7. gyakorlat

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 3.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények lokális szélsőértékei

Emlékeztető. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban ***lokális maximuma van*** (vagy másképp fogalmazva az a pont az f függvénynek ***lokális maximumhelye***), ha van olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, hogy

$$\forall x \in K(a)\colon\ f(x) \le f(a).$$

Ekkor az $f(a)$ függvényértéket az f függvény ***lokális maximumának*** nevezzük.

Analóg módon értelmezzük az ***lokális minimumhely*** és az ***lokális minimum*** fogalmát.

Tétel. **(Elsőrendű szükséges feltétel a lokális szélsőértékre)** *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Továbbá*

- *$f \in D\{a\}$ és*
- *az f függvénynek az a pontban lokális szélsőértéke van.*

Ekkor $f'(a) = 0$, azaz $f'(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) & \partial_2 f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A tétel tehát azt állítja, hogy lokális szélsőértékhelyek csak f stacionárius pontjaiban (vagyis olyan a pontokban, f differenciálható és $\partial_1 f(a) = 0$, $\partial_2 f(a) = 0$) lehetnek.

Tétel. **(Másodrendű elégséges feltétel a lokális szélsőértékre)** *Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és $f \in C^2\{a\}$. Tegyük fel, hogy*

$$\partial_1 f(a) = 0 \qquad \text{és} \qquad \partial_2 f(a) = 0.$$

Jelölje

$$D(a) := \det \begin{pmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a) \end{pmatrix}.$$

Ekkor

1. *ha $D(a) > 0$ és $\partial_{11} f(a) > 0$ [illetve $\partial_{11} f(a) < 0$], akkor az f függvénynek a-ban lokális minimuma [illetve maximuma] van.*
2. *ha $D(a) < 0$, akkor f-nek a-ban nincs lokális szélsőértéke (ezt nevezzük nyeregpontnak)*
3. *ha $D(a) = 0$, akkor így nem tudjuk megállapítani, hogy az a pont vajon lokális szélsőértékhely-e vagy sem.*

Ha a feltételek nem teljesülnek, akkor ez az elégséges feltétel nem használható. Ilyenkor egyedi vizsgálatokkal lehet eldönteni, hogy egy stacionárius pont vajon lokális szélsőértékhely-e vagy sem.

1. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x, y) := x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Megoldás. Az f függvény kétszer folytonosan deriválható $\mathbb{R}^2$-ön, mert egy kétváltozós polinom.

Elsőrendű szükséges feltétel:

$$\left.\begin{array}{rcccc} \partial_x f(x,y) & = & 3x^2-6x+2y & = & 0 \\ \partial_y f(x,y) & = & 2x+2y & = & 0 \end{array}\right\} \implies y=-x \implies 3x^2-6x-2x=0.$$

Ebből

$$3x^2-8x=x(3x-8)=0 \implies x=0 \ \text{ vagy } \ x=\frac{8}{3},$$

ezért az f függvény stacionárius pontjai, azaz a lehetséges lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1(0,0), \quad P_2(\tfrac{8}{3},-\tfrac{8}{3}).$$

Másodrendű elégséges feltétel: Az $f''(x,y)$ Hesse-féle mátrix egy $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban:

$$\partial_{xx}f(x,y)=6x-6, \quad \partial_{xy}f(x,y)=2=\partial_{yx}f(x,y), \quad \partial_{yy}f(x,y)=2.$$

Ezért

$$f''(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_{xx}f(x,y) & \partial_{xy}f(x,y)\\ \partial_{yx}f(x,y) & \partial_{yy}f(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x-6 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix},$$

$$D_1=6x-6, \quad D_2=\det f''(x,y)=12x-16.$$

A $P_1(0,0)$ pontban $f''(0,0)=\begin{pmatrix}-6 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $D_2=-16<0$. Az $f''(0,0)$ mátrix indefinit, ezért a $P_1(0,0)$ pontban az f függvénynek *nincs lokális szélsőértéke.*

A $P_2(\frac{8}{3},-\frac{8}{3})$ pontban $f''\left(\frac{8}{3},-\frac{8}{3}\right)=\begin{pmatrix}10 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $D_2=16>0$, $D_1=10>0$. Az $f''\left(\frac{8}{3},-\frac{8}{3}\right)$ mátrix pozitív definit, ezért $P_2\left(\frac{8}{3},-\frac{8}{3}\right)$ *lokális minimumhely.*

2. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y):=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2 \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

Megoldás. Az f függvény kétszer folytonosan deriválható $\mathbb{R}^2$-ön, mert egy kétváltozós polinom.

