13. előadás

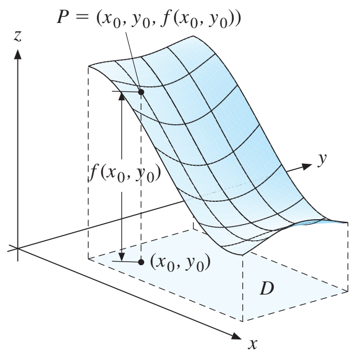
FELÜLETEK

A tananyag folyamán már találkoztunk különböző felületekkel. Először a határozott integrál egyik alkalmazásaként foglalkoztunk a forgástestekkel, ahol megadtuk a forgásfelület fogalmát és felszínét. Ezzel sikerült kiszámolnunk a gömb felszínét.

Később, az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós értékű függvények szemléltetésekor értelmeztük a

$$\mathrm{Gr}_f := \Big\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; (x, y) \in \mathcal{D}_f\Big\}$$

függvény grafikonját, amiről azt mondtuk, hogy egy térbeli felületet határoz meg. Továbbá megnéztük, hogyan célszerű ennek alakját megrajzolni különböző görbeseregekkel, pl. szintvonalakkal. Ilyen grafikonok alatti téridomok térfogatát is számoltunk kétszeres integrálok segítségével.



Felületeket azonban nem csak forgástestekből és függvénygrafikonokból kaphatjuk. A görbéket úgy értelmeztük, mint egyparaméteres ponthalmazok a térben. A felületek térbeli pontok kétparaméteres halmazai.

1. Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ halmaz egy* **egyszerű sima felület***, ha létezik két $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ intervallum és egy $F : I \to \mathbb{R}^3$ az $I := I_1 \times I_2$ halmazon értelmezett függvény, amire*

- $F : I \to \mathcal{F}$ *bijekció,*
- $F \in C^1(I)$,
- $\mathrm{rang}\Big(F'(x)\Big) = 2 \qquad (x \in I)$

teljesül. Az F leképezést az $\mathcal{F}$ **felület egy (Gauss-féle) paraméterezésének** *nevezzük.*

A $\mathrm{rang}\Big(F'(x)\Big) = 2$ $(x \in I)$ feltétel azt jelenti, hogy az

$$F(u, v) = \Big(F_1(u, v),\, F_2(u, v),\, F_3(u, v)\Big) \qquad (u \in I_1,\, v \in I_2)$$

koordinátafüggvényeket tartalmazó felírás mellett a

$$F'(u, v) = \begin{pmatrix} \partial_u F_1(u, v) & \partial_v F_1(u, v) \\ \partial_u F_2(u, v) & \partial_v F_2(u, v) \\ \partial_u F_3(u, v) & \partial_v F_3(u, v) \end{pmatrix}$$

mátrixban szereplő két oszlopvektor lineárisan független (nem egymással párhuzamos) minden $u \in I_1, v \in I_2$ esetén.

Megjegyzés. A felületek elméletének általános tárgyalása igen messzire vezetne, ezért itt csak azt a felületfogalmat adtuk meg, amely a differenciálgeometriában szükséges. Ezt némiképp általánosítva a továbbiakban felületen olyan térbeli ponthalmazt értünk, amelyek „összerakhatók” egyszerű sima felületdarabokból.

Forgásfelületek: Legyen $a < b$ valós számok, és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható függvény.

- Ha $f \geq 0$, akkor az f függvény grafikonjának x tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület

$$F(u, v) := \Big(u,\ f(u)\cos v,\ f(u)\sin v\Big) \qquad \Big(u \in [a, b],\ v \in [0, 2\pi)\Big).$$

- Ha $0 < a < b$, akkor az f függvény grafikonjának y tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület

$$F(u, v) := \Big(u\cos v,\ u\sin v,\ f(u)\Big) \qquad \Big(u \in [a, b],\ v \in [0, 2\pi)\Big).$$

Az F paraméterezésű felület megadásának módjai:

- ***Paraméteres alakban:***

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned}\right\} \qquad (u \in I_1,\ v \in I_2).$$

- ***Explicit*** (vagy ***függvénygrafikon***, vagy ***Euler–Monge***) ***alakjában:***

$$F(x, y) := \Big(x, y, f(x, y)\Big) \in \mathbb{R}^3 \qquad (x \in I_1,\ y \in I_2).$$

  Ilyenkor a $z = f(x, y)$ egyenletű felületről is szokás beszélni.

