Concours SMF Junior

Équipe TiSaNe

Problème 10

Auteurs :
Chloé Papin
Etienne Perrot
Victor Quach

May 11, 2017

1 Problème 10

1.1 Question 1

Dans ce problème, on notera p la projection canonique de X dans X/G et $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur X définie par :

$\forall x, y \in X, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists g \in G$ tel que $y = g(x)$

Lemme 1.1. *Il existe un rayon $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, la boule fermée centrée en x et de rayon r, $B(x, r)$, soit compacte.*

Preuve : Raisonnons par l'absurde, en supposant que ce résultat est faux.

On peut donc trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X, tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la boule $B\left(x_n, \frac{1}{n+1}\right)$ n'est pas compacte.

Comme X/G est compact, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (p(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(y_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $y \in X/G$.

Pour bien comprendre le sens de cette convergence, il faut rappeler à quelle topologie de X/G on fait référence. En l'absence de précision, il s'agit de la topologie canonique de cet espace quotient, c'est-à-dire la plus fine pour laquelle la projection canonique p est continue. (L'ensemble des ouverts de cette topologie est l'ensemble des parties A de X/G, telles que $p^{-1}(A)$ est un ouvert de X.)

Fixons maintenant $x \in X$ un représentant de y. Comme X est localement compact, on peut fixer R>0 tel que $B(x, 2R)$ est compacte. On pose $O = p(B_o(x, R))$ (avec $B_o(x, R)$ la boule ouverte de centre x et de rayon R).

Alors :

$$\begin{aligned}
p^{-1}(O) &= \{z \in X \text{ tels que } p(z) \in p(B_o(x, R))\} \\
&= \{z \in X \text{ tels que } \exists s \in B_o(x, R)) \text{ vérifiant } s\mathcal{R}z\} \\
&= \bigcup_{g\in G} g(B_o(x, R)) = \bigcup_{g\in G} B_o(g(x), R)
\end{aligned}$$

(car les éléments de G sont des isométries)

D'où $p^{-1}(O)$ est un ouvert de X (car réunion d'ouverts de X), et O est un ouvert de X/G dans la topologie évoquée plus haut.

Comme de plus $y \in O$, la convergence de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers y assure qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, y_n \in O$.

Quitte à choisir un n_0 plus grand, on peut supposer $n_0 \geq \frac{1}{R}$.

Comme $y_{n_0} = p(x_{n_0}) \in O$, on peut lui trouver un représentant $z \in B_o(x, R)$. Alors $B(z, R) \subset B(x, 2R)$ et $B(z, R)$ est donc compact (car fermé dans un compact). De plus, $x_{n_0}\mathcal{R}z$, donc on peut fixer $g \in G$ tel que $x_{n_0} = g(z)$. Comme g est une isométrie, g est continue (car 1-lipschitzienne), et donc $g(B(z, R)) = B(x_{n_0}, R)$ est compact.

Enfin, comme $R \geq \frac{1}{n_0+1}$, $B\left(x_{n_0}, \frac{1}{n_0+1}\right)$ est compact car fermé dans un compact.

CONTRADICTION

□

Dans la suite, on fixe un r vérifiant la propriété de ce lemme.

Lemme 1.2. *Pour tout $x \in X$ et pour tout $R > 0$, $B(x, R)$ est compacte.*

Preuve : Soit $x \in X$.

Soit $R \geq 0$ tel que $B(x, R)$ est compacte. Montrons que $B\left(x, R + \frac{r}{2}\right)$ l'est aussi

La sphère $S(x, R)$ est compacte (car c'est un fermé dans un compact) et on peut donc extraire du recouvrement d'ouverts $\left\{B_o\left(z, \frac{r}{2}\right)\right\}_{z \in S(x,R)}$ un sous-recouvrement fini $\left\{B_o\left(z_i, \frac{r}{2}\right)\right\}_{1 \leq i \leq n}$, où les $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont dans $S(x, R)$.

Soit maintenant $y \in B\left(x, R + \frac{r}{2}\right) \setminus B(x, R)$ et soit γ un segment géodésique entre x et y. On pose $w = \gamma(R)$, alors $d(x, w) = R$ et $d(w, y) \leq \frac{r}{2}$.

Comme $w \in S(x, R)$, on peut fixer $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $w \in B_o\left(z_i, \frac{r}{2}\right)$. Donc $d(z_i, y) \leq d(zi, w) + d(w, y) \leq r$, c'est-à-dire $w \in B(z_i, r)$.

Par conséquent $B\left(x, R + \frac{r}{2}\right) \subset \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} B(z_i, r)\right) \bigcup B(x, R)$.

Or $\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} B(z_i, r)\right) \bigcup B(x, R)$ est compact comme réunion finie de compacts (les $B(z_i, r)$) sont compacts d'après le premier lemme).

