3. gyakorlat

DIFFERENCIÁLEGYENLETEK 2.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Elméleti összefoglaló. Legyen I egy intervallum és $p, q : I \to \mathbb{R}$ két folytonos függvény. Az

$$y' + p(x)y = q(x)$$

alakú differenciálegyenletet ***elsőrendű lineáris*** differenciálegyenletnek nevezzük. Ha $q(x) = 0$ minden $x \in I$ esetén, akkor ***homogén*** lineáris differenciálegyenletről, ellenkező esetben ***inhomogén*** lineáris differenciálegyenletről beszélünk.

Legyen $T := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\big\}$ és $(\xi, \eta) \in T$ a tartománynak egy tetszőleges pontja. Ekkor az

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad y(\xi) = \eta, \qquad \big((x, y \in T)\big)$$

kezdetiérték-feladatnak mindig van az I intervallumon értelmezett teljes megoldása a T tartományon, ami természetesen egyértelmű is. Az

(1) $$y' + p(x)y = q(x), \qquad \big((x, y \in T)\big)$$

elsőrendű lineáris differenciálegyenlet összes I intervallumon értelmezett megoldása felírható

(2) $$y(x) = c\, y_0(x) + y_p(x) \qquad (x \in I,\, c \in \mathbb{R})$$

alakban, ahol y_0 az

$$y' + p(x)y = 0, \qquad \big((x, y \in T)\big)$$

homogén differenciálegyenletnek egy nem triviális (nem azonosan nulla) megoldása és y_p az (1) eredeti differenciálegyenletnek egy partikuláris megoldása.

1. Feladat. *Oldjuk meg a következő homogén lineáris differenciálegyenleteket a megadott intervallumokon!*

$$a) \quad y' - x^2 y = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}), \qquad\qquad b) \quad y' + \frac{x}{x+1} y = 0 \qquad (x > -1).$$

Megoldás. Mivel homogén lineáris differenciálegyenletekről van szó, így $y_p \equiv 0$ az egyenletek egy partikuláris megoldása. Ekkor (2) szerint az összes megoldás felírásához elegendő lenne megtalálni az egyenleteknek egy y_0 nem triviális megoldását. Ehhez vegyük észre, hogy egy homogén lineáris differenciálegyenlet valójában olyan szétválasztható változójú differenciálegyenlet, amelynek mindig van az I intervallumon értelmezett megoldása a $T := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I,\, y > 0\Big\}$ tartományon. Valóban

$$y' + p(x)y = 0 \;\to\; \frac{dy}{dx} = -p(x)y \;\to\; \frac{1}{y}\,dy = -p(x)\,dx \;\to\; \int \frac{1}{y}\,dy = -\int p(x)\,dx \;\to$$

$$\to\; \ln y + c = -\int p(x)\,dx \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Így ha P a p függvény I intervallumon értelmezett egyik primitív függvénye, akkor

$$\ln\big(y_0(x)\big) = -P(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y_0(x) := e^{-P(x)} > 0 \qquad (x \in I).$$

a) A szétválasztható változójú egyenletekben alkalmazott formális számításokkal:

$$y' - x^2 y = 0 \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = x^2 y \quad \to \quad \frac{1}{y}\, dy = x^2\, dx \quad \to \quad \int \frac{1}{y}\, dy = \int x^2\, dx \quad \to$$

$$\to \quad \ln y_0 = \frac{x^3}{3} \quad \to \quad y_0 = e^{\frac{x^3}{3}}.$$

Ezért a differenciálegyenlet összes megoldása

$$\underline{\underline{y(x) = c\, e^{\frac{x^3}{3}} \qquad (x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R})}}\ .$$

b) A szétválasztható változójú egyenletekben alkalmazott formális számításokkal:

$$y' + \frac{x}{x+1} y = 0 \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{x+1} y \quad \to \quad \frac{1}{y}\, dy = \left(\frac{1}{x+1} - 1\right) dx \quad \to$$

$$\to \quad \int \frac{1}{y}\, dy = \int \left(\frac{1}{x+1} - 1\right) dx \quad \to \quad \ln y_0 = \ln(x+1) - x \quad \to \quad y_0 = \frac{x+1}{e^x}.$$

