# Többváltozós függvénytan gyakorlatok

## Programtervező informatikus BSc
## Szoftvertervező (B) specializáció

## 1. gyakorlat

# Visszatekintés differenciál- és integrálszámításból tanultakra

## ■ Szükséges ismeretek

- Differenciálhányados fogalma, elemi függvény deriváltja, deriválási szabályok.
- Határozatlan integrál fogalma, alapintegrálok.
- Integrálási szabályok, legfontosabb integrálási fogások ismerete.
- Határozott integrál, Newton–Leibniz-formula, alkalmazások.
- Impropius integrálok.

## ■ Feladatok

**1. Feladat.** Adjuk meg a következő függvények deriváltját!

a) $f(x) := \Big(5x^2 + 3x\Big)^{2022} \qquad (x \in \mathbb{R})$

b) $f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}} \qquad (x \geq 0)$,

c) $f(x) := \sin \dfrac{x^2+1}{x+3} \qquad (x > -3)$,

d) $f(x) := \sin^2 \Big(\ln \sqrt{1 + \cos^2 x} + 1\Big) \qquad (x \in \mathbb{R})$.

**2. Feladat.** Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

*a)* $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{x^3}\,dx \quad \Big(x \in (0, +\infty)\Big)$,

*b)* $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx \quad \Big(x \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big)\Big)$,

*c)* $\displaystyle\int \frac{8x+14}{\sqrt[4]{(2x^2+7x+8)^5}}\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$,

*d)* $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx \quad \Big(x \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big)\Big)$,

*e)* $\displaystyle\int \sin^2 x \quad (x \in \mathbb{R})$,

*f)* $\displaystyle\int x^2 \sin 2x\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$.

**3. Feladat.** Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

*a)* $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1}\,dx \quad \Big(x \in (-1, 1)\Big)$,

*b)* $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}+4}\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$.

**4. Feladat.** Számítsuk ki az

$$\int_{10}^{66} \frac{1}{x - \sqrt[3]{x-2} - 2}\,dx$$

határozott integrált!

**5. Feladat.** Számítsa ki az

$$y = \frac{1}{9+x^2}, \quad y = \frac{2x^2-17}{18} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkidom területét!

**6. Feladat.** Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat!

$$a) \int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx, \qquad b) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\,dx.$$

## ■ Házi feladatok

**1. Feladat.** Határozza meg, az

$$f(x) := e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\cos 2x} \qquad \left(x \in \left[0, \tfrac{\pi}{4}\right]\right)$$

függvény grafikonjának az $x$-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát!

**2. Feladat.** Számítsa ki az $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$ és az $y = 2x$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkidom területét!

**3. Feladat.** Számítsa ki az alábbi improprius integrálokat!

$$a) \int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx, \qquad b) \int_{\ln 2}^{+\infty} e^{-3x}\,dx.$$

## ■ Gyakorló feladatok

**1. Feladat.** Adja meg a következő függvények deriváltját!

$a)$ $f(x) := \dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$ $(x \in \mathbb{R})$,

$b)$ $f(x) := \dfrac{e^x}{1+e^x}$ $(x \in \mathbb{R})$,

$c)$ $f(x) := \sin\sqrt{1+x^3}$ $(x > -1)$,

$d)$ $f(x) := \dfrac{(x+1)^3}{x^{3/2}}$ $(x > 0)$,

$e)$ $f(x) := \ln\left(e^{-x}\sin x\right)$ $(0 < x < \pi)$,

$f)$ $f(x) := \sqrt{1+\sin^2 x \cdot \cos x}$ $(x \in \mathbb{R})$,

$g)$ $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$ $(x > 0)$,

$h)$ $f(x) := \dfrac{\sin(2x^2)}{3-\cos(2x)}$ $(x \in \mathbb{R})$,

$i)$ $f(x) := \ln(x^2e^x)$ $(x > 0)$,

$j)$ $f(x) := e^{\cos x} + \cos(e^x)$ $(x \in \mathbb{R})$,

$k)$ $f(x) := \left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{7}}$ $(x > 0)$,

$l)$ $f(x) := \ln\left(\cos x\right)$ $(0 < x < \frac{\pi}{2})$,

$m)$ $f(x) := \sqrt[5]{x\cos x}$ $(x > 0)$,

$n)$ $f(x) := \sin^2\left(\ln(\sqrt{1+\cos^2 x}+1)\right)$ $(x \in \mathbb{R})$.

**2. Feladat.** Adja meg a következő függvények deriváltját!

$a)$ $f(x) := \left(1+e^{3x+1}\right)^{x^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$,

$b)$ $f(x) := (2+\sin x)^{\cos x}$ $(x \in \mathbb{R})$,

$c)$ $f(x) := x^{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$,

$d)$ $f(x) := \sin\left(x^{\cos x}\right)$ $(x > 0)$.

**3. Feladat.** Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

*a)* $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx \quad (x>0),$

*b)* $\displaystyle\int \sqrt{1-\cos 2x}\,dx \quad \big(x\in(0,2\pi)\big),$

*c)* $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

*d)* $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

*e)* $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

*f)* $\displaystyle\int x^2\cdot\sqrt[3]{6x^3+4}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

*g)* $\displaystyle\int \frac{5x+3}{2x-3}\,dx \quad \left(x>\tfrac{3}{2}\right),$

*h)* $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

*i)* $\displaystyle\int x^2e^x\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

*j)* $\displaystyle\int x\cdot e^{3x+1}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

*k)* $\displaystyle\int \operatorname{ar\,sh} 2x\,dx \quad \left(-\tfrac{1}{2}<x<\tfrac{1}{2}\right),$

*l)* $\displaystyle\int x\cdot\operatorname{arc\,tg} x\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

*m)* $\displaystyle\int x\ln^2 x\,dx \quad (x>0),$

*n)* $\displaystyle\int e^x\sin(3x+1)\,dx \quad (x\in\mathbb{R}).$

**4. Feladat.** Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

*a)* $\displaystyle\int \frac{3}{2x+1}\,dx \quad \left(x<-\tfrac{1}{2}\right),$

*b)* $\displaystyle\int \frac{5}{(2x-1)^3}\,dx \quad \left(x<\tfrac{1}{2}\right),$

*c)* $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}\,dx \quad (-2<x<2),$

*d)* $\displaystyle\int \frac{3x}{(x^2+1)^4},dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

*e)* $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x+13},dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

*f)* $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+4x+13}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

*g)* $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2+x-2}\,dx \quad (x>1),$

*h)* $\displaystyle\int \frac{x^4-x^2+1}{x^2(x+1)}\,dx \quad (0<x<1),$

*i)* $\displaystyle\int \frac{4}{x^2(x+2)}\,dx \quad (x<-2),$

*j)* $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{(x-1)(x+2)^2}\,dx \quad (x>1),$

*k)* $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x^2+4x+5}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

*l)* $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^2+1}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

*m)* $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+3x+4}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

*n)* $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+1}{x^2(x^2+1)}\,dx \quad (x>0),$

*o)* $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^3(x^2+4)}\,dx \quad (x>0),$

*p)* $\displaystyle\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx \quad (x>1),$ .

**5. Feladat.** Számítsuk ki az alábbi integrálokat!

*a)* $\displaystyle\int_{\ln 4}^{\ln 8} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx,$

*b)* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x-1}}{x}\,dx \quad \left(x>\tfrac{1}{3}\right),$

*c)* $\displaystyle\int_1^5 x\sqrt{x-1}\,dx,$

*d)* $\displaystyle\int_4^{12} \frac{\sqrt{2x+1}}{x}\,dx,$

*e)* $\displaystyle\int \frac{e^{-x}}{1+e^{2x}}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

*f)* $\displaystyle\int \frac{e^{4x}}{1+e^x}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}).$

**6. Feladat.** Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat!

$$a)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 3x \, dx, \qquad b)\quad \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx,$$

$$c)\quad \int_1^{e} \frac{\sin(\ln x)}{x} \, dx, \qquad d)\quad \int_{-2}^{\sqrt{3}-2} \frac{1}{x^2+4x+5} \, dx,$$

$$e)\quad \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} \, dx, \qquad f)\quad \int_0^{1} x\sqrt{x^2+1} \, dx.$$

**7. Feladat.** Számítsa ki az $x = 1$, $\quad x = 4$, $y = \dfrac{1}{x}$ és az $y = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ $\quad (x > 0)$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkidom területét!

**8. Feladat.** Milyen arányú részekre osztja az $y^2 = 2x$ egyenletű parabola az $x^2 + y^2 = 8$ egyenletű kör által határolt síkrész területét?

**9. Feladat.** Számítsa ki az alábbi improprius integrálokat!

$$a)\quad \int_0^{4} \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx, \qquad b)\quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} \, dx,$$

$$c)\quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} \, dx, \qquad d)\quad \int_0^{+\infty} e^{-5x} \, dx,$$

$$e)\quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+1} \, dx, \qquad f)\quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x} \, dx,$$

$$g)\quad \int_0^{1} \ln x \, dx, \qquad h)\quad \int_{-\infty}^{0} e^x \, dx,$$

$$i)\quad \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \qquad j)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2} \, dx.$$

## ■ További feladatok

**1. Feladat.** Legyen

$$f(x) := \frac{\sqrt{1+x}}{\left(x^2+1\right)^5} \qquad (x > -1).$$

a) Vizsgáljuk meg deriválhatóság szempontjából az $f$ függvényt, és határozzuk meg az $f'$ deriváltfüggvényét!

b) Mutassuk meg, hogy a függvény grafikonjának a $\big(0, f(0)\big)$ pontban van érintője, és írjuk fel az érintőegyenes egyenletét!

**2. Feladat.** Megadható-e olyan $a$ és $b$ paraméter, hogy differenciálhatóak legyenek a következő függvények?

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx + a, & \text{ha } x < 0, \\ bx^3 + ax^2 + bx, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \qquad b)\quad f(x) = \begin{cases} a + x - x^2, & \text{ha } x < 0, \\ e^{bx} - a, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases}$$

$$c)\quad f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} + a, & \text{ha } x < 0, \\ \ln(\sin x + b), & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \qquad d)\quad f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & \text{ha } x < 1, \\ \cos\left(\frac{x-1}{2}\right), & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

**3. Feladat.** Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat!

$$a)\quad \int x\sqrt{2-8x}\,dx \quad \left(x < \tfrac{1}{4}\right), \qquad b)\quad \int \frac{x^5}{2x^2+1}\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$c)\quad \int \frac{x^7}{\sqrt{1+x^4}}(x \in \mathbb{R})\,dx \quad , \qquad d)\quad \int \frac{2\sqrt{x}+1}{2x(\sqrt{x}+1)}\,dx \quad (x > 0).$$

**4. Feladat.** Számítsa ki az

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx \qquad (x \in \mathbb{R})$$

határozatlan integrált

a) az $x = \operatorname{sh} t \quad (t \in \mathbb{R})$ helyettesítéssel,

b) parciális integrálással!

**5. Feladat.** Igazolja, hogy

$$\int |x|\,dx = \frac{x|x|}{2} + c \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

**6. Feladat.** Határozza meg az

$$f(x) := \sin^2 x \qquad \big(x \in [0, \pi]\big)$$

függvény grafikonjának az $x$-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.
*Útmutatás.* Használja fel a

$$\sin^4 x = \sin^2 x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) = \sin^2 x - \frac{\left(\sin 2x\right)^2}{4} \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$$

azonosságot.

