1. tétel (A teljes indukció elve). *Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott egy $A(n)$ állítás, és azt tudjuk, hogy*

(i) $A(0)$ *igaz,*

(ii) *ha* $A(n)$ *igaz, akkor* $A(n+1)$ *is igaz.*

Ekkor az $A(n)$ *állítás minden* n *természetes számra igaz.*

Bizonyítás. Legyen

$$S := \Big\{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ igaz}\Big\}.$$

Ekkor $\underline{S \subset \mathbb{N}}$ és S induktív halmaz, hiszen $0 \in S$, és ha $n \in S$, azaz $A(n)$ igaz, akkor $A(n+1)$ is igaz, ezért $n+1 \in S$ teljesül, következésképpen S induktív halmaz. Mivel $\mathbb{N}$ a legszűkebb induktív halmaz, ezért az $\underline{\mathbb{N} \subset S}$ tartalmazás is fennáll, tehát $S = \mathbb{N}$. Ez pedig azt jelenti, hogy az állítás minden n természetes számra igaz.

2. tétel (A szuprémum elv). *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy*

(i) *$H \neq \emptyset$ és*

(ii) *H felülről korlátos.*

Ekkor

$$\exists \min \{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

Bizonyítás. Legyen

$$A := H \quad \text{és} \quad B := \{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

A feltételek miatt $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, továbbá

$$\forall a \in A \quad \text{és} \quad \forall K \in B \quad \text{esetén} \quad a \leq K.$$

A teljességi axiómából következik, hogy

$$\exists \xi \in \mathbb{R}\colon a \leq \xi \leq K \qquad (\forall a \in A,\ \forall K \in B).$$

Erre a ξ-re az teljesül, hogy

- ξ felső korlátja H-nak, hiszen $a \leq \xi$ minden $a \in A$ esetén,
- ξ a legkisebb felső korlát, ui. ha K egy felső korlát (azaz $K \in B$), akkor $K \geq \xi$.

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy ξ a H halmaz legkisebb felső korlátja.

7. tétel (Az arkhimédészi tulajdonság). *Minden $a > 0$ és minden b valós számhoz létezik olyan n természetes szám, hogy $b < n \cdot a$, azaz*

$$\forall\, a > 0 \quad \textit{és} \quad \forall\, b \in \mathbb{R} \quad \textit{esetén} \quad \exists\, n \in \mathbb{N}, \ \textit{hogy} \quad b < n \cdot a.$$

Bizonyítás. Indirekt módon. Tegyük fel, hogy

$$\exists\, a > 0 \ \text{ és } \ \exists\, b \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall\, n \in \mathbb{N}: \ b \geq n \cdot a.$$

Legyen

$$H := \{n \cdot a \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ekkor $H \neq \emptyset$ és H felülről korlátos, hiszen $n \cdot a \leq b$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. A szuprémum elv szerint

$$\exists \sup H =: \xi.$$

Ekkor ξ a legkisebb felső korlátja H-nak, tehát $\xi - a$ nem felső korlát. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \ n_0 \cdot a > \xi - a \qquad \Longleftrightarrow \qquad (n_0 + 1) \cdot a > \xi.$$

Azonban $(n_0 + 1) \cdot a \in H$, tehát $(n_0 + 1) \cdot a \leq \xi$, hiszen ξ felső korlátja a H halmaznak. Így ellentmondáshoz jutottunk.

8. tétel (A Cantor-tulajdonság). *Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum úgy, hogy*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. A teljességi axiómát fogjuk alkalmazni. Legyen

$$A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{és} \quad B := \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Először belátjuk, hogy

$$(*) \qquad a_n \leq b_m \quad \text{tetszőleges } n, m \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Valóban,

i) ha $n \leq m$, akkor $a_n \leq a_m \leq b_m$,

ii) ha $m < n$, akkor $a_n \leq b_n \leq b_m$.