Ezért a differenciálegyenlet összes megoldása

$$\underline{\underline{y(x) = c\, \frac{x+1}{e^x} \qquad (x > -1, c \in \mathbb{R})}}\ .$$

2. Feladat. *Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket és kezdetiérték-feladatot!*

$$a) \quad y' + \frac{2}{x} y = x^3 \qquad (x > 0),$$

$$b) \quad y' \sin x - y \cos x = 3x^2 \sin^2 x \qquad (0 < x < \pi),$$

$$c) \quad y' + \frac{2 - 3x^2}{x^3}\, y = 1, \quad y(1) = -1 \qquad (x > 0).$$

Megoldás. Egy inhomogén elsőrendű lineáris differenciálegyenletet úgy oldunk meg, hogy először megoldjuk a homogén változatát az előző feladatban bemutatott módszerrel. Ennek összes megoldása $y = c\, y_0$ alakban írható fel, ahol y_0 egy nem triviális megoldása és $c \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges konstans. (2) szerint még meg kell keresnünk az eredeti inhomogén egyenletnek egy y_p partikuláris megoldását. Keressük meg ezt

$$y_p(x) := c(x) y_0(x) \qquad (x \in I)$$

alakban! Más szavakkal, az $y = c\, y_0$ homogén egyenlet összes megoldásában szereplő c konstanst egy $c : I \to \mathbb{R}$ függvényre cseréljük (ezért ezt konstans variálás módszerének hívjuk). Ezután y_p-t behelyettesítjük az inhomogén egyenletbe a deriváltjával együtt. Ekkor olyan egyenletet kapunk, ahol egyszerűsítés után a c függvény eltűnik, de deriváltja megmarad és kiszámolható. Ebből integrálás után megkapjuk a c függvényt, és ezzel a keresett y_p partikuláris megoldást is.

a) A homogén egyenlet megoldása:

$$y' + \frac{2}{x}y = 0 \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x}y \quad \to \quad \frac{1}{y}\,dy = -\frac{2}{x}\,dx \quad \to \quad \int \frac{1}{y}\,dy = -2\int \frac{1}{x}\,dx \quad \to$$

$$\to \quad \ln y_0 = -2\ln x = \ln x^{-2} \quad \to \quad y_0 = \frac{1}{x^2}.$$

Ezért a homogén egyenlet összes megoldása

$$y(x) = \frac{c}{x^2} \qquad (x > 0, c \in \mathbb{R}).$$

Legyen

$$y_p(x) := \frac{c(x)}{x^2} \qquad (x > 0), \qquad \text{ahol} \qquad c : (0, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

Ekkor

$$y_p = \frac{c}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad y_p' = \frac{c'x^2 - 2cx}{x^4} = \frac{c'}{x^2} - \frac{2c}{x^3}$$

Az eredeti inhomogén egyenletbe behelyettesítve:

$$y_p' + \frac{2}{x}y_p = x^3 \quad \to \quad \left(\frac{c'}{x^2} - \frac{2c}{x^3}\right) + \frac{2}{x}\left(\frac{c}{x^2}\right) = x^3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{c'}{x^2} = x^3 \quad \Longleftrightarrow \quad c' = x^5.$$

Ezért

$$c \in \int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C \quad \to \quad c(x) := \frac{x^6}{6} \quad \Longrightarrow \quad y_p = \frac{\frac{x^6}{6}}{x^2} = \frac{x^4}{6}.$$