Elsőrendű szükséges feltétel:

$$\left.\begin{array}{rcccc} \partial_x f(x,y) & = & 4x^3-2x-2y & = & 0 \\ \partial_y f(x,y) & = & 4y^3-2x-2y & = & 0 \end{array}\right\} \implies x^3=y^3 \implies x=y.$$

Ezt az első egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$4x^3-4x=4x(x^2-1)=0 \implies x=0, \ \ x=1 \ \text{ vagy } \ x=-1.$$

Az f függvény stacionárius pontjai, vagyis a lehetséges lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1(0,0), \quad P_2(1,1), \quad P_3(-1,-1).$$

Másodrendű elégséges feltétel: Az $f''(x,y)$ Hesse-féle mátrix egy $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban:

$$\begin{aligned} \partial_{xx} f(x,y) &= 12x^2 - 2, & \partial_{xy} f(x,y) &= -2, \\ \partial_{yx} f(x,y) &= -2, & \partial_{yy} f(x,y) &= 12y^2 - 2, \end{aligned}$$

ezért

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = 12x^2 - 2, \quad D_2 = \det f''(x,y).$$

A $P_2(1,1)$ pontban $f''(1,1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$, $D_2 = 10^2 - 4 > 0$, $D_1 = 10 > 0$. Az $f''(1,1)$ mátrix pozitív definit, ezért $P_2(1,1)$ *lokális minimumhely*.

A $P_3(-1,-1)$ pontban $f''(-1,-1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = f''(1,1)$, ezért az f függvénynek a $P_3(-1,-1)$ pont is *lokális minimumhelye*.

A $P_1(0,0)$ pontban $f''(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ és $\det f''(0,0) = 0$. Ebben a pontban a másodrendű elégséges feltétel *nem alkalmazható*.

Egyedi vizsgálattal tudjuk csak eldönteni, hogy a $P_1(0,0)$ pont vajon lokális szélsőértékhely-e. Mivel $f(0,0) = 0$, ezért f-nek a P_1 pontban pontosan akkor van lokális szélsőértéke, ha f az origó egy környezetében azonos előjelű. Megmutatjuk, hogy ez nem igaz. *Vegyük észre*, hogy

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 = x^4 + y^4 - (x+y)^2 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$

és tekintsük f értékeit először az $y = -x$ egyenes mentén: $f(x,y) = f(x,-x) = 2x^4$, ami pozitív minden $x \neq 0$ valós számra. Nézzük most a függvény értékeit az $y = 0$ egyenes (vagyis az x-tengely) mentén: $f(x,0) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$; ez pedig negatív, ha $|x| < 1$ és $x \neq 0$. Az f függvény tehát az origó tetszőleges kicsi környezetében felvesz negatív és pozitív értéket is, ezért ebben a pontban nincs lokális szélsőértéke.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények abszolút szélsőértékei

Emlékeztető. A valós-valós függvények abszolút szélsőértékeinek keresésére vonatkozó állítások általánosíthatók többváltozós függvények esetére.

Tétel. **(Weierstrass-tétel)** *Tegyük fel, hogy H egy korlátos és zárt halmaz az $\mathbb{R}^2$ euklideszi térben, illetve az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor az f függvénynek vannak abszolút szélsőértékhelyei, azaz*

- $\exists x_1 \in H,\ \forall x \in H\colon f(x) \le f(x_1)$ (x_1 *abszolút maximumhely*),
- $\exists x_2 \in H,\ \forall x \in H\colon f(x) \ge f(x_2)$ (x_2 *abszolút minimumhely*).

Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt halmaz. Tegyük fel, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, illetve f deriválható H minden belső pontjában. Ekkor f a legnagyobb (legkisebb) értékét vagy a H halmaz határán veszi fel, vagy pedig egy olyan $a \in \operatorname{int} H$ belső pontban, ahol egyszerre $\partial_1 f(a) = 0$ és $\partial_2 f(a) = 0$ teljesül.*

3. Feladat. *Határozza meg az*

$$f(x,y) := xy(x^2+y^2-1) \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit a

$$H := \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\Big|\; x^2+y^2\le 1\Big\}$$

zárt körlapon!

Megoldás. A $H\subset\mathbb{R}^2$ halmaz korlátos és zárt, továbbá az f polinomfüggvény folytonos a H halmazon. Ezért Weierstrass tétele szerint f-nek a H halmazon van legnagyobb és legkisebb értéke. Az abszolút szélsőértékhelyek vagy a körlap határán (ez az $x^2+y^2=1$ egyenletű körvonal), vagy pedig a H halmaz belsejében helyezkednek el.

