6. előadás

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ TÍPUSÚ FÜGGVÉNYEK SZÉLSŐÉRTÉKEI

Amint azt már az „egyváltozós analízisben” is hangsúlyoztuk, a matematikai alkalmazások egyik legfontosabb fejezete a függvények szélsőértékeinek a vizsgálata. Valós-valós függvényeknél megismerkedtünk az abszolút- és a lokális szélsőértékek fogalmával, a lokális szélsőértékekre vonatkozó szükséges feltétellel, valamint több elégséges feltétellel. Most ezeket az ismereteket terjesztjük ki $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ típusú függvényekre.

Az egyváltozós esetben bevezetett fogalmak minden további nehézség nélkül átvihetők a többváltozós függvényekre.

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban* **abszolút maximuma van** (*vagy másképp fogalmazva az a pont az f függvénynek* **abszolút maximumhelye**)*, ha*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f\colon\ f(x) \leq f(a).$$

Ekkor az $f(a)$ függvényértéket az f függvény **abszolút maximumának** *nevezzük.*

Analóg módon értelmezzük az ***abszolút minimumhely*** és az ***abszolút minimum*** fogalmát.

Az abszolút maximumhelyet, illetve az abszolút minimumhelyet közösen ***abszolút szélsőértékhelynek***, az abszolút maximumot, illetve az abszolút minimumot közösen ***abszolút szélsőértéknek*** nevezzük.

Minden további nehézség nélkül definiálhatjuk ezeknek a fogalmaknak a *lokális* változatait.

2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban* **lokális maximuma van** (*vagy másképp fogalmazva az a pont az f függvénynek* **lokális maximumhelye**)*, ha van olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, hogy*

$$\forall x \in K(a)\colon\ f(x) \leq f(a).$$

Ekkor az $f(a)$ függvényértéket az f függvény **lokális maximumának** *nevezzük.*

Analóg módon értelmezzük a ***lokális minimumhely*** és a ***lokális minimum*** fogalmát.

A lokális maximumhelyet, illetve a lokális minimumhelyet közösen ***lokális szélsőértékhelynek***, a lokális maximumot, illetve a lokális minimumot közösen ***lokális szélsőértéknek*** nevezzük.

Elsőrendű szükséges feltétel a lokális szélsőértékre

A valós-valós függvények lokális szélsőértékeire vonatkozó szükséges feltétel lényeges nehézség nélkül átvihető az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvényekre.

1. Tétel (Elsőrendű szükséges feltétel a lokális szélsőértékre). *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Továbbá*

- *$f \in D\{a\}$ és*
- *az f függvénynek az a pontban lokális szélsőértéke van.*

Ekkor $f'(a) = 0$, azaz $\quad f'(a) = \big(\partial_1 f(a) \quad \partial_2 f(a) \quad \dots \quad \partial_n f(a)\big) = \big(0 \quad 0 \quad \dots \quad 0\big)$.

Bizonyítás. Legyen $i = 1, 2, \dots, n$ rögzített és tekintsük meg a

$$G_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \qquad \big(t \in K(a_i)\big)$$

valós-valós parciális függvényt! Ekkor

- ha $f \in D\{a\}$, akkor $\exists\, \partial_i f(a)$, és azt is tudjuk, hogy $G_i \in D\{a_i\}$ és $\partial_i f(a) = G_i'(a_i)$.
- ha f-nek az a pontban lokális szélsőértéke van, akkor $\exists r > 0$, hogy f-nek az a pontban abszolút szélsőértéke van a $K_r(a)$ környezetben. Azonban

$$\forall t \in (a_i - r, a_i + r) \colon (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \in K_r(a),$$

  ami azt jelenti, hogy G_i-nek az a_i pontban abszolút szélsőértéke van az $(a_i - r, a_i + r)$ környezetben, azaz G_i-nek az a_i pontban lokális szélsőértéke van.

Ekkor a valós-valós függvényeknél tanult, a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel szerint $G_i'(a_i) = 0$, ami éppen azt jelenti, hogy $\partial_i f(a) = 0$.

3. Definíció. *Az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény* **stacionárius pontja**, *ha $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = 0$.*

Megjegyzések.

