**Többváltozós függvénytan, 1. zárthelyi dolgozat, 2024.04.05.**

**1.** (7 pont) Határozza meg az alábbi kezdetiérték-feladat teljes megoldását!

$$y' = \frac{3x^3y + y}{x^2 \cdot \ln(y)}, \quad y(1) = e \qquad (x > 0,\, y > 1).$$

*Pontozás:*

- Átalakítás és integrálás:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^3+1}{x^2} \cdot \frac{y}{\ln y} \quad \to \quad \int \frac{\ln y}{y}\, dy = \int \frac{3x^3+1}{x^2}\, dx$$

Mivel

$$\int \frac{\ln y}{y}\, dy = \int (\ln y)^1 (\ln y)' dy = \frac{\ln^2 y}{2} + c$$

és

$$\int \frac{3x^3+1}{x^2}\, dx = \int \left(3x + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{x} + c$$

ezért

$$\frac{\ln^2 y}{2} = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{x} + c.$$

- A kezdeti feltétel miatt:

$$y(1) = e \quad \Longrightarrow \quad \frac{\ln^2 e}{2} = \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{1}{1} + c. \quad \Longrightarrow \quad c = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\ln^2 y}{2} = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \ln^2 y = 3x^2 - \frac{2}{x}$$

- A megoldás: Mivel $x > 0$, így

$$3x^2 - \frac{2}{x} > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x^2 > \frac{2}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad 3x^3 > 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x > \sqrt[3]{\frac{2}{3}},$$

továbbá $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} < 1$.

Mivel $y > 1$, így $\ln y > 0$. Ezért, ha $x > \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, akkor

$$\ln y = \sqrt{3x^2 - \frac{2}{x}} \quad \Longleftrightarrow \quad y = e^{\sqrt{3x^2 - \frac{2}{x}}}$$

Ezért a kezdetiérték-feladat teljes megoldása:

$$y(x) = e^{\sqrt{3x^2 - \frac{2}{x}}} \qquad \left(x > \sqrt[3]{\tfrac{2}{3}}\right).$$

**2.** (7 pont) Keresse meg a következő differenciálegyenlet összes megoldását.

$$\cos^2 x \cdot y' - 2y = e^{\operatorname{tg} x} \qquad (x \in (-\pi/2, \pi/2)).$$

*Pontozás:*

- Leosztva a $\cos^2 x$ taggal, ami nem nulla a megadott $I := (-\pi/2, +\pi/2)$ intervallumon:

$$y' - \frac{2}{\cos^2 x} \cdot y = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e^{\operatorname{tg} x}$$

- A homogén egyenlet összes megoldása:

$$y' - \frac{2}{\cos^2 x} \cdot y = 0 \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\cos^2 x} \cdot y \quad \to \quad \int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{2}{\cos^2 x}\, dx \quad \to$$

$$\ln |y| = 2 \cdot \operatorname{tg} x + c_1 \quad \to \quad y_h = c \cdot e^{2 \cdot \operatorname{tg} x},$$

ahol $x \in I := (-\pi/2, +\pi/2)$ és $c \in \mathbb{R}$ konstans.

Az inhomogén partikuláris megoldása: $y_p(x) = c(x) \cdot e^{2 \cdot \operatorname{tg} x} \quad (x \in I)$, ahol $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deriválható függvény.

$$y_p' = c' e^{2 \cdot \operatorname{tg} x} + \frac{2}{\cos^2 x} \cdot c \cdot e^{2 \cdot \operatorname{tg} x} \quad \Longrightarrow$$

$$\underbrace{\left(c' e^{2 \cdot \operatorname{tg} x} + \frac{2}{\cos^2 x} \cdot c \cdot e^{2 \cdot \operatorname{tg} x}\right)}_{y_p'} - \frac{2}{\cos^2 x} \cdot \underbrace{\left(c(x) \cdot e^{2 \cdot \operatorname{tg} x}\right)}_{y_p} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e^{\operatorname{tg} x}$$

Így

$$c' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e^{-\operatorname{tg} x} \quad \Longrightarrow \quad c \in \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e^{-\operatorname{tg} x}\, dx = -e^{-\operatorname{tg} x} + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Tehát

$$c(x) := -e^{-\operatorname{tg} x} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad y_p(x) = -e^{\operatorname{tg} x} \quad (x \in I).$$

- A differenciálegyenlet összes megoldása:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (c \cdot e^{\operatorname{tg} x} - 1) \cdot e^{\operatorname{tg} x} \qquad (x \in I,\ c \in \mathbb{R}).$$

.

**3.** (6+4 pont) a) A definíció alapján igazolja, hogy az alábbi $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $(0,0)$ pontban.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{3x^2 + 5y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b) Igazolja, hogy az alábbi határérték nem létezik.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 - xy + y^2)}{(x-y)^2}$$

*Pontozás:*

a)

- A definíció:

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, \delta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left\|(x,y) - (0,0)\right\| < \delta\colon |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$$

- Becslés:

$$\left|\frac{x^3y - xy^3}{3x^2 + 5y^2} - 0\right| = \left|\frac{xy \cdot (x^2 - y^2)}{3x^2 + 5y^2}\right| \leq \frac{|xy| \cdot (x^2 + y^2)}{3x^2 + 3y^2} \leq \frac{\frac{x^2 + y^2}{2}}{3} = \frac{1}{6}\,(x^2 + y^2) \leq \frac{1}{6} \cdot \left\|(x,y) - (0,0)\right\|_2^2 < \varepsilon$$

