2. előadás

AZ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ TÍPUSÚ FÜGGVÉNYEK

Olyan függvényekkel fogunk foglalkozni, amelyeknek értelmezési tartományuk része az $\mathbb{R}^n$ halmaznak, és értékkészletük része az $\mathbb{R}^m$ halmaznak, ahol n és m pozitív egész számok. Tehát

$$f : \mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Ha $n = 1$ vagy $m = 1$, akkor ezek a függvények leegyszerűsödnek, és speciális értelmezésekkel kerülünk szembe.

1. $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ✓ A valós-valós függvényekkel már részletesen foglalkoztunk.

2. $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ $(m > 1)$. Ekkor ***valós változós vektor értékű függvényekről*** beszélünk. Az ilyen függvények felírhatók

$$f(t) = \big(x_1(t),\, x_2(t),\, \ldots,\, x_m(t)\big) \qquad (t \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R})$$

alakban, ahol az $x_i : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ valós-valós függvényeket ***koordinátafüggvényeknek*** nevezzük $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Ha $m = 2$, akkor úgy tudjuk szemléltetni egy ilyen függvény értékészletét, hogy a koordinátasíkon ábrázoljuk az $\big(x_1(t),\, x_2(t)\big)$ koordinátájú pontokat, ahol $t \in \mathcal{D}_f$. Ha egy síkbeli görbe pontjait ilyen módon előállítjuk, akkor ***paraméteres görbéről*** beszélünk, ahol t a paraméter. Hasonlóan járunk el térbeli görbék esetén, ebben az esetben $m = 3$.

Matlab programmal a következő egyszerű kóddal tudunk paraméteres görbéket előállítani:

Síkbeli görbék

```
syms t
x1 = ...;            %x1(t) fv.
x2 = ...;            %x2(t) fv.
fplot(x1,x2,[a b])   %a<=t<=b
```

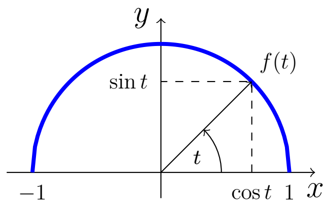
Térbeli görbék

```
syms t
x1 = ...;                 %x1(t) fv.
x2 = ...;                 %x2(t) fv.
x3 = ...;                 %x3(t) fv.
fplot3(x1,x2,x3,[a b])    %a<=t<=b
```

Példák:

a) ***a félkörív:***

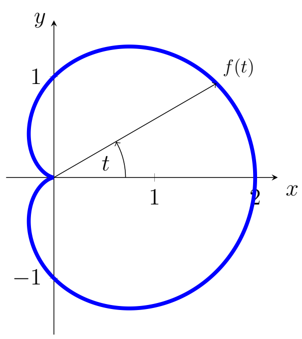
$$f(t) := (\cos t,\, \sin t) \qquad \big(t \in [0, \pi]\big)$$



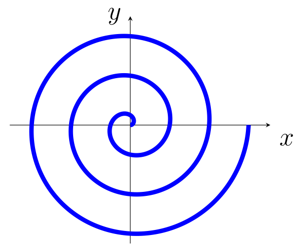
b) ***a kardioid (szívgörbe):***

$$f(t) := (\cos t + \cos^2 t,\, \sin t + \sin t \cos t)$$

$$\big(t \in [0, 2\pi]\big)$$

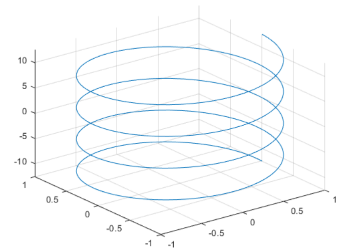


c) ***az arkhimédészi spirális:***



$$f(t) := (t\cos t,\ t\sin t) \qquad (t \geq 0)$$

d) ***a hengerre írható csavarvonal:***
(a sugarú, m menetemelkedésű csavarvonal)



$$f(t) := \left(a\cos t,\ a\sin t,\ \frac{m}{2\pi}\,t\right) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Megjegyzések.

1. Itt hívjuk fel ismét a figyelmüket a MacTutor honlapra. Ezen – többek között – matematikusok (Arkhimédésztől napjainkig) életrajzáról és munkásságáról találhatnak részletes információkat. Ugyanezen az oldalon a „CURVES" menüpont alatt számos klasszikus görbe leírását találhatják meg.