- ***Implicit alakban:*** $\quad G(x, y, z) = 0.$

A tér legegyszerűbb felületei a ***síkfelületek***, amelyeknek implicit alakjuk:

$$Ax + By + Cz = D \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}),$$

ahol $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ és $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Egy síkfelület paraméteres alakja:

$$F(u, v) := \vec{r}_0 + u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2 \qquad (u, v \in \mathbb{R}),$$

ahol $\vec{r}_0$ egy, a síkfelületen lévő pont helyzetvektora, és $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ olyan lineárisan független vektorok, amelyek párhuzamosak a síkfelületre.

Egy másik példa az origó középpontú R sugarú gömbfelület, amelynek implicit alakja:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

A gömbfelület egyik paraméteres alakját az

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \qquad \Big(r \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi\Big)$$

térbeli polárkoordináta-transzformációból tudjuk levezetni. Valóban, a gömbfelületen lévő pontok közös jellemzője, hogy távolságuk az origótól R-rel egyenlő, azaz $r = R$.

Ezért a keresett paraméteres alak:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\varphi \\ y &= R\sin\theta\sin\varphi \\ z &= R\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad \big(\varphi \in [0,2\pi),\ \theta \in [0,\pi]\big).$$

A teljes gömbfelületet nem tudjuk felírni explicit alakban, de a felső félgömbfelület ($z > 0$) már felírható a következő alakban:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \qquad \big(x^2 + y^2 \leq R^2,\ x, y \in \mathbb{R}\big).$$

Másodrendű felületek

Ha a felület implicit alakjában szereplő G függvényben egy másodrendű polinom áll, akkor ***másodrendű felületekről*** beszélünk. Pontosabban, egy másodrendű felület implicit alakja:

$$G(p) := \langle A \cdot p, p\rangle + 2\langle a, p\rangle + \alpha = 0 \qquad \big(p = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big),$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ szimmetrikus nem zéró mátrix, $a \in \mathbb{R}^3$ vektor és $\alpha \in \mathbb{R}$ szám, feltéve, hogy a fenti implicit egyenletnek van megoldása.

Belátható, hogy egybevágósági transzformációval minden másodrendű felület pontosan az alábbi kanonikus másodrendű felületek egyikébe vihető át ($a, b, c \neq 0$):

- ***Ellipszoidok***: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$
- ***Egyköpenyű hiperboloidok***: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$
- ***Kétköpenyű hiperboloidok***: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1.$
- ***Kúpok***: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0.$
- ***Elliptikus paraboloidok***: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}.$
- ***Hiperbolikus paraboloidok***: $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}.$
- ***Elliptikus hengerek***: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$
- ***Hiperbolikus hengerek***: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$
- ***Parabolikus hengerek***: $y^2 = 2px.$
- ***Metsző síkpár***: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$
- ***Párhuzamos síkpár***: $x^2 = a^2.$
- ***Egybeeső síkpár***: $x^2 = 0.$