Mivel $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$, ezért $(*)$ miatt a teljességi axióma feltételei teljesülnek, így

$$\exists \xi \in \mathbb{R}: \ a_n \leq \xi \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ indexre.}$$

Ha $n = m$, akkor azt kapjuk, hogy

$$a_n \leq \xi \leq b_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \xi \in [a_n, b_n] \ \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén,}$$

és ez azt jelenti, hogy

$$\xi \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Konvergens sorozatok határértékének egyértelműsége:

1. tétel (A határérték egyértelműsége). *Ha az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens, akkor a konvergencia definíciójában szereplő A szám egyértelműen létezik.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatra $(*)$ az A_1 és az A_2 számokkal is teljesül. Indirekt módon tegyük fel azt is, hogy $A_1 \neq A_2$. Ekkor $\forall\, \varepsilon > 0$ számhoz

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_1\colon |a_n - A_1| < \varepsilon, \quad \text{és}$$
$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_2\colon |a_n - A_2| < \varepsilon.$$

Válasszuk itt speciálisan az

$$\varepsilon := \frac{|A_1 - A_2|}{2}$$

(pozitív) számot. Az ennek megfelelő n_1, n_2 indexeket figyelembe véve legyen

$$n_0 := \max\{n_1, n_2\}.$$

Ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > n_0$, akkor nyilván $n > n_1$ és $n > n_2$ is fennáll, következésképpen

$$|A_1 - A_2| = \left|(A_1 - a_n) + (a_n - A_2)\right| \leq |a_n - A_1| + |a_n - A_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |A_1 - A_2|,$$

amiből (a nyilván nem igaz) $\left|A_1 - A_2\right| < \left|A_1 - A_2\right|$ következne. Ezért csak $A_1 = A_2$ lehet.

A konvergencia és a korlátosság kapcsolata:

A következő állítás a konvergencia és a korlátosság kapcsolatára vonatkozik. Azt fejezi ki, hogy a **korlátosság szükséges feltétele a konvergenciának.**

3. tétel. *Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor korlátos is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (a_n) konvergens és $\lim(a_n) = A \in \mathbb{R}$. Válasszuk a konvergencia definíciója szerinti jelöléssel ε-t 1-nek. Ehhez a hibakorláthoz

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0 \colon |a_n - A| < 1.$$

Így

$$|a_n| = \Big|(a_n - A) + A\Big| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A| \qquad (n > n_0).$$

Ha $n \leq n_0$, akkor

$$|a_n| \leq \max\Big\{|a_0|,\ |a_1|,\ \ldots,\ |a_{n_0}|\Big\}.$$

Legyen

$$K := \max\Big\{|a_0|,\ |a_1|,\ \ldots,\ |a_{n_0}|,\ 1 + |A|\Big\}.$$

Ekkor $|a_n| \leq K$ minden $n \in \mathbb{N}$ indexre, és ez azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat korlátos.

Minden sorozatnak van monoton részsorozata:

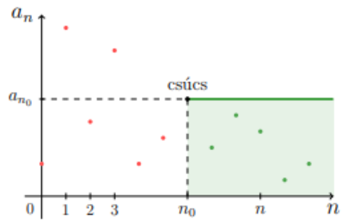
6. tétel. *Minden $a = (a_n)$ valós sorozatnak létezik* ***monoton részsorozata****, azaz létezik olyan $\nu = (\nu_n)$ indexsorozat, amellyel $a \circ \nu$ monoton növekedő vagy monoton csökkenő.*

Bizonyítás.

Az állítás igazolásához bevezetjük egy sorozat csúcsának a fogalmát: Azt mondjuk, hogy a_{n_0} az (a_n) sorozat **csúcsa** (vagy csúcseleme), ha

$$\forall\, n \geq n_0 \;\text{ indexre }\; a_n \leq a_{n_0}.$$

Két eset lehetséges.



__1. eset.__ A sorozatnak **végtelen** sok csúcsa van. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\colon a_{\nu_0} \text{ csúcselem, azaz } \forall\, n \geq \nu_0\colon a_n \leq a_{\nu_0};$$

$$\exists\, \nu_1 > \nu_0\colon a_{\nu_1} \text{ csúcselem, azaz } \forall\, n \geq \nu_1\colon a_n \leq a_{\nu_1}\ (\leq a_{\nu_0});$$

$$\vdots$$

Ezek a lépések folytathatók, mert végtelen sok csúcselem van. Így olyan $\nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots$ indexsorozatot kapunk, amelyre

$$a_{\nu_0} \geq a_{\nu_1} \geq a_{\nu_2} \geq \cdots,$$

ezért a csúcsok (a_{ν_n}) sorozata (a_n)-nek egy monoton csökkenő részsorozata.

