1. gyakorlat

VISSZATEKINTÉS DIFFERENCIÁL- ÉS INTEGRÁLSZÁMÍTÁSBÓL TANULTAKRA

Egyváltozós valós értékű függvények deriváltja

Emlékeztető. Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény ***differenciálható*** (vagy ***deriválható***) az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, ha létezik és véges az

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \left(= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$$

határérték. Jelben: $f \in D\{a\}$. Ez egy $0/0$ típusú határérték.

Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $\big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\big\} \neq \emptyset$, akkor az

$$\big\{x \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\big\} \ni x \mapsto f'(x)$$

függvényt az f ***deriváltfüggvényének*** (vagy ***differenciálhányados-függvényének***) nevezzük, és az f' szimbólummal jelöljük. Néhány elemi függvény deriváltját tartalmazza `ez a táblázat`.

Tétel. *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$ pontban. Ekkor*

1. *a szorzó konstansokat ki tudjuk emelni a deriválásból, azaz*

$$cf \in D\{a\} \quad \text{és} \quad (cf)'(a) = cf'(a) \qquad (c \in \mathbb{R})$$

2. *tagokból álló függvényeket tagonként deriválhatjuk, azaz*

$$f + g \in D\{a\} \quad \text{és} \quad (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

3. *egy szorzat deriváltja az az összeg, amelynek tagjai az egyik tényező deriváltja megszorozva a másik tényezővel, azaz*

$$f \cdot g \in D\{a\} \quad \text{és} \quad (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

4. *ha még a $g(a) \neq 0$ feltétel is teljesül, akkor*

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \text{és} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Tétel. *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és valamilyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$ pontban $g \in D\{a\}$, továbbá $f \in D\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in D\{a\}$, és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

1. Feladat. *Adjuk meg a következő függvények deriváltját!*

a) $f(x) := \left(5x^2 + 3x\right)^{2022} \qquad (x \in \mathbb{R})$

b) $f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}} \qquad (x \geq 0),$

c) $f(x) := \sin \dfrac{x^2 + 1}{x + 3} \qquad (x > -3),$

d) $f(x) := \sin^2 \left(\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + 1\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$

Megoldás.

a) Az f függvény a $h(t) := t^{2022}$ $(t \in \mathbb{R})$ külső és a $g(x) := 5x^2 + 3x$ $(x \in \mathbb{R})$ belső függvény kompozíciója:

$$f(x) = \big(h \circ g\big)(x) = h\big(g(x)\big) = \big(g(x)\big)^{2022} = \big(5x^2 + 3x\big)^{2022} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel $\forall x \in \mathbb{R}$ pontban $g \in D\{x\}$ és $g'(x) = 10x + 3$, illetve $h \in D\{g(x)\}$ és $h'(t) = 2022\, t^{2021}$ $(t \in \mathbb{R})$, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel feltételei teljesülnek. Így $f = h \circ g \in D(\mathbb{R})$ és

$$f'(x) = \big(h \circ g\big)'(x) = h'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = 2022\,\big(g(x)\big)^{2021} \cdot g'(x) =$$

$$= \underline{\underline{2022\,\big(5x^2 + 3x\big)^{2021} \cdot \big(10x + 3\big)}}\,.$$

b) Az f függvény a $h(t) := \sqrt{t}$ $(t \geq 0)$ külső és a $g(x) := x + \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ belső függvény kompozíciója:

$$f(x) = \big(h \circ g\big)(x) = h\big(g(x)\big) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x + \sqrt{x}} \quad (x \geq 0).$$

Mivel $\forall x > 0$ pontban $g \in D\{x\}$, $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, és $h \in D\{g(x)\}$, $h'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ $(t > 0)$, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel feltételei ezekben a pontokban teljesülnek. Így $f = h \circ g \in D(0, +\infty)$ és

$$f'(x) = \big(h \circ g\big)'(x) = h'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}}\,.$$

Az f függvény a 0 pontban nem deriválható.