Érintősík, felületi normális

Legyen $F : I \to \mathcal{F}$ az $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ felületnek egy paraméterezése, ahol $I := I_1 \times I_2$ és $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ intervallumok. Jelölje

$$\partial_u F(u,v) := \begin{pmatrix} \partial_u F_1(u,v) \\ \partial_u F_2(u,v) \\ \partial_u F_3(u,v) \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \partial_v F(u,v) := \begin{pmatrix} \partial_v F_1(u,v) \\ \partial_v F_2(u,v) \\ \partial_v F_3(u,v) \end{pmatrix} \qquad (u \in I_1,\ v \in I_2)$$

az $F'(u,v)$ deriváltmátrix két oszlopvektorát. A $\operatorname{rang}\big(F'(u,v)\big) = 2$ feltétel miatt

$$\vec{n}(u,v) := \partial_u F(u,v) \times \partial_v F(u,v) \neq 0.$$

Legyen továbbá $(u_0, v_0) \in I$ egy rögzített tetszőleges pont. Az $\mathcal{F}$ felület $F(u_0, v_0)$ pontjára illeszkedő, az $\vec{n}(u_0, v_0)$ ***normálvektorra*** merőleges síkot az $\mathcal{F}$ felület $F(u_0, v_0)$ pontbeli ***érintősíkjának*** nevezzük. Ennek egyenlete

$$0 = \Big\langle \big(\mathbf{x} - F(u_0,v_0)\big), \vec{n}(u_0,v_0) \Big\rangle = \det \begin{pmatrix} x - F_1(u_0,v_0) & y - F_2(u_0,v_0) & z - F_3(u_0,v_0) \\ \partial_u F_1(u_0,v_0) & \partial_u F_2(u_0,v_0) & \partial_u F_3(u_0,v_0) \\ \partial_v F_1(u_0,v_0) & \partial_v F_2(u_0,v_0) & \partial_v F_3(u_0,v_0) \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{x} = (x,y,z)$ az érintősík tetszőleges pontja. Igazolható, hogy az érintősík definíciója nem függ a felület paraméterezésétől.

Példa. Tekintsük az

$$F(u,v) := (u^3 - 2v^2, uv^2, u^2v^2 + u) \qquad \big((u,v) \in \mathbb{R}^2\big)$$

felületet. Írjuk fel a felület $(u_0, v_0) := (-1, 1)$ paraméterű pontjában az érintősík egyenletét!

Megoldás. Mivel F koordinátafüggvényei polinomok, így $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, és $\forall u, v \in \mathbb{R}$ esetén

$$F'(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_u F_1(u,v) & \partial_v F_1(u,v) \\ \partial_u F_2(u,v) & \partial_v F_2(u,v) \\ \partial_u F_3(u,v) & \partial_v F_3(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_u(u^3 - 2v^2) & \partial_v(u^3 - 2v^2) \\ \partial_u(uv^2) & \partial_v(uv^2) \\ \partial_u(u^2v^2 + u) & \partial_v(u^2v^2 + u) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3u^2 & -4v \\ v^2 & 2uv \\ 2uv^2 + 1 & 2u^2 v \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad F'(-1,1) = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Másrészt $F(-1,1) := (-3,-1,0)$, és így az érintősík egyenlete

$$\det \begin{pmatrix} x+3 & y+1 & z \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 0, \qquad \text{azaz}$$

$$\underbrace{\big(1 \cdot 2 - (-2) \cdot (-1)\big)}_{=0}(x+3) - \underbrace{\big(3 \cdot 2 - (-4) \cdot (-1)\big)}_{=2}(y+1) + \underbrace{\big(3 \cdot (-2) - (-4) \cdot 1\big)}_{=-2} z = 0,$$

Egyszerűsítés után az érintősík egyenlete: $y + z = -1$.

A felület felszíne

Legyen $F : I \to \mathcal{F}$ az $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ felületnek egy paraméterezése, ahol $I := I_1 \times I_2$ és $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ intervallumok. Ekkor $\mathcal{F}$ ***felszínén*** az

$$\mathcal{S} := \iint_I \Big\| \partial_u F(u,v) \times \partial_v F(u,v) \Big\| \, du \, dv$$

számot értjük. A definíció független az $\mathcal{F}$ paraméterezésétől.
Ha az $\mathcal{F}$ felület a $z = g(x,y)$ $\big((x,y) \in I\big)$ explicit alakban van megadva, akkor a felszíne:

$$\mathcal{S} = \iint_I \sqrt{1 + (\partial_x g(x,y))^2 + (\partial_y g(x,y))^2} \, dx \, dy.$$