__2. eset.__ A sorozatnak legfeljebb **véges** sok csúcsa van. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \;\text{ esetén }\; a_n \;\text{ már nem csúcs.}$$

Mivel a_N nem csúcselem, ezért

$$\exists\, \nu_0 > N\colon a_{\nu_0} > a_N.$$

Azonban az a_{ν_0} sem csúcselem, ezért

$$\exists\, \nu_1 > \nu_0\colon a_{\nu_1} > a_{\nu_0}\ (> a_N).$$

Az eljárást folytatva most olyan $\nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots$ indexsorozatot kapunk, amelyre

$$a_{\nu_0} < a_{\nu_1} < a_{\nu_2} < \cdots.$$

Ebben az esetben tehát az (a_{ν_n}) sorozat (a_n)-nek egy (szigorúan) monoton növekedő részsorozata.

7. tétel (A közrefogási elv). *Tegyük fel, hogy az (a_n), (b_n) és (c_n) sorozatokra teljesülnek a következők:*

- $\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n > N\colon a_n \le b_n \le c_n$,
- *az (a_n) és a (c_n) sorozatnak van határértéke, továbbá*

$$\lim\,(a_n) = \lim\,(c_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a (b_n) sorozatnak is van határértéke és $\lim(b_n) = A$.

Bizonyítás. Három eset lehetséges.

<u>**1. eset.**</u> $\boxed{A \in \mathbb{R}}$ Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. $\lim(a_n) = \lim(c_n) = A$ azt jelenti, hogy (a_n) és (c_n) azonos A határértékkel rendelkező konvergens sorozatok. A konvergencia definíciója szerint tehát

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_1\colon A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$
$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_2\colon A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon.$$

Legyen $n_0 := \max\{N, n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall\, n > n_0$ indexre

$$A - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < A + \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy
$$|b_n - A| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > n_0,$$
azaz a (b_n) sorozat konvergens, tehát van határértéke, és $\lim(b_n) = A$.

<u>**2. eset.**</u> $\boxed{A = +\infty}$ Tegyük fel, hogy $P > 0$ tetszőleges valós szám. A $\lim\,(a_n) = +\infty$ értelmezése szerint
$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_1\colon a_n > P.$$
Legyen $n_0 := \max\{N, n_1\}$. Ekkor $\forall\, n > n_0$ indexre

$$P < a_n \le b_n,$$

és ez azt jelenti, hogy $\lim\,(b_n) = +\infty$.

<u>**3. eset.**</u> $\boxed{A = -\infty}$ Tegyük fel, hogy $P < 0$ tetszőleges valós szám. A $\lim\,(c_n) = -\infty$ értelmezése szerint
$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_1\colon c_n < P.$$
Legyen $n_0 := \max\{N, n_1\}$, akkor $\forall\, n > n_0$ indexre

$$P > c_n \ge b_n.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $\lim\,(b_n) = -\infty$.

A határérték és a rendezés kapcsolata:

8. tétel. *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatnak van határértéke és*

$$\lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(b_n) = B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor:

1° $A < B \quad \Longrightarrow \quad \exists\, N \in \mathbb{N},$ *hogy* $\forall\, n > N\colon a_n < b_n.$

2° $\exists\, N \in \mathbb{N},$ *hogy* $\forall\, n > N\colon a_n \le b_n \quad \Longrightarrow \quad A \le B.$

Bizonyítás.

1° Azt már tudjuk, hogy bármely két $\overline{\mathbb{R}}$-beli elem szétválasztható diszjunkt környezetekkel, azaz

$$\forall\, A, B \in \overline{\mathbb{R}},\ A \ne B\text{-hez } \exists\, r_1, r_2 > 0\colon K_{r_1}(A) \cap K_{r_2}(B) = \emptyset.$$

Világos, hogy ha $A < B$, akkor $\forall\, x \in K_{r_1}(A), \forall\, y \in K_{r_2}(B)\colon x < y$.