Donc $B\left(x, R + \frac{r}{2}\right)$ est compact car fermé dans un compact.

Comme $B(x, 0)$ est compact, par récurrence immédiate, pour tout $n \in (N)$, $B(x, n\frac{r}{2})$, puis (comme $r > 0$) on en déduit le lemme annoncé, en incluant toute boule fermée dans un compact de la forme $B\left(x, n\frac{r}{2}\right)$ pour n assez grand. $\square$

Ce deuxième lemme permet de conclure sur la question de l'énoncé:

Soit $R > 0$.

Si $g \in G$ vérifie $d(x, g(x)) \leq R$, alors $g(x) \in B(x, R) \cup g(B(x, R))$.

Donc $\{g \in G | d(x, g(x)) \leq R\} \subset \{g \in G | B(x, R) \cup g(B(x, R) \neq \emptyset\}$, qui est un ensemble fini comme l'action est proprement discontinue et $B(x, R)$ compact d'après le deuxième lemme.

Donc $\{g \in G | d(x, g(x)) \leq R\}$ est un ensemble fini. On notera dans la suite $N_G(x, R)$ son cardinal.

1.2 Question 2

Soit $x \in X$.

Lemme 1.3. *Il existe $\Lambda > 0$ tel que $\bigcup_{g \in G} B(g(x), \Lambda) = X$.*

Preuve : Raisonnons par l'absurde, en supposant que cela est faux.

On peut donc construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \forall g \in G, d(x_n, g(x)) > n$.

Comme X/G est compact, la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (p(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(y_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers $y \in X/G$, dont on fixe un représentant $z \in X$.

On pose $D = d(z, x) + 1$ et $O = p(B_o(x, D))$.

En reprenant exactement le même raisonnement que dans la démonstration du lemme 1.1, il existe $n_0 \geq 2D$ tel que $y_{n_0} \in O$ et il existe donc $g \in G$ tel que $g(x_{n_0}) \in B_o(x, D)$.

Donc $d(g(x_{n_0}), z) \leq D$ et

$d(x_{n_0}, g^{-1}(x)) = d(g(x_{n_0}), x)) \leq d(g(x_{n_0}), z) + d(z, x) \leq 2D \leq n_0$.

CONTRADICTION

$\square$

On fixe pour la suite un Λ tel que $\bigcup_{g \in G} B(g(x), \Lambda) = X$.

De plus, à partir de maintenant, on supposera X non borné (en effet, la question est triviale dans ce cas car pour tout$x$, $R \mapsto N_G(x,R)$ devient constante à partir d'un certain rayon).

On définit alors les deux fonctions suivantes

$$\phi_x : R > 0 \longmapsto \{g \in G \text{ tels que } R - 2\Lambda < d(x, g(x)) \leq R + 2\Lambda\}$$

$$f : R > 0 \longmapsto \#\phi_x(R)$$

Remarques :

- D'après le résultat de la première question, pour tout $R > 0$, $\phi_x(R)$ est de cardinal fini et donc f est à valeurs dans $\mathbb{N}$
- Comme les éléments de G sont des isométries : $\forall g \in G, \forall R > 0, \phi_x(R) = \phi_{g(x)}(R)$
- Comme X est géodésique non borné, pour tout $R > 0$, on peut fixer y tel que $R - \Lambda < d(x,y) < R + \Lambda$ (en prenant un élément de X assez loin de x puis en se plaçant au bon endroit sur le segment géodésique), et le lemme précédent nous assure donc que $\phi_x(R)$ est non vide. Par conséquent, f est à valeurs strictement positives.

On peut alors démontrer la proposition ci-dessous.

Proposition 1.1. *La fonction f définie au-dessus vérifie, pour tous $R_1, R_2 > 0$, $f(R_1 + R_2) \leq f(R_1) \times f(R_2)$.*

Preuve :
Soient $R_1, R_2 > 0$. On pose $R = R_1 + R_2$.

Soit $\psi : (g_1, g_2) \in \phi_x(R_1) \times \phi_x(R_2) \longmapsto g_1 \circ g_2$.
Montrons que $\phi_x(R) \subset \psi(\phi_x(R_1) \times \phi_x(R_2))$.

Soit $g \in \phi_x(R)$. On pose $\delta = \frac{d(x,g(x))-R}{2} \in [-\Lambda, \Lambda[$.
(Remarque : on a $d(x, g(x)) \geq R - 2\Lambda \geq R_1 - 2\Lambda$)

Si $d(x, g(x)) \leq R_1$, alors $R_2 = R - R_1 \leq 2\Lambda$ et donc $g = g \circ Id = \psi(g, Id)$, où $(g, Id) \in \phi_x(R_1) \times \phi_x(R_2)$.