Világos, hogy az f függvény értéke nulla a H halmaz határának minden pontjában. Az

$$\operatorname{int} H = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\Big|\; x^2+y^2< 1\Big\}$$

H halmaz belsejében a következő tulajdonság figyelhető meg:

- ha $(x,y)\in\operatorname{int} H$, $x>0$ és $y>0$, akkor $f(x,y)<0$,
- ha $(x,y)\in\operatorname{int} H$, $x>0$ és $y<0$, akkor $f(x,y)>0$.

Ebből következik, hogy f abszolút szélsőértékhelyei szükségképpen H belsejében helyezkednek el, és az abszolút szélsőértékek nullától különbözőek.

Mivel az

$$f(x,y) := xy(x^2+y^2-1) = x^3y+xy^3-xy \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

egy polinomfüggvény, ezért $f\in D(\operatorname{int} H)$. Ezért f abszolút szélsőértékhelyei csak stacionárius pontok lehetnek:

$$\left.\begin{array}{rcccccl} \partial_x f(x,y) &=& 3x^2y+y^3-y &=& y(3x^2+y^2-1) &=& 0\\ \partial_y f(x,y) &=& x^3+3xy^2-x &=& x(x^2+3y^2-1) &=& 0 \end{array}\right\}$$

Ez csak az alábbi esetekben lehetséges:

- ha $x=0$ és $y=0$, akkor $f(0,0)=0$ miatt a $(0,0)$ pont nem abszolút szélsőértékhely,
- ha $x=0$ és $3x^2+y^2-1=0$, akkor $y^2=1$, azaz $(x,y)\notin\operatorname{int} H$,
- ha $y=0$ és $x^2+3y^2-1=0$, akkor $x^2=1$, azaz $(x,y)\notin\operatorname{int} H$,
- ha $3x^2+y^2-1=0$ és $x^2+3y^2-1=0$, akkor

  $$3x^2+y^2-1=x^2+3y^2-1 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2=y^2 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2=\frac{1}{4} \text{ és } y^2=\frac{1}{4}.$$

  Így $x=\pm 1/2$ és $y=\pm 1/2$, azaz a lehetséges szélsőértékhelyek:

  $$P_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad P_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad P_3\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\quad P_4\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

Az előző pontokban felvett helyettesítési értékek:

$$f(P_1) = -\frac{1}{8}, \qquad f(P_2) = \frac{1}{8}, \qquad f(P_3) = \frac{1}{8}, \qquad f(P_4) = -\frac{1}{8}.$$

A függvényértékeket összehasonlítva azt kaptuk, hogy a H halmazon az f függvény legnagyobb értéke $1/8$, és ezt az értéket a P_2 és P_3 pontokban veszi fel. Az abszolút minimumhelyek pedig a P_1 és P_4 pontok, és az abszolút minimum $-1/8$.

4. Feladat. *Határozza meg az*

$$f(x,y) := x^3 - 12x + y^3 - 3y \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit az alábbi halmazon:

$$H := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; -2 \le x \le 3,\ -x \le y \le 2\Big\}.$$

Megoldás. A H halmaz az $A(-2,2)$, $B(3,-3)$ és $C(3,2)$ csúcspontú korlátos és zárt háromszöglap. Az f függvény folytonos H-n, ezért a Weierstrass tétele alapján a függvénynek a H-n felvett értékei között van legnagyobb és van legkisebb érték.

Az f függvény deriválható a H halmaz belsejében, hiszen deriválható minden $\mathbb{R}^2$-beli pontban. Az abszolút szélsőértékhelyek vagy a H halmaz belső pontjaiban (ekkor azok egyúttal stacionárius pontok is), vagy pedig a H halmaz határán lehetnek.

