Numerikus módszerek 1.

12. előadás: A Newton-módszer és társai

Dr. Bozsik József

ELTE IK

Tartalomjegyzék

Feladat

Keressük meg egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nemlineáris függvény gyökét, avagy zérushelyét. ($\exists$?, 1, több?)

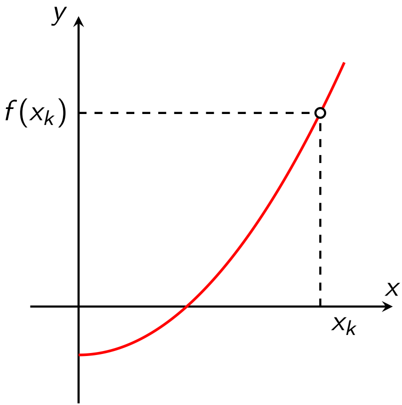
$$f(x^*) = 0, \qquad x^* =?$$

Geometriai megközelítés:

$$f, x_k \rightarrow \text{érintő} \rightarrow \text{zérushely (y=0)} \rightarrow x_{k+1}$$

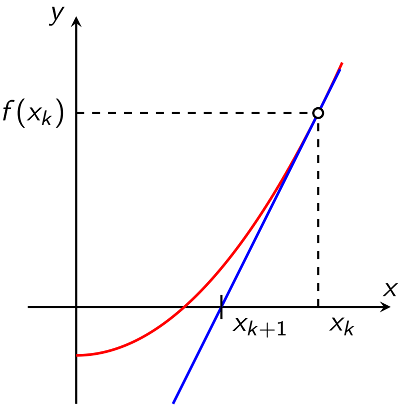
Geometriai megközelítés:

$$f, x_k \rightarrow \text{érintő} \rightarrow \text{zérushely (y=0)} \rightarrow x_{k+1}$$



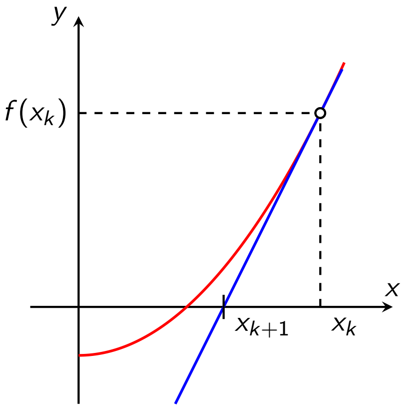
Geometriai megközelítés:

$$f, x_k \to \text{érintő} \to \text{zérushely (y=0)} \to x_{k+1}$$



Geometriai megközelítés:

$f, x_k \to$ érintő $\to$ zérushely (y=0) $\to x_{k+1}$



Az érintő egyenlete:

$$y - f(x_k) = f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$

$$-f(x_k) = f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

$$-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_{k+1} - x_k$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Analitikus megközelítés:

f gyöke $\approx x_k$ körüli Taylor-polinomának gyöke

$$0 = f(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k) + \ldots$$

Analitikus megközelítés:

f gyöke $\approx x_k$ körüli Taylor-polinomának gyöke

$$0 = f(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k) + \dots$$

Definíció: Newton-módszer

Adott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény és $x_0 \in \mathbb{R}$ kezdőpont esetén a *Newton-módszer* alakja:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Példa

Írjuk fel a Newton-módszert a $\sqrt{2}$ értékének közelítésére, és számoljuk ki a közelítő sorozat első néhány elemét valamely kezdőpontból!

Példa

Írjuk fel a Newton-módszert a $\sqrt{2}$ értékének közelítésére, és számoljuk ki a közelítő sorozat első néhány elemét valamely kezdőpontból!

Megj.: babiloni módszer ($\sqrt{n}$ számítása).

Példa

Írjuk fel a Newton-módszert a $\sqrt{2}$ értékének közelítésére, és számoljuk ki a közelítő sorozat első néhány elemét valamely kezdőpontból!

Megj.: babiloni módszer ($\sqrt{n}$ számítása).

Általában másodrendben konvergens!

Tétel: monoton konvergencia tétele

Ha $f \in C^2[a;b]$ és

1. $\exists x^* \in [a;b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,

Tétel: monoton konvergencia tétele

Ha $f \in C^2[a;b]$ és

1. $\exists\, x^* \in [a;b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' és f'' állandó előjelű,

Tétel: monoton konvergencia tétele

Ha $f \in C^2[a;b]$ és

1. $\exists\, x^* \in [a;b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' és f'' állandó előjelű,
3. $x_0 \in [a;b] : f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$,

Tétel: monoton konvergencia tétele

Ha $f \in C^2[a;b]$ és

1. $\exists\, x^* \in [a;b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' és f'' állandó előjelű,
3. $x_0 \in [a;b] : f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$,

akkor az x_0 pontból indított Newton-módszer (által adott (x_k) sorozat) monoton konvergál x^*-hoz.