1. A tétel tehát azt állítja, hogy a lokális szélsőértékhelyek szükségképpen a függvény stacionárius pontjai. Az $f'(a) = 0$ azonban csak *szükséges*, de *nem elégséges* feltétel a lokális szélsőértékre. Az $n = 1$ esetben például már ismerjük az $f(x) := x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt, amelynek az $a = 0$ stacionárius pontjában nincs lokális szélsőértéke. Az $n = 2$ esetben az $f(x) := x^2 - y^2$ $\big((x, y) \in \mathbb{R}^2)\big)$ függvénynek az $a = (0, 0)$ pont stacionárius pontja, de itt sincs lokális szélsőérték.

2. A tétel értelmében egy $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény stacionárius pontjainak megkeresésére szükséges megoldani a

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ \partial_2 f(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ \partial_n f(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

   egyenletrendszert. Csak az így kapott $(x_1, \dots, x_n)$ pontok *lehetnek* az f függvény lokális szélsőértékhelyei.

Másodrendű elégséges feltétel a lokális szélsőértékre

A fentiek alapján a stacionárius pontok között lehetnek olyanok, amelyekben a függvénynek nincs lokális szélsőértéke. Fontos kérdés tehát annak eldöntése, hogy egy stacionárius hely vajon lokális szélsőértékhely-e. Ennek eldöntéséhez a valós-valós esetben az elsőrendű- vagy a másodrendű elégséges feltételt használtuk. Az elsőrendű elégséges feltételhez nem tudunk megfelelő állítást kimondani többváltozós függvények esetén. A másodrendű elégséges feltétel azt mondja ki, hogy ha $f \in D^2\{a\}$, $f'(a) = 0$ és $f''(a) > 0$ (illetve $f''(a) < 0$), akkor az f függvénynek az a pontban lokális minimuma (illetve lokális maximuma) van. Ezt fogjuk általánosítani $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvényekre.

A többváltozós esetben a kiindulópontunk *alapötlete* a Peano-féle maradéktagos Taylor-formula alkalmazása. Az abban szereplő

$$\mathbb{R}^n \ni h \mapsto \left\langle f''(a) \cdot h, h \right\rangle \in \mathbb{R}$$

tagot fogjuk először megvizsgálni. Emlékezzük arra, hogy ha $f \in D^2\{a\}$, akkor a Young-tétel miatt az $f''(a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ másodrendű parciális deriváltakat tartalmazó Hesse-féle mátrix szimmetrikus.

4. Definíció. *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy szimmetrikus mátrix. Ekkor a*

$$Q(h) := \langle A \cdot h, h \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j \in \mathbb{R} \qquad \left(h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n\right)$$

függvényt az A mátrix által meghatározott **kvadratikus alaknak** *nevezzük.*

A $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus alakok többváltozós polinomfüggvények, ezért minden pontban folytonosak és differenciálhatóak. Másrészt minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$Q(\lambda h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot (\lambda h_i) \cdot (\lambda h_j) = \lambda^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j = \lambda^2 Q(h) \qquad (h \in \mathbb{R}^n).$$

Mivel a $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratikus alakok folytonosak a $\left\{h \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|h\| = 1\right\}$ korlátos és zárt halmazon, így a Weierstrass-tétel szerint

$$\exists m_Q := \min\left\{Q(h) \;\middle|\; h \in \mathbb{R}^n,\ \|h\| = 1\right\} \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \exists M_Q := \max\left\{Q(h) \;\middle|\; h \in \mathbb{R}^n,\ \|h\| = 1\right\} \in \mathbb{R}.$$

Ha $h \neq 0$, akkor

$$Q(h) = Q\left(\|h\| \cdot \frac{h}{\|h\|}\right) = \|h\|^2 \cdot Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right),$$

és mivel $\frac{h}{\|h\|}$ egységvektor, így

$$(*) \qquad m_Q \|h\|^2 \le Q(h) \le M_Q \|h\|^2 \qquad (h \in \mathbb{R}^n).$$

5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix, illetve a hozzá tartozó $Q(h) = \langle A \cdot h, h \rangle$ $(h \in \mathbb{R}^n)$ kvadratikus alak*

- **pozitív definit**, *ha $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ esetén $Q(h) > 0$,*
- **negatív definit**, *ha $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ esetén $Q(h) < 0$.*

A $(*)$ egyenlőtlenségből és az m_Q, M_Q számok értelmezéséből következik, hogy Q pontosan pozitív definit, ha $m_Q > 0$, illetve negatív definit, ha $M_Q < 0$.