Először meghatározzuk a függvény stacionárius pontjait a H halmaz belsejében. Mivel

$$\left.\begin{array}{rcccl} \partial_x f(x,y) &=& 3x^2 - 12 &=& 0 \\ \partial_y f(x,y) &=& 3y^2 - 3 &=& 0 \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \pm 2 \quad \text{és} \quad y = \pm 1,$$

ezért f stacionárius pontjai:

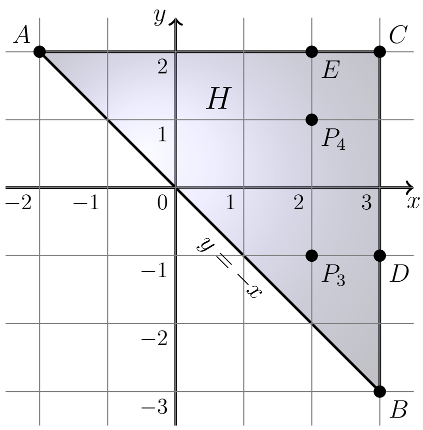
$$P_1(-2,-1), \quad P_2(-2,1), \quad P_3(2,-1), \quad P_4(2,1),$$

de ezekből csak P_3 és P_4 található a H halmaz belsejében. Nem szükséges megállapítani, hogy ezek közül melyik lokális szélsőértékhely, hiszen csak két pontról van szó. Elegendő kiszámolni az

$$f(P_3) = f(2,-1) = -14 \quad \text{és} \quad f(P_4) = f(2,1) = -18$$

értékeket, és ezeket összehasonlítani más lehetséges abszolút szélsőértékhelyekkel.

Most megvizsgáljuk az f függvény H határán felvett helyettesítési értékeit. A H halmaz határa három szakaszra bontható. A feladat az, hogy meghatározzuk f abszolút szélsőértékhelyeit az egyes szakaszokon. Ehhez az f függvény adott szakaszon felvett helyettesítési értékeit egy zárt intervallumon értelmezett g valós függvénnyel állítjuk elő. Ennek lehetséges abszolút szélsőértékhelyei az intervallum belsejében lévő stacionárius pontok (ahol $g' = 0$), vagy az intervallumon határpontjai lehetnek.



Az AB szakasz: $y = -x$, ahol $-2 \le x \le 3$. Ekkor a

$$g_1(x) := f(x,-x) = -9x \qquad \big(x \in [-2,3]\big)$$

függvény szigorúan monoton csökkenő. Ezért $x = -2$ és $x = 3$ a g_1 függvény abszolút szélsőértékhelyei, amelyek megfelelnek az A és B pontoknak:

$$f(A) = f(-2,2) = 18 \qquad \text{és} \qquad f(B) = f(3,-3) = -27.$$

A BC szakasz: $x = 3$, ahol $-3 \le y \le 2$. Ekkor

$$g_2(y) := f(3,y) = y^3 - 3y - 9 \qquad \big(y \in [-3,2]\big).$$

Mivel

$$g_2'(y) = 3y^2 - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm 1,$$

így g_2 lehetséges abszolút szélsőértékhelyei: $y = -3$, $y = -1$, $y = 1$ és $y = 2$. Értékei:

$$g_2(-3) = -27, \quad g_2(-1) = -7, \quad g_2(1) = -11, \quad g_2(2) = -7.$$

Ezért $y = -3$, $y = -1$ és $y = 2$ a g_2 függvény abszolút szélsőértékhelyei, amelyek rendre megfelelnek a B, a $D(3,-1)$ és a C pontoknak:

$$f(D) = f(3,-1) = -7 \qquad \text{és} \qquad f(C) = f(3,2) = -7.$$

Az AC szakasz: $y = 2$, ahol $-2 \le x \le 3$. Ekkor

$$g_3(x) := f(x,2) = x^3 - 12x + 2 \qquad \big(x \in [-2,3]\big).$$

Mivel

$$g_3'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 2,$$

így g_3 lehetséges abszolút szélsőértékhelyei: $x = -2$, $x = 2$ és $x = 3$. Értékei:

$$g_3(-2) = 18, \quad g_2(2) = -14, \quad g_2(3) = -7.$$

Ezért $x = -2$ és $x = 2$ a g_2 függvény abszolút szélsőértékhelyei, amelyek rendre megfelelnek az A és az $E(2,2)$ pontoknak:

$$f(E) = f(2,2) = -14.$$

A kapott

$$f(P_3) = -14,\ f(P_4) = -18,\ \underline{\underline{f(A) = 18}},\ \underline{\underline{f(B) = -27}},\ f(C) = -7,\ f(D) = -7,\ f(E) = -14$$

értékeket összehasonlítva azt látjuk, hogy a H halmazon az f függvény abszolút maximumhelye az $A(-2,2)$ pont és az abszolút maximuma $f(-2,2) = 18$, abszolút minimumhelye a $B(3,-3)$ pont és az abszolút minimuma $f(3,-3) = -27$, azaz

$$\boxed{\min_{(x,y)\in H} f(x,y) = f(3,-3) = -27}, \qquad \boxed{\max_{(x,y)\in H} f(x,y) = f(-2,2) = 18}.$$