9. előadás

TÖBBSZÖRÖS INTEGRÁLOK 2.

A többszörös integrálok értelmezése $\mathbb{R}^n$-beli korlátos halmazokon

Az integrálhatóság fogalma egyszerűen kiterjeszthető *tetszőleges* korlátos $H \subset \mathbb{R}^n$-beli halmazokon értelmezett *korlátos* függvényekre. Legyen H egy ilyen halmaz és $f : H \to \mathbb{R}$ egy adott korlátos függvény. Ekkor van olyan n-dimenziós I intervallum, amelyre $H \subset I$. Terjesszük ki az f függvény értelmezését az I intervallumra a következőképpen:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & (x \in H) \\ 0 & (x \in I \setminus H). \end{cases}$$

Azt mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény ***(Riemann)-integrálható a H halmazon*** (jelben $\boldsymbol{f \in R(H)}$), ha az $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ függvény integrálható az I intervallumon. Ekkor legyen

$$\int_H f := \int_I \tilde{f}.$$

Igazolható, hogy ez az értelmezés *független* a H-t tartalmazó intervallum megválasztásától.

A kettős integrálok geometriai jelentései

Ha az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ korlátos függvény integrálható a $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmazon, akkor az integrálját a korábban alkalmazott jelölésekhez hasonlóan a

$$\iint_H f \quad \text{vagy az} \quad \iint_H f(x,y)\,dx\,dy$$

szimbólumok valamelyikével fogjuk jelölni.

Az egyváltozós esetben már definiáltuk egy korlátos, nem negatív függvény *grafikonja alatti síkidom területét.* Kettős integrálokkal bármely *korlátos síkidom területét* is értelmezhetjük.

1. Definíció. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ egy korlátos halmaz és $f(x,y) := 1$ $\big((x,y) \in H\big)$. Azt mondjuk, hogy a H síkidomnak* ***van területe****, ha $f \in R(H)$, és ekkor H* ***területét*** *a*

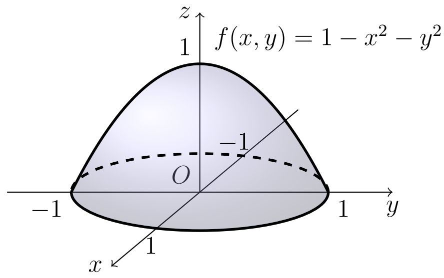
$$t(H) := \iint_H f = \iint_H 1\,dx\,dy$$

kettős integrállal értelmezzük.

Megjegyzés. Igazolható, hogy függvények grafikonja alatti síkidomok esetén a két definíció ekvivalens.

Most arra emlékeztetünk, hogy az egyváltozós analízisben már értelmeztük *forgástestek térfogatát*, és annak kiszámolására egy képletet is megismertünk.

Kettős integrálok alsó- és a felső közelítő összegeinek geometriai jelentése alapján kézenfekvő bizonyos „térrészek” (pl. kétváltozós függvény grafikonja alatti tartományok) térfogatának az alábbi értelmezése.



> **2. Definíció.** *Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz és $f : D \to \mathbb{R}$ nemnegatív korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy a*
>
> $$T := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; (x,y) \in D,\ 0 \le z \le f(x,y)\Big\}$$
>
> *„térrésznek” (hengerszerű testnek)* **van térfogata***, ha $f \in R(D)$. Ekkor a*
>
> $$V(T) := \iint_D f = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$
>
> *kettős integrált a T test* **térfogatának** *nevezzük.*

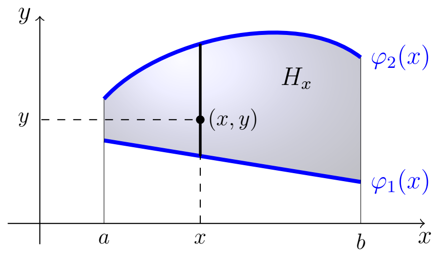
Kettős integrál kiszámítása normáltartományon

Gyakran előfordul, hogy két függvény által határolt tartományon kell egy integrált kiszámítani.

Legyenek $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, és tegyük fel, hogy $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ minden $x \in [a,b]$ esetén. A

$$H_x := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\Big\}$$

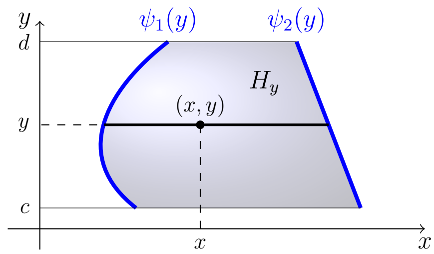
halmazt a *x tengelyre nézve normáltartománynak* nevezzük.