Emiatt a differenciálegyenlet összes megoldása

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{c}{x^2} + \frac{x^4}{6} \qquad (x > 0, c \in \mathbb{R})}}\ .$$

b) A megadott intervallumon a feladattal ekvivalens

$$y' - y\operatorname{ctg} x = 3x^2\sin x$$

differenciálegyenletet fogjuk megoldani. A homogén egyenlet megoldása:

$$y' - y\operatorname{ctg} x = 0 \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = y\operatorname{ctg} x \quad \to \quad \frac{1}{y}\,dy = \operatorname{ctg} x\,dx \quad \to$$

$$\to \quad \int \frac{1}{y}\,dy = \int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \left(\frac{f'}{f}\ \text{típus}\right) = \ln\sin x + c \quad \to$$

$$\to \quad \ln y_0 = \ln\sin x \quad \to \quad y_0 = \sin x.$$

Ezért a homogén egyenlet összes megoldása

$$y(x) = c\,\sin x \qquad (0 < x < \pi,\ c \in \mathbb{R}).$$

Legyen

$$y_p(x) := c(x)\sin x \qquad (0 < x < \pi), \qquad \text{ahol} \qquad c : (0, \pi) \to \mathbb{R}.$$

Ekkor

$$y_p = c\,\sin x \quad \Longrightarrow \quad y_p' = c'\sin x + c\,\cos x$$

Az inhomogén egyenletbe behelyettesítve:

$$y_p' - y_p\,\mathrm{ctg}\,x = 3x^2\sin x \quad \to \quad (c'\sin x + c\,\cos x) - (c\,\sin x)\frac{\cos x}{\sin x} = 3x^2\sin x \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad c'\sin x = 3x^2\sin x \quad \Longleftrightarrow \quad c' = 3x^2.$$

Ezért

$$c \in \int 3x^2\,dx = x^3 + C \quad \to \quad c(x) := x^3 \quad \Longrightarrow \quad y_p = x^3\sin x.$$

Emiatt a differenciálegyenlet összes megoldása

$$\underline{\underline{y(x) = c\,\sin x + x^3\sin x \qquad (0 < x < \pi,\ c \in \mathbb{R})}}\ .$$

c) A homogén egyenlet megoldása:

$$y' + \frac{2-3x^2}{x^3}\,y = 0 \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-2}{x^3}\,y \quad \to \quad \frac{1}{y}\,dy = \frac{3x^2-2}{x^3}\,dx \quad \to$$

$$\to \quad \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{3x^2-2}{x^3}\,dx = \int \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^3}\right)\,dx = \int \left(\frac{3}{x} - 2x^{-3}\right)\,dx \quad \to$$

$$\to \quad \ln y_0 = 3\ln x - 2\,\frac{x^{-2}}{-2} = \ln x^3 + \frac{1}{x^2} \quad \to \quad y_0 = x^3 e^{\frac{1}{x^2}}.$$

Ezért a homogén egyenlet összes megoldása

$$y(x) = c\,x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \qquad (x > 0, c \in \mathbb{R}).$$

Legyen

$$y_p(x) := c(x)\,x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \qquad (x > 0), \qquad \text{ahol} \qquad c : (0, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

Ekkor $\quad y_p = c\,x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad y_p' = c'x^3 e^{\frac{1}{x^2}} + c\,(3x^2)e^{\frac{1}{x^2}} + c\,x^3(e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \tfrac{-2}{x^3}) = c'x^3 e^{\frac{1}{x^2}} + c(3x^2-2)e^{\frac{1}{x^2}}.$$

Az inhomogén egyenletbe behelyettesítve:

$$y_p' + \frac{2-3x^2}{x^3}\,y_p = 1 \quad \to \quad \left(c'x^3 e^{\frac{1}{x^2}} + c(3x^2-2)e^{\frac{1}{x^2}}\right) + \frac{2-3x^2}{x^3}\,(c\,x^3 e^{\frac{1}{x^2}}) = 1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad c'x^3 e^{\frac{1}{x^2}} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad c' = \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Ezért

$$c \in \int \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{x^2}} + C \quad \to \quad c(x) := \frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \Longrightarrow \quad y_p = \frac{x^3}{2}.$$