c) Az f függvény a $h(t) := \sin t$ $(t \in \mathbb{R})$ külső és a $g(x) := \dfrac{x^2 + 1}{x + 3}$ $(x > -3)$ belső függvény kompozíciója. Ezek a függvények az értelmezési tartományuk minden pontjában deriválhatók, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel szerint $f \in D(-3, +\infty)$, és a deriváltfüggvény:

$$f'(x) = \left(\sin \frac{x^2 + 1}{x + 3}\right)' = \cos \frac{x^2 + 1}{x + 3} \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x + 3}\right)' =$$

$$= \cos \frac{x^2 + 1}{x + 3} \cdot \frac{\big(x^2 + 1\big)' \cdot (x + 3) - \big(x^2 + 1\big) \cdot \big(x + 3\big)'}{(x + 3)^2} =$$

$$= \cos \frac{x^2 + 1}{x + 3} \cdot \frac{2x \cdot (x + 3) - \big(x^2 + 1\big) \cdot 1}{(x + 3)^2} = \underline{\underline{\cos \frac{x^2 + 1}{x + 3} \cdot \frac{x^2 + 6x - 1}{(x + 3)^2}}}\,.$$

d) Többszörösen összetett függvényről van szó. Az elemi függvények deriváltjait, valamint az összetett függvény deriválására vonatkozó tételt többször egymás után (kívülről befele haladva) alkalmazva azt kapjuk, hogy $f \in D(\mathbb{R})$, és a deriváltfüggvény:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sin^2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)' = \\
&= 2\sin\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\cdot\left(\sin\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)' = \\
&= 2\sin\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\cdot\cos\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\cdot\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)' = \\
&= \sin\left(2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\cdot\left(\sqrt{1+\cos^2 x}\right)' = \\
&= \frac{\sin\left(2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}\cdot(1+\cos^2 x)' = \\
&= \frac{\sin\left(2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x) = \\
&= \underline{\underline{-\frac{\sin\left(2\left(\ln\sqrt{1+\cos^2 x}+1\right)\right)}{2\left(1+\cos^2 x\right)}\cdot\sin 2x}}\,.
\end{aligned}$$

A fenti átalakításokban kétszer alkalmaztuk a $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ azonosságot.

Egyváltozós valós értékű függvények határozatlan integrálja

Emlékeztető. Legyen adott az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy a $F : I \to \mathbb{R}$ függvény f ***primitív függvénye***, ha $F \in D(I)$ és $F'(x) = f(x)$ $(x \in I)$.

Az $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett f függvény primitív függvényeinek a halmazát f ***határozatlan integráljának*** nevezzük, és így jelöljük:

$$\int f := \int f(x)\,dx := \{F : I \to \mathbb{R} \mid F \in D \text{ és } F' = f\}.$$

Ha $F \in \int f$, akkor ezt az alábbi formában fogjuk írni:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad (x \in I).$$

Az alapintegrálokat ebben a táblázatban soroltuk fel.

Tétel. **(A határozatlan integrál linearitása)** *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye és*

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx \qquad (x \in I).$$

Tétel. **(Az első helyettesítési szabály)** *Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok és $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ függvények. Tegyük fel, hogy $g \in D(I)$, $\mathcal{R}_g \subset J$ és az f függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + c \qquad (x \in I),$$

ahol F az f függvény egy primitív függvénye.

Ennek speciális esetei

- $\int \frac{f'}{f}$ ***alakú integrálok***: Ha $f : I \to \mathbb{R}$, $f > 0$ és $f \in D(I)$, akkor

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c \quad (x \in I)}.$$

- $\int f^\alpha \cdot f'$ ***alakú integrálok***: Ha $f : I \to \mathbb{R}$, $f > 0$, $f \in D(I)$ és $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, akkor

$$\boxed{\int f^\alpha(x) f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c \quad (x \in I)}.$$

  Ha $\alpha \in \mathbb{N}$, akkor az $f > 0$ feltétel nem szükséges.