Newton-módszer – monoton konvergencia

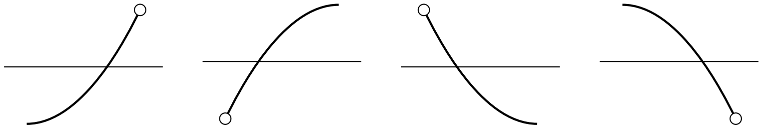
Tétel: monoton konvergencia tétele

Ha $f \in C^2[a;b]$ és

1. $\exists x^* \in [a;b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' és f'' állandó előjelű,
3. $x_0 \in [a;b] : f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$,

akkor az x_0 pontból indított Newton-módszer (által adott (x_k) sorozat) monoton konvergál x^*-hoz.

Megj.: 4 eset van:



Biz.: Csak az $f' > 0$, $f'' > 0$ esetre (a többi hasonló)
$\Rightarrow \quad f(x_0) > 0$.

Biz.: Csak az $f' > 0,\ f'' > 0$ esetre (a többi hasonló)
$\Rightarrow \quad f(x_0) > 0.$

1. Taylor-formula másodfokú maradéktaggal, x_k középponttal:
   $\exists \xi_k \in (x, x_k)$ vagy (x_k, x):

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2} \cdot (x - x_k)^2.$$

Biz.: Csak az $f' > 0$, $f'' > 0$ esetre (a többi hasonló)
$\Rightarrow \quad f(x_0) > 0$.

1. Taylor-formula másodfokú maradéktaggal, x_k középponttal: $\exists \xi_k \in (x, x_k)$ vagy (x_k, x):

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2} \cdot (x - x_k)^2.$$

Az x_{k+1} helyen: $\exists \xi_k \in (x_{k+1}, x_k)$ vagy (x_k, x_{k+1})

$$f(x_{k+1}) = \underbrace{f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)}_{=0 \text{ (def. alapján)}} + \underbrace{\frac{f''(\xi_k)}{2}}_{>0} \cdot \underbrace{(x_{k+1} - x_k)^2}_{>0}.$$

Biz.: Csak az $f' > 0$, $f'' > 0$ esetre (a többi hasonló)
$\Rightarrow \quad f(x_0) > 0$.

1. Taylor-formula másodfokú maradéktaggal, x_k középponttal:
$\exists \xi_k \in (x, x_k)$ vagy (x_k, x):

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2} \cdot (x - x_k)^2.$$

Az x_{k+1} helyen: $\exists \xi_k \in (x_{k+1}, x_k)$ vagy (x_k, x_{k+1})

$$f(x_{k+1}) = \underbrace{f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)}_{=0 \text{ (def. alapján)}} + \underbrace{\frac{f''(\xi_k)}{2}}_{>0} \cdot \underbrace{(x_{k+1} - x_k)^2}_{>0}.$$

Tehát $f(x_k) > 0$ $(\forall k \in \mathbb{N})$.

Newton-módszer – monoton konvergencia

2. Az (x_k) sorozat monoton fogyó,

   valamint az (x_k) sorozat alulról korlátos,

   így az (x_k) sorozat konvergens, $\hat{x} := \lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

2. Az (x_k) sorozat monoton fogyó,

$$x_{k+1} = x_k - \underbrace{\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{>0} < x_k;$$

valamint az (x_k) sorozat alulról korlátos,

így az (x_k) sorozat konvergens, $\hat{x} := \lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

2. Az (x_k) sorozat monoton fogyó,

$$x_{k+1} = x_k - \underbrace{\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{>0} < x_k;$$

valamint az (x_k) sorozat alulról korlátos,

$$0 = f(x^*) < f(x_k), \; f \text{ szig. mon. nő} \quad \Longrightarrow \quad x^* < x_k$$

így az (x_k) sorozat konvergens, $\hat{x} := \lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

Newton-módszer – monoton konvergencia

2. Az (x_k) sorozat monoton fogyó,

$$x_{k+1} = x_k - \underbrace{\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{>0} < x_k;$$

valamint az (x_k) sorozat alulról korlátos,

$$0 = f(x^*) < f(x_k),\ f \text{ szig. mon. nő} \quad \Longrightarrow \quad x^* < x_k$$

így az (x_k) sorozat konvergens, $\hat{x} := \lim\limits_{k\to\infty} x_k$.