Példa. Tekintsük az xz síkbeli $(R, 0, 0)$ középpontú és r sugarú $(0 < r < R)$ körvonal

$$\gamma(t) := (R + r\cos t,\ 0,\ r\sin t) \qquad \big(t \in [0, 2\pi)\big)$$

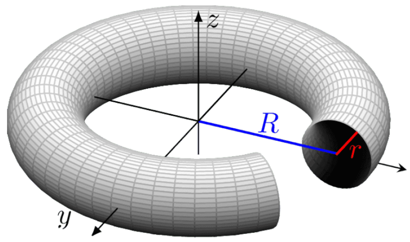
paraméteres előállítását. Ha ezt a körvonalat a z tengely körül megforgatjuk, akkor az ún. `tóruszfelületet` kapjuk.

a) Adjuk meg a felület egy Gauss-féle paraméterezését!

b) Számítsuk ki a tóruszfelület felszínét!

c) Határozzuk meg a tóruszfelület által határolt korlátos és zárt térrész térfogatát!

Megoldás.



a) Nem nehéz meggondolni, hogy ha a $P(x, 0, z)$ $(x > 0)$ pontot megforgatjuk a z tengely körül, akkor a $P_\varphi = (x\cos\varphi, x\sin\varphi, z)$ pontokat kapjuk, ahol $\varphi \in [0, 2\pi)$. Ezért a tóruszfelületet egy paraméterezése:

$$F(u,v) = \Big((R + r\cos u)\cos v,\ (R + r\cos u)\sin v,\ r\sin u\Big) \quad \Big((u,v) \in I := [0,2\pi) \times [0,2\pi)\Big).$$

Világos, hogy $F : I \to \mathcal{F}$ bijekció, $F \in C^1(I)$, illetve

$$\partial_u F(u,v) := \begin{pmatrix} -r\sin u\cos v \\ -r\sin u\sin v \\ r\cos u \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad \partial_v F(u,v) := \begin{pmatrix} -(R + r\cos u)\sin v \\ (R + r\cos u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ebből $\vec{n}(u,v) = \partial_u F(u,v) \times \partial_v F(u,v) =$

$$= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -r\sin u\cos v & -r\sin u\sin v & r\cos u \\ -(R + r\cos u)\sin v & (R + r\cos u)\cos v & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= r(R + r\cos u) \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin u\cos v & -\sin u\sin v & \cos u \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$\vec{n}(u,v) = r(R + r\cos u)\cdot(-\cos u\cos v,\ -\cos u\sin v,\ -\sin u\cos^2 v - \sin u\sin^2 v) =$$
$$= r(R + r\cos u)\cdot(-\cos u\cos v,\ -\cos u\sin v,\ -\sin u),$$

amiből

$$\begin{aligned}\|\vec{n}(u,v)\| &= r(R + r\cos u)\cdot\sqrt{(\cos u\cos v)^2 + (\cos u\sin v)^2 + (\sin u)^2} = \\ &= r(R + r\cos u)\cdot\sqrt{\cos^2 u\cos^2 v + \cos^2 u\sin^2 v + \sin^2 u} = \\ &= r(R + r\cos u)\cdot\sqrt{\cos^2 u(\cos^2 v + \sin^2 v) + \sin^2 u} = \\ &= r(R + r\cos u)\cdot\sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u} = r(R + r\cos u) \neq 0.\end{aligned}$$

Ezért $\operatorname{rang}\Big(F'(u,v)\Big) = 2$. Tehát F egy Gauss-féle paraméterezés.