Emiatt a differenciálegyenlet összes megoldása

$$y(x) = c\,x^3 e^{\frac{1}{x^2}} + \frac{x^3}{2} \qquad (x > 0, c \in \mathbb{R}).$$

A megadott $y(1) = -1$ kezdeti feltétel miatt

$$-1 = y(1) = c \cdot 1 \cdot e^1 + \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = -\frac{3}{2e}.$$

Így a kezdetiérték-feladat megoldása

$$\underline{\underline{y(x) = -\frac{3}{2e}\,x^3 e^{\frac{1}{x^2}} + \frac{x^3}{2} \qquad (x > 0)}}\ .$$

Elméleti összefoglaló. Legyen I egy intervallum, $q : I \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, és $a \in \mathbb{R}$ egy állandó. Az

$$y' + ay = q(x)$$

alakú differenciálegyenletet ***állandó együtthatós elsőrendű lineáris*** differenciálegyenletnek nevezzük.

Ez tehát az elsőrendű lineáris differenciálegyenletek egy speciális esete. Ebben az esetben a homogén egyenlet összes megoldása felírható

$$y(x) = c\,e^{-ax} \qquad (x \in I,\ c \in \mathbb{R})$$

alakban. Az inhomogén egyenletnek egy y_p partikuláris megoldása sok esetben integrálszámítás nélkül, ún. ***próbafüggvénnyel*** határoztató meg.

3. Feladat. *Oldjuk meg a következő homogén állandó együtthatós lineáris kezdetiérték-feladatokat a megadott intervallumokon!*

$$a) \quad y' - 2y = 1 - 2x^2, \quad y(1) = 2 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

$$b) \quad y' + 3y = 2e^{-3x}, \quad y(0) = 2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Megoldás. Világos, hogy $y_0(x) = e^{-ax}$ az $y' + ay = 0$ homogén egyenlet egyik megoldása, hiszen ekkor

$$y_0' = -ae^{-ax} \qquad \Longrightarrow \qquad y_0' + ay_0 = -ae^{-ax} + ae^{-ax} = 0.$$

Állandó együtthatós esetben, ha a q inhomogén tag polinomok, $e^{\alpha x}$, $\sin\beta x$ és $\cos\gamma x$ függvények összege és szorzata, akkor érdemes egy próbafüggvénnyel az y_p partikuláris megoldást olyan alakban megkeresni, mint az inhomogén tagban szereplő függvény.

Azonban vannak olyan esetek, amikor a próbafüggvényt nem tudjuk pontosan olyan alakban megkeresni, mint az inhomogén tagban szereplő függvény. Ez akkor történik, amikor a próbafüggvény tagként tartalmazza y_0 konstans szorosát. Ekkor azt mondjuk, hogy ***rezonancia*** lép fel. Ezekben az esetekben érdemes x-szel megszorozni az eredetileg kigondolt próbafüggvény szóban forgó tagját.

a) Az egyenletben $a = -2$, ezért a homogén egyenlet összes megoldása

$$y(x) = c\,e^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$y_p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban fogjuk megkeresni. Ekkor $y_p'(x) = 2\alpha x + \beta$, és így az inhomogén egyenletbe behelyettesítve:

$$\begin{aligned} y_p' - 2y_p = 1 - 2x^2 \quad &\to \quad (2\alpha x + \beta) - 2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 1 - 2x^2 \quad \to \\ &\to \quad -2\alpha x^2 + (2\alpha - 2\beta)x + \beta - 2\gamma = -2x^2 + 0 \cdot x + 1. \end{aligned}$$

Ebből

$$-2\alpha = -2, \quad 2\alpha - 2\beta = 0, \quad \beta - 2\gamma = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 0.$$

Ezért $y_p(x) = x^2 + x$ $(x \in \mathbb{R})$, és így a differenciálegyenlet összes megoldása:

$$y(x) = c\,e^{2x} + x^2 + x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A megadott $y(1) = 2$ kezdeti feltétel miatt

$$2 = y(1) = c\,e^2 + 1^2 + 1 = c\,e^2 + 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = 0.$$