Sinon, fixons γ un chemin géodésique de x à $g(x)$ et posons $y = \gamma(R_1 + \delta)$. Avec le lemme précédent, on peut fixer $g_1 \in G$ tel que $d(y, g_1(x)) \leq \Lambda$. On pose maintenant $g_2 = g \circ g_1^{-1}$, et donc $g = g_1 \circ g_2$.
Alors

$$\begin{aligned}
R_1 - 2\Lambda &< R_1 + \delta - \Lambda \\
&\leq d(x,y) - d(y, g_1(x)) \\
&\leq d(x, g_1(x)) \leq d(x,y) + d(y, g_1(x)) \\
&\leq R_1 + \delta + \Lambda \\
&\leq R_1 + 2\lambda
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
R_2 - 2\Lambda < R_2 + \delta - \Lambda \\
&\leq d(g(x), y) - d(y, g_1(x)) \\
&\leq d(g(x), g_1(x)) \\
&\leq d(g(x), y) + d(y, g_1(x)) \\
&\leq R_2 + \delta + \Lambda \\
&\leq R_2 + 2\lambda
\end{aligned}
$$

Or $d(g(x), g_1(x)) = d(g_2 \circ g_1(x), g_1(x))$, donc $g_2 \in \phi_{g_1(x)}(R_1) = \phi_x(R_2)$ (d'après la remarque préliminaire)

Donc $g = g_1 \circ g_2 = \psi(g_1, g_2)$, où $(g_1, g_2) \in \phi_x(R_1) \times \phi_x(R_2)$.

Conclusion: On a bien $\phi_x(R) \subset \psi(\phi_x(R_1) \times \phi_x(R_2))$.

Par conséquent, comme les ensembles considérés sont finis:

$$
\begin{aligned}
f(R_1 + R_2) &= \#\phi_x(R) \\
&\leq \#(\phi_x(R_1) \times \phi_x(R_2)) \\
&= \#\phi_x(R_1) \times \#\phi_x(R_2) \\
&= f(R_1) \times f(R_2)
\end{aligned}
$$

□

Pour la suite, on notera :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(4\Lambda n)$ et $v_n = \ln(u_n)$.

Remarques :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(4\Lambda n)$ est à valeurs entières strictement positives comme nous l'avons montré plus haut, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et elle est de plus positive.
- Par définition de f :

  $\forall n \in \mathbb{N}, N_G(x, 2\Lambda(2n+1)) = \sum_{0\leq k\leq n} f(4\Lambda n) = \sum_{0\leq k\leq n} u_k$
- D'après la proposition qui précède, on a :

  $\forall m, n \in \mathbb{N}, u_{m+n} = f(4\Lambda(n+m)) \leq u_m \times u_n$, et donc $v_{m+n} \leq v_m + v_n$, c'est-à-dire que v est sous-additive.

On va maintenant appliquer un lemme classique, en élargissant un peu son résultat.

Lemme 1.4. *Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite sous-additive. Alors, $\frac{v_n}{n}$ tend vers $l = \inf_{n>0} \frac{v_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ quand n tend vers $+\infty$.*

De plus, si $l \leq 0$ et si l'on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \max_{k\leq n}(v_k)$, alors $\frac{w_n}{n}$ tend vers l quand n tend vers $+\infty$.

Preuve :

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

On note $M = \max_{0 \leq r < m} v_r$.

Soit $n \geq m$, que l'on décompose par division euclidienne sous la forme par division euclidienne sous la forme $n = qm + r$, avec $0 \leq r < m$.

Alors par récurrence immédiate, $v_{qm} \leq qv_m$ puis $\frac{v_n}{n} \leq \frac{v_{qm}+v_r}{n} \leq \frac{qv_m}{qm} + \frac{M}{n} \leq \frac{v_m}{m} + \frac{M}{n}$.

D'où $\limsup_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} \leq \frac{v_m}{m}$

Ceci étant vérifié pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on en déduit :

$\limsup_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} \leq \operatorname{Inf}_{m\in\mathbb{N}^*} \frac{v_m}{m} \leq \liminf_{m\to+\infty} \frac{v_m}{m}$, ce qui démontre la première partie du lemme.

On suppose maintenant que $l \leq 0$, on on pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \max_{k\leq n}(v_k)$.

D'après ce qui précède, on a alors: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{w_n}{n} \geq \frac{v_n}{n} \geq l$

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{w_n}{n}$ ne converge pas vers l. On peut donc fixer $\alpha > 0$ et extraire une sous-suite $\left(\frac{w_{\sigma(n)}}{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{w_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} \geq l + \alpha (> 0)$.

En particulier, on sait donc que la suite $w_{\sigma(n)}$ tend vers $+\infty$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} = l$, on peut fixer n_0 tel que pour tout $n \leq n_0$, $\frac{v_n}{n} < l + \alpha$.