3. Kell: $\hat{x} = x^*$. Elég: $f(\hat{x}) = 0$. ($f \in C[a;b]$, f szig. mon.)

2. Az (x_k) sorozat monoton fogyó,

$$x_{k+1} = x_k - \underbrace{\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{>0} < x_k;$$

valamint az (x_k) sorozat alulról korlátos,

$$0 = f(x^*) < f(x_k),\ f \text{ szig. mon. nő} \quad \Longrightarrow \quad x^* < x_k$$

így az (x_k) sorozat konvergens, $\hat{x} := \lim_{k\to\infty} x_k$.

3. Kell: $\hat{x} = x^*$. Elég: $f(\hat{x}) = 0$. ($f \in C[a;b]$, f szig. mon.)

$$f(\hat{x}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{k+1}) = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{f''(\xi_k)}{2}}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(x_{k+1} - x_k)^2}_{\to 0 \text{ (Cauchy)}} = 0. \qquad \square$$

Tétel: lokális konvergencia tétele

Ha $f \in C^2[a;b]$ és

1. $\exists\, x^* \in [a;b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,

Tétel: lokális konvergencia tétele

Ha $f \in C^2[a;b]$ és

1. $\exists\, x^* \in [a;b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' állandó előjelű,

Tétel: lokális konvergencia tétele

Ha $f \in C^2[a;b]$ és

1. $\exists\, x^* \in [a;b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' állandó előjelű,
3. $m_1 = \min\limits_{x \in [a;b]} |f'(x)| > 0$,

Tétel: lokális konvergencia tétele

Ha $f \in C^2[a;b]$ és

1. $\exists\, x^* \in [a;b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' állandó előjelű,
3. $m_1 = \min\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)| > 0$,
4. $M_2 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f''(x)| < +\infty$, innen $M = \frac{M_2}{2\cdot m_1}$.

Tétel: lokális konvergencia tétele

Ha $f \in C^2[a;b]$ és

1. $\exists\, x^* \in [a;b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' állandó előjelű,
3. $m_1 = \min\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)| > 0$,
4. $M_2 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f''(x)| < +\infty$, innen $M = \frac{M_2}{2\cdot m_1}$.
5. $x_0 \in [a;b] : |x_0 - x^*| < r := \min\left\{ \frac{1}{M}, |x^* - a|, |x^* - b| \right\}$,

Tétel: lokális konvergencia tétele

Ha $f \in C^2[a;b]$ és

1. $\exists\, x^* \in [a;b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' állandó előjelű,
3. $m_1 = \min\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)| > 0$,
4. $M_2 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f''(x)| < +\infty$, innen $M = \frac{M_2}{2\cdot m_1}$.
5. $x_0 \in [a;b] : |x_0 - x^*| < r := \min\left\{ \frac{1}{M}, |x^* - a|, |x^* - b| \right\}$,

akkor az x_0 pontból indított Newton-módszer másodrendben konvergál a gyökhöz, és az

$$|x_{k+1} - x^*| \leq M \cdot |x_k - x^*|^2$$

hibabecslés érvényes.

Röviden: Ha elég közelről indulunk, akkor gyorsan odatalálunk.

Newton-módszer – lokális konvergencia

Röviden: Ha elég közelről indulunk, akkor gyorsan odatalálunk.

Megjegyzés:

Röviden: Ha elég közelről indulunk, akkor gyorsan odatalálunk.

Megjegyzés:

- $|x_0 - x^*| < r := \min\left\{ \frac{1}{M}, |x^* - a|, |x^* - b| \right\}$, azaz legyünk „elég közel”, de azért mindenesetre legyünk $[a; b]$-n belül is.

Röviden: Ha elég közelről indulunk, akkor gyorsan odatalálunk.

Megjegyzés:

- $|x_0 - x^*| < r := \min\left\{ \frac{1}{M}, |x^* - a|, |x^* - b| \right\}$, azaz legyünk „elég közel”, de azért mindenesetre legyünk $[a; b]$-n belül is.
- A monoton konvergencia feltételeinek esetén is másodrendű lesz a konvergencia, hiszen előbb-utóbb „elég közel” kerülünk a gyökhöz.