2. A Néhány nevezetes síkgörbe című segédanyagban pedig bizonyos görbék származtatásáról olvashatnak.

$\boxed{\mathbf{3.}}$ $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n > 1)$. Ekkor ***n változós valós értékű függvényekről*** beszélünk. Pl.

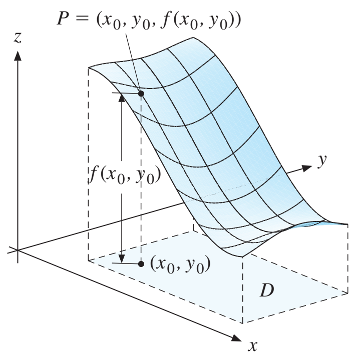
$$f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := f(x_1, x_2, x_3) := \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} = \sqrt{1 - \|x\|^2} \qquad \big(\|x\| \leq 1\big)$$

vagy

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = x^3 y - e^{xy} \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Ha $n = 2$, akkor ***kétváltozós valós értékű függvényekről*** beszélünk. Az ilyen függvényeket a

$$\operatorname{Gr}_f := \Big\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; (x, y) \in \mathcal{D}_f\Big\}$$

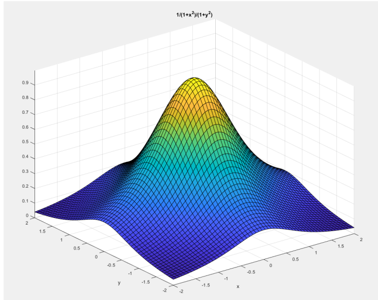


térbeli halmazzal, az ún. **függvény grafikonjával** tudjuk ábrázolni, ami egy térbeli felületet határoz meg. Ennek alakját úgy tudjuk szemléltetni, hogy a felületen olyan görbesereget rajzolunk fel, amelynek tagjai a felület és olyan síkok metszete, amely az xy síkra merőleges, de az x vagy az y tengellyel párhuzamos. Egy másik módszer olyan görbesereget felrajzolni, amelynek tagjai a felület és olyan síkok metszete, amely párhuzamos az xy síkkal. Adott $c \in \mathcal{R}_f$ az

$$\Big\{(x, y, c) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; (x, y) \in \mathcal{D}_f,\ f(x, y) = c\Big\}$$

halmazt a grafikon c paraméterhez tartozó ***szintvonalának*** nevezzük. Ilyen ábrázolást a térképészetben használnak.

Matlab programmal az `fsurf` függvénnyel tudunk kétváltozós valós értékű függvények grafikonját ábrázolni. Pl. az



$$f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

függvény kódja:

```
syms x y
f = 1/(1+x^2)/(1+y^2);
fsurf(f,[-2,2,-2,2])
```

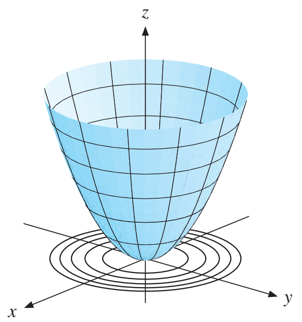
Előfordul, hogy a kétváltozós f függvény értéke minden $(x,y)\in\mathcal{D}_f$ pontban csak az x^2+y^2 értéktől függ, azaz a $\|(x,y)\|$ értéktől, ami az (x,y) pont nullától (origótól) való távolsága. Ekkor a függvény szintvonalai olyan körök (vagy egy pont), amiknek középpontja a z tengelyen található. Elég lenne megtartani mindegyikből egyetlen egy pontot, és ezeket megforgatni a z tengely körül, hogy előállítsuk a felületet. Legyen ez a pont az, amire $x\ge 0$ és $y=0$ teljesül. Így az f függvény grafikonját a

$$g(x) := f(x,0) \qquad \big((x,0)\in\mathcal{D}_f,\ x\ge 0\big)$$

függvény a z tengely körüli megforgatásával kapjuk.

Példák:

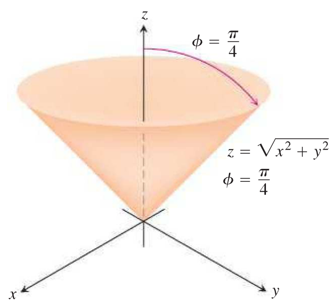
a) ***a forgásparaboloid:***



$$f(x,y) := x^2+y^2 \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

a $g(x) := x^2$ $(x\ge 0)$ parabolaág megforgatásával kapott forgásfelület.

b) ***a forgáskúp:***



$$f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

a $g(x) := \sqrt{x^2} = x$ $(x\ge 0)$ félegyenes megforgatásával kapott forgásfelület.