**7. Feladat.** Legyen $p, q \in \mathbb{R}$ és $p > 0$. Igazoljuk, hogy fennállnak az alábbi egyenlőségek!

$$a)\quad \int_0^{+\infty} e^{-px}\sin(qx) = \frac{q}{p^2+q^2}, \qquad b)\quad \int_0^{+\infty} e^{-px}\cos(qx) = \frac{p}{p^2+q^2}.$$

## 2. gyakorlat

# Differenciálegyenletek 1.

## ■ Szükséges ismeretek

- A differenciál- és integrálszámítás különböző szabályai, legismertebb gyakorlati fogásai.

## ■ Feladatok

**1. Feladat.** Határozzuk meg az összes olyan görbét, amely tengely körüli elforgatása után olyan felület kapunk, amely antennaernyőként alkalmazható, azaz egy távoli pontból sugárzott adást egy adott pontba képes fókuszálni!

**2. Feladat.** Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet és kezdetiérték-feladatokat!

$$a)\quad y' = xy \qquad (x, y \in \mathbb{R}),$$

$$b)\quad y' = \frac{x^3}{(1+y)^2}, \quad y(1) = 2 \qquad (x \in \mathbb{R}, y > -1),$$

$$c)\quad y' = y + y^2, \quad y(0) = -\tfrac{1}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}, -1 < y < 0),$$

$$d)\quad y' = \frac{\sqrt{y^2+1}}{xy}, \quad y(e^2) = \sqrt{3} \qquad (x, y > 0).$$

**3. Feladat.** Egy csónakkal evezünk egy csendes tavon. Amikor elérjük az 1,5 m/s sebességet, abbahagyjuk az evezést. Ekkor a csónak mozgása lassulni kezd a víz ellenállásának hatására, amely egyenesen arányos a csónak sebességével, és így a sebesség 4 másodperc múlva 1 m/s lesz. Mekkora utat tud a csónak megtenni megállásáig?

**4. Feladat.**(Korlátozott növekedés modellje) Egy szigeten legfeljebb $M$ mennyiségű (például tömegű) nyúl számára terem elegendő fű. Betelepítenek $m_0$ mennyiségű nyulat. Írjuk le a nyulak mennyiségének időbeli változását! A nyulak szaporodásának sebessége egyenesen arányos a nyulak mennyisége és a maximális $M$ mennyiségig fennmaradó nyúlmennyiség szorzatával.

## ■ Házi feladatok

**1. Feladat.** Oldja meg a következő kezdetiérték-feladatot!

$$y' = x\cos^2 y, \quad y(1) = 0 \qquad \left(x \in \mathbb{R}, -\tfrac{\pi}{2} < y < \tfrac{\pi}{2}\right)$$

**2. Feladat.** Keresse meg azokat a görbéket, amelyek esetében az érintő, az érintési pont ordináta egyenese és az abszcissza tengely által határolt háromszög területének értéke $a > 0$ állandó!

## ■ Gyakorló feladatok

**1. Feladat.** Oldja meg a következő kezdetiérték-feladatokat!

$$a)\quad y' = -\frac{xy}{x+1}, \quad y(0) = 2 \qquad (x > -1, y > 0),$$

$$b)\quad y' = -\frac{2xy^2}{x^2-1}, \quad y(0) = -1 \qquad (-1 < x < 1, y < 0),$$

*c)* $1 + y^2 + xyy' = 0, \quad y(-1) = -2 \qquad (x < 0, y > 0),$

*d)* $xyy' = (x^2+1)(y^2+1), \quad y(1) = -2 \qquad (x > 0, y < 0),$

*e)* $y' = \dfrac{y^2-1}{y(x+2)}, \quad y(1) = -1/2 \qquad (x > -2, -1 < y < 0),$

*f)* $y' \operatorname{ctg} x + y = 2, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 0 \qquad \big(0 < x < \frac{\pi}{2}, y < 2\big),$

*g)* $y' - xy^2 = 2xy, \quad y(0) = -1 \qquad (x \in \mathbb{R}, -2 < y < 0),$

*h)* $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, \quad y(0) = -1 \qquad (x \in \mathbb{R}, y < 0).$

**2. Feladat.** Keresse meg azokat a görbéket, amelyek esetében bármely érintőnek az abszcissza tengellyel képzett metszéspontja kétszer kisebb abszcissza értékkel rendelkezik, mint az érintési pont abszcisszája!

**3. Feladat.** Egy 20 literes edény levegőt tartalmaz, azaz 80% nitrogént és 20% oxigént. Az edénybe másodpercenként 0,1 liter nitrogén folyik be és ugyanennyi folyik ki a keverékből. Mennyi idő múlva lesz az edényben 99% nitrogén? Tudjuk, hogy egy tartályba befolyó gáz vagy folyadék a keverés következtében azonnal egyenletesen oszlik el a tartály egész térfogatában.
***Segítség a megoldáshoz:*** Először igazolja, hogy ha $N(t)$ az edényben lévő nitrogén mennyisége a $t$ időpillanatban, akkor $N' = 0,1 - N/200$.

**4. Feladat.** Egy frissen sült kenyér 10 perc alatt 100°C-ról 60°C-ra hűlt le. A környező levegő hőmérsékletét 20°C-on tartják. Mikor hűl le a kenyér 25°C-ra? Feltételezzük, hogy egy test felmelegedési vagy lehűlési sebessége egyenesen arányban áll a test és az őt körülvevő közeg hőmérsékletének különbségével.
***Segítség a megoldáshoz:*** A megadott fizikai törvény szerint ha $T(t)$ a kenyér hőmérséklete a $t$ időpillanatban, akkor $T' = -k(T - T_0)$, ahol $T_0$ a közeg hőmérséklete és $k > 0$ egy állandó.

**5. Feladat.** A tapasztalatok szerint egy év alatt minden gramm rádiumból 0,44 mg bomlik el. Hány év alatt bomlik el a meglevő rádiummennyiség fele (felezési idő)? Tudjuk, hogy az időegység alatt elbomló radioaktív anyag mennyisége egyenesen arányos a vizsgált pillanatban jelenlevő anyag mennyiségével.
***Segítség a megoldáshoz:*** A megadott fizikai törvény szerint ha $m(t)$ a rádiummennyisége a $t$ időpillanatban, akkor $m' = -km$, ahol $k > 0$ egy állandó.

**6. Feladat.** Galileo Galilei egyik kísérletében egy 10 kg-os ágyúgolyót dobott a Pisa ferde torony tetejéről, ami 56 m esés után csapódott a földre. A légellenállás figyelembevételével egy ilyen ágyúgolyó határsebessége 49 m/s. Mennyi idő alatt ért le a földre? Feltételezzük, hogy a testre ható légellenállási erő a mozgás irányával ellentétes irányú és nagysága - a mérések szerint - a sebesség négyzetével arányos.
***Segítség a megoldáshoz:*** Newton II. törvénye szerint a test tömegének és gyorsulásának szorzata egyenlő a rá ható erők eredőjével. Ezért ha $v(t)$ az ágyúgolyó sebessége a $t$ időpillanatban, akkor $mv' = mg - bv^2$, ahol $m$ a test tömege, $g = 9,81$ m/s$^2$ a gravitációs gyorsulás és $b > 0$ állandó a légellenállási együttható.

**7. Feladat.** Egy $m > 0$ tömegű rakétát $v_0 > 0$ kezdősebességgel függőlegesen fellövünk. Feltételezzük, hogy mozgása közben a rakétára csupán a nehezségi erő és a sebesség négyzetével egyenesen arányos fékezőerő hat. Mennyi ideig emelkedik a rakéta?
***Segítség a megoldáshoz:*** A gravitációs erő most fékezi a test mozgását, ezért $mv' = -mg - bv^2$.

**8. Feladat.** Oldja meg a következő kezdetiérték-feladatokat egy megfelelően alkalmas tartományon!

$$a)\quad y' = \cos(x+y), \quad y(0) = \tfrac{\pi}{2},$$

$$b)\quad y' = \sqrt{y-2x}, \quad y(1) = 11.$$

***Segítség a megoldáshoz:*** Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$, $f : I \to \mathbb{R}$ egy intervallumon értelmezett folytonos függvény, és $T$ olyan síkbeli tartomány, amire $ax + by + c \in I$ teljesül. Ekkor az

$$y' = f(ax + by + c)$$

differenciálegyenlet visszavezethető szétválasztható változójú differenciálegyenletre az

$$u(x) = ax + by(x) + c, \qquad \text{azaz} \qquad y(x) = \frac{u(x) - ax - c}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad y'(x) = \frac{u'(x) - a}{b}$$

helyettesítéssel.

## ■ További feladatok

**1. Feladat.** Egy henger alakú tartály (hordó) belső sugara $R > 0$, magassága $h > 0$. A henger tele van vízzel és a tartály aljának közepén kis kör alakú lyuk található, dugóval zárható módon. A folyadék kifolyásának a sebessége (a súrlódást figyelmen kívül hagyva) egyenesen arányos a folyadék aktuális magasságának a négyzetgyökével. Mennyi idő alatt folyik ki a víz, ha kihúzzuk a dugót?

***Elméleti összefoglaló.*** Legyen $(a, b)$ egy nyílt intervallum, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, és

$$T_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ ax < y < bx\}, \qquad T_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x < 0,\ bx < y < ax\}.$$

Jelölje a $T$ tartomány a $T_1$ vagy a $T_2$ tartomány egyékét. Ekkor az

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \big((x, y) \in T\big)$$

differenciálegyenletet ***homogén fokszámú*** differenciálegyenletnek nevezzük.

Ha még $f(x) \neq x$ $\big(x \in (a, b)\big)$, akkor a homogén fokszámú differenciálegyenlethez tartozó tetszőleges

$$y(\xi) = \eta \qquad \big((\xi, \eta) \in T\big)$$

kezdetiérték-feladatnak mindig vagy egyértelmű, határtól határig haladó megoldása.

A homogén fokszámú differenciálegyenletek visszavezethetők szétválasztható változójú differenciálegyenletekre az

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}, \qquad \text{azaz} \qquad y(x) = u(x) \cdot x \qquad \Longrightarrow \qquad y'(x) = u'(x) \cdot x + u(x)$$

helyettesítéssel.

**2. Feladat.** Oldja meg a következő kezdetiérték-feladatokat egy megfelelően alkalmas tartományon!

$$a)\quad y' = -\frac{x+y}{x}, \quad y(1) = 1,$$

$$b)\quad xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y(1) = 2,$$

$$c)\quad x^2 + y^2 - xy^2y' = 0, \quad y(1) = 3,$$

$$d)\quad y' = \frac{x+y}{x-y}, \quad y(-1) = 1,$$

$$e)\quad y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad y(\sqrt{2}) = 1.$$

**3. Feladat.** Keresse meg azokat a görbéket, amelyeknek minden érintője ugyanakkora távolságban halad a koordináta-rendszer origójától, mint az érintési pont abszcisszájának értéke!

## 3. gyakorlat

# Differenciálegyenletek 2.

## ■ Szükséges ismeretek

- A differenciál- és integrálszámítás különböző szabályai, legismertebb gyakorlati fogásai.
- Szétválasztható változójú differenciálegyenletek megoldása.