Példák. Legyen $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Ekkor a $Q(h) := h_1^2 + h_2^2$ kvadratikus alak pozitív definit, ill. a $Q(h) := -h_1^2 - h_2^2$ kvadratikus alak negatív definit.

2. Tétel (Másodrendű elégséges feltétel a lokális szélsőértékre). *Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és $f \in C^2\{a\}$. Tegyük fel, hogy*

- $f'(a) = 0$,
- *az $f''(a)$ Hesse-féle mátrix pozitív (negatív) definit.*

Ekkor az f függvénynek az a pontban lokális minimuma (maximuma) van.

Bizonyítás. A Peano-féle maradéktagos Taylor-formula szerint van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a $\lim\limits_0 \varepsilon = 0$ feltételnek eleget tevő függvény, hogy

$$f(a+h) = f(a) + \big\langle f'(a), h \big\rangle + \tfrac{1}{2}\big\langle f''(a) \cdot h, h \big\rangle + \varepsilon(h)\,\|h\|^2 \qquad \big(h \in \mathbb{R}^n,\ a+h \in \mathcal{D}_f\big).$$

Ha $f'(a) = 0$ és $Q(h) := \langle f''(a)h, h\rangle$ akkor a fenti egyenletből:

$$(\#) \qquad f(a+h) - f(a) = \tfrac{1}{2}Q(h) + \varepsilon(h)\,\|h\|^2 \qquad \big(h \in \mathbb{R}^n,\ a+h \in \mathcal{D}_f\big).$$

Ha Q pozitív definit, akkor $(*)$ miatt

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{m_Q}{2}\,\|h\|^2 + \varepsilon(h)\,\|h\|^2 = \left(\frac{m_Q}{2} + \varepsilon(h)\right)\,\|h\|^2.$$

Mivel $\lim\limits_0 \varepsilon = 0$, így $\exists \delta > 0,\ \forall h \in K_\delta(0)\colon |\varepsilon(h)| < m_Q/4$. Ezért, ha $h \in K_\delta(0)$, akkor

$$f(a+h) - f(a) \geq \left(\frac{m_Q}{2} - |\varepsilon(h)|\right)\,\|h\|^2 \geq \left(\frac{m_Q}{2} - \frac{m_Q}{4}\right)\,\|h\|^2 = \frac{m_Q}{4}\,\|h\|^2 \geq 0.$$

Az $x = a + h$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\forall x \in K_\delta(a)\colon f(x) \geq f(a),$$

ami azt jelenti, hogy az f függvénynek lokális minimuma van az a pontban.

Hasonlóan igazolható, hogy ha Q negatív definit, akkor az f függvénynek lokális maximuma van az a pontban.

Másodrendű szükséges feltétel a lokális szélsőértékre

6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix, illetve a hozzá tartozó $Q(h) = \langle A \cdot h, h\rangle$ $(h \in \mathbb{R}^n)$ kvadratikus alak*

- **pozitív szemidefinit**, *ha $\forall h \in \mathbb{R}^n$ esetén $Q(h) \geq 0$,*
- **negatív szemidefinit**, *ha $\forall h \in \mathbb{R}^n$ esetén $Q(h) \leq 0$,*
- **indefinit**, *ha Q pozitív és negatív értéket is felvesz.*

A $(*)$ egyenlőtlenségből és az m_Q, M_Q számok értelmezéséből következik, hogy Q pontosan pozitív szemidefinit, ha $m_Q \geq 0$, illetve negatív szemidefinit, ha $M_Q \leq 0$. Ha Q nem (pozitív vagy negatív) szemidefinit, akkor indefinit, és ekkor $m_Q < 0 < M_Q$.

Példák. Legyen $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Ekkor a $Q(h) := h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2 = (h_1 - h_2)^2$ kvadratikus alak pozitív szemidefinit, a $Q(h) := -(h_1 - h_2)^2$ kvadratikus alak negatív szemidefinit, ill. a $Q(h) := h_1^2 - h_2^2$ kvadratikus alak indefinit.