- $\int f(ax+b)\,dx$ ***alakú integrálok (lineáris helyettesítés)***: Ha a $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek van egy $F : I \to \mathbb{R}$ primitív függvénye, $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \neq 0$, akkor

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c \quad (ax+b \in I)}.$$

Tétel. **(A parciális integrálás szabálya)** *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $f, g \in D(I)$ és az $f'g$ függvénynek létezik primitív függvénye I-n. Ekkor az fg' függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \quad (x \in I).$$

2. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!*

a) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{x^3}\,dx \quad \Big(x \in (0, +\infty)\Big)$, *b)* $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2\, x\,dx \quad \Big(x \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big)\Big)$,

c) $\displaystyle\int \frac{8x+14}{\sqrt[4]{(2x^2+7x+8)^5}}\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$, *d)* $\displaystyle\int \mathrm{tg}\, x\,dx \quad \Big(x \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big)\Big)$,

e) $\displaystyle\int \sin^2 x \quad (x \in \mathbb{R})$, *f)* $\displaystyle\int x^2 \sin 2x\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$.

Megoldás. Az integrandusok „alkalmas” átalakítása után:

a) Elemi átalakítások után, ha $x \in (0, +\infty)$, akkor

$$\int \frac{(x+1)^2}{x^3}\,dx = \int \frac{x^2+2x+1}{x^3}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \int \left(\frac{1}{x} + 2x^{-2} + x^{-3}\right)dx =$$
$$= \ln x + 2\,\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-2}}{-2} + c = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + c.$$

b) Elemi átalakítások után, ha $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, akkor

$$\int \mathrm{tg}^2\, x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \mathrm{tg}\, x - x + c.$$

c) Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\int \frac{8x+14}{\sqrt[4]{(2x^2+7x+8)^5}}\,dx = 2\int (2x^2+7x+8)^{-5/4}(4x+7)\,dx = (f^\alpha \cdot f' \text{ típus}) =$$

$$= 2\,\frac{(2x^2+7x+8)^{-1/4}}{-1/4} + c = -\,\frac{8}{\sqrt[4]{2x^2+7x+8}} + c$$

d) Ha $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, akkor

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left(\frac{f'}{f} \text{ típus}\right) = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln\cos x + c.$$

e) A már ismert

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

összefüggésből (azt mondjuk, hogy $\sin^2 x$-et „linearizáltuk”)

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \big(\text{lineáris helyettesítés}\big) =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{2} + c = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c \quad (x \in \mathbb{R}).$$

f) Kétszer fogunk egymás után parciálisan integrálni.

$$\int x^2 \sin 2x\,dx = \int x^2 \left(\frac{-\cos 2x}{2}\right)' dx = x^2\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right) - \int 2x\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right) dx =$$

$$= -\,\frac{x^2\cos 2x}{2} + \int x\cos 2x\,dx.$$

Másrészt

$$\int x\cos 2x\,dx = \int x\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)' dx = x\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) - \int 1\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx =$$

$$= \frac{x\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + c$$

Összefoglalva

$$\int x^2\sin 2x\,dx = -\,\frac{x^2\cos 2x}{2} + \frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + c \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Emlékeztető. Tetszőleges $\frac{P}{Q}$ racionális törtfüggvény integrálását az teszi lehetővé, hogy *minden ilyen tört felírható egy polinomnak és elemi törteknek* (*az ún.* ***parciális törteknek***) *az összegeként.*

1. lépés ***A polinom „leválasztása” (maradékos osztás).***

Legyenek P és $Q \not\equiv 0$ polinomok. Ekkor egyértelműen léteznek olyan T és P^* polinomok, hogy a P^* polinom fokszáma kisebb, mint a Q polinom fokszáma, és

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P^*(x)}{Q(x)} \qquad (x \in \mathcal{D}_Q).$$

A felbontást *polinomosztással*, de néhány esetben egyszerű átalakításokkal kaphatjuk meg.