## ■ Feladatok

**1. Feladat.** Oldjuk meg a következő homogén lineáris differenciálegyenleteket a megadott intervallumokon!

$$a)\quad y' - x^2 y = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}), \qquad\qquad b)\quad y' + \frac{x}{x+1} y = 0 \qquad (x > -1).$$

**2. Feladat.** Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket és kezdetiérték-feladatot!

$$a)\quad y' + \frac{2}{x} y = x^3 \qquad (x > 0),$$

$$b)\quad y' \sin x - y \cos x = 3x^2 \sin^2 x \qquad (0 < x < \pi),$$

$$c)\quad y' + \frac{2 - 3x^2}{x^3}\, y = 1, \quad y(1) = -1 \qquad (x > 0).$$

**3. Feladat.** Oldjuk meg a következő homogén állandó együtthatós lineáris kezdetiérték-feladatokat a megadott intervallumokon!

$$a)\quad y' - 2y = 1 - 2x^2, \quad y(1) = 2 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$b)\quad y' + 3y = 2e^{-3x}, \quad y(0) = 2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

**4. Feladat.**(Soros RL-áramkörök) Egy feszültségforrással táplált áramkörbe sorba kapcsolunk egy $R$ ohmos ellenállást és egy $L$ önindukciós együtthatóval rendelkező tekercset. A feszültségforrás az

$$u(t) := U \sin(\omega t) \qquad (t \geq 0, \omega > 0, U > 0)$$

periodikus függvény szerint szolgáltatja a feszültséget, ahol $\omega$ a körfrekvenciája és $U$ az amplitúdója. Határozzuk meg, hogyan alakul az áramerősség az idő függvényében! Kirchhoff huroktörvénye szerint zárt hurokban a feszültségforrások összege megegyezik a feszültségesések összegével.

## ■ Házi feladatok

**1. Feladat.** Oldja meg a következő kezdetiérték-feladatokat a megadott intervallumokon!

$$a)\quad y' + \frac{y}{2(x-1)} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = \pi \qquad (-1 < x < 1),$$

$$b)\quad y' + y = \sin 2x, \quad y(0) = \tfrac{3}{5} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

**2. Feladat.** Keresse meg azokat a görbéket, amelyek esetében a koordináta tengelyekkel, az érintővel és az érintési pont ordináta egyenesével határolt trapéz területének értéke $3a^2$-tel egyenlő állandó!

## ■ Gyakorló feladatok

**1. Feladat.** Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket és kezdetiérték-feladatokat!

$$
\begin{aligned}
&a)\quad y' + x^2 y = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),\\
&b)\quad y' - \frac{1}{x}\,y = x^2 \qquad (x > 0),\\
&c)\quad xy' - 2y = 2x^4, \quad y(0) = -1 \qquad (x \geq 0),\\
&d)\quad y' + \frac{1}{x}\,y = \frac{1}{x^2}, \quad y(1) = 0 \qquad (x > 0),\\
&e)\quad (1-x^2)y' + xy = 1, \quad y(0) = 1 \qquad (-1 < x < 1),\\
&f)\quad y' + \frac{e^x y}{x} = 0, \quad y(1) = 0 \qquad (x > 0),\\
&g)\quad xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x} \qquad (x < 0),\\
&h)\quad (xy' - 1)\ln x = 2y \qquad (x > 0),\\
&i)\quad y' \sin x - y\cos x + 1 = 0, \quad y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad (0 < x < \pi),\\
&j)\quad xy' + 2y = 2x\cos x + 2\sin 2x, \quad y(\pi) = 1 \qquad (x > 0).
\end{aligned}
$$

**2. Feladat.** Oldjuk meg a következő homogén állandó együtthatós lineáris kezdetiérték-feladatokat a megadott intervallumokon!

$$
\begin{aligned}
&a)\quad y' + 2y = 5, \quad y(0) = \tfrac{5}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}),\\
&b)\quad y' - y = 3x + 1, \quad y(0) = -1 \qquad (x \in \mathbb{R}),\\
&c)\quad y' + 3y = xe^{2x}, \quad y(0) = \tfrac{4}{24} \qquad (x \in \mathbb{R}),\\
&d)\quad y' - 2y = e^{2x} + \sin x, \quad y(0) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

**3. Feladat.** (Soros RL-áramkörök) Egy feszültségforrással táplált áramkörbe sorba kapcsolunk egy $R$ ohmos ellenállást és egy $L$ önindukciós együtthatóval rendelkező tekercset. A feszültségforrás az $u(t) := U \quad (t \geq 0)$ állandó függvény szerint szolgáltatja a feszültséget. Határozza meg, hogyan alakul az áramerősség az idő függvényében!

**4. Feladat.** (Soros RC-áramkörök) Egy feszültségforrással táplált áramkörbe sorba kapcsolunk egy $R$ ohmos ellenállást és egy $C$ kapacitással rendelkező kondenzátort. A feszültségforrás az

$$u(t) := U\sin(\omega t) \qquad (t \geq 0, \omega > 0, U > 0)$$

periodikus függvény szerint szolgáltatja a feszültséget, ahol $\omega$ a körfrekvenciája és $U$ az amplitúdója. Határozza meg, hogyan alakul az áramerősség az idő függvényében!

***Segítség a megoldáshoz:*** Az áramerősség differenciálegyenletet a huroktörvényből kapott

$$u(t) = u_{bc}(t) + u_{ca}(t) \quad \to \quad u'(t) = u'_{bc}(t) + u'_{ca}(t)$$

tagonkénti deriváltjából lehet felállítani.

## ■ További feladatok

***Elméleti összefoglaló.*** Legyen $I$ egy intervallum, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ és $p, q : I \to \mathbb{R}$ két folytonos függvény. Az

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \qquad (x \in I, y > 0)$$

alakú differenciálegyenletet ***Bernoulli-féle*** differenciálegyenletnek nevezzük.

Ha az előző differenciálegyenletet megszorozzuk $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$-val, akkor az

$$(1 - \alpha)y'y^{-\alpha} + (1 - \alpha)p(x)y^{1-\alpha} = (1 - \alpha)q(x)$$

egyenletet kapjuk, amely az $u = y^{1-\alpha}$ helyettesítéssel visszavezethető

$$u' + (1 - \alpha)p(x)u = (1 - \alpha)q(x) \qquad (x \in I, u > 0)$$

lineáris differenciálegyenletre. (Vegyük figyelembe az $u > 0$ feltételt a megoldások meghatározásakor!)

**1. Feladat.** Oldjuk meg a következő kezdetiérték-feladatokat egy megfelelően alkalmas tartományon!

$$a) \quad y' + y = -\frac{1}{y}, \quad y(1) = 2,$$

$$b) \quad x^2y' + xy + \sqrt{y} = 0, \quad y(1) = 4,$$

$$c) \quad y' + y = (1 - 2x)y^3, \quad y(1) = 1,$$

$$d) \quad yy' + y^2 \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y(0) = 1.$$

# 4. gyakorlat

## $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvények

### Szükséges ismeretek

- Kétváltozós valós értékű függvények grafikonja.
- Többváltozós függvények folytonossága, átviteli elv.
- Többváltozós függvények pontbeli határértéke, átviteli elv.

### Feladatok

**1. Feladat.** A koordinátasíkokkal párhuzamos metszetgörbék vizsgálata alapján szemléltessük az

$$f(x,y) := y^2 - x^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény grafikonját, vagyis a $z = y^2 - x^2$ egyenletű felületet (ez az ún. ***nyeregfelület***)!

**2. Feladat.** Milyen felülettel szemléltethető az alábbi függvény a térbeli koordináta-rendszerben?

$$a) \quad f(x,y) := \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\big),$$

$$b) \quad f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

**3. Feladat.** A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény minden értermezési tartománybeli pontjában folytonos!

**4. Feladat.** Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény nem folytonos a $(0,0)$ pontban!

**5. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy $f$ leszűkítése minden, az origón átmenő egyenesre egy folytonos egyváltozós függvény, de $f \notin C\{(0,0)\}$.

**6. Feladat.** Lássuk be, hogy

$$a)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \qquad\qquad b)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2.$$

**7. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy

a) Az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^4y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}, \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban!

b) A

$$g(x,y) := \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}\Big)$$

függvénynek nincs határértéke a $(0,0)$ pontban!

## ■ Házi feladatok

**1. Feladat.** Bizonyítsa be, hogy

a) Az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{3x^2+2y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban!

b) A

$$g(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$$

függvénynek nincs határértéke a $(0,0)$ pontban!

**2. Feladat.** Léteznek-e a

$$a)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, \qquad\qquad b)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+3y^2}$$

határértékek? Ha igen, számolja ki az értéküket!

## ■ Gyakorló feladatok

**1. Feladat.** Az $f(x,y) := x^2+y^2 \ \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény grafikonja egy forgásparaboloid. Milyen felülettel szemléltethető a

$$g(x,y) := x^2+y^2-2x+4y+1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény a térbeli koordináta-rendszerben?

**2. Feladat.** A definíció alapján bizonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) := \sqrt{|xy|} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény *folytonos* az $a := (0,0)$ pontban!

**3. Feladat.** A definíció alapján igazoljuk, hogy az alábbi $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a = (0,0)$ pontban!

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+3y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

**4. Feladat.** Folytonos-e az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény az origóban?

**5. Feladat.** Mutassa meg, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

**6. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := \frac{x-y}{x+y} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x \neq -y\big).$$

Bizonyítsa be, hogy

$$a) \quad \exists \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right), \qquad b) \quad \exists \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right), \qquad c) \quad \nexists \lim_{(0,0)} f.$$

**7. Feladat.** Léteznek-e az alábbi határértékek? Ha igen, számolja ki az értéküket!

$$a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}, \qquad b) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2},$$

$$c) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{5x^3+y^3}, \qquad d) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{|x|+|y|},$$

$$e) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad f) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2).$$

## ■ További feladatok

**1. Feladat.** Vizsgálja meg folytonosság szempontjából az alábbi függvényeket!

$$a) \quad f(x,y) := \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$b) \quad f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$c) \quad f(x,y) := \begin{cases} (1+x^2y^2)^{\frac{-1}{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$d) \quad f(x,y) := \begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & \text{ha } y \neq 0, \\ 0, & \text{ha } y = 0. \end{cases}$$

**2. Feladat.** Léteznek-e az alábbi határértékek? Ha igen, számolja ki az értéküket!

*a)* $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin^2(2x)}{x^2+3y^2},$$

*b)* $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2},$$

*c)* $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \begin{cases} x+y, & \text{ha } x+y \text{ racionális,} \\ x^2+y^2, & \text{ha } x+y \text{ irracionális.} \end{cases}$$

**3. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := (x+y)\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{y} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\big).$$

Bizonyítsa be, hogy

*a)* $\nexists \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$, *b)* $\nexists \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$, *c)* $\exists \lim\limits_{(0,0)} f$.

**4. Feladat.** Mutassa meg, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = 1.$$

## 5. gyakorlat

# Differenciálszámítás 1.

## ■ Szükséges ismeretek

- A parciális deriváltak fogalma.
- Az iránymenti derivált, és kapcsolata a parciális deriváltakkal.
- A totális derivált fogalma és kapcsolata a parciális deriváltakkal.