Biz.:

1. Alkalmazzuk az f függvényre a Taylor-formulát, x_k középppponttal az x^* helyen, másodfokú maradéktaggal.
   $\exists \xi_k \in (x_k, x^*)$ (vagy (x^*, x_k)):

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2}(x^* - x_k)^2.$$

Biz.:

1. Alkalmazzuk az f függvényre a Taylor-formulát, x_k középpppontal az x^* helyen, másodfokú maradéktaggal. $\exists \xi_k \in (x_k, x^*)$ (vagy (x^*, x_k)):

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2}(x^* - x_k)^2.$$

2. Mindkét oldalt $f'(x_k)$-val osztva, majd átrendezve és a Newton-módszer képletét felismerve kapjuk, hogy

$$0 = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + x^* - x_k + \frac{f''(\xi_k)}{2 \cdot f'(x_k)}(x^* - x_k)^2,$$

$$\left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right) - x^* = x_{k+1} - x^* = \frac{f''(\xi_k)}{2 \cdot f'(x_k)}(x^* - x_k)^2,$$

$$|x_{k+1} - x^*| \le \frac{M_2}{2 \cdot m_1} \cdot |x_k - x^*|^2 = M \cdot |x_k - x^*|^2,$$

ahol M, m_1, M_2 a tételben definiált mennyiségek.

3. Bevezetve az $\varepsilon_k := x_k - x^*$ jelölést, így is írhatjuk:

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq M \cdot |\varepsilon_k|^2 .$$

Ezzel beláttuk, hogy ha (x_k) konvergál és határértéke x^*.

3. Bevezetve az $\varepsilon_k := x_k - x^*$ jelölést, így is írhatjuk:

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq M \cdot |\varepsilon_k|^2 \,.$$

Ezzel beláttuk, hogy ha (x_k) konvergál és határértéke x^*.

4. A Taylor-formából

$$\frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \frac{|f''(\xi_k)|}{2\,|f'(x_k)|}.$$

Határértéket véve

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{|f''(\xi_k)|}{2\,|f'(x_k)|} = \frac{|f''(x^*)|}{2\,|f'(x^*)|} \neq 0,$$

tehát legalább másodrendben konvergens a sorozat.

Newton-módszer – lokális konvergencia

5. Teljes indukcióval belátjuk, hogy a sorozat minden tagja a $K_r(x^*)$ környezetben marad. $|x_0 - x^*| < r$ feltétel volt. Tegyük fel, hogy $|x_k - x^*| = |\varepsilon_k| < r \leq \frac{1}{M}$, ekkor

$$|\varepsilon_{k+1}| = |x_{k+1} - x^*| \leq M \cdot |\varepsilon_k|^2 = \underbrace{(M|\varepsilon_k|)}_{<1} \cdot |\varepsilon_k| < |\varepsilon_k| < r.$$

5. Teljes indukcióval belátjuk, hogy a sorozat minden tagja a $K_r(x^*)$ környezetben marad. $|x_0 - x^*| < r$ feltétel volt. Tegyük fel, hogy $|x_k - x^*| = |\varepsilon_k| < r \leq \frac{1}{M}$, ekkor

$$|\varepsilon_{k+1}| = |x_{k+1} - x^*| \leq M \cdot |\varepsilon_k|^2 = \underbrace{(M|\varepsilon_k|)}_{<1} \cdot |\varepsilon_k| < |\varepsilon_k| < r.$$

6. A konvergencia bizonyításához belátjuk, hogy az $|\varepsilon_k|$ hibakorlátok sorozata 0-hoz tart. Bevezetjük a $d_k := M \cdot |\varepsilon_k|$ jelölést.

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq M \cdot |\varepsilon_k|^2 \quad \Longrightarrow \quad M \cdot |\varepsilon_{k+1}| \leq (M \cdot |\varepsilon_k|)^2 \quad \Longrightarrow$$

$$d_{k+1} \leq d_k^2 \quad \Longrightarrow \quad d_k \leq d_{k-1}^2 \leq d_{k-2}^{2\cdot 2} \leq \ldots \leq d_0^{2^k},$$

$$M \cdot |\varepsilon_k| \leq (M \cdot |\varepsilon_0|)^{2^k} \quad \Longrightarrow \quad |\varepsilon_k| \leq \frac{1}{M} \cdot (M \cdot |\varepsilon_0|)^{2^k}.$$