Megjegyzés. A definíciókból látható, hogy

- minden kvadratikus alak csak pozitív szemidefinit, negatív szemidefinit, vagy indefinit lehet.
- ha egy kvadratikus alak pozitív definit, akkor pozitív szemidefinit is, ill. ha egy kvadratikus alak negatív definit, akkor negatív szemidefinit is. $\blacksquare$

3. Tétel (Másodrendű szükséges feltétel a lokális szélsőértékre). *Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és $f \in C^2\{a\}$. Ha az f függvénynek az a pontban lokális minimuma (maximuma) van, akkor*

- *$f'(a) = 0$,*
- *az $f''(a)$ Hesse-féle mátrix pozitív (negatív) szemidefinit.*

Bizonyítás. Az elsőrendű szükséges feltétel miatt $f'(a) = 0$. A Hesse-féle mátrixszal kapcsolatos állítás igazolásához tegyük fel, hogy f-nek az a pontban lokális minimuma van (lokális maximum esetén hasonlóan igazolható). Így $\exists K(a)$ környezet, hogy $f(x) - f(a) \geq 0$ minden $x \in K(a)$ esetén. Rögzítsünk egy tetszőleges $h \in \mathbb{R}^n$ pontot. Ekkor

$$\exists r > 0,\ \forall t \in (-r, r) \colon a + th \in K(a).$$

A Peano-féle maradéktagos Taylor-formula szerint van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$ feltételnek eleget tevő függvény, hogy

$$f(a+h) = f(a) + \Big\langle f'(a), h \Big\rangle + \tfrac{1}{2} \Big\langle f''(a) \cdot h, h \Big\rangle + \varepsilon(h)\, \|h\|^2 \qquad \Big(h \in \mathbb{R}^n,\ a + h \in \mathcal{D}_f\Big).$$

Ha $f'(a) = 0$ és $Q(h) := \langle f''(a)h, h \rangle$ akkor a fenti egyenletből:

$$(\#) \qquad f(a+h) - f(a) = \tfrac{1}{2} Q(h) + \varepsilon(h)\, \|h\|^2 \qquad \Big(h \in \mathbb{R}^n,\ a + h \in \mathcal{D}_f\Big).$$

Ezért

$$\begin{aligned} 0 \leq f(a+th) - f(a) &= \frac{1}{2}\, Q(th) + \varepsilon(th)\, \|th\|^2 = \frac{t^2}{2}\, Q(h) + \varepsilon(th)\, t^2\, \|h\|^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2}\, Q(h) + \varepsilon(th)\, \|h\|^2\right) t^2, \qquad \text{ahol } \lim_{t \to 0} \varepsilon(th) = 0. \end{aligned}$$

Ekkor

$$0 \leq \frac{1}{2}\, Q(h) + \varepsilon(th)\, \|h\|^2 \qquad \overset{t \to 0}{\Longrightarrow} \qquad Q(h) \geq 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a Q kvadratikus alak, illetve az $f''(a)$ mátrix pozitív szemidefinit.

A tétel fontos következménye: *ha* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *és* $f \in C^2\{a\}$, *továbbá* $f'(a) = 0$ *és az* $f''(a)$ **Hesse-féle mátrix indefinit**, *akkor az* f *függvénynek az* a *pontban* **nincs lokális szélsőértéke**.

Egy mátrix, illetve kvadratikus alak definitségének az eldöntése nem egyszerű feladat. A következő állításban a gyakorlatban jól használható eredményt fogalmazunk meg.

4. Tétel (Sylvester-kritérium). *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *egy szimmetrikus mátrix és* $Q(h) = \langle A \cdot h, h \rangle$ $(h \in \mathbb{R}^n)$ *az* A *által meghatározott kvadratikus alak. Jelölje*

$$D_k := \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

az A *mátrix „bal felső sarokmátrixainak" a determinánsát. Ekkor az* A *mátrix, illetve a* Q *kvadratikus alak*

- *pozitív definit* $\iff$ *ha* $\forall k = 1, 2, \dots, n$ *esetén* $D_k > 0$,
- *negatív definit* $\iff$ *ha* $\forall k = 1, 2, \dots, n$ *esetén* $(-1)^k D_k > 0$.