## ■ Feladatok

**1. Feladat.** Számítsuk ki az alábbi függvény $x$ és $y$ változók szerinti parciális deriváltjait!

$$f(x,y) := \frac{x^2 - y^3}{xy} \qquad (x, y > 0).$$

**2. Feladat.** Melyik $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt határozzák meg (együtt) az alábbi egyenlőségek?

$$\partial_x f(x,y) = x^2 y, \quad \partial_y f(x,y) = 1 + \frac{x^3}{3} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

**3. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := x^3 y + x^2 y^2 + x + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Számítsa ki a függvény másodrendű parciális deriváltjait az $(x,y) = (1,0)$ pontban!

**4. Feladat.** Igazoljuk, hogy az

$$f(x,y) := \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \neq 0\big)$$

függvény teljesíti az $\partial_{xx} f + \partial_{yy} f = 0$ egyenlőséget!

**5. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := x^2 - xy + y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$a = (a_1, a_2) = (1,1)$ és $v$ az $x$-tengely pozitív ágával $\alpha$ szöget bezáró euklideszi normában vett egységvektor.

a) Határozzuk meg a definíció alapján a $\partial_v f(a)$ iránymenti deriváltat!

b) Ellenőrizzük a kapott eredményt a tanult tétellel!

c) Melyik irány esetén lesz a derivált értéke a legnagyobb?

**6. Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x,y) := \frac{y^3}{e^{2x+1}} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény iránymenti deriváltját a $P\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ pontban a $u = (1,2)$ vektor által meghatározott irány mentén!

**7. Feladat.** A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x,y) := 2x^2 + 3xy - y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény totálisan deriválható az $a := (1,2)$ pontban, és adjuk meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot! Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizzük a Jacobi-mátrix kiszámításával!

## ■ Házi feladatok

**1. Feladat.** Számolja ki az

$$f(x,y) := xe^{yx} - xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény iránymenti deriváltját az $a = (1,1)$ pontban az $u = (3,4)$ vektor által meghatározott irány mentén!

**2. Feladat.** A definíció alapján bizonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) := x^3 + xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény totálisan deriválható az $a := (2,3)$ pontban, és adjuk meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot! Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizzük a Jacobi-mátrix kiszámításával!

## ■ Gyakorló feladatok

**1. Feladat.** Számítsa ki az alábbi függvények $x$ és $y$ változók szerinti parciális deriváltjait!

*a)* $f(x,y) := y^2 \ln(xy) \quad (x,y > 0)$, *b)* $f(x,y) := e^{x^2y} - 2x^2y^7 \sin(x+y) \quad (x,y \in \mathbb{R})$,

*c)* $f(x,y) := e^x \cos y - x \ln y \quad (x,y > 0)$, *d)* $f(x,y) := \dfrac{\sin y}{e^{xy}} \quad (x,y \in \mathbb{R})$.

**2. Feladat.** Határozza meg az

$$f(x,y) := x^3 e^{y^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény összes első- és másodrendű parciális deriváltját az $(x_0,y_0) := (2,1)$ pontban!

**3. Feladat.** Legyen

$$f(x,t) := \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}\right) \qquad \big(x \in \mathbb{R},\ t \in (0,+\infty)\big),$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ paraméterek. Mutassa meg, hogy fennáll a

$$\partial_t f(x,t) = a^2\, \partial_{xx} f(x,t) \qquad \big(x \in \mathbb{R},\ t \in (0,+\infty)\big)$$

egyenlőség! (Ez az ún. ***hővezetési egyenlet***.)

**4. Feladat.** Határozza meg az

$$f(x,y) := 5x + 3y + x^2y^3 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

$v$ irány szerinti deriváltját a megadott $a$ pontban!

a) $v = (1,0)$ és $a = (3,2)$.

b) $v = (4,3)$ és $a = (1,2)$.

c) $v$ az $x$ tengellyel 60-fokos szöget bezáró egységvektor.

**5. Feladat.** Vizsgálja meg a definíció szerint az alábbi függvények differenciálhatóságát a megadott pontokban!

$$a)\quad f(x,y) := x^2 + xy \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big), \qquad a=(2,1),$$

$$b)\quad f(x,y) := (x+y)^3 \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big), \qquad a=(1,2),$$

$$c)\quad f(x,y) := \sqrt[3]{x^3+y^3} \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big), \qquad a=(0,0),$$

$$d)\quad f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0), \end{cases} \qquad a=(0,0).$$

**6. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := e^x y + x\cos y \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big), \qquad a := (0,1) \text{ és } u=(1,-\sqrt{3}).$$

Határozza meg a definíció alapján a $\partial_v f(a)$ iránymenti deriváltat, ahol $v$ az $u$ irányú egységvektor! Lássa be, hogy $f\in D\{a\}$ és ellenőrizze a kapott iránymenti deriváltat az $f'(a)$ segítségével!

**7. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := \sqrt{3(x-1)^4+2y^2} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

Igazolja, hogy $\exists\partial_x f(1,0)$, de $\nexists\partial_y f(1,0)$ !

## ■ További feladatok

**1. Feladat.** A definíció alapján lássuk be, hogy az

$$f(x) := \big(e^x, x^2-x\big) \qquad (x\in\mathbb{R})$$

függvény totálisan deriválható az $a=(0,0)$ pontban, és határozzuk meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot! Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizzük a Jacobi-mátrix kiszámításával!

**2. Feladat.** A definíció alapján lássuk be, hogy az

$$f(x,y) := \big(x^2+xy, y^2-2x^2\big) \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

függvény totálisan deriválható az $a=(-1,1)$ pontban, és határozzuk meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot! Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizzük a Jacobi-mátrix kiszámításával!

# 6. gyakorlat

# Differenciálszámítás 2.

## Szükséges ismeretek

- Kapcsolat a tanult fogalmak között.
- Felületek érintősíkja.
- A Young-tétel.
- Algebrai műveletek differenciálható függvényekkel.
- Az összetett függvény deriválása (a láncszabály).

## Feladatok

**1. Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x,y) := \sqrt{|xy|} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban, ott léteznek a parciális deriváltak, de $f$ nem differenciálható a $(0,0)$ pontban!

**2. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az $f$ függvény a $(0,0)$ pontban

a) folytonos,

b) minden irány mentén deriválható,

c) totálisan nem deriválható!

**3. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := \sqrt{x^2 - 2y^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 > 2y^2\big).$$

a) Számítsa ki az $f$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait!

b) Írja fel a $z = \sqrt{x^2 - 2y^2}$ egyenletű felület $P_0(3,2)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát.

**4. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy a $\partial_{12}f(0,0)$ és a $\partial_{21}f(0,0)$ parciális deriváltak léteznek, de ezek nem egyenlők:

$$\partial_{12}f(0,0) \neq \partial_{21}f(0,0).$$

Mutassuk meg azt is, hogy $f$ nem differenciálható kétszer a $(0,0)$ pontban!

**5. Feladat.** Legyen

$$g(x) := \big(e^{3x},\, 1+e^{-3x}\big) \quad (x\in\mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad f(x,y) := x^4+2xy^2+y^3 \quad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

Számítsuk ki az $F := f\circ g \in \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény deriváltját!

**6. Feladat.** Legyen

$$g(x,y) := \big(xy^2,\, x+y^2\big) \quad \text{és} \quad f(x,y) := ye^{x^2} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

Számítsuk ki az $F := f\circ g \in \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény deriváltját!

## ■ Házi feladatok

**1. Feladat.** Írja fel a $z = x^2e^{xy}$ egyenletű felület $P_0(1,0)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát!

**2. Feladat.** Mutassa meg, hogy ha $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ differenciálható függvény és

$$f(x,y) := y\cdot F(x^2-y^2) \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big),$$

akkor

$$y^2\cdot\partial_x f(x,y) + xy\cdot\partial_y f(x,y) = x\cdot f(x,y) \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

## ■ Gyakorló feladatok

**1. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az $f$ függvény a $(0,0)$ pontban

a) Mutassuk meg, hogy $f\in C\big\{(0,0)\big\}$.

b) Határozza meg a $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ függvényeket $\mathbb{R}^2$ minden pontjában!

c) Bizonyítsa be, hogy $f\notin D\{(0,0)\big\}$.

**2. Feladat.** Igazolja, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{ha } xy=0, \\ 1, & \text{ha } xy\neq 0, \end{cases}$$

függvény nem folytonos a $(0,0)$ pontban, de ott léteznek a parciális deriváltjai!

**3. Feladat.** Mutassa meg, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x>0,\ y=x^2, \\ 1, & \text{egyéb } (x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ pontban}, \end{cases}$$

képlettel értelmezett $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény a $(0,0)$ pontban deriválható minden irányban, de ott totálisan nem deriválható, mert még csak nem is folytonos a $(0,0)$ pontban!

**4. Feladat.** Írja fel a $z = x^2 + 3y^2$ egyenletű felület $(x_0, y_0) = (3,2)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát!

**5. Feladat.** Legyen

$$g(x,y) := \big(x - y^2,\, xy\big) \quad \text{és} \quad f(x,y) := x^2 + 2y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Számítsuk ki az $F := f \circ g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény deriváltját!

**6. Feladat.** Legyen

$$g(x,y) := \big(xy,\, x - y^2\big) \quad \text{és} \quad f(x,y) := \big(y^2,\, 2x^2 y\big) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Számítsuk ki az $F := f \circ g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény deriváltját!

## ■ További feladatok

**1. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Határozzuk meg a $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ parciális deriváltfüggvényeket!

b) Bizonyítsuk be, hogy $\partial_1 f, \partial_2 f \notin C\{(0,0)\}$!

c) Mutassuk meg, hogy $f \in D\{(0,0)\}$!

**2. Feladat.** Legyen

$$\begin{aligned} A &:= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 < 1 \ \text{ vagy } \ x^2 + (y+1)^2 < 1\Big\}, \\ B &:= \Big\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\Big\}. \end{aligned}$$

Bizonyítsa be, hogy a

$$\chi_{A\cup B}(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{ha } (x,y) \in A \cup B \\ 0, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big(A \cup B\big) \end{cases}$$

függvény (az $A \cup B$ halmaz *karakterisztikus függvénye*) minden irányban deriválható a $(0,0)$ pontban, de nem deriválható (totálisan) a $(0,0)$ pontban!

**3. Feladat.** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in D^3$ és

$$F(x,y,z) := f(xyz) \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Bizonyítsa be, hogy alkalmas $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénnyel

$$\partial_{123} F(x,y,z) = g(xyz) \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

# 7. gyakorlat

# Differenciálszámítás 3.

## Szükséges ismeretek

- Valós értékű függvények (feltétel nélküli) szélsőértékeinek fogalma.
- $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvények lokális szélsőértékeire vonatkozó elsőrendű szükséges, és másodrendű elégséges feltétel.
- Többváltozós valós értékű függvényekre vonatkozó Weierstrass-tétel.
- Abszolút szélsőértékek kiszámításának módja.

## Feladatok

**1. Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x,y) := x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

**2. Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

**3. Feladat.** Határozza meg az

$$f(x,y) := xy(x^2 + y^2 - 1) \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big)$$

függvénynek abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit a

$$H := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\Big\}$$

zárt körlapon!