Comme de plus la suite $w_{\sigma(n)}$ tend vers $+\infty$, il existe donc $n > n_0$ tel que $w_{\sigma(n+1)} > w_{\sigma(n)}$.

w étant croissante, en posant $p = \min\{k \in [\![\sigma(n), \sigma(n+1)]\!] | w_k = w_{\sigma(n+1)}\}$ on a : $w_{\sigma(n+1)} = w_p > w_{p-1}$, et par définition de w, cela implique que $w_p = v_p$. Donc, comme $w_p = w_{\sigma(n+1)}$, on a : $w_{\sigma(n+1)} = v_p$.

Alors,

$$\frac{w_{\sigma(n+1)}}{\sigma(n+1)} = \frac{v_p}{\sigma(n+1)} \leq \frac{v_p}{\sigma(p)} < l + \alpha$$

ce qui est absurde. □

En appliquant ce lemme à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est additive et positive, on en déduit que : $\frac{v_n}{n}$ tend vers $\inf_{n>0} \frac{v_n}{n}$. On note l cette limite (qui dépend a priori de x). Le lemme assure de plus que, si on note $(w_n = \max_{k\leq n} v_k)_{n\in(N)}$, alors converge $\frac{w_n}{n}$ converge vers l.

On pose maintenant $\delta_G = \frac{l}{4\Lambda}$

Proposition 1.2. $\lim_{R\to+\infty} \frac{N_G(x,R)}{R} = \delta_G$ *et il existe* $C > 0$ *tel que : pour tout* $R > 0$, $N_G(x, R) \geq Ce^{\delta_G R}$

Preuve : Soit $R > 6\Lambda$.

On pose $n = \left\lfloor \frac{R-2\Lambda}{4\Lambda} \right\rfloor \geq 1$.

Alors, comme $R \to N_G(x, R)$ est croissante:

$$N_G(x, 2\Lambda(2n+1)) \leq N_G(x, R) \leq N_G(x, 2\Lambda(2n+3))$$

Donc d'après la remarque et en utilisant la croissance du logarithme,

$$\ln\left(\sum_{0\leq k\leq n} u_k\right) \leq \ln(N_G(x, R)) \leq \ln\left(\sum_{0\leq k\leq n+1} u_k\right)$$

D'une part :

$$\ln(N_G(x,R)) \leq \ln\left(\sum_{0\leq k\leq n+1} u_k\right) \leq \ln\left((n+2)\max_{k\leq n+1} u_k\right) \leq w_{n+1} + \ln(n+2)$$

Puis

$$\begin{aligned} \frac{\ln(N_G(x,R))}{R} &\leq \frac{w_{n+1}}{n+1}\frac{n+1}{R} + \frac{\ln(n+2)}{R} \\ &\leq \frac{w_{n+1}}{n+1}\frac{\frac{R+2\Lambda}{4\Lambda}}{R} + \frac{\ln\left(\frac{R+6\Lambda}{4\Lambda}\right)}{R} \end{aligned} \tag{1}$$

D'autre part :

$$\ln(N_G(x,R)) \geq \ln\left(\sum_{0\leq k\leq n} u_k\right) \geq \ln(u_n) = v_n$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\ln(N_G(x,R))}{R} &\geq \frac{v_n}{n}\frac{n}{R} \\ &\geq l\frac{\frac{R-6\Lambda}{4\Lambda}}{R} \\ &\geq \delta_G\left(1-\frac{6\Lambda}{R}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Or

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{w_{n+1}}{n+1}\frac{\frac{R+2\Lambda}{4\Lambda}}{R} + \frac{\ln\left(\frac{R+2\Lambda}{4\Lambda}\right)}{R} = \frac{l}{4\Lambda} = \delta_G$$

et

$$\lim_{R\to+\infty} \delta_G\left(1-\frac{6\Lambda}{R}\right) = \delta_G$$

D'après (1) et (2), on peut conclure par encadrement que $\lim_{R\to+\infty}\frac{N_G(x,R)}{R} = \delta_G$, ce qui démontre la première partie de la proposition.

On pose $C = e^{6\delta_G\Lambda}$.

Pour $R \in]0, 6\Lambda]$, $Ce^{\delta_G R} \leq 1 \leq N_G(x,R)$ (En effet, l'élément identité de G assure que $\{g \in G | d(x, g(x)) \leq R\}$ est non vide) Et pour $R \in [6\Lambda, \infty[$, l'équation (2) assure que $N_G(x,R) \geq e^{\delta_G(R-\frac{6\Lambda}{R})} = Ce^{\delta_G R}$

Ainsi, pour tout $R > 0$, $N_G(x,R) \geq Ce^{\delta_G R}$, ce qui conclut la démonstration. □