2. lépés. ***A nevező szorzatra bontása.***

A nevezőben levő Q polinomot (ameddig csak lehet) valós együtthatós polinomok szorzatára bontjuk. A felbontásban csak elsőfokú tényezők, illetve olyan másodfokú tényezők szerepelhetnek, amelyeknek nincsenek valós gyökei.

3. lépés. ***Alkalmazzuk az elemi törtek összegére bontásának a módszerét.***

Itt már csak olyan $\frac{P}{Q}$ alakú törteket tekintünk, amelyeknél a **számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma**, és sikerült ***Q szorzatrabontását*** elvégezni, azaz túl vagyunk az első két lépésen. Az ilyen törtek a nevezőtől függően elemi törtek összegére bonthatók. A felbontást *határozatlan együtthatókkal* keressük.

Tétel. **(A második helyettesítési szabály)** *Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok. Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$, $\mathcal{R}_g = I$, $g \in D(J)$, $g' > 0$ J-n (vagy $g' < 0$ J-n) és az $(f \circ g) \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az f függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} \qquad (x \in I).$$

3. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!*

$$a)\quad \int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1}\,dx \quad \big(x \in (-1,1)\big), \qquad b)\quad \int \frac{1}{e^{2x}+4}\,dx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Megoldás.

a) A számláló fokszáma **nagyobb**, mint a nevező fokszáma, ezért először maradékos osztást kell végeznünk:

$$(*) \qquad \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1} = \frac{x\big(x^2-1\big)+\big(x^2-1\big)+4}{x^2-1} = x+1+\frac{4}{x^2-1}.$$

A fennmaradó törtet parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{4}{x^2-1} = \frac{4}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}.$$

A bal és jobb oldali tört számlálója megegyezik minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
Ha $x = 1$, akkor $4 = A \cdot 2 + B \cdot 0 \quad \Longrightarrow \quad A = 2$.
Ha $x = -1$, akkor $4 = A \cdot 0 + B \cdot (-2) \quad \Longrightarrow \quad B = -2$.
Ezért

$$(**) \qquad \frac{4}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}.$$

$(*)$ és $(**)$ alapján azt kapjuk, hogy ha $-1 < x < 1$, akkor

$$\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1}\,dx = \int \left(x+1+\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + 2\ln(1-x) - 2\ln(x+1) + c = \frac{x^2}{2} + x + \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)^2 + c.$$

b) Alkalmazzuk a $t = e^x$ helyettesítést. Ekkor

$$x = \ln t =: g(t).$$

Mivel $x \in \mathbb{R}$, ezért $\mathcal{R}_g = \mathbb{R}$, következésképpen $\mathcal{D}_g = (0, +\infty)$. A g függvény deriválható, és

$$g'(t) = \frac{1}{t} > 0 \quad \big(\forall t \in (0, +\infty)\big)$$

alapján g szigorúan monoton növekvő, következésképpen invertálható és

$$g^{-1}(x) = e^x = t \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A második helyettesítési szabályt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{e^{2x}+4}\,dx = \int \frac{1}{t^2+4} \cdot \frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t(t^2+4)}\,dt.$$

Parciális törtekre bontással, közös nevezőre hozással és átrendezéssel:

$$\frac{1}{t(t^2+4)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+4} = \frac{(A+B)t^2 + Ct + 4A}{t(t^2+4)}.$$

Az együtthatók egyenlőségéből azt kapjuk, hogy $C = 0$, $A = 1/4$ és $A + B = 0$, azaz $B = -1/4$. Ezért, ha $x > 0$, akkor

$$\int \frac{1}{t(t^2+4)}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{t}{t^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{8}\int \frac{2t}{t^2+4}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\ln t - \frac{1}{8}\ln(t^2+4) + c.$$

Ezért

$$\int \frac{1}{e^{2x}+4}\,dx = \frac{1}{4}\ln t - \frac{1}{8}\ln(t^2+4) + c\Big|_{t=e^x} = \frac{x}{4} - \frac{\ln(e^{2x}+4)}{8} + c.$$

Egyváltozós valós értékű függvények határozott integrálja

Emlékeztető. ***Tétel.*** **(Newton–Leibniz-formula)** *Tegyük fel, hogy*

- $f \in R[a,b]$ *és*
- *az f függvénynek van primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon.*

Ekkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b,$$

ahol F az f függvény egy primitív függvénye.