**4. Feladat.** Határozza meg az

$$f(x,y) := x^3 - 12x + y^3 - 3y \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big)$$

függvénynek abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit az alábbi halmazon:

$$H := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 3, \quad -x \leq y \leq 2\Big\}.$$

## Házi feladatok

**1. Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x,y) := 8x + \frac{1}{y} + \frac{y}{x} \qquad (x, y \neq 0)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit!

**2. Feladat.** Határozza meg az

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - 9xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit az alábbi halmazon:

$$H := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 5, \quad 0 \le y \le 2x\Big\}.$$

## ■ Gyakorló feladatok

**1. Feladat.** Határozza meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit!

$$a) \quad f(x,y) := x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$$b) \quad f(x,y) := x^3 + y^3 - 9xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$$c) \quad f(x,y) := x^4 y^2 (4 - x - y) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$$d) \quad f(x,y) := x^3 y^2 (4 - x - y) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$$e) \quad f(x,y) := 2x^3 - 6x + y^3 - 12y + 5 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$$f) \quad f(x,y) := x^3 y^5 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$$g) \quad f(x,y) := x^2 + 2y + \frac{2}{xy} \qquad (x, y \ne 0),$$

$$h) \quad f(x,y) := \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + (x-1)^{2022} \qquad (x, y \ne 0),$$

$$i) \quad f(x,y) := e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$$j) \quad f(x,y) := (1 + e^y)\cos x - ye^y \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

**2. Feladat.** Határozza meg az

$$f(x,y) := 2x^3 - 6x + y^3 - 12y + 5 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit az $A(0,0)$, $B(0,-3)$, $C(-2,-3)$ és $D(-2,0)$ pontok által határolt zárt téglalapon!

**3. Feladat.** Határozza meg az

$$f(x,y) := x^3 y^5 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit az $A(0,0)$, $B(1,0)$ és $C(0,1)$ pontok által határolt zárt háromszöglapon!

**4. Feladat.** Határozza meg az

$$f(x,y) := x^3 - 3x^2 - y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit az alábbi halmazon:

$$H := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge -1, \quad x - 1 \le y \le 4\Big\}.$$

## ■ További feladatok

**1. Feladat.** Mutassa meg, hogy ha

$$f(x,y) := x^4 + y^2 \quad \text{és} \quad g(x,y) := x^2 + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

akkor

a) $f$-nek az origóban lokális (és abszolút) minimuma van, $g$-nek ugyanott nincs lokális szélsőértéke,

b) mindegyik függvény origóban vett Hesse-mátrixának a determinánsa nullával egyenlő.

**2. Feladat.** (**$(2\times 2)$*-es mátrixokra vonatkozó Sylvester-kritérium***) Legyen

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Mutassa meg, hogy a

$$Q(h) := \langle Ah, h\rangle = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 \qquad \big(h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2\big)$$

kvadratikus alak, illetve az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix

- pozitív definit $\iff$ $a > 0$ és $\det A > 0$,
- negatív definit $\iff$ $a < 0$ és $\det A > 0$,
- indefinit $\iff$ $\det A < 0$.

***Megoldás.*** Tegyük fel, hogy $Q$ pozitív definit, azaz

$$Q(h_1,h_2) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 > 0 \qquad (h \neq 0).$$

Ekkor $Q(1,0) = a > 0$, továbbá

$$Q(h_1,1) = ah_1^2 + 2bh_1 + c > 0 \qquad (h_1 \in \mathbb{R}).$$

Ez azt jelenti, hogy a $p(x) := ax^2 + 2bx + c$ polinomnak nincs valós gyöke, következésképpen a

$$D = (2b)^2 - 4ac = 4(b^2 - ac) = -4\det A$$

diszkriminánsa negatív, és így $\det A > 0$.

Fordítva: ha $a > 0$ és $\det A = ac - b^2 > 0$, akkor $c > 0$. Ezért

$$Q(h_1,0) = ah_1^2 > 0 \quad (h_1 \neq 0), \qquad Q(0,h_2) = ch_2^2 > 0 \quad (h_2 \neq 0).$$

Ha $h_1, h_2 \neq 0$, akkor legyen $x := h_1/h_2$. Ekkor

$$Q(h_1,h_2) = h_2^2\left(a\left(\tfrac{h_1}{h_2}\right)^2 + 2b\,\tfrac{h_1}{h_2} + c\right) = h_2^2\,p(x) > 0, \tag{1}$$

hiszen a $p$ polinom főegyütthatója pozitív ($a > 0$) és diszkriminánsa negatív ($D = -4\det A < 0$). Összességében azt igazoltuk, hogy $Q(h_1,h_2) > 0$, ha $h \neq 0$, azaz $Q$ pozitív definit.

Ugyanígy igazolható a negatív definitségre vonatkozó $a < 0$ és $\det A = ac - b^2 > 0$ szükséges és elégséges feltétel.

Végül, a $\det A = ac - b^2 < 0$ feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha a $p(x) := ax^2 + 2bx + c$ polinom diszkriminánsa pozitív, és így két különböző valós gyöke van, következésképpen $p$ (tehát (1) miatt a $Q$ kvadratikus alak is) felvesz pozitív és negatív értéket is, ami azt jelenti, hogy $Q$ indefinit.

# 8. gyakorlat

# Differenciálszámítás 4.

## Szükséges ismeretek

- Az inverzfüggvény-tétel.
- Az egyváltozós implicitfüggvény-tétel.

## Feladatok

**1. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := \big(e^x \cos y, e^x \sin y\big) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

a) Mi az $f$ értékkészlete?

b) Mutassuk meg, hogy $f$ *globálisan* nem invertálható, de $\mathbb{R}^2$ minden pontjában *lokálisan* invertálható!

c) Legyen $a := (0, \pi/3)$ és $b := f(a)$. Keressünk explicit képletet $f$-nek a $b$ pontot tartalmazó valamely nyílt halmazon értelmezett $f^{-1}$ lokális inverzére, és azt deriválva határozzuk meg $\big(f^{-1}\big)'(b)$-t. Számítsuk ki a deriváltat a tanult képlettel is.

**2. Feladat.** Mutassuk meg, hogy az

$$f(x,y) := (-x + \sqrt{x^2+y^2},\ -x - \sqrt{x^2+y^2}) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokálisan invertálható az $a := (4,3)$ pontban, és határozzuk meg a lokális inverz deriváltját a $b := f(a)$ pontban!

**3. Feladat.** Tekintsük az

$$e^{x-1} + x \sin y = u,$$
$$e^{x-1} - x \cos y = v$$

egyenletrendszert, ahol $u, v \in \mathbb{R}$ adott paraméterek és $x, y$ az ismeretlenek. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy ha $(u_0, v_0) = \Big(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$, akkor $(x_0, y_0) = \big(1, \frac{\pi}{4}\big)$ megoldása az egyenletrendszernek.

a) Mutassuk meg, hogy egy, az $(u_0, v_0)$ pontot tartalmazó paramétertartományban az egyenletrendszernek az $(x_0, y_0)$ pont egy alkalmas környezetében a megoldás egyértelmű és az $(u, v)$ változó folytonosan deriválható függvénye.

b) Számítsuk ki a szóban forgó függvény deriváltját az $(u_0, v_0)$ pontban.

**4. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := \ln x + y\, e^{y^2} + 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Mutassuk meg, hogy az $a = 1/e$ pontnak van olyan $U = K(a)$ környezete és létezik olyan $\varphi : U \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény, amelyre az

$$f\big(x, \varphi(x)\big) = 0 \qquad (x \in U)$$

egyenlőség teljesül! Számítsuk ki $\varphi'(1/e)$-t!

**5. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\neq 0\big).$$

Mutassuk meg, hogy az $(a,b)=(1,0)$ pont egy környezetében az $f(x,y)=0$ egyenlettel megadott síkbeli halmaz egy folytonosan deriválható $\varphi : K(a)\to\mathbb{R}$ függvény grafikonja! Számítsuk ki $\varphi'(1)$-et, és írjuk fel a szóban forgó görbe $(1,0)$ pontbeli érintő egyenesének az egyenletét!

## ■ Házi feladatok

**1. Feladat.** Mutassa meg, hogy az

$$f(x,y) := \left((x+y)\cos x^2,\ \frac{y^2}{x^2+1}\right) \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokálisan invertálható az $a := (0,1)$ pontban, és határozzuk meg a lokális inverz deriváltját a $b := f(a)$ pontban!

**2. Feladat.** Tekintse az

$$e^{x+y} = 2\cos y - 1$$

egyenletet! Ennek egy megoldása $x=0$ és $y=0$.

a) Bizonyítsa be, hogy az egyenletből $y$ kifejezhető az $x$ változó implicit függvényeként a $(0,0)$ pont egy környezetében!

b) Határozza meg a függvény deriváltját az $x=0$ pontban!

## ■ Gyakorló feladatok

**1. Feladat.** Mutassa meg, hogy az alábbi $f\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ függvények a megadott $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban lokálisan invertálhatók, és határozza meg a lokális inverzek deriváltját a $b := f(a)$ pontban, ha

$$a)\quad f(x,y) := \left(x\cos\frac{y}{x},\ x\sin\frac{y}{x}\right) \qquad (x>0,\ y\in\mathbb{R}) \qquad a := (1,0),$$

$$b)\quad f(x,y) := (y\ln x,\ xe^y) \qquad (x>0,\ y\in\mathbb{R}) \qquad a := (1,1),$$

$$c)\quad f(x,y) := \big(x^2e^{xy},\ \ln(x^2+\cos^2 y)\big) \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big) \qquad a := (1,0).$$

**2. Feladat.** Lássa be, hogy az

$$f(x,y) := (x^3,\ y^3) \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

függvény invertálható az origó egy környezetében (sőt az egész síkon is!), de az $f'(0,0)$ mátrix nem invertálható. Deriválható-e az inverz az origóban?

**3. Feladat.** Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) := (e^x + x\sin y,\ e^x - x\cos y) \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokálisan invertálható az $a := (1,\pi/4)$ pont egy környezetében! Határozza meg a lokális inverz deriváltját a $b := f(a)$ pontban!

**4. Feladat.** Bizonyítsa be, hogy az alábbi egyenletből $y$ kifejezhető $x$ implicit függvényeként a $(2,1)$ pont egy környezetében is és a $(2,3)$ pont egy környezetében is:

$$x^2 + 2xy - y^2 = 7.$$

Határozza meg mindkét függvény deriváltját az $x = 2$ helyen!

**5. Feladat.** Írja fel az alábbi egyenletű görbe (Gerono féle lemniszkáta) érintő egyenesének az egyenletét az $(1, \sqrt{2})$ pontban:

$$x^4 - 3x^2 + y^2 = 0.$$

Adja meg explicit módon is a $\varphi$ implicit függvényt $x = 1$ pont egy környezetében, és számítsa ki így is az $\varphi'(1)$ meredekséget! Számítsa ki $\varphi'$-t implicit deriválással is, és az implicit függvénytételt használva!

## ■ További feladatok

**1. Feladat.** Lássa be, hogy az

$$f(x,y,z) := (2x + y - z,\ 3x + 4z,\ x - y + 2z) \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

függvény lokálisan invertálható az $a := (1,1,1)$ pontban, és számolja ki a lokális inverz deriváltját a $b := f(a)$ pontban!