b) A tanult felszínképlet szerint:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \iint\limits_I \Big\|\partial_u F(u,v) \times \partial_v F(u,v)\Big\|\,du\,dv = \iint\limits_I \|\vec{n}(u,v)\|\,du\,dv = \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} r(R + r\cos u)\,du\right)dv = 2\pi r\int_0^{2\pi}(R + r\cos u)\,du = \\ &= 2\pi r\Big[Ru + r\sin u\Big]_0^{2\pi} = 2\pi r\cdot(2\pi R) = 4\pi^2 rR.\end{aligned}$$

c) Jelölje $\mathcal{T}$ a tóruszfelület által határolt korlátos és zárt térrészt. Ekkor

$$\mathcal{T} = \left\{\Big((R + \rho\cos u)\cos v,\ (R + \rho\cos u)\sin v,\ \rho\sin u\Big)\ \Big|\ 0 \le \rho \le r,\ 0 \le u, v \le 2\pi\right\}.$$

A keresett térfogat:

$$V(\mathcal{T}) = \iiint\limits_{\mathcal{T}} 1\,dx\,dy\,dy.$$

Ennek kiszámításához integráltranszformációt alkalmazunk a

$$g(\rho,u,v) := \Big((R + \rho\cos u)\cos v,\ (R + \rho\cos u)\sin v,\ \rho\sin u\Big)$$

leképezéssel. Valóban $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ és

$$\det g'(\rho,u,v) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \partial_\rho\Big((R + \rho\cos u)\cos v\Big) & \partial_u\Big((R + \rho\cos u)\cos v\Big) & \partial_v\Big((R + \rho\cos u)\cos v\Big) \\ \partial_\rho\Big((R + \rho\cos u)\sin v\Big) & \partial_u\Big((R + \rho\cos u)\sin v\Big) & \partial_v\Big((R + \rho\cos u)\sin v\Big) \\ \partial_\rho(\rho\sin u) & \partial_u(\rho\sin u) & \partial_v(\rho\sin u \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \cos u\cos v & -\rho\sin u\cos v & -(R + \rho\cos u)\sin v \\ \cos u\sin v & -\rho\sin u\sin v & (R + \rho\cos u)\cos v \\ \sin u & \rho\cos u & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\rho(R+\rho\cos u)\cdot\det\begin{pmatrix}\cos u\cos v & \sin u\cos v & -\sin v\\ \cos u\sin v & \sin u\sin v & \cos v\\ \sin u & -\cos u & 0\end{pmatrix} =$$

$$= -\rho(R+\rho\cos u)\cdot\Big(\sin u(\sin u\cos^2 v+\sin u\sin^2 v)+\cos u(\cos u\cos^2 v+\cos u\sin^2 v)\Big) =$$

$$= -\rho(R+\rho\cos u)\cdot\Big(\sin^2 u(\cos^2 v+\sin^2 v)+\cos^2 u(\cos^2 v+\sin^2 v)\Big) =$$

$$= -\rho(R+\rho\cos u)\cdot(\sin^2 u+\cos^2 u) = -\rho(R+\rho\cos u).$$

Továbbá $g[H]=\mathcal{T}$, ahol $H=[0,r]\times[0,2\pi]\times[0,2\pi]$, ill. g invertálható a H halmaz belsején. Ezért az integráltranszformáció feltételei teljesülnek, és

$$V(\mathcal{T}) = \iiint\limits_{\mathcal{T}} 1\,dx\,dy\,dy = \iiint\limits_{H} 1\cdot\Big|\det g'(\rho,u,v)\Big|\,d\rho\,du\,dv =$$

$$= \iiint\limits_{H} \rho(R+\rho\cos u)\,d\rho\,du\,dv = \int\limits_0^r\left(\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi}(R\rho+\rho^2\cos u)\,dv\right)du\right)d\rho =$$

$$= \int\limits_0^r\left(\int\limits_0^{2\pi}2\pi(R\rho+\rho^2\cos u)\,du\right)d\rho = 2\pi\int\limits_0^r\Big[R\rho u+\rho^2\sin u\,du\Big]_{u=0}^{u=2\pi}d\rho =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^r 2\pi R\rho\,d\rho = 4\pi^2 R\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{\rho=r} = 2\pi^2 r^2 R.$$