Megjegyzés. A Sylvester-kritérium alapján nem lehet eldönteni, hogy egy szimmetrikus mátrix, ill. a hozzá tartozó kvadratikus alak mikor indefinit. Azonban $n = 2$ esetén van egy egyszerű szükséges és elégséges feltétel erre az esetre is, nevezetesen ha $\det A < 0$. Ez elemi úton, a másodfokú függvény tulajdonságai alapján könnyen igazolható.

Foglaljuk össze a kapott eredményeket ***kétváltozós függvények*** esetében:

Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *és* $f \in C^2\{a\}$. *Tegyük fel, hogy*

$$\partial_1 f(a) = 0 \qquad \text{és} \qquad \partial_2 f(a) = 0.$$

Jelölje

$$D(a) := \det \begin{pmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a) \end{pmatrix}.$$

Ekkor

1. *ha* $D(a) > 0$ *és* $\partial_{11} f(a) > 0$ [*illetve* $\partial_{11} f(a) < 0$], *akkor az* f *függvénynek* a*-ban lokális minimuma* [*illetve maximuma*] *van.*
2. *ha* $D(a) < 0$, *akkor* f*-nek* a*-ban nincs lokális szélsőértéke (ezt nevezzük nyeregpontnak)*
3. *ha* $D(a) = 0$, *akkor ezzel a módszerrel nem tudjuk megállapítani, hogy az* a *pont vajon lokális szélsőértékhely-e vagy sem.*

Példa. Legyen

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Ekkor $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Továbbá minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_x f(x,y) = 2x + y = 0, \quad \partial_y f(x,y) = x + 4y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = y = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy f-nek csak a $P(0,0)$ pontban lehet lokális szélsőértéke. Másrészt

$$\partial_{xx} f(x,y) = 2, \quad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = 1, \quad \partial_{yy} f(x,y) = 4 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Mivel

$$D(0,0) = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 7 > 0 \qquad \text{és} \qquad \partial_{xx} f(x,y) = 2 > 0,$$

így f-nek a $P(0,0)$ pontban lokális minimuma van.

Példa. Legyen

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Ekkor $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Továbbá minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_x f(x,y) = 2x = 0, \quad \partial_y f(x,y) = -2y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = y = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy f-nek csak a $P(0,0)$ pontban lehet lokális szélsőértéke. Másrészt

$$\partial_{xx} f(x,y) = 2, \quad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = 0, \quad \partial_{yy} f(x,y) = -2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Mivel

$$D(0,0) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

így f-nek nincs a $P(0,0)$ pontban lokális szélsőértéke.

Abszolút szélsőértékek

Az a megfigyelés, hogy a lokális szélsőértékhelyeken a függvény deriváltja nulla (feltéve, hogy ez létezik), lehetővé tette olyan f egyváltozós függvény abszolút szélsőértékeinek meghatározását, amelyik *folytonos egy korlátos és zárt* $[a,b]$ *intervallumban, és differenciálható annak* (a,b) *belsejében.* Ekkor ui. f-nek van legnagyobb és legkisebb értéke a *Weierstrass-tétel* szerint. Ha f ezek valamelyikét egy c pontban veszi fel, akkor vagy $c = a$, vagy $c = b$, vagy pedig $c \in (a,b)$. Ez utóbbi esetben lokális szélsőértékről van szó, és így stacionárius pont, azaz $f'(c) = 0$.

Ha tehát megkeressük f összes $c \in (a,b)$ stacionárius pontját, akkor biztos, hogy az abszolút szélsőértékhelyek ezek közül, valamint az a és a b végpontok közül kerülnek ki. Például az abszolút maximumhelyet úgy határozzuk meg, hogy kiszámítjuk f értékeit ezekben a pontokban (nem feledkezve meg az a és b végpontokról sem), és kiválasztjuk azokat, amelyekben f értéke a legnagyobb.

A fenti gondolatmenetet könnyen általánosíthatjuk többváltozós függvényekre.

5. Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos és zárt halmaz. Tegyük fel, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, illetve f deriválható H minden belső pontjában. Ekkor f a legnagyobb (legkisebb) értékét vagy a H halmaz határán veszi fel, vagy pedig egy olyan $a \in \operatorname{int} H$ belső pontban, ahol $\partial_i f(a) = 0$ teljesül minden $i = 1, 2, \ldots, n$ indexre.*