***Megoldás.*** Az inverzfüggvény-tételt alkalmazzuk.

<u>Az inverz függvény létezése.</u> Az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvény folytonosan deriválható az $\Omega = \mathbb{R}^3$ halmazon, mert koordinátafüggvényei polinomok. Mivel minden $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pontban

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{ezért}$$

$$\det f'(x,y,z) = (-1)\cdot(3\cdot 2 - 1\cdot 4) + (-1)\cdot(-1)\cdot(2\cdot 4 - 3\cdot(-1)) = 9 \neq 0 \quad \big(\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Így az $f$ függvény ***minden*** $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pont egy környezetében lokálisan invertálható.

<u>Az inverz függvény deriváltja.</u> A szóban forgó tétel szerint az $f^{-1}$ lokális inverz függvény folytonosan deriválható a

$$b := f(a) = f(1,1,1) = (2,7,2)$$

pontban (tehát $f^{-1}(b) = a = (1,1,1)$), és a deriváltja

$$\big(f^{-1}\big)'(b) = \Big[f'\big(f^{-1}(b)\big)\Big]^{-1} = \Big[f'(a)\Big]^{-1} = \Big[f'(1,1,1)\Big]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{11}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

***Megjegyzés.*** A feladat állításánál *több* is igaz. Nevezetesen az, hogy ebben az esetben az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ függvény ***globálisan*** is invertálható, sőt a globális inverzet explicit képlettel is meg tudjuk adni. Ez azért igaz, mert szokott mátrixfelírással, ha $A := f'(x,y,z)$, akkor

$$\begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ 3x + 4z \\ x - y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (x,y,z \in \mathbb{R})$$

egy *lineáris* függvény. Mivel $\det A = 9 \neq 0$, ezért az

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

lineáris egyenletrendszernek az $(x, y, z)$ megoldása egyértelmű minden $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ esetén. Az $f^{-1}$ inverz függvény helyettesítési értékeit tetszőleges $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ pontban ezek az $(x, y, z)$ megoldások adják.

**2. Feladat.** Tekintse az

$$y^2 + 5x = x\, e^{x\,(y-2)}$$

egyenletet. Ennek egy megoldása $x = -1$ és $y = 2$.

a) Bizonyítsa be, hogy az egyenletből $y$ kifejezhető az $x$ változó implicit függvényeként a $(-1, 2)$ pont egy környezetében!

b) Határozza meg a függvény deriváltját az $x = -1$ pontban!

***Megoldás.*** Az egyváltozós implicitfüggvény-tételt alkalmazzuk. Legyen

$$f(x, y) := y^2 + 5x - x\, e^{x\,(y-2)} \quad \Big((x, y) \in \mathbb{R}^2\Big)$$

és $(a, b) := (-1, 2)$.

a) Először a feltételeket ellenőrizzük. Világos, hogy $f \in C^1\Big(\mathbb{R}^2)$ és

$$f(a, b) = f(-1, 2) = 2^2 + 5 \cdot (-1) - (-1) \cdot e^{(-1)\cdot 0} = 0.$$

Mivel minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_2 f(x, y) = 2y - x \cdot x\, e^{x\,(y-2)} = 2y - x^2 e^{x(y-2)} \qquad \Big((x, y) \in \mathbb{R}^2\Big),$$

ezért $\partial_2 f(-1, 2) = 2 \cdot 2 - (-1)^2 \cdot e^0 = 3 \neq 0$ is igaz. Így a szóban forgó tétel mindegyik feltétele teljesül.

Következésképpen $\exists U := K(-1)$ és $\exists \varphi : U \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény, amelyre az

$$f\Big(x, \varphi(x)\Big) = 0 \qquad (x \in U)$$

egyenlőség teljesül. Ez pedig azt jelenti, hogy $\forall y \in V := \mathcal{R}_\varphi = K(2)$ (paraméter) esetén az $f(x, y) = 0$ az $f(x, y) = 0$ egyenletből $y$ kifejezhető az $x$ változó implicit alakban megadott $\varphi$ függvényeként.

b) Az implicitfüggvény-tétel állítása szerint a $\varphi$ függvény folytonosan deriválható. Mivel minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_1 f(x, y) = 5 - e^{x\,(y-2)} - x \cdot (y - 2)\, e^{x\,(y-2)} = 5 - \Big(xy - 2x + 1\Big) e^{x\,(y-2)},$$

ezért

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 f\Big(x, \varphi(x)\Big)}{\partial_2 f\Big(x, \varphi(x)\Big)} = -\frac{5 - \Big(x \cdot \varphi(x) - 2x + 1\Big) e^{x\,(\varphi(x)-2)}}{2\varphi(x) - x^2 e^{x\,(\varphi(x)-2)}} \qquad (x \in U).$$

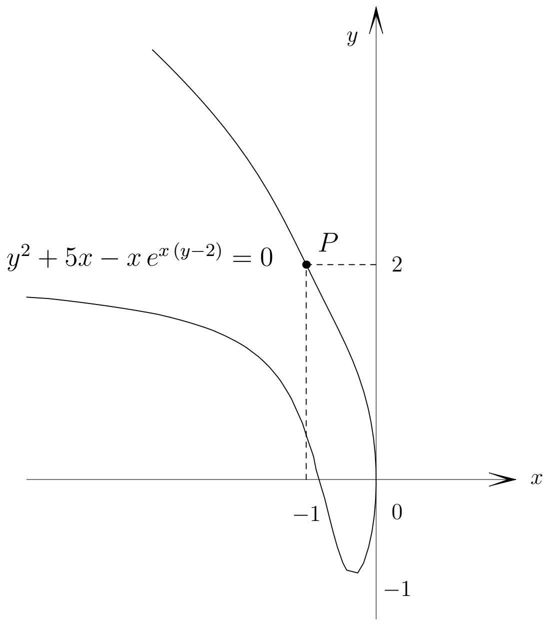
Így $\varphi(-1) = b = 2$ miatt

$$\varphi'(-1) = -\frac{5 - (-2 + 2 + 1) \cdot e^0}{4 - 1^2 \cdot e^0} = -\frac{4}{3}.$$

***Megjegyzés.*** Az alábbi ábra szemlélteti a

$$H := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y^2 + 5x - x\, e^{x\,(y-2)} = 0 \right\}$$

halmazt.



# 9. gyakorlat

# Differenciálszámítás5.

## ■ Szükséges ismeretek

- A feltételes lokális és feltételes abszolút szélsőérték fogalma.
- A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó szükséges és elegendő feltétel (Lagrange-szorzók módszere).
- A feltételes abszolút szélsőérték keresés korlátos és zárt feltételgörbék esetén, a Weierstrass-tétel.

## ■ Feladatok

**1. Feladat.** Határozza meg az $f(x,y) := x^2 + y^2$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény feltételes lokális minimumhelyeit a $g(x,y) = x + 2y - 4 = 0$ feltételre vonatkozóan!

a) Mi a feladat geometriai tartalma?

b) Oldja meg a feladatot úgy, hogy a korlátozó feltételből $y$ kifejezésével visszavezeti egyváltozós szélsőérték-problémára!

c) Oldja meg a feladatot a Lagrange-szorzók módszerével!

**2. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := xy \quad \text{és} \quad g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

a) Elemi úton keresse meg az $f$ függvény feltételes abszolút szélsőértékhelyeit a $g = 0$ feltétel mellett!

b) A Lagrange-szorzók módszerével keresse meg az $f$ függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g = 0$ feltétel mellett!

**3. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := 2x + 3y \quad \text{és} \quad g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Határozza meg az $f$ függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g = 0$ feltétel mellett!

**4. Feladat.** Határozza meg az

$$f(x,y) := x^2 + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény abszolút szélsőértékeit az

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

egyenletet kielégítő ellipszisen!

## ■ Házi feladatok

**1. Feladat.** Legyen

$$f(x,y) := xy \quad \text{és} \quad g(x,y) := x + y - 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Határozza meg az $f$ függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g = 0$ feltétel mellett!

**2. Feladat.** Tekintsük az

$$f(x,y) := xy, \quad g(x,y) := \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvényeket, és határozzuk meg az $f$ feltételes abszolút szélsőértékeit a $g = 0$ feltétel mellett!

## ■ Gyakorló feladatok

**1. Feladat.** Határozza meg az alábbi $f$ függvény feltételes lokális szélsőértékeit a $g = 0$ feltételre vonatkozóan!

*a)* $f(x,y) := xy, \quad g(x,y) := x + y - 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$

*b)* $f(x,y) := 3xy, \quad g(x,y) := x^2 + y^2 - 8 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$

*c)* $f(x,y) := x + y, \quad g(x,y) := x^2 + y - 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$

*d)* $f(x,y) := x + y, \quad g(x,y) := x^2 + 3xy + 3y^2 - 3 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$

*e)* $f(x,y) := x^2 + y^2, \quad g(x,y) := x^2 + xy + y^2 - 3 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$

*f)* $f(x,y) := 2x + 3y, \quad g(x,y) := x^2 - y^3 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$

*g)* $f(x,y) := x^3 + y^3, \quad g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$

*h)* $f(x,y) := x^2 + 12xy + 2y^2, \quad g(x,y) := 4x^2 + y^2 - 25 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$

*i)* $f(x,y) := \cos^2 x + \cos^2 y, \quad g(x,y) := x - y - \frac{\pi}{4} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$

**2. Feladat.** Határozza meg az $f(x,y) := xy + 12$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény feltételes abszolút szélsőértékeit az

$$x^2 + y^2 = 8$$

egyenletű körvonalon!

**3. Feladat.** Határozza meg az $f(x,y) := x + 2y$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény feltételes abszolút szélsőértékeit az

$$2x^2 + y^2 = 4$$

egyenletű ellipszisen!

**4. Feladat.** Határozza meg, hogy a $4x^2 + 9y^2 = 36$ ellipszisnek melyik pontjai vannak a legnagyobb (legkisebb) távolságra

a) az origótól?

b) a $P_1(0,1)$ ponttól?

## ■ További feladatok

**1. Feladat.** Adott kerületű téglalapokat megforgatunk az egyik oldaluk körül. Mikor lesz a keletkező henger térfogata a legnagyobb?

**2. Feladat.** Határozzuk meg az $x^2y^2z = 1$ felület azon pontjait, amelyek legközelebb vannak az origóhoz!

**3. Feladat.** Alkalmazhatók-e a feltételes szélsőértékkel kapcsolatban tanult tételek az $f$ függvény $g = 0$ feltételre vonatkozó (esetleg létező) feltételes lokális szélsőértékeinek a meghatározására, ha

$$a)\quad f(x,y) := x, \quad g(x,y) := x^3 - y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$$b)\quad f(x,y) := x^3, \quad g(x,y) := y - x^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$$c)\quad f(x,y) := y, \quad g(x,y) := x^3 - y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$$d)\quad f(x,y) := x + y, \quad g(x,y) := x^3 - y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

(Ha a tételek nem alkalmazhatók, akkor a definíció alapján okoskodjon!)

## 10. gyakorlat

# Többszörös integrálok 1.

## Szükséges ismeretek

- Kettős integrálok értelmezése téglalapokon és ennek tulajdonságai.
- Fubini-tétel, szukcesszív integrálás.
- Kettős integrálok értelmezése korlátos halmazokon.
- A kettős integrál kiszámítása normáltartományon.