$\boxed{\mathbf{4.}}$ $f\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ $(n,m>1)$. Ekkor ***n változós m dimenziós vektor értékű függvényekről*** beszélünk röviden ***vektor-vektor függvényekről***. Az ilyen függvények felírhatók

$$f(x) = \big(f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_m(x)\big) \qquad (x\in\mathcal{D}_f\subset\mathbb{R}^n)$$

alakban, ahol az $f_i:\mathcal{D}_f\to\mathbb{R}$ n változós valós értékű függvényeket ***koordinátafüggvényeknek*** nevezzük $(i=1,2,\ldots,m)$. Pl.

$$f\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3, \qquad f(x) := f(x_1,x_2) := (x_1^2,\ x_1+x_2,\ x_1x_2-3) \qquad \big((x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\big)$$

Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények folytonossága

A sorozatok határértékéhez hasonlóan a többváltozós függvények folytonosságát is a valós-valós függvények folytonosságából nyerjük az euklideszi norma alkalmazásával.

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ *függvény* **folytonos az** $\boldsymbol{a \in \mathcal{D}_f}$ **pontban**, *(jelben* $\boldsymbol{f \in C\{a\}}$*), ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \ \forall x \in \mathcal{D}_f, \|x-a\| < \delta\colon \left\| f(x) - f(a) \right\| < \varepsilon.$$

Megjegyzések.

1. Az euklideszi normára mindig a $\|\cdot\|$ jelölést alkalmazzuk függetlenül attól, hogy hány dimenziós a benne szereplő vektor.

2. A folytonosság fogalma leírható környezetekkel: ha $a \in \mathcal{D}_f$, akkor

   $$f \in C\{a\} \qquad \iff \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \ \forall x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f\colon f(x) \in K_\varepsilon\big(f(a)\big).$$

   Ez pontosan megegyezik a valós-valós függvényeknél tanult fogalmával.

3. A folytonosság most is az f függvénynek azt a szemléletes tulajdonságát fejezi ki, hogy „ha x közel van az a ponthoz, akkor az $f(x)$ függvényérték közel van $f(a)$-hoz”. De a közelség most azt jelenti, hogy a két pont euklideszi távolsága kicsi.

Nem nehéz igazolni, hogy ***a norma folytonos függvény***. Ez azért igaz, mert ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|x\|$, akkor $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta := \varepsilon > 0$ úgy, hogy $\forall x \in \mathbb{R}^n$ esetén, ha $\|x - a\| < \delta$, akkor

$$\left\| f(x) - f(a) \right\| = \left| \|x\| - \|a\| \right| \leq \|x - a\| < \delta = \varepsilon.$$

Másrészt, a $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathrm{pr}_i(x) := x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ún. ***projekciók*** (a ponthoz rendeli az i-dik koordinátáját) szintén folytonos függvények. Valóban, $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta := \varepsilon > 0$ úgy, hogy $\forall x \in \mathbb{R}^n$ esetén, ha $\|x - a\| < \delta$, akkor

$$\left\| \mathrm{pr}_i(x) - \mathrm{pr}_i(a) \right\| = |x_i - a_i| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2} = \|x - a\| < \delta = \varepsilon.$$

Azt a tényt, hogy $\forall a \in \mathcal{D}_f\colon a \in C\{a\}$, azaz f folytonos minden értelmezési tartománybeli pontjában, az $f \in C$ jelöléssel fogjuk rövidíteni. Az előzőek szerint $\|.\| \in C$ és $\mathrm{pr}_i \in C$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

1. Tétel (A folytonosságra vonatkozó átviteli elv). *Legyen* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ *és* $a \in \mathcal{D}_f$*. Ekkor*

$$f \in C\{a\} \qquad \iff \qquad \forall (x_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f, \ \lim_{k \to +\infty} x_k = a \textit{ esetén } \lim_{k \to +\infty} f(x_k) = f(a).$$

Bizonyítás. Hasonlóan igazolható, mint valós-valós függvények esetén, a környezetekkel leírt folytonosság fogalmából kiindulva.