Így a kezdetiérték-feladat megoldása

$$\underline{\underline{y(x) = x^2 + x \qquad (x \in \mathbb{R})}}\ .$$

b) Az egyenletben $a = 3$, ezért a homogén egyenlet összes megoldása

$$y(x) = c\,e^{-3x} \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$y_p(x) = \alpha x e^{-3x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakban fogjuk megkeresni, mert az inhomogén tag rezonál a homogén megoldásokkal, és így αe^{-3x} nem lenne megoldása az inhomogén egyenletnek.
Ekkor $y_p'(x) = \alpha e^{-3x} - 3\alpha x e^{-3x}$, és így az inhomogén egyenletbe behelyettesítve:

$$\begin{aligned} y_p' + 3y_p = 2e^{-3x} \quad &\to \quad (\alpha e^{-3x} - 3\alpha x e^{-3x}) + 3(\alpha x e^{-3x}) = 2e^{-3x} \quad \to \\ &\to \quad \alpha e^{-3x} = 2e^{-3x} \quad \to \quad \alpha = 2. \end{aligned}$$

Ezért $y_p(x) = 2xe^{-3x}$ $(x \in \mathbb{R})$, és így a differenciálegyenlet összes megoldása:

$$y(x) = c\,e^{-3x} + 2xe^{-3x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A megadott $y(0) = 2$ kezdeti feltétel miatt

$$2 = y(0) = c\,e^0 + 0 = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = 2.$$

Így a kezdetiérték-feladat megoldása

$$\underline{\underline{y(x) = 2e^{-3x} + 2xe^{-3x} \qquad (x \in \mathbb{R})}}\ .$$

4. Feladat (Soros RL-áramkörök). *Egy feszültségforrással táplált áramkörbe sorba kapcsolunk egy R ohmos ellenállást és egy L önindukciós együtthatóval rendelkező tekercset. A feszültségforrás az*

$$u(t) := U\sin(\omega t) \qquad (t \geq 0, \omega > 0, U > 0)$$

periodikus függvény szerint szolgáltatja a feszültséget, ahol ω a körfrekvenciája és U az amplitúdója. Határozzuk meg, hogyan alakul az áramerősség az idő függvényében! Kirchhoff huroktörvénye szerint zárt hurokban a feszültségforrások összege megegyezik a feszültségesések összegével.

Megoldás. Az elektromos készülékek alkotóelemeinek viselkedése egyszerűen leírható matematikai egyenletekkel anélkül, hogy mélyebben ismernénk a működésüket irányító fizikai törvényeket. Ilyen alkotóelem lehet az ellenállás, a tekercs és a kondenzátor. Mindhárom kétpólusú, vagyis két kivezetésük van, amiket az áramkörben a többi alkatrész kivezetéseihez csatlakoztatunk. Működéskor a kétpóluson elektromos áram halad át, amelyet két előjeles mennyiség jellemzi: az a végpontjától a b végpont felé irányuló $i_{ab}(t)$ áramerősség és az a és a b végpont közötti $u_{ab}(t)$ feszültségesés. Ha a végpontok sorrendjét felcseréljük, akkor ezek a mennyiségek előjelet váltanak.

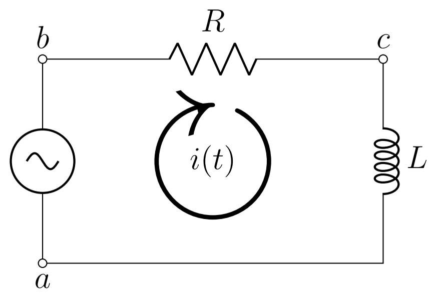
Az előbbi alkotóelemeknél az áramerősség és a feszültségesés között a következő összefüggések állnak fenn.

Ellenállás: $