- Pl. a $\delta := \sqrt{6\varepsilon}$ jó.

b)

- Legyen
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2-xy+y^2)}{(x-y)^2}, & \text{ha } y \neq x, \\ 0, & \text{ha } y = x. \end{cases}$$
Az átviteli elv szerint elegendő két $(x_n,y_n) \to (0,0)$ és $(u_n,v_n) \to (0,0)$ sorozatot találni, amire
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(u_n,v_n).$$
- A sorozatok megkeresése:
$$\text{Ha } y = mx \ (m \neq 1) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x,mx) = \frac{\sin(x^2-mx^2+m^2x^2)}{(1-m)^2x^2} = \frac{\sin((m^2-m+1)x^2)}{(m-1)^2x^2}.$$
  - $(m=0)$ $\quad (x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n},0\right) \to (0,0)$ és $f(x_n,y_n) = \dfrac{\sin(1/n^2)}{1/n^2} \to 1 \ (n\to+\infty)$,
  - $(m=-1)$ $\quad (u_n,v_n) = \left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ és $f(u_n,v_n) = \dfrac{\sin(3/n^2)}{4/n^2} \to \dfrac{3}{4} \ (n\to+\infty)$.

**4.** (8 pont) A definíció alapján igazoljuk, hogy az
$$f(x,y) := 5x^2 - 2xy^2 \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$
függvény differenciálható a $P(1,-1)$ pontban, és határozzuk meg az $f'(1,-1)$ deriváltmátrixot! A kapott eredményt ellenőrizzük a Jacobi-mátrix kiszámításával!

*Pontozás:*

- A definíció:
$$\exists A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}, \text{ hogy } \quad \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left| f(a+h) - f(a) - \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0,$$
ahol $a = (1,-1)$ és $h = (h_1,h_2)$.
- A számlálóban:
$$f(a+h)-f(a) = f(1+h_1,-1+h_2) - f(1,-1) = 5(1+h_1)^2 - 2(1+h_1)(-1+h_2)^2 - 3 =$$
$$= 8h_1 + 4h_2 + 5h_1^2 - 2h_1h_2^2 - 2h_2^2 + 4h_1h_2.$$
$$\text{Ha } A := \begin{pmatrix} 8 & 4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad f(a+h) - f(a) - \begin{pmatrix} 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 5h_1^2 - 2h_1h_2^2 - 2h_2^2 + 4h_1h_2.$$
- A határérték nulla a közrefogási elv alapján: Ha $h_1 \to 0$ és $h_2 \to 0$, akkor
$$0 \leq \frac{|5h_1^2 - 2h_1h_2^2 - 2h_2^2 + 4h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \frac{|h_1h_2| \cdot |4-2h_2| + 5(h_1^2+h_2^2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$
$$\leq \frac{\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{2}\right) \cdot |4-2h_2| + 5(h_1^2+h_2^2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \sqrt{h_1^2+h_2^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\,|4-h_2| + 5\right) \to$$
$$\to 0 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 4 + 5\right) = 0$$
Ezért $f'(1,-1) = A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \end{pmatrix}$.

- A Jacobi-mátrix:
  - $\partial_1 f(x,y) = 10x - 2y^2 \quad \Longrightarrow \quad \partial_1 f(1,-1) = 10 - 2 = 8.$
  - $\partial_2 f(x,y) = -4xy \quad \Longrightarrow \quad \partial_2 f(1,-1) = 4.$

  Ezért $f'(1,-1) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(1,-1) & \partial_2 f(1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \end{pmatrix} = A.$

**5.** (8 pont) Legyen

$$f(x,y) := \operatorname{arctg}(\sqrt{x^3 - 3xy}) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2, x^3 - 3xy > 0\big).$$

a) Határozza meg az $f$ függvény iránymenti deriváltját a $P(2,1)$ pontban a $v = (1,-3)$ vektor által meghatározott irány mentén!

b) Írja fel a $z = f(x,y)$ egyenletű felület $P(1,0)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát!

*Pontozás:*

- A parciális deriváltak:
  - $\partial_1 f(x,y) = \dfrac{3x^2 - 3y}{2 \cdot (1 + x^3 - 3xy) \cdot \sqrt{x^3 - 3xy}}.$
  - $\partial_2 f(x,y) = \dfrac{-3x}{2 \cdot (1 + x^3 - 3xy) \cdot \sqrt{x^3 - 3xy}}.$
- Mivel a parciális deriváltak folytonosak, ezért $f \in D\{P\}$. Másrészt

$$\partial_1 f(2,1) = \frac{3}{2\sqrt{2}}, \qquad \partial_2 f(2,1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- A $v$ irányú egységvektor:

$$e = (e_1, e_2) = \frac{v}{\|v\|_2} = \frac{(1,-3)}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

- Az iránymenti derivált:

$$\partial_e f(2,1) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{9}{2\sqrt{20}} = \frac{9\sqrt{20}}{40}.$$

- Az érintősík egyenlete:

$$z = f(1,0) + \partial_1 f(1,0) \cdot (x-1) + \partial_2 f(1,0) \cdot (y-0)$$

  Így

$$f(1,0) = \operatorname{arctg}(1) = \pi/4 \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4} \cdot (x-1) - \frac{3}{4} \cdot (y-0) \quad \Longleftrightarrow \quad 3x - 3y - 4z = 3 - \pi.$$

- A sík normálvektora:

$$\vec{n} = (3, -3, -4).$$