Numerikus Módszerek

1. Zh megoldása

2023. október 27.

1. (a) $M_\infty = (1-2^{-6})\cdot 2^K = \frac{63}{64}\cdot 2^K \geq 123$. Könnyen ellenőrizhető, hogy a 7 a legkisebb egész szám, amelyik megoldása az egyenlőtlenségnek, ezért $K = 7$. (2 pont)

   (b) Írjuk fel $1,37$-et bináris számként:

$$\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & 37 \\ \hline 0 & 74 \\ 1 & 48 \\ 0 & 96 \\ 1 & 92 \\ 1 & 84 \\ \hline 1 & 68 \end{array}$$

melyből $1,33 = 1.01011|1\ldots_2 \approx 1,01100_2$. (2 pont)
A mantissza hosszának megfelelõen az első 6 jegyet kell megtartanunk. Mivel az ez után következõ 7. jegy egyes, ezért felfelé kerekítettünk. Ellenőriznünk kell, hogy a kapott szám vagy az alsó szomszédja van-e közelebb az 1.37-hez.

$$[101100 \mid 1] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)\cdot 2^1 = \frac{8+2+1}{8} = \frac{11}{8} = \frac{44}{32}$$

Az alsó szomszédja:

$$[101011 \mid 1] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right)\cdot 2^1 = \frac{32+8+2+1}{32} = \frac{43}{32}$$

Mivel

$$\frac{43}{32} < 1.37 < \frac{44}{32} \quad \iff \quad 43 < 43,84 < 44,$$

ezért $fl(1,37) = [101100 \mid 1] = \frac{11}{8}$ a megfeleltetett gépi szám. (3 pont)

   (c) $fl(2) = [100000 \mid 2]$.
Az $fl(1,37)$ ideiglenes közös karakterisztikája kerekítéssel: $[101100 \mid 1] \to [010110 \mid 2]$. (1 pont)

Összeadás a mantisszákra:

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \implies fl(1,37)\oplus fl(2) = [110110 \mid 2]$$

$$[110110 \mid 2] = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)\cdot 2^2 = \frac{16+8+2+1}{8} = \frac{27}{8}$$

(3 pont)

(d) $\Delta_{fl(1,37)} = \frac{1}{2}2^{-6} \cdot 2^1 = 2^{-6} = \frac{1}{64}$
$\Delta_{fl(1,33) \oplus fl(4)} = \frac{1}{2}2^{-6} \cdot 2^2 = \frac{1}{32}$ (2 pont)

2. Adjunk abszolút hibakorlátot a c mennyiséghez.

- $\Delta_{a+b} = \Delta_{a-b} = \Delta_a + \Delta_b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
- $\Delta_c = \Delta_{(a+b)(a-b)} = |a+b| \cdot \Delta_{a-b} + |a-b| \cdot \Delta_{a+b} = (20+10) \cdot \frac{3}{2} + (20-10) \cdot \frac{3}{2} = 45+15 = 60$

(3 pont)

Most tekintsük a d mennyiséget.

- $\Delta_{aa} = |a|\Delta_a + |a|\Delta_a = 2|a|\Delta_a = 2 \cdot 20 \cdot 1 = 40$
- $\Delta_{bb} = 2|b|\Delta_b = 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 10$
- $\Delta_d = \Delta_{aa-bb} = \Delta_{aa} + \Delta_{bb} = 40 + 10 = 50$

(3 pont)

Mivel

$$\Delta_d = 50 < 60 = \Delta_c,$$

a d számolási mód ad pontosabb eredményt.

(1 pont)

3. (a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{9} & -3 & 6 & 18 \\ -3 & 10 & -11 & -24 \\ 6 & -11 & 14 & 31 \end{array}\right], \qquad \begin{array}{c} (2) + \frac{1}{3} \cdot (1), \\ (3) - \frac{2}{3} \cdot (1) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & -3 & 6 & 18 \\ 0 & \mathbf{9} & -9 & -18 \\ 0 & -9 & 10 & 19 \end{array}\right], \qquad (3) + 1 \cdot (2)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & -3 & 6 & 18 \\ 0 & 9 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

(4 pont)

A felsőháromszög alakból $\det(A) = 9 \cdot 9 \cdot 1 = 81$. (1 pont)

Oldjuk meg az egyenletrendszert visszahelyettesítéssel:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_2 &= \frac{1}{9} \cdot (-18 + 9 \cdot 1) = -1 \\ x_1 &= \frac{1}{9} \cdot (18 - 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-1)) = 1 \end{aligned}$$

Így tehát:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(2 pont)

(b) A GE 1. lépésében az 1. oszlopban a_{11} a maximális abszolútértékű, ezért nincs szükség sorcserére. A 2. lépésben a $|a_{22}^{(1)}| = |a_{32}^{(1)}| = 9$, ezért itt sem kell sort cserélni. Tehát nincs szükség sorcserére a részleges főelemkiválasztás során. (2 pont)