Megjegyzés. Az átviteli elvből következik, hogy ha $\exists(x_k):\mathbb{N}\to\mathcal{D}_f$ sorozat, amely az a ponthoz konvergál, de

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k)\neq f(a),$$

akkor az f függvény nem folytonos az a pontban.

Az átviteli elvvel és a sorozatok határértékére vonatkozó műveleti tételekkel nem nehéz igazolni a következő állításokat.

<u>Műveletek folytonos függvényekkel:</u>

1. Ha $f,g\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ $(n,m\in\mathbb{N}^+)$ és $f,g\in C\{a\}$, akkor
   a) $f+g\in C\{a\}$ és $\lambda f\in C\{a\}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$
   b) az $m=1$ esetben $f\cdot g\in C\{a\}$ és $g(a)\neq 0$ esetén $\dfrac{f}{g}\in C\{a\}$.
2. Ha $g\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ $(n,m\in\mathbb{N}^+)$, $g\in C\{a\}$ és $f\in\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ $(m,p\in\mathbb{N}^+)$, $f\in C\{g(a)\}$, akkor $f\circ g\in C\{a\}$.

Példa: A fenti állításokból igazolható, hogy

$$f\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y):=\frac{x+y}{x^2+1}-\sin(xe^{x-y^3}+\pi)\in C$$

hiszen $\sin,\exp\in C$, illetve ha $\mathrm{pr}_1(x,y):=x$ és $\mathrm{pr}_2(x,y):=y$, akkor $\mathrm{pr}_1,\mathrm{pr}_2\in C$.

Példa: Az

$$f(x,y):=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \big((x,y)\neq(0,0)\big)\\ 0 & \big((x,y)=(0,0)\big)\end{cases}$$

függvény nem folytonos a $(0,0)$ pontban. Valóban az átviteli elv szerint $f\notin C\big\{(0,0)\big\}$, hiszen $(x_k,y_k):=\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\to(0,0)$ ha $k\to+\infty$, de

$$f(x_k,y_k)=f\left(\tfrac{1}{k},\tfrac{1}{k}\right)=\frac{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}}=\frac{1}{2}\not\to 0=f(0,0).$$

A következő tétel azt mondja ki, hogy az n változós m dimenziós vektor értékű függvények folytonossága visszavezethető n változós valós értékű függvények folytonosságára.

2. Tétel. *Legyen $f\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ $(n,m\in\mathbb{N}^+)$ és $a\in\mathcal{D}_f$. Ekkor*

$$f\in C\{a\}\qquad\Longleftrightarrow\qquad f_i\in C\{a\}\quad(i=1,2,\ldots,m),$$

ahol $f_i:\mathcal{D}_f\to\mathbb{R}$ az f függvény koordinátafüggvényei.

Bizonyítás. Az átviteli elv szerint

$$f\in C\{a\}\quad\Longleftrightarrow\quad\forall(x_k):\mathbb{N}\to\mathcal{D}_f,\ \lim_{k\to+\infty}x_k=a \text{ esetén } \lim_{k\to+\infty}f(x_k)=f(a).$$

A sorozatok konvergenciája visszavezethető a koordinátasorozatok konvergenciájára:

$$\lim_{k\to+\infty}f(x_k)=f(a)\qquad\Longleftrightarrow\qquad\lim_{k\to+\infty}f(x_k)^{(i)}=f(a)^{(i)}\quad(i=1,2,\ldots,m).$$

A koordinátafüggvények fogalma szerint $f(x)^{(i)} = f_i(x)$ minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén. Mindent együttvéve azt kapjuk, hogy minden $i = 1, 2, \ldots, m$ esetén

$$f \in C\{a\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall (x_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim_{k\to+\infty} x_k = a \text{ esetén } \lim_{k\to+\infty} f_i(x_k) = f_i(a).$$

Azonban az átviteli elv szerint a fenti ekvivalencia jobb oldala ekvivalens azzal, hogy $f_i \in C\{a\}$, amiből a tétel állítása következik.

Példa: A fenti állításból igazolható, hogy

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) := \Big(\frac{x+y}{x^2+1}, \sin(xe^{x-y^3} + \pi)\Big) \in C.$$

Valóban, az

$$f_1(x,y) := \frac{x+y}{x^2+1}, \quad f_2(x,y) := \sin(xe^{x-y^3} + \pi) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

koordinátafüggvényeiről a műveleti tétel alapján igazolhatjuk, hogy $f_1, f_2 \in C$.