Legyenek $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, és tegyük fel, hogy $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ minden $y \in [c,d]$ esetén. A

$$H_y := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\Big\}$$

halmazt a *y tengelyre nézve normáltartománynak* nevezzük.



Megjegyzés. Előfordul, hogy ugyanez a tartomány mindkét tengelyre nézve is normáltartománynak tekinthető.

Az eddigiekből adódnak az alábbi fontos állítások, amelyeket bizonyítás nélkül kimondunk.

> **1. Tétel (Integrálás H_x normáltartományon).** *Legyen H_x az x tengelyre nézve normáltartomány, és tegyük fel, hogy az $f : H_x \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor $f \in R(H_x)$ és*
>
> $$\iint_{H_x} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

2. Tétel (Integrálás H_y normáltartományon). *Legyen H_y az y tengelyre nézve normáltartomány, és tegyük fel, hogy az $f : H_y \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. Ekkor $f \in R(H_y)$ és*

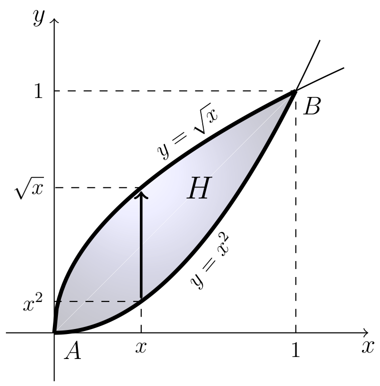
$$\iint_{H_y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Példa. Számítsuk ki a következő kettős integrált:

$$\iint_H xy^2\,dx\,dy,$$

ahol H az $y = x^2$ és az $y = \sqrt{x}$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkrész!

Megoldás. Ábrázoljuk a H halmazt!



Látható, hogy H az x tengelyre nézve normáltartomány. Az integrandus folytonos az egész $\mathbb{R}^2$-őn, tehát a H normáltartományon is. Következésképpen $f \in R(H)$.

Az integrál kiszámításához először a görbék metszéspontjainak a koordinátáit határozzuk meg:

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 \\ y &= \sqrt{x} \end{aligned}\right\} \iff \sqrt{x} = x^2 \iff x = 0 \text{ v. } x = 1.$$

A metszéspontok tehát $A(0,0)$ és $B(1,1)$.

A H halmaz a x tengelyre és az y tengelyre nézve is normáltartomány, ezért mindkét megismert képletet használhatjuk. (érdemes arra is figyelni, hogy mindegyik esetben a „belső” integrálokat könnyen kiszámolhatjuk, ezért bármelyik változó szerinti integrálással kezdhetünk.)

Tekintsük a H halmazt az x tengelyre nézve normáltartománynak:

$$0 \le x \le 1, \qquad x^2 \le y \le \sqrt{x}.$$

Ekkor először y szerint kell integrálnunk. (A nyíl jelzi a „belső” integrál irányát.) Így

$$\iint_H xy^2\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy^2\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[x \cdot \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x \cdot \left(x^{3/2} - x^6 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 \left(x^{5/2} - x^7 \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{x^{7/2}}{7/2} - \frac{x^8}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{7/2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{56}.$$

Tegyük fel, hogy a H integrálási tartomány az x tengelyre és az y tengelyre nézve is normáltartomány, és az f függvény folytonos H-n. Ekkor a fenti tétel szerint az $\iint_H f$ kettős integrált kétféle sorrendben is kiszámíthatjuk. Az integrálás sorrendjének felcserélésénél azonban körültekintően kell eljárnunk.

Példa. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tekintsük a következő integrált:

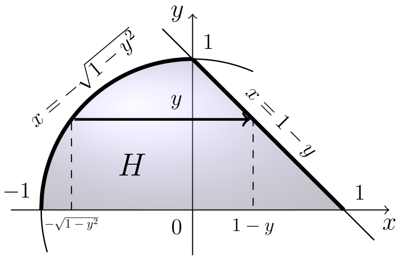
$$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx \right) dy\,.$$

Szemléltessük az integrálási tartományt! Cseréljük fel az integrálás sorrendjét!

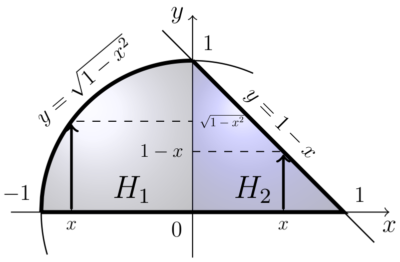
Megoldás. A H-val jelölt integrálási tartomány a

$$0 \le y \le 1, \quad -\sqrt{1-y^2} \le x \le 1-y$$

egyenlőtlenségeknek eleget tevő $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontok halmaza. Mivel H az y tengelyre nézve normáltartomány, ezért először az x változó, utána pedig az y változó szerint integrálunk. (A nyíl jelzi a belső integrálban az integrálás irányát.)