## Feladatok

**1. Feladat.** Tekintsük az $I := [0,1] \times [0,2]$ téglalapot. Kétféle sorrendben számítsuk ki az

$$\iint_I x^3 \sqrt{y}\, dx\, dy$$

kettős integrált!

**2. Feladat.** Számítsuk ki a következő kettős integrált!

$$\iint_I x \cdot \sin(xy)\, dx\, dy \qquad \Big(I := \big[1,3\big] \times \big[0, \tfrac{\pi}{2}\big]\Big).$$

**3. Feladat.** Számítsuk ki a következő kettős integrált:

$$\iint_H (2xy - x^3)\, dx\, dy,$$

ahol $H$ az $y = x^2$ és az $y = x + 2$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkrész!

**4. Feladat.** Legyen $H := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\Big\}$. Számítsuk ki a

$$\iint_H (x + y)\, dx\, dy$$

integrált!

**5. Feladat.** Jelölje $H$ a $(0,2)$, az $(1,1)$ és a $(3,2)$ csúcspontú háromszöglapot. Számítsuk ki az

$$\iint_H y\, e^x\, dx\, dy$$

integrált!

**6. Feladat.** Számítsuk ki az

$$f(x,y) := e^x\Big(\sqrt{x} + y\Big) \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big)$$

függvény integrálját az $x = 1$ és $y^2 = x$ egyenletű görbék által határolt korlátos és zárt síktartományon!

## ■ Házi feladatok

**1. Feladat.** Számítsa ki a

$$\iint\limits_H \frac{y^2}{x^2+1}\,dx\,dy \qquad \big(H := [0,1]\times[-2,2]\big)$$

kettős integrált!

**2. Feladat.** Számítsa ki a

$$\iint\limits_H \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$$

kettős integrált, ahol $H$ az $y \geq \frac{1}{x}$, az $y \leq x$ és az $1 \leq x \leq 2$ egyenlőtlenségekkel meghatározott korlátos és zárt síkrész!

## ■ Gyakorló feladatok

**1. Feladat.** Számítsa ki a

$$a)\quad \iint\limits_H (4-x-y)\,dx\,dy, \qquad H := [0,2]\times[0,1],$$

$$b)\quad \iint\limits_H (x^2y-2xy)\,dx\,dy, \qquad H := [0,3]\times[-2,0],$$

$$c)\quad \iint\limits_H x\sqrt{x^2+y}\,dx\,dy, \qquad H := [0,1]\times[0,3],$$

$$d)\quad \iint\limits_H \frac{y}{1+xy}\,dx\,dy, \qquad H := [0,1]\times[0,1],$$

$$e)\quad \iint\limits_H e^{2x+y}\,dx\,dy, \qquad H := [0,\ln 2]\times[0,\ln 5],$$

$$f)\quad \iint\limits_H xye^x\,dx\,dy, \qquad H := [0,1]\times[1,2],$$

$$g)\quad \iint\limits_H \frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy, \qquad H := [0,1]\times[0,1].$$

kettős integrálokat a megadott $H$ téglalapokon!

**2. Feladat.** Számítsa ki a $z = x^2+y^2$ paraboloid alatti és az $xy$ síkban lévő $[-1,1]\times[-1,1]$ téglalap feletti test térfogatát!

**3. Feladat.** Számítsa ki a

$$\iint\limits_H (x+6y)\,dy\,dx \qquad \Big(H := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon 0\leq x\leq 1,\ x\leq y\leq 5x\big\}\Big)$$

kettős integrált!

**4. Feladat.** Számítsa ki a

$$\iint\limits_H \cos(x+y)\,dy\,dx \qquad \Big(H := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon 0\leq x\leq \pi,\ 0\leq x\leq y\big\}\Big)$$

kettős integrált!

**5. Feladat.** Számítsa ki a

$$\iint_H e^{2x+3y}\,dx\,dy \qquad \Big(H := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 0\le y\le 1,\ 3y\le x\le 3\big\}\Big)$$

kettős integrált!

**6. Feladat.** Számítsa ki a

$$\iint_H xy^2\,dx\,dy$$

kettős integrált, ahol $H$ az $y=x^2$ és $y=\sqrt{8x}$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos és zárt síkrész!

**7. Feladat.** Számítsa ki a

$$\iint_H \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\,dy$$

kettős integrált, ahol $H$ az $y^2\le 8x$, az $y\le 2x$ és az $y+4x\le 24$ egyenlőtlenségekkel meghatározott korlátos és zárt síkrész!

**8. Feladat.** Mekkora a térfogata annak a háromszög alapú egyenes hasábnak, melynek alapja az $xy$ síkban a $(0,0)$, $(1,0)$ és $(1,1)$ csúcspontú zárt háromszöglap és fedőlapjának síkja a $z=3-x-y$ egyenletű sík?

**9. Feladat.** Mekkora a térfogata annak a háromszög alapú egyenes hasábnak, melynek alapja az $xy$ síkban a $(0,0)$, $(0,2)$ és $(-2,0)$ csúcspontú zárt háromszöglap és fedőlapja a $z=xy$ felület?

**10. Feladat.** Az integrálás sorrendjének felcserélése után számítsa ki a

$$a)\ \int_0^1\left(\int_x^1 \frac{x\sin y}{y}\,dy\right)dx,\quad b)\ \int_1^e\left(\int_{1/e}^{1/y}\cos(x-\ln x)\,dx\right)dy,\quad c)\ \int_0^3\left(\int_{x^2}^9 x^3e^{y^3}\,dy\right)dx.$$

szukcesszív integrálokat!

## ■ További feladatok

**1. Feladat.** Legyen $H:=[0,1]\times[0,1]$ és

$$f(x,y):=\begin{cases}\dfrac{x-y}{(x+y)^3}, & \text{ha } xy\neq 0,\\ 0, & \text{ha } xy=0.\end{cases}$$

Igazolja, hogy $f\notin R(H)$, de a szukcesszív integrálás elvégezhető a $H$ téglalapon!

**2. Feladat.** Számítsa ki a

$$\iint_H \operatorname{sgn}(x-y^2)\,dy\,dx \qquad \Big(H := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x^2+y^2\le 2\big\}\Big)$$

kettős integrált!

**3. Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$$

integrált, ahol $0<a<b$ valós paraméterek.

***Útmutatás:*** Az alábbi észrevétellel alakítsuk kettős integrállá a feladatot, hajtsunk végre sorrendcserét és a kapott integrált számítsuk ki.

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_{y=a}^{y=b} = \int\limits_a^b x^y \, dy.$$

# 11. gyakorlat

# Többszörös integrálok 2.

## ■ Szükséges ismeretek

- Fubini-tétel, szukcesszív integrálás.
- Integráltranszformáció.
- Síkbeli polárkoordináta-transzformáció.

## ■ Feladatok

**1. Feladat.** Számítsuk ki az

$$\iint\limits_{1\leq x^2+y^2\leq 4} \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

kettős integrált!

**2. Feladat.** Kettős integrállal határozzuk meg az $R$ sugarú kör területét!

**3. Feladat.** Számítsuk ki az $xy = 1,\ xy = 4$, valamint az $y = x$ és az $y = 3x$ egyenletű görbék által meghatározott és az első síknegyedben fekvő zárt síkrész területét!

**4. Feladat.** Határozzuk meg a $z = 1 - x^2 - y^2$ egyenletű felület (forgásparaboloid) és az $xy$ sík által határolt korlátos és zárt térrész térfogatát!

**5. Feladat.** Legyenek $a$, $b$ és $c$ pozitív valós paraméterek. Határozzuk meg az

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

egyenletű ellipszoiddal határolt térrész térfogatát!

**6. Feladat.** Szemléltessük rajzon a

$$x^2+y^2=1, \quad z=0, \quad z=x+2y+3$$

felületek által határolt korlátos és zárt térbeli tartományt, majd kettős integrál alkalmazásával számítsuk ki e tartomány térfogatát!

## ■ Házi feladatok

**1. Feladat.** Számítsuk ki az

$$f(x,y) := \frac{1}{x^2+y^2+1} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

függvény integrálját az $x^2 + y^2 \leq 1$ és $y \geq 0$ egyenlőtlenségekkel meghatározott korlátos tartományon!

**2. Feladat.** Számítsuk ki a $z = 5 - x^2 - y^2$ forgásparaboloid és a $z = 1$ sík által határolt korlátos és zárt térrész térfogatát!

## ■ Gyakorló feladatok

**1. Feladat.** Számítsa ki az

$$\iint\limits_{1 \le x^2+y^2 \le 3} \frac{x}{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

kettős integrált!

**2. Feladat.** Számítsa ki az

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

kettős integrált!

**3. Feladat.** Számítsa ki a

$$\iint\limits_{D} \ln(1+x^2+y^2)\, dy\, dx \qquad \Big(D := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \le 9,\ x \le 0,\ y \ge 0\Big\}\Big)$$

kettős integrált!

**4. Feladat.** Számítsa ki a

$$\iint\limits_{D} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\, dy\, dx \qquad \Big(D := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\Big\}\Big)$$

kettős integrált!

**5. Feladat.** Számítsa ki az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad (a, b > 0 \text{ paraméterek})$$

egyenletű ellipszis területét!

**6. Feladat.** Mekkora annak a korlátos és zárt $D$ síkidomnak a területe, melyet az alábbi egyenlőtlenség határoz meg:

$$x^2 + y^2 \le 2ax \qquad (a > 0 \text{ paraméter}).$$

**7. Feladat.** Számítsa ki az $xy = 1,\ xy = 4$, valamint az $y^2 = x$ és az $y^2 = 4x$ egyenletű görbék által meghatározott és az első síknegyedben fekvő zárt síkrész területét!

**8. Feladat.** Számítsa ki a $z = x^2 + y^2 - 1$ forgásparaboloid, a $z = 2$ és a $z = 5$ síkok által határolt korlátos és zárt térrész térfogatát!

**9. Feladat.** Kettős integrállal határozzuk meg az $R$ sugarú gömb térfogatát!

**10. Feladat.** Számítsa ki az origó középpontú $2R > 0$ sugarú gömbből az

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2$$

egyenletű hengerfelület által kimetszett test (Viviani-féle test) térfogatát!

## ■ További feladatok

**1. Feladat.** Számítsa ki a

$$\iint\limits_{D} \sin x^2 \cos x^2\, dy\, dx \qquad \Big(D := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\Big\}\Big)$$

kettős integrált!

**2. Feladat.** Számítsa ki polárkoordinátákkal felírt $r = 1 + \cos\varphi$ egyenletű kardioid által határolt síkrész térfogatát!

**3. Feladat.** A $z = f(x, y)$ felület $D$ tartománya felett fekvő felület felszíne az

$$\iint\limits_D \sqrt{1 + \Big(\partial_x f(x,y)\Big)^2 + \Big(\partial_y f(x,y)\Big)^2}\, dx\, dy$$

kettős integrállal számítható. Számítsa ki

a) az $R$ sugarú gömb felszínét!

b) a $z = xy$ hiperbolikus paraboloid azon darabjának felszínét, amely az $x^2 + y^2 = 4$ henger belsejébe esik!

12. gyakorlat

# Görbék

## Szükséges ismeretek

- Paraméterezés, egyszerű sima görbe és egyszerű zárt görbe fogalma.
- Síkgörbe megadásának módjai.
- Görbék érintővektora és ívhossza. Polárkoordinátás alakban megadott síkbeli görbe ívhossza.
- Polárkoordinátás alakban megadott görbével határolt síkidomok területe.
- Görbék pontbeli érintője és simulósíkja.