5. Teljes indukcióval belátjuk, hogy a sorozat minden tagja a $K_r(x^*)$ környezetben marad. $|x_0 - x^*| < r$ feltétel volt. Tegyük fel, hogy $|x_k - x^*| = |\varepsilon_k| < r \le \frac{1}{M}$, ekkor

$$|\varepsilon_{k+1}| = |x_{k+1} - x^*| \le M \cdot |\varepsilon_k|^2 = \underbrace{(M|\varepsilon_k|)}_{<1} \cdot |\varepsilon_k| < |\varepsilon_k| < r.$$

6. A konvergencia bizonyításához belátjuk, hogy az $|\varepsilon_k|$ hibakorlátok sorozata 0-hoz tart. Bevezetjük a $d_k := M \cdot |\varepsilon_k|$ jelölést.

$$|\varepsilon_{k+1}| \le M \cdot |\varepsilon_k|^2 \quad \Longrightarrow \quad M \cdot |\varepsilon_{k+1}| \le (M \cdot |\varepsilon_k|)^2 \quad \Longrightarrow$$

$$d_{k+1} \le d_k^2 \quad \Longrightarrow \quad d_k \le d_{k-1}^2 \le d_{k-2}^{2\cdot 2} \le \ldots \le d_0^{2^k},$$

$$M \cdot |\varepsilon_k| \le (M \cdot |\varepsilon_0|)^{2^k} \quad \Longrightarrow \quad |\varepsilon_k| \le \frac{1}{M} \cdot (M \cdot |\varepsilon_0|)^{2^k}.$$

7. Mivel $|\varepsilon_0| = |x_0 - x^*| < \frac{1}{M}$, így $M \cdot |\varepsilon_0| < 1$, ezért $|\varepsilon_k| \to 0$, ami az (x_k) sorozat konvergenciáját jelenti. $\square$

Megjegyzés:

- Ha $f'(x_k) = 0$, akkor x_{k+1} nincs értelmezve.

Megjegyzés:

- Ha $f'(x_k) = 0$, akkor x_{k+1} nincs értelmezve.
- Néha a konvergencia csak elsőrendű (vagy instabillá válik).
  Például ha $f'(x^*) = 0$, azaz x^* többszörös gyök.
  A Newton-módszerrel x^* közelében $\frac{0}{0}$ alakú osztást végzünk.

Megjegyzés:

- Ha $f'(x_k) = 0$, akkor x_{k+1} nincs értelmezve.
- Néha a konvergencia csak elsőrendű (vagy instabillá válik). Például ha $f'(x^*) = 0$, azaz x^* többszörös gyök. A Newton-módszerrel x^* közelében $\frac{0}{0}$ alakú osztást végzünk.
- Többszörös gyök esetén például alkalmazzuk a $g(x) := \frac{f(x)}{f'(x)}$ függvényre a Newton-módszert.

Megjegyzés:

- Ha $f'(x_k) = 0$, akkor x_{k+1} nincs értelmezve.
- Néha a konvergencia csak elsőrendű (vagy instabillá válik).
  Például ha $f'(x^*) = 0$, azaz x^* többszörös gyök.
  A Newton-módszerrel x^* közelében $\frac{0}{0}$ alakú osztást végzünk.
- Többszörös gyök esetén például alkalmazzuk a $g(x) := \frac{f(x)}{f'(x)}$ függvényre a Newton-módszert.
- Másik lehetőség: ha x^* r-szeres gyök, akkor az

$$x_{k+1} := x_k - r \cdot \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

  módosítást használjuk, amivel másodrendű iterációt kapunk.

Megjegyzés:

- Ha $f'(x_k) = 0$, akkor x_{k+1} nincs értelmezve.
- Néha a konvergencia csak elsőrendű (vagy instabillá válik). Például ha $f'(x^*) = 0$, azaz x^* többszörös gyök. A Newton-módszerrel x^* közelében $\frac{0}{0}$ alakú osztást végzünk.
- Többszörös gyök esetén például alkalmazzuk a $g(x) := \frac{f(x)}{f'(x)}$ függvényre a Newton-módszert.
- Másik lehetőség: ha x^* r-szeres gyök, akkor az

$$x_{k+1} := x_k - r \cdot \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

  módosítást használjuk, amivel másodrendű iterációt kapunk.
- Néha akár harmadrendű is lehet (v.ö. magasabbrendű konvergencia tétel).

Megjegyzés folyt.:

- Használhattuk volna a magasabbrendű konvergencia tételt is a Newton-módszer lokális konvergencia tételének bizonyítására a $\varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ megfeleltetéssel, de akkor $f \in C^3[a;b]$-t kellett volna feltennünk.

