$ par théorème de Pythagore, d'où

$$\begin{aligned}
\|\nabla T_m f\|_{L^2}^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \varepsilon_n \frac{\sum_{k=1}^d |n_k|^2}{|n|^2+1} \hat{f}(n)^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \varepsilon_n \frac{|n|^2}{|n|^2+1} \hat{f}(n)^2 \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \varepsilon_n \hat{f}(n)^2 \\
&\leq \|f\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\|\nabla T_m f\|_{L^1} \leq \|\nabla T_m f\|_{L^2}$ donc

$$\|\nabla T_m f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2}$$

Ainsi, on a

$$\|T_m f\|_{W^{1,1}} \leq C_1 \|f\|_{W^{1,1}} + \|f\|_2$$

Or l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg permet de majorer le second membre, d'où

$$\|T_m f\|_{W^{1,1}} \leq 2C_1 \|f\|_{W^{1,1}}$$

Nous avons donc montré que m est un multiplicateur de Fourier de norme bornée par la constante $2C_1$.

Question 4