(c) Az a) feladat alapján letárolva az egyes Gauss–elinmiációs hányadosait, megkapjuk a mátrix LU felbontását:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

(d) Mivel A szimmetrikus, ezért $LDU = LDL^T$, ahol

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1 pont)

A Cholesky-felbontása $A = \widetilde{L}\widetilde{L}^T$ alakú, ahol

$$\widetilde{L} = L\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(2 pont)

4. A QR-felbontást a következő alakban keressük:

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \boldsymbol{q}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{21} & r_{22} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 11 \\ 4 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{q}_1$ kiszámítása:

$$r_{11} = \|\boldsymbol{a}_1\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{r_{11}}\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

(1 pont)

- $\boldsymbol{q}_2$ kiszámítása:

$$r_{12} = \langle \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{q}_1 \rangle = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{5} \cdot 25 = 5$$

$$\boldsymbol{a}_2 - r_{12}\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix} - 5 \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$r_{22} = \|\boldsymbol{a}_2 - r_{12}\boldsymbol{q}_1\|_2 = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10$$

$$\boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{r_{22}}(\boldsymbol{a}_2 - r_{12}\boldsymbol{q}_1) = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(3 pont)

- $\boldsymbol{q}_3$ kiszámítása:

$$r_{13} = \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{q}_1 \rangle = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 5 & 11 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \frac{25}{5} = 5$$

$$r_{23} = \langle \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{q}_1 \rangle = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 5 & 11 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = -\frac{50}{5} = -10.$$

$$\boldsymbol{a}_3 - r_{13}\boldsymbol{q}_1 - r_{23}\boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix} - 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 10 \cdot \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11-3-8 \\ -2-4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_{33} = \|\boldsymbol{a}_3 - r_{13}\boldsymbol{q}_1 - r_{23}\boldsymbol{q}_2\|_2 = 5$$

$$\boldsymbol{q}_3 = \frac{1}{r_{33}}(\boldsymbol{a}_3 - r_{13}\boldsymbol{q}_1 - r_{23}\boldsymbol{q}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3 pont)

A kapott QR felbontás:

$$Q = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 0 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(1 pont)

5. Tekintsük a LER mátrixát oszlopvektoronként.

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahhoz, hogy a mátrixot felsőháromszög alakra hozzuk, olyan Householder-transzformációt keresünk, amely a A első oszlopát $\sigma \boldsymbol{e}_1$ alakra hozza. A keresett transzformációt a $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{a}_1 - \sigma\boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{a}_1 - \sigma\boldsymbol{e}_1\|_2}$ vektor határozza meg:

- σ kiszámítása:

$$\sigma = -\mathrm{sign}(a_{11})\|\boldsymbol{a}_1\|_2 = -\sqrt{1^2 + (-1)^2} = -\sqrt{2}$$

- $\boldsymbol{v}$ kiszámítása:

$$\boldsymbol{a}_1 - \sigma\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\|\boldsymbol{a}_1 - \sigma\boldsymbol{e}_1\|_2 = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

Így tehát

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(3 pont)

A transzformációt még alkalmaznunk kell a második oszlopvektorra, $\boldsymbol{a}_2$-re és az egyenletrendszer jobb oldal vektorára, $\boldsymbol{b}$-re. Vegyük észre, hogy $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_2$, ezért elég csak egy számítást elvégeznünk:

$$H(\boldsymbol{v})\boldsymbol{a}_2 = H(\boldsymbol{v})\boldsymbol{b} = (I - 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b})$$

ahol

$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\left(\left[\begin{array}{cc} 1+\sqrt{2} & -1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array}\right]\right) = \frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

és

$$2\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b}) = 2 \cdot \frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\left[\begin{array}{c} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{array}\right] = \frac{2+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\left[\begin{array}{c} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{array}\right]$$

Mivel azonban

$$\frac{2+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2+2\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{4-2} = \frac{4+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}-4}{2} = \sqrt{2}$$

az előző kifejezés tovább egyszerűsíthető:

$$2\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b}) = \sqrt{2}\left[\begin{array}{c} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 2+\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{array}\right]$$

A fentiek alapján

$$H(\boldsymbol{v})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b}) = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} 2+\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{array}\right]$$

(3 pont)

Végül a LER a transzformáció után:

$$\left[\begin{array}{cc} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} \end{array}\right] \cdot \boldsymbol{x} = \left[\begin{array}{c} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{array}\right]$$

Visszahelyettesítéssel:

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2} = 1$$
$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2} + 1 \cdot \sqrt{2}) = 0$$

azaz

$$\boldsymbol{x} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right]$$

(2 pont)