Mivel $\lim(a_n) = A$ és $\lim(b_n) = B$, ezért a határérték definíciója szerint

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_1\colon a_n \in K_{r_1}(A),$$
$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_2\colon b_n \in K_{r_2}(B).$$

Legyen $N := \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall\, n > N$ esetén

$$a_n \in K_{r_1}(A) \quad \text{és} \quad b_n \in K_{r_2}(B) \qquad \Longrightarrow \qquad a_n < b_n.$$

2° Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $A > B$. Ekkor a már igazolt **1°** állítás szerint $\exists\, N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ indexre $b_n < a_n$, ami ellentmond a feltételnek.

2. tétel (Műveletek nullasorozatokkal). *Tegyük fel, hogy* $\lim(a_n) = 0$ *és* $\lim(b_n) = 0$. *Ekkor*

1° $(a_n + b_n)$ *is nullasorozat,*

2° *ha* (c_n) *korlátos sorozat, akkor* $(c_n \cdot a_n)$ *nullasorozat,*

3° $(a_n \cdot b_n)$ *nullasorozat.*

Bizonyítás.

1° Mivel $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 0$, ezért $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N},\ \text{hogy}\ \forall\, n > n_1:\ |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}\ \text{ és}$$
$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N},\ \text{hogy}\ \forall\, n > n_2:\ |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor $\forall\, n > n_0$ indexre

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy $\lim(a_n + b_n) = 0$, azaz $(a_n + b_n)$ valóban nullasorozat.

2° A (c_n) sorozat korlátos, ezért

$$\exists\, K > 0:\ |c_n| < K \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel (a_n) nullasorozat, ezért

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \text{hogy}\ \forall\, n > n_0:\ |a_n| < \frac{\varepsilon}{K},$$

következésképpen minden $n > n_0$ indexre

$$|c_n \cdot a_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

azaz $\lim(c_n \cdot a_n) = 0$.

3° Mivel minden konvergens sorozat korlátos, ezért a $\lim(b_n) = 0$ feltételből következik, hogy (b_n) korlátos sorozat. Az állítás tehát **2°** közvetlen következménye.

Konvergens sorozatok szorzatára és hányadosára vonatkozó tétel:

3. tétel (Műveletek konvergens sorozatokkal). *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozat konvergens. Legyen*

$$\lim(a_n) = A \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \lim(b_n) = B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

2^o *$(a_n \cdot b_n)$ is konvergens és* $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n) = A \cdot B$,

3^o *ha* $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *és* $\lim(b_n) \neq 0$, *akkor*

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ is konvergens és } \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{A}{B}.$$

Bizonyítás. Gyakran fogjuk alkalmazni a nullasorozatok **2^o** alaptulajdonságát, ami azt állítja, hogy

$(*)$ $\quad (x_n)$ konvergens és $\alpha \in \mathbb{R}$ a határértéke $\iff$ $(x_n - \alpha)$ nullasorozat.

2^o A $(*)$ állítás miatt elég azt megmutatni, hogy $\big(a_nb_n - AB\big)$ nullasorozat. Ez a következő átalakítással igazolható:

$$a_nb_n - AB = a_nb_n - Ab_n + Ab_n - AB =$$
$$= \underbrace{\underbrace{\underbrace{b_n}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(a_n - A)}_{\text{0-sorozat}}}_{\text{0-sorozat}} + \underbrace{\underbrace{A}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(b_n - B)}_{\text{0-sorozat}}}_{\text{0-sorozat}}}_{\text{0-sorozat}}.$$

A fenti gondolatmenetben a (b_n) sorozat azért korlátos, mert konvergens. Így $\big(a_nb_n - AB\big)$ valóban nullasorozat, ezért az $\big(a_n \cdot b_n\big)$ szorzat-sorozat konvergens, és $A \cdot B$ a határértéke, azaz

$$\lim\big(a_n \cdot b_n\big) = A \cdot B = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n).$$

3^o A bizonyításhoz először egy önmagában is érdekes állítást igazolunk.

Segédtétel. *Ha* $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *és* (b_n) *konvergens, továbbá* $B := \lim(b_n) \neq 0$, *akkor az*

$$\left(\frac{1}{b_n}\right)$$

reciprok-sorozat korlátos.