Ha a H halmazt az x tengelyre nézve normáltartománynak tekintjük, akkor először az y, utána pedig az x változó szerint kell integrálnunk. Az f függvény folytonos $\mathbb{R}^2$-őn (tehát a H halmazon is), ezért az integrálás sorrendje felcserélhető. A H tartományt ebben az esetben az alábbi módon két részre bontjuk.



A tartományokat a következő egyenlőtlenség-rendszerek határozzák meg:

$$H_1: \quad -1 \le x \le 0, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2},$$

$$H_2: \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1-x.$$

Így

$$\iint_{H_1} f = \int_{-1}^{0} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx, \qquad \iint_{H_2} f = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Mivel

$$\iint_H f = \iint_{H_1} f + \iint_{H_2} f,$$

ezért

$$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{-1}^{0} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Itt emlékeztetünk arra, hogy egyváltozós határozott integrálok kiszámításához bizonyos esetekben a Newton–Leibniz-formula nem használható. Ez a helyzet például akkor, amikor az integrálandó függvénynek van primitív függvénye (mert pl. folytonos), azonban a primitív függvény nem elemi függvény. Bebizonyítható, hogy ilyenek a következő függvények:

$$e^{\pm x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \sin x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \cos x^2 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\frac{\sin x}{x} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big), \quad \frac{\cos x}{x} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big), \quad \frac{e^x}{x} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big),$$

$$\frac{1}{\ln x} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big), \sqrt{x^3+1} \quad \big(x \in (0,+\infty)\big).$$

Ha egy kettős integrál kiszámolásánál ilyen függvények adódnak, akkor bizonyos esetekben az integrálás sorrendjének a felcserélése segíthet.

Példa. Számítsuk ki a

$$\iint\limits_H y \sin x^2 \, dx \, dy \qquad H := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; 0 \le y \le 1,\; y^2 \le x \le 1\Big\}$$

integrált!

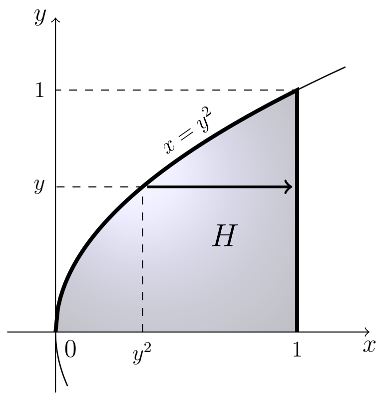
Megoldás. A H-val jelölt integrálási halmaz az

$$0 \le y \le 1, \quad y^2 \le x \le 1$$

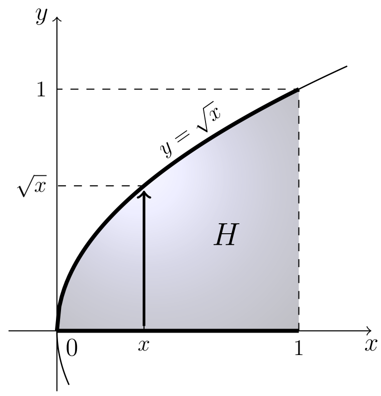
egyenlőtlenségekkel meghatározott y tengelyre nézve normáltartomány (l. az (a) ábrát). Ezért

$$\iint\limits_H y \sin x^2 \, dx \, dy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{y^2}^1 y \sin x^2 \, dx \right) dy.$$

A fenti képletben először x szerint kell integrálni, de a következő problémába ütközünk: A $\sin x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) függvénynek *van* primitív függvénye (hiszen folytonos), de az *nem elemi függvény*, így a belső (egyváltozós) integrál kiszámítására a Newton–Leibniz-tétel *nem alkalmazható.* Próbáljuk meg az integrálás sorrendjét felcserélni, azaz először y szerint integrálni. Ezt megtehetjük, mert a szóban forgó halmaz az x tengelyre nézve is normáltartomány, amelyet a (b) ábra alatti egyenlőtlenségek határoznak meg.



(a) ábra
H az y-ra normáltartomány
$0 \le y \le 1, \quad y^2 \le x \le 1$



(b) ábra
H az x-re normáltartomány
$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le \sqrt{x}$

(A nyíl jelzi az eredeti felírásban, illetve az integrálok felcserélése után a belső integrálok irányát.)

Így

$$\iint\limits_H y \sin x^2 \, dx \, dy = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\sqrt{x}} y \sin x^2 \, dy \right) dx = \int\limits_0^1 (\sin x^2) \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x \cdot \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^1 2x \cdot \sin x^2 \, dx = \frac{1}{4} \Big[-\cos x^2 \Big]_0^1 = \frac{1}{4} \Big(1 - \cos 1 \Big).$$