4. Feladat. *Számítsuk ki az*

$$\int_{10}^{66} \frac{1}{x - \sqrt[3]{x-2} - 2}\,dx$$

határozott integrált!

Megoldás. A $t = \sqrt[3]{x-2}$ helyettesítést alkalmazzuk:

$$t = \sqrt[3]{x-2} \quad (10 < x < 66) \qquad \Longrightarrow \qquad x = t^3 + 2 =: g(t) \quad (2 < t < 4) \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad g'(t) = 3t^2 > 0 \quad (2 < t < 4) \qquad \Longrightarrow \qquad g \ \uparrow \quad (2,4)\text{-en} \qquad \Longrightarrow \qquad \exists g^{-1}.$$

A második helyettesítési szabály alapján, ha $10 < x < 66$, akkor

$$\int\limits_{10}^{66} \frac{1}{x - \sqrt[3]{x-2} - 2}\, dx = \int\limits_{2}^{4} \frac{1}{t^3 + 2 - t - 2} \cdot 3t^2\, dt = \frac{3}{2} \cdot \int\limits_{2}^{4} \frac{2t}{t^2 - 1}\, dt = (f'/f \quad \text{típus}) =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \Big[\ln(t^2 - 1)\Big]_2^4 = \frac{3}{2} \cdot \Big(\ln 15 - \ln 3\Big) = \frac{3}{2} \cdot \ln 5.$$

Emlékeztető. Két $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos és Riemann-integrálható függvény esetében, ha $g(x) \le f(x)$ minden $x \in [a,b]$ esetén, akkor a függvények az $x = a$ és $x = b$ egyenesekkel által közrezárt

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$$

síkidom területét a

$$T(B) = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx$$

határozott integrállal értelmezzük.

5. Feladat. *Számítsa ki az*

$$y = \frac{1}{9 + x^2}, \qquad y = \frac{2x^2 - 17}{18} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkidom területét!

Megoldás. A szóban forgó síkidom meghatározásához először meg kell keresnünk a görbék metszéspontjait. Ehhez szükséges megoldani a

$$\frac{1}{9 + x^2} = \frac{2x^2 - 17}{18}$$

egyenletet. A $t := x^2$ helyettesítéssel:

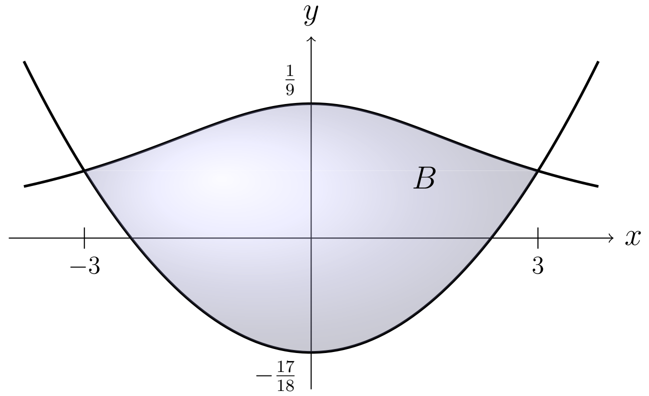
$$\frac{1}{9 + t} = \frac{2t - 17}{18} \qquad \Longrightarrow \qquad 18 = (2t - 17)(9 + t) = 2t^2 + t - 153 \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad 2t^2 + t - 171 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1369}}{4} = \frac{-1 \pm 37}{4} \quad \Longrightarrow \quad t_1 = -\frac{38}{4},\ t_2 = 9.$$

Ebből csak az $x^2 = t = 9$ lehetséges, amiből $x = -3$ és $x = 3$ adódik. Az előző eredmények alapján a síkidom

$$B := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -3 \le x \le 3,\ \frac{2x^2 - 17}{18} \le y \le \frac{1}{9 + x^2} \right\},$$

ami az alábbi ábrán látható.