Megjegyzés folyt.:

- Használhattuk volna a magasabbrendű konvergencia tételt is a Newton-módszer lokális konvergencia tételének bizonyítására a $\varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ megfeleltetéssel, de akkor $f \in C^3[a;b]$-t kellett volna feltennünk.
- Hívják Newton–Raphson-, ill. Newton–Fourier-módszernek is.

Megjegyzés folyt.:

- Használhattuk volna a magasabbrendű konvergencia tételt is a Newton-módszer lokális konvergencia tételének bizonyítására a $\varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ megfeleltetéssel, de akkor $f \in C^3[a; b]$-t kellett volna feltennünk.
- Hívják Newton–Raphson-, ill. Newton–Fourier-módszernek is.
- A módszer nem biztos, hogy konvergál.

Megjegyzés folyt.:

- Használhattuk volna a magasabbrendű konvergencia tételt is a Newton-módszer lokális konvergencia tételének bizonyítására a $\varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ megfeleltetéssel, de akkor $f \in C^3[a; b]$-t kellett volna feltennünk.
- Hívják Newton–Raphson-, ill. Newton–Fourier-módszernek is.
- A módszer nem biztos, hogy konvergál.
- Ciklusba is kerülhet (pontos számolás esetén...).

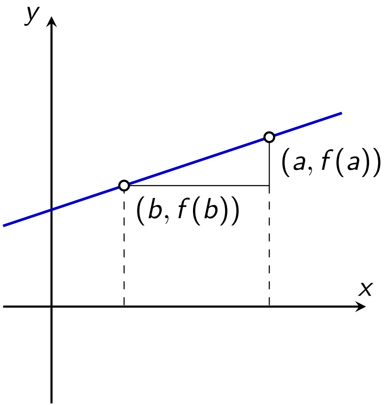
Megjegyzés folyt.:

- Használhattuk volna a magasabbrendű konvergencia tételt is a Newton-módszer lokális konvergencia tételének bizonyítására a $\varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ megfeleltetéssel, de akkor $f \in C^3[a; b]$-t kellett volna feltennünk.
- Hívják Newton–Raphson-, ill. Newton–Fourier-módszernek is.
- A módszer nem biztos, hogy konvergál.
- Ciklusba is kerülhet (pontos számolás esetén...).
- A gyökök „vonzásterületein” kívül kaotikus jelenségek. . .

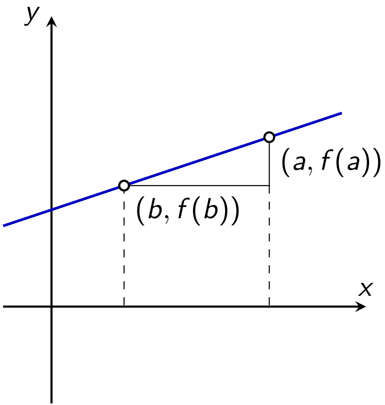
Tartalomjegyzék

Ismétlés: Két adott ponton átmenő egyenes egyenlete.

Ismétlés: Két adott ponton átmenő egyenes egyenlete.



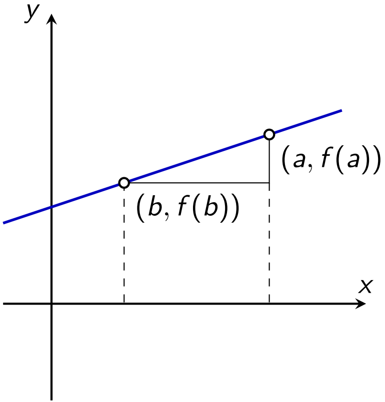
Ismétlés: Két adott ponton átmenő egyenes egyenlete.



Az egyenes meredeksége:

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Ismétlés: Két adott ponton átmenő egyenes egyenlete.



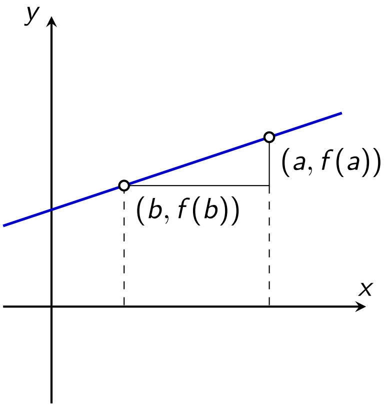
Az egyenes meredeksége:

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}.$$

Az egyenes egyenlete:

$$y-f(a)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\cdot(x-a).$$

Ismétlés: Két adott ponton átmenő egyenes egyenlete.



Az egyenes meredeksége:

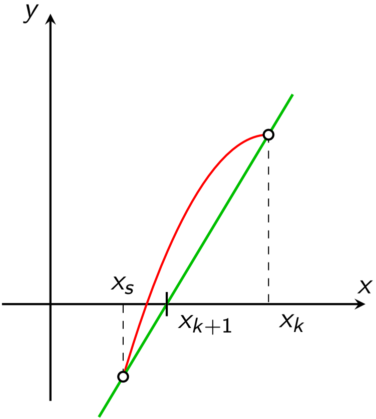
$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

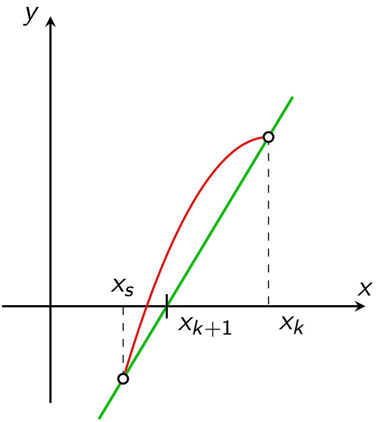
Az egyenes egyenlete:

$$y - f(a) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \cdot (x - a).$$

Ennek zérushelye ($y = 0$):

$$x = a - \frac{f(a) \cdot (a - b)}{f(a) - f(b)}.$$


y
x
x_s
x_{k+1}
x_k



Definíció: húrmódszer

Az $f \in C[a;b]$ függvény esetén, ha $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor a *húrmódszer* alakja:

$$x_0 := a, \quad x_1 := b,$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_s)}{f(x_k) - f(x_s)}$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots),$$

ahol s a legnagyobb olyan index, amelyre $f(x_k) \cdot f(x_s) < 0$.

Tétel: a húrmódszer konvergenciája

Ha $f \in C^2[a;b]$ és

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$,
2. $M \cdot (b-a) < 1$,

akkor a húrmódszer elsőrendben konvergál az x^* gyökhöz és

$$|x_k - x^*| \leq \frac{1}{M} \cdot \left(M \cdot |x_0 - x^*|\right)^k$$

teljesül, ahol $M = \frac{M_2}{2 \cdot m_1}$ ugyanúgy, mint korábban.

Tétel: a húrmódszer konvergenciája

Ha $f \in C^2[a; b]$ és

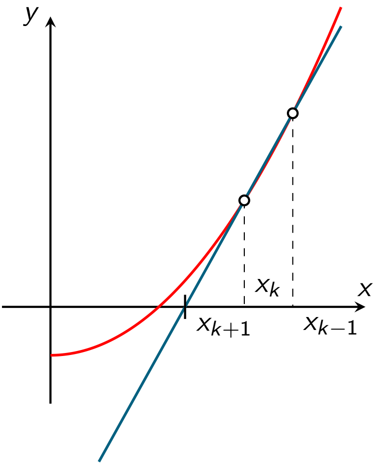
1. $f(a) \cdot f(b) < 0$,
2. $M \cdot (b - a) < 1$,

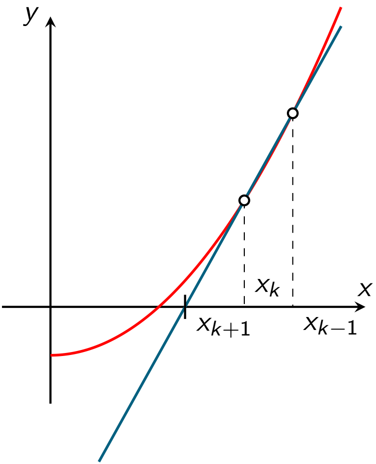
akkor a húrmódszer elsőrendben konvergál az x^* gyökhöz és

$$|x_k - x^*| \leq \frac{1}{M} \cdot (M \cdot |x_0 - x^*|)^k$$

teljesül, ahol $M = \frac{M_2}{2 \cdot m_1}$ ugyanúgy, mint korábban.

Biz.: nélkül.


y
x
x_k
x_{k+1}
x_{k-1}



Definíció: szelőmódszer

Az $f \in C[a;b]$ függvény esetén a *szelőmódszer* alakja:

$$x_0, x_1 \in [a;b],$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots).$$

Tétel: a szelőmódszer konvergenciája

Ha $f \in C^2[a;b]$ és

1. $\exists x^* \in [a;b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' állandó előjelű,
3. $x_0, x_1 \in [a;b]$:

$$\left.\begin{array}{l} |x_0 - x^*| \\ |x_1 - x^*| \end{array}\right\} < r := \min\left\{ \frac{1}{M}, |x^* - a|, |x^* - b| \right\},$$

akkor a szelőmódszer $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ rendben konvergál az x^* gyökhöz. (M a szokásos.)