Ennek bizonyításához legyen $\varepsilon := |B|/2$. Ekkor egy alkalmas $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex mellett

$$|b_n - B| < \varepsilon = \frac{|B|}{2} \qquad \forall n > n_0 \text{ indexre.}$$

Így minden $n > n_0$ esetén

$$|b_n| = |B + b_n - B| \geq |B| - |b_n - B| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}.$$

Tehát

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| < \frac{2}{|B|}, \quad \text{ha } n > n_0,$$

következésképpen az

$$\left|\frac{1}{b_n}\right| \leq \max\left\{\frac{1}{|b_0|}, \frac{1}{|b_1|}, \ldots, \frac{1}{|b_{n_0}|}, \frac{2}{|B|}\right\}$$

egyenlőtlenség már minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül, ezért az $\big(1/b_n\big)$ sorozat valóban korlátos. A segédtételt tehát bebizonyítottuk. $\square$

Most azt látjuk be, hogy a (b_n) sorozatra tett feltétel mellett

$$\left(\frac{1}{b_n}\right) \text{ sorozat konvergens és } \lim\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{B}.$$

Ez $(*)$-ból következik az alábbi átalakítással:

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} = \frac{B - b_n}{B \cdot b_n} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{B \cdot b_n}}_{\text{korlátos}} \cdot \underbrace{(B - b_n)}_{\text{0-sorzat}}}_{\text{0-sorzat}}.$$

A **3^o** állítás bizonyításának a befejezéséhez már csak azt kell figyelembe venni, hogy

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

más szóval az (a_n/b_n) „hányados-sorozat” két konvergens sorozat szorzata. Így a **2^o** állítás és a reciprok sorozatról az előbb mondottak miatt

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ is konvergens és } \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B} = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)}.$$

Monoton növekvő sorozatok határértéke (véges és végtelen eset):

5. tétel. *Minden (a_n) monoton sorozatnak van határértéke.*

1° **(a)** *Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről korlátos, akkor (a_n) konvergens és*

$$\lim(a_n) = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

2° **(a)** *Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről nem korlátos, akkor*

$$\lim(a_n) = +\infty.$$

Bizonyítás. Az állítást csak monoton növekedő sorozatokra fogjuk igazolni. Értelemszerű módosításokkal bizonyíthatjuk be az állítást a monoton csökkenő sorozatokra.

1° (a) Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat monoton növekedő és felülről korlátos. Legyen

$$A := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}.$$

Ez azt jelenti, hogy A a szóban forgó halmaznak a legkisebb felső korlátja, azaz

- $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \le A$ és
- $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ A - \varepsilon < a_{n_0} \le A$.

Mivel a feltételezésünk szerint az (a_n) sorozat monoton növekedő, ezért az

$$A - \varepsilon < a_n \le A$$

becslés is igaz minden $n > n_0$ indexre.

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n > n_0: \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat konvergens és $\lim(a_n) = A$.

2° (a) Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat monoton növekedő és felülről nem korlátos. Ekkor

$$\forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ a_{n_0} > P.$$

A monotonitás miatt ezért egyúttal az is igaz, hogy

$$\forall n > n_0: \ a_n > P,$$

és ez pontosan azt jelenti, hogy $\lim(a_n) = +\infty$.

Az $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergenciája:

2. tétel (Az e szám értelmezése). *Az*

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat szigorúan monoton növekedő és felülről korlátos, tehát konvergens. Legyen

$$e := \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Bizonyítás. Az állítást a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség **ötletes** felhasználá**saival** bizonyítjuk.

- **A monotonitás** igazolásához az egyenlőtlenséget az $(n+1)$ darab

$$1, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{n}$$

számra alkalmazzuk. Mivel ezek nem mind egyenlők, ezért

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

Mindkét oldalt $(n+1)$-edik hatványra emelve azt kapjuk, hogy

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

amivel beláttuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő.

- **A korlátosság** bizonyításához most az $(n+2)$ darab

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{n}$$

számra alkalmazzuk ismét a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[n+2]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{2\cdot\frac{1}{2}+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+2} = \frac{n+2}{n+2} = 1.$$

Ebből következik, hogy

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4 \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

ezért a sorozat felülről korlátos.