Felmerül a kérdés, hogy az n változós valós értékű függvények folytonosságát vissza tudjuk-e vezetni valós-valós függvények folytonosságára. Arra gondolunk, hogy ha lerögzítjük az $a \in \mathcal{D}_f$ pont koordinátait az i-edik koordináta kivételével, akkor elegendő megvizsgálni a

$$g_i(x) := f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \qquad \big(x \in \mathbb{R},\ (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \mathcal{D}_f\big)$$

függvényeket minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Ez azonban ***nem igaz***. Pl. már igazoltuk, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \big((x,y) \neq (0,0)\big) \\ 0 & \big((x,y) = (0,0)\big) \end{cases}$$

függvény nem folytonos az $a = (0,0)$ pontban. Azonban a

$$g_1(x) = f(x,0) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és a} \qquad g_2(y) = f(0,y) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények folytonosak a 0 pontban.

Az egyváltozós analízisből jól ismert Weierstrass tétele is általánosítható n változós valós értékű függvényekre.

3. Tétel (Weierstrass tétele.). *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tegyük fel, hogy*

a) $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

b) $\mathcal{D}_f$ *korlátos és zárt halmaz az* $\mathbb{R}^n$ *euklideszi térben,*

c) $f \in C$.

Ekkor az f függvénynek vannak abszolút szélsőértékhelyei, azaz

$$\exists x_1 \in \mathcal{D}_f,\ \forall x \in \mathcal{D}_f \colon f(x) \le f(x_1) \qquad (x_1 \textit{ abszolút maximumhely}),$$

$$\exists x_2 \in \mathcal{D}_f,\ \forall x \in \mathcal{D}_f \colon f(x_2) \le f(x) \qquad (x_2 \textit{ abszolút minimumhely}).$$

Bizonyítás. Az egyváltozós esetben bemutatott bizonyítás adaptálható többváltozós esetre.

Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények határértéke

A függvény határértéke szintén a valós-valós eset általánosításaként kerül bevezetésre.

2. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}'_f$ pontban* **van határértéke**, *ha $\exists A \in \mathbb{R}^m$, hogy*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < \|x - a\| < \delta\colon \left\| f(x) - A \right\| < \varepsilon.$$

Ekkor A–t a **függvény a pontbeli határértékének** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim_a f = A, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad f(x) \to A, \text{ ha } x \to a.$$

A határérték fogalma is megadható környezetekkel, ami pontosan megegyezik a valós-valós függvényeknél leírtakkal. A határérték egyértelműsége környezetekkel ugyanúgy igazolható, mint valós-valós függvények esetében. Ugyanez mondható az átviteli elvre.

4. Tétel (A határértékre vonatkozó átviteli elv). *Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ és $a \in \mathcal{D}'_f$. Ekkor*

$$\lim_a f = A \in \mathbb{R}^m \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \backslash \{a\},\ \lim_{k \to +\infty} (x_k) = a \text{ esetén } \lim_{k \to +\infty} f(x_k) = A.$$

Megjegyzés. Az átviteli elvből következik, hogy ha van két olyan $(x_k), (y_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ sorozat, amely az a ponthoz konvergál, de

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_k) \neq \lim_{k \to +\infty} f(y_k),$$

akkor az f függvénynek nincs határértéke az a pontban.

Példa: Az

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \big((x, y) \neq (0, 0)\big) \\ 0 & \big((x, y) = (0, 0)\big) \end{cases}$$

függvénynek nincs határértéke a $(0, 0)$ pontban, hiszen ha $k \to +\infty$, akkor

$$\left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\right) \to (0, 0) \qquad \text{és} \qquad f\left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2},$$

$$\left(0, \tfrac{1}{k}\right) \to (0, 0) \qquad \text{és} \qquad f\left(0, \tfrac{1}{k}\right) = \frac{0 \cdot \frac{1}{k}}{0 + \frac{1}{k^2}} = 0.$$

Tehát két, a $(0, 0)$ ponthoz tartó sorozat képsorozatának határtétéke különbözik.

A folytonosság és a határérték kapcsolatát fejezi ki a következő állítás.

5. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N}^+)$ és $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$. Ekkor*

$$f \in C\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lim_a f \text{ és } \lim_a f = f(a).$$