Tétel: a szelőmódszer konvergenciája

Ha $f \in C^2[a;b]$ és

1. $\exists x^* \in [a;b] : f(x^*) = 0$, azaz van gyök,
2. f' állandó előjelű,
3. $x_0, x_1 \in [a;b]$:

$$\left.\begin{array}{c} |x_0 - x^*| \\ |x_1 - x^*| \end{array}\right\} < r := \min\left\{ \frac{1}{M}, |x^* - a|, |x^* - b| \right\},$$

akkor a szelőmódszer $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ rendben konvergál az x^* gyökhöz. (M a szokásos.)

Biz.: nélkül.

Tartalomjegyzék

Többváltozós nemlineáris egyenletrendszerek

Feladat

$$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad F(x) = 0, \qquad x = ?, \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Legtöbb módszerünk általánosítható többváltozós esetre.

Feladat

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad F(x) = 0, \qquad x = ?, \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Legtöbb módszerünk általánosítható többváltozós esetre.

Egyszerű iteráció

$$F(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \Phi(x)$$

Banach-féle fixponttétel szerint...

Többváltozós Newton-módszer

Közelítsük F-et az elsőfokú Taylor-polinomjával.

Többváltozós Newton-módszer

Közelítsük F-et az elsőfokú Taylor-polinomjával.

$$F(x) \approx F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)}) \cdot (x - x^{(k)}),$$

Többváltozós Newton-módszer

Közelítsük F-et az elsőfokú Taylor-polinomjával.

$$F(x) \approx F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)}) \cdot (x - x^{(k)}),$$
$$F'(x^{(k)}) = \left(\frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Többváltozós Newton-módszer

Közelítsük F-et az elsőfokú Taylor-polinomjával.

$$F(x) \approx F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)}) \cdot (x - x^{(k)}),$$
$$F'(x^{(k)}) = \left(\frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Ezen közelítés zérushelye lesz $x^{(k+1)}$:

Többváltozós Newton-módszer

Közelítsük F-et az elsőfokú Taylor-polinomjával.

$$F(x) \approx F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)}) \cdot (x - x^{(k)}),$$
$$F'(x^{(k)}) = \left(\frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Ezen közelítés zérushelye lesz $x^{(k+1)}$:

1. $F'(x^{(k)}) \cdot \underbrace{(x^{(k+1)} - x^{(k)})}_{s^{(k)}} = -F(x^{(k)})$ LER megoldás ($\rightsquigarrow s^{(k)}$),
2. $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$, $s^{(k)}$ a továbblépés iránya.

Definíció: a többváltozós Newton-módszer képlete

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(F'(x^{(k)})\right)^{-1} \cdot F(x^{(k)})$$

Definíció: a többváltozós Newton-módszer képlete

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left(F'(x^{(k)})\right)^{-1} \cdot F(x^{(k)})$$

Megj.: A módszer javítható pl. úgy, hogy ne kelljen minden lépésben invertálni és deriváltat számolni $\rightsquigarrow$ Broyden-módszer (lassabb).

Példák Matlab-ban

1. A $\sqrt{2}$ értékének másodrendben konvergens közelítése.
2. Példák a Newton-módszer működésére: konvergencia, divergencia, ciklizálás, fraktálszerű jelenségek.

Példa:

Alkalmazzuk a következő kétváltozós függvényre a Newton-módszert!

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

ahol $f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$, $f_2(x) = -x_1^2 - x_2$.
Geometriailag egy fordított parabola és az origó körüli egy sugarú kör metszéspontját keressük.

Megj.:

- Bizonyos pontokban a Newton-módszer nem értelmezett, mert $\det(f'(x^{(k)})) = 0$.

  $$\det(F'(x)) = \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ -2x_1 & -1 \end{vmatrix} = -2x_1 + 4x_1x_2 = 2x_1(2x_2 - 1) = 0$$

  $x_1 = 0$ és $x_2 = 0.5$ esetén a módszer nem értelmezett.

- Divergens például $x_0 = \begin{bmatrix} \pm 1 & 1 \end{bmatrix}^T$-ből úgy, hogy az első koordináta sorozat konvergens (de a határérték rossz).