A monoton sorozatok határértékére vonatkozó tételből következik, hogy a sorozat konvergens.

4. tétel (Newton-féle iterációs eljárás m-edik gyökök keresésére). *Legyen $A > 0$ valós szám és $m \geq 2$ természetes szám. Ekkor:*

1° *Pontosan egy olyan α pozitív valós szám létezik, amelyre $\alpha^m = A$*

*(α-t az A szám m-**edik gyökének nevezzük**, és az $\sqrt[m]{A}$ szimbólummal jelöljük).*

2° *Ez az α szám az*

$$\begin{cases} a_0 > 0 \text{ tetszőleges valós,} \\ a_{n+1} := \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

rekurzióval értelmezett (a_n) (ún. iterációs) sorozat határértéke, azaz

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha = \sqrt[m]{A}.$$

Bizonyítás. Az állítást több lépésben igazoljuk.

1. lépés. Az egyértelműség. Mivel $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \implies \alpha_1^m < \alpha_2^m$, ezért legfeljebb egy olyan pozitív α szám létezik, amelyre $\alpha^m = A$.

2. lépés. Teljes indukcióval igazolható, hogy az (a_n) sorozat „jól definiált" és $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

3. lépés. Igazoljuk, hogy az (a_n) sorozat konvergens. A monoton sorozatok konvergenciájára vonatkozó tételt fogjuk alkalmazni.

A sorozat alulról korlátos, és 0 egy triviális alsó korlát. Most megmutatjuk azt, hogy az (a_n) sorozat a második tagtól kezdve **monoton csökkenő**, azaz

$$(*) \qquad a_{n+1} \leq a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \quad \text{ha } n = 1, 2, \ldots.$$

A rekurzív képlet szerint minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{m} \cdot \frac{A}{a_n^m} + 1 - \frac{1}{m},$$

ezért a monotonitást jelentő $(*)$ összefüggés azzal ekvivalens, hogy

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{A}{a_n^m} + 1 - \frac{1}{m} \leq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}^+),$$

azaz átrendezés után azzal, hogy

$$(**) \qquad A \leq a_n^m \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

Ennek igazolására a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget a következő alakban fogjuk alkalmazni: ha $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tetszés szerinti nemnegatív valós számok, akkor

$$(\triangle) \qquad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}\right)^m,$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$. Fontos hangsúlyozni, hogy lényegében ezt az alakot igazoltuk gyakorlaton; és csak az m-edik gyök egyértelmű létezése miatt (amit éppen most igazolunk) írhatjuk fel az egyenlőtlenséget a megszokott alakban.

A $(**)$ becslés igazolásához **vegyük észre** azt, hogy a rekurzív képlet jobb oldalán álló összeg az m darab

$$x_1 := \frac{A}{a_n^{m-1}}, \quad x_2 := a_n, \quad x_3 := a_n, \quad \ldots, \quad x_m := a_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

pozitív szám számtani közepe. Ezért $(\triangle)$ miatt minden $n \in \mathbb{N}$ indexre

$$A = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}\right)^m = \left[\frac{1}{m}\left(\frac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right)\right]^m = a_{n+1}^m.$$

Bebizonyítottuk tehát azt, hogy $a_n^m \geq A$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ indexre, és ez azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat a második tagtól kezdve monoton csökkenő.

Mivel az (a_n) sorozat monoton csökkenő a második tagtól kezdve és alulról korlátos, ezért a monoton sorozatok határértékére vonatkozó tétel alapján (a_n) **konvergens**.

4. lépés. Kiszámítjuk a sorozat határértékét. Legyen

$$\alpha := \lim (a_n).$$

Az eddigiekből az következik, hogy $\alpha \geq 0$. Fontos **észrevétel** azonban az, hogy az

$$\alpha > 0$$

egyenlőtlenség is igaz. Ez az állítás a konvergens sorozatok és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételből, valamint a határérték és a rendezés kapcsolatára vonatkozó tételből következik, hiszen

$$a_n \to \alpha, \ a_n^m \geq A \quad \implies \quad a_n^m \to \alpha^m \geq A > 0 \quad \implies \quad \alpha > 0.$$