Ekkor

$$T(B) = \int_{-3}^{3} \left(\frac{1}{9+x^2} - \frac{2x^2-17}{18} \right) dx = \int_{-3}^{3} \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{9}} - \frac{2x^2}{18} + \frac{17}{18} \right) dx =$$

$$\int_{-3}^{3} \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} - \frac{x^2}{9} + \frac{17}{18} \right) dx = \left[\frac{1}{9} \cdot \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3}}{1/3} - \frac{x^3}{27} + \frac{17}{18}\, x \right]_{-3}^{3} =$$

$$= \left[\frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3} - \frac{x^3}{27} + \frac{17}{18}\, x \right]_{-3}^{3} = \left(\frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} 1 - 1 + \frac{17}{6} \right) - \left(\frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg}(-1) + 1 - \frac{17}{6} \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \operatorname{arc\,tg} 1 - 2 + \frac{17}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{11}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6} + \frac{11}{3}}}.$$

Improprius integrálok

Emlékeztető. Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$ és $f : (a, b] \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f \in R[x, b]$ minden $x \in (a, b)$ esetén. Vezessük be a

$$G(x) := \int_x^b f(t)\, dt \qquad \big(x \in (a, b)\big)$$

függvényt. Azt mondjuk, hogy az f függvény ***impropriusan integrálható***, ha $\exists \lim_a G \in \mathbb{R}$ véges határérték. Ekkor az

$$\int_a^b f := \lim_{x \to a} G(x)$$

számot az f ***improprius integráljának*** nevezzük.

Ha $f \in R[a, b]$, akkor az improprius integrál megegyezik a szokásos határozott integrállal.

Analóg módon értelmezhető $-\infty < a < b \leq +\infty$ esetén az $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ függvény improprius integrálja az

$$\int_a^b f := \lim_{x \to b} G(x), \qquad G(x) := \int_a^x f(t)\, dt \qquad \big(x \in (a, b)\big)$$

összefüggéssel.

Legyen $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ és $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f \in R[x, y]$ minden $a < x < y < b$ esetén. Azt mondjuk, hogy az f függvény ***impropriusan integrálható***, ha minden $c \in (a, b)$ esetén $f_{|(a,c]}$ és $f_{|[c,b)]}$ impropriusan integrálható. Ekkor

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Nem nehéz meggondolni, hogy a c értéke nem befolyásolja az $\int_a^b f$ eredményét.

6. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!*

$$a)\quad \int\limits_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx, \qquad\qquad b)\quad \int\limits_0^{2} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx.$$

Megoldás.

a) Parciális integrálással

$$\int xe^{-2x}\,dx = \int x\cdot\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)'\,dx = x\cdot\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right) - \int (x)'\cdot\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)\,dx =$$

$$= -\frac{xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + c \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Ezért

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^{t} xe^{-2x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^t =$$

$$= -\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{2e^{2t}} + \frac{1}{4e^{2t}} - \left(\frac{1}{4}\right)\right) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}},$$

hiszen

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{2e^{2t}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{4e^{2t}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

b) Ha $0 < x < 2$. akkor

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx = \arcsin(x-1) + c.$$

Ezért

$$\int\limits_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \lim_{t\to0+0}\int\limits_t^{1} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \lim_{t\to0+0}\Big[\arcsin(x-1)\Big]_t^1 =$$

$$= \lim_{t\to0+0}\Big(0 - \arcsin(t-1)\Big) = \frac{\pi}{2},$$

$$\int\limits_1^{2} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \lim_{t\to2-0}\int\limits_1^{t} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \lim_{t\to2-0}\Big[\arcsin(x-1)\Big]_1^t =$$

$$= \lim_{t\to2-0}\Big(\arcsin(t-1) - 0\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Így

$$\int\limits_0^{2} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \int\limits_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx + \int\limits_1^{2} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$