## Feladatok

**1. Feladat.** A síkbeli Descartes-féle koordináta-rendszerben vegyük az $F_1(-a,0)$ és az $F_2(a,0)$ pontokat, ahol $a>0$. Adjuk meg azon síkbeli pontok halmazát, amelyek a megadott $F_1$ és $F_2$ pontoktól lévő távolságának szorzata állandó, és $a^2$-tel egyenlő!

**2. Feladat.** Írjuk fel az alábbi görbéket különböző alakjaiban!

$$a)\quad \left.\begin{aligned} x &= \sqrt{3}t+10 \\ y &= t \end{aligned}\right\} \ (t\in\mathbb{R}),\quad b)\quad \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,\quad c)\quad r=\frac{2\sin\varphi}{1+\cos 2\varphi} \quad \big(\varphi\in(0,\pi/2)\big).$$

**3. Feladat.** Számoljuk ki az

$$r = 1+\cos\varphi \qquad \big(\varphi\in[0,2\pi]\big)$$

kardioid ívhosszát és közrezárt területét!

**4. Feladat.** Számítsuk ki az alábbi paraméterezéssel megadott térgörbék ívhosszát a megadott intervallum mellett!

$$a)\quad \gamma(t) := \big(t,\, t^2,\, \tfrac{2}{3}t^3\big) \qquad \big(t\in[1,2]\big),$$

$$b)\quad \gamma(t) := (e^{2t}\cos t,\, e^{2t}\sin t,\, e^{2t}) \qquad \big(t\in[0,1]\big),$$

$$c)\quad \gamma(t) := \big(\sin\tfrac{t}{3},\, \cos\tfrac{t}{3},\, \tfrac{\sqrt{8}}{3}t\big) \qquad \big(t\in[0,2]\big).$$

**5. Feladat.** Adjuk meg az alábbi paraméterezésű térgörbék megadott $\gamma(t_0)$ ponthoz tartozó érintőjét és simulósíkjának egyenletét!

$$a)\quad \gamma(t) := (t^3-2t^2,\, 3t+2,\, t^2-5) \quad (t\in\mathbb{R}), \qquad (t_0=1),$$

$$b)\quad \gamma(t) := (\cos^2 t,\, \cos t\sin t,\, \sin^2 t) \quad \big(t\in[0,2\pi]\big), \qquad \big(t_0=\tfrac{\pi}{6}\big),$$

$$c)\quad \gamma(t) := (a\cos t,\, b\sin t,\, e^t) \quad (t\in\mathbb{R}), \qquad (t_0=0), \quad \text{ahol} \quad ab\neq 0.$$

## ■ Házi feladatok

**1. Feladat.** Szemléltesse rajzon az

$$r = e^{\varphi} \qquad (\varphi \geq 0)$$

görbét, az ún. logaritmikus spirálist, és számítsa ki a $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ szakaszra vonatkozó ívhosszát!

**2. Feladat.** Írja fel az alábbi görbéket különböző alakjaiban, és állapítsa meg, hogy milyen görbéről van szó!

$$a) \quad \left.\begin{aligned} x &= 1 - \frac{1}{t} \\ y &= 1 + \frac{1}{t-1} \end{aligned}\right\} \quad (t > 1), \qquad\qquad b) \quad r = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \quad \big(\varphi \in (-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4})\big).$$

**3. Feladat.** Adja meg az alábbi paraméterezésű térgörbe $\gamma(1)$ ponthoz tartozó érintőjét és simulósíkjának egyenletét!

$$\gamma(t) := (t+1,\, t^3,\, t^2 - 3) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

## ■ Gyakorló feladatok

**1. Feladat.** Szemléltesse rajzon az

$$r = \varphi \qquad (\varphi \geq 0)$$

görbét, az ún. Archimédeszi spirálist, és számítsa ki a $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ szakaszra vonatkozó ívhosszát!

**2. Feladat.** Számítsa ki a Bernoulli-féle lemniszkáta által közrezárt területet!

**3. Feladat.** Írja át polárkoordinátás alakra az

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 y^2 \qquad (a > 0)$$

görbét, az ún. rozettát, és szemléltesse rajzon! Igazolja, hogy a rozetta által közrezárt terület kétszerese megegyezik az $R = a/2$ sugarú kör területével!

**4. Feladat.** Állapítsa meg, hogy milyen típusú görbéket írnak le az alábbi polárkoordinátás alakban megadott görbék!

*a)* $r = 2 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$,

*b)* $r = 4\sin\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$,

*c)* $r = -\cos\varphi \quad (\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2)$,

*d)* $r = 6(\sin\varphi + \cos\varphi) \quad (-\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4)$,

*e)* $r = |\cos 2\varphi| \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$,

*f)* $r = 2|\sin 3\varphi| \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$,

*g)* $r = \dfrac{2}{\cos\varphi} \quad (-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2)$,

*h)* $r = \dfrac{3}{\sin\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$,

*i)* $r = 1 + \sin\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$,

*j)* $r = \cos^2\dfrac{\varphi}{2} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$.

**5. Feladat.** Állapítsa meg, hogy milyen típusú görbéket írnak le az alábbi paraméterezésű görbék!

$$a)\quad \gamma(t) := (t^2 - 2t + 3,\, t^2 - 2t + 1) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

$$b)\quad \gamma(t) := (a \sin^2 t,\, b \cos^2 t) \qquad \big(t \in [0, 2\pi],\ a, b \neq 0\big),$$

$$c)\quad \gamma(t) := \left(\frac{1-t}{1+t},\, \frac{t}{1+t}\right) \qquad (t > 1),$$

$$d)\quad \gamma(t) := \left(2 \ln t,\, t + \frac{1}{t}\right) \qquad (t > 0).$$

**6. Feladat.** Számítsuk ki a következő görbék ívhosszát a megadott intervallumokon!

$$a)\quad \gamma(t) := \left(t^2,\, t - \frac{t^3}{3}\right) \qquad \big(t \in [0, 2]\big),$$

$$b)\quad \gamma(t) := \left(2t,\, \frac{t^2}{2} - \ln t\right) \qquad \big(t \in [1, e]\big),$$

$$c)\quad \gamma(t) := (t,\, \operatorname{ch} t) \qquad \big(t \in [-1, 1]\big),$$

$$d)\quad \gamma(t) := (2t \cos t,\, 2t \sin t) \qquad \big(t \in [0, 2\pi]\big),$$

$$e)\quad \gamma(t) := \big(\cos^2 t + \cos t,\, \cos t \sin t + \sin t\big) \qquad \big(t \in [0, 2\pi]\big),$$

$$f)\quad \gamma(t) := (\cos t + t \sin t,\, \sin t - t \cos t) \qquad \big(t \in [0, 2\pi]\big),$$

$$g)\quad \gamma(t) := \big(t,\, \sqrt{3}t^2,\, 2t^3\big) \qquad \big(t \in [-1, 1]\big),$$

$$h)\quad \gamma(t) := \big(\arcsin t,\, t,\, \sqrt{1-t^2}\big) \qquad \big(t \in [0, 1/2]\big),$$

$$i)\quad \gamma(t) := \left(\cos^2 t,\, \frac{1}{2} \sin 2t,\, t^2\right) \qquad \big(t \in [0, \pi]\big).$$

**7. Feladat.** Adjuk meg az alábbi paraméterezésű térgörbék megadott $\gamma(t_0)$ ponthoz tartozó érintőjét és simulósíkjának egyenletét!

$$a)\quad \gamma(t) := \big(t + 1,\, t^3,\, t^2 - 3\big) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad t_0 := 1,$$

$$b)\quad \gamma(t) := \left(t^2 + 1,\, \frac{2}{t^2},\, t(1 - t^2)\right) \quad (t > 0), \qquad t_0 := 1,$$

$$c)\quad \gamma(t) := \big(e^t,\, e^t,\, e^{2t} - 1\big) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad t_0 := 0,$$

$$d)\quad \gamma(t) := \left(\ln(1 + t^2),\, -\frac{1}{\sqrt{t-1}},\, \sqrt{1 + t^2}\right) \quad (t > 1), \qquad t_0 := 2,$$

$$e)\quad \gamma(t) := (\sin 2t,\, 1 - \cos 2t,\, 2 \cos t) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad t_0 := \pi,$$

$$f)\quad \gamma(t) := \big(\cos t,\, \sin t,\, \ln \operatorname{tg} \tfrac{t}{2}\big) \quad (0 \leq t < \pi), \qquad t_0 := \frac{\pi}{2},$$

$$g)\quad \gamma(t) := \big(\cos^3 t,\, \sin^3 t,\, \cos 2t\big) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad t_0 := \frac{\pi}{4}.$$

## ■ További feladatok

**1. Feladat.** Szemléltesse rajzon az

$$y^2 - ax^3 = 0 \qquad (a > 0)$$

görbét, az ún. szemikubikus parabolát!

**2. Feladat.** Szemléltesse rajzon az

$$x^3 + y^3 = 3axy \qquad (a > 0)$$

görbét, az ún. Descartes-féle levelet!

**3. Feladat.** Tekintsük egy, az $A(-1, 0)$ ponton áthaladó egyenest. Bocsássunk erre merőlegest a $B(1, 0)$ pontból, és jelöljük a két egyenes metszéspontját $P$-vel. Milyen görbét ír le a $P$ pont, ha az $A$ ponton áthaladó egyenes $\alpha$ irányszöge $-\pi/2$-tól $\pi/2$-ig változik? Írjuk fel továbbá a $P$ pont által leírt görbe paraméteres egyenletrendszerét, az $A$ ponton áthaladó egyenes m iránytangensét felhasználva!

**4. Feladat.** A síkbeli Descartes-féle koordináta-rendszerben vegyük az $F_1(-a, 0)$ és az $F_2(a, 0)$ pontokat, ahol $a > 0$. Adjuk meg azon síkbeli pontok halmazát, amelyek a megadott $F_1$ és $F_2$ pontoktól lévő távolságának szorzata állandó, és $c^2$-tel egyenlő!

***Megjegyzés:*** A kapott görbét Cassini-féle görbének nevezzük. A görbe alakja $a$ és $c$ viszonyától függ. Ha $c > a$, akkor önmagát nem átmetsző zárt görbét kapunk. $c < a$ esetén két diszjunkt görbét kapunk. Ha $c = a$, akkor a már megismert lemniszkátát.

**5. Feladat.** Térjünk át az alábbi paraméterezések esetében ívhossz szerinti paraméterezésre!

$$a) \quad \gamma(t) := (t - \sin t,\ 1 - \cos t) \qquad (0 \le t \le 2\pi),$$

$$b) \quad \gamma(t) := \left(e^t \cos t,\ e^t \sin t,\ e^t\right) \qquad (t \ge 0),$$

$$c) \quad \gamma(t) := \left(t^2,\ \cos t^2,\ \sin t^2\right) \qquad (t \ge 0),$$

$$d) \quad \gamma(t) := \left(t \cos t,\ t \sin t,\ \frac{2\sqrt{2t^3}}{3}\right) \qquad (t \ge 0),$$

$$e) \quad \gamma(t) := (t,\ 2t - 1,\ 3t + 3) \qquad (t \ge 0).$$