Az (a_n) sorozatot megadó rekurzív összefüggésben az $n \to +\infty$ határátmenetet véve az α határértékre egy egyenletet kapunk. Valóban, ha alkalmazzuk a konvergens sorozatok és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételeket (itt használjuk az $\alpha > 0$ egyenlőtlenséget), akkor az adódik, hogy

$$\begin{array}{cccc} a_{n+1} & = & \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) & (n \in \mathbb{N}) \\ \downarrow & n \to +\infty & \downarrow & (\alpha > 0\ !) \\ \alpha & & \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{\alpha^{m-1}} + (m-1)\,\alpha\right), & \end{array}$$

ezért a határérték egyértelműsége miatt

$$\alpha = \frac{1}{m}\left(\frac{A}{\alpha^{m-1}} + (m-1)\,\alpha\right).$$

Innen már egyszerű átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$m\,\alpha^m = A + (m-1)\alpha^m \quad \Longrightarrow \quad \alpha^m = A.$$

Így a tétel minden állítását bebizonyítottuk.

6. tétel (A Cauchy-féle konvergenciakritérium). *Legyen (a_n) egy valós sorozat. Ekkor*

$$(a_n) \text{ konvergens} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a_n) \text{ Cauchy-sorozat.}$$

Bizonyítás.

$\boxed{\Rightarrow}$ Tegyük fel, hogy (a_n) konvergens, és $A := \lim(a_n)$ a határértéke. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. A konvergencia definíciója szerint

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0 \colon |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így $\forall\, m, n > n_0$ index esetén

$$|a_n - a_m| = \Big|(a_n - A) + (A - a_m)\Big| \le |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy (a_n) Cauchy-sorozat.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy (a_n) Cauchy-sorozat. Több lépésen keresztül látjuk be, hogy (a_n) konvergens.

1. lépés. Igazoljuk, hogy (a_n) korlátos sorozat. Valóban: A Cauchy-sorozat definíciójában $\varepsilon = 1$-hez van olyan $n_1 \in \mathbb{N}$ index, hogy

$$\forall\, m, n > n_1 : \quad |a_n - a_m| < 1.$$

Legyen $m = n_1 + 1$. Ekkor minden $n > n_1$ esetén

$$|a_n| = \Big|\Big(a_n - a_{n_1+1} + a_{n_1+1}\Big)\Big| \le \Big|a_n - a_{n_1+1}\Big| + \Big|a_{n_1+1}\Big| < 1 + \Big|a_{n_1+1}\Big|.$$

Következésképpen az

$$|a_n| \le \max\Big\{\Big|a_0\Big|,\ \Big|a_1\Big|,\ \dots \Big|a_{n_1}\Big|,\ 1 + \Big|a_{n_1+1}\Big|\Big\}$$

egyenlőtlenség már minden $n \in \mathbb{N}$ számra igaz, azaz a sorozat valóban korlátos.

2. lépés. A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételből következik, hogy (a_n)-nek létezik egy (a_{ν_n}) konvergens részsorozata. Legyen

$$A := \lim\,(a_{\nu_n}) \in \mathbb{R}.$$

3. lépés. Belátjuk, hogy $\lim\,(a_n) = A$ is igaz.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor A definíciójából következik, hogy

$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N}, \quad n > n_2 : \quad \Big|a_{\nu_n} - A\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Az (a_n) Cauchy-sorozat, ezért $\varepsilon/2$-höz

$$\exists\, n_3 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n, m > n_3 : \quad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $(\nu_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ indexsorozat (vagyis (ν_n) szigorúan monoton növekedő), ezért $\nu_n \ge n$ $(n \in \mathbb{N})$, amit teljes indukcióval lehet igazolni.

Ha $n > n_0 := \max\{n_2, n_3\}$, akkor $\nu_n > n_0$, ezért n és $m := \nu_n$ is nagyobb, mint n_2 és n_3, tehát alkalmazhatók a fenti egyenlőtlenségek. Ekkor

$$|a_n - A| = |(a_n - a_{\nu_n}) + (a_{\nu_n} - A)| \le |a_n - a_m| + |a_{\nu_n} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

és ez azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat valóban konvergens, és $\lim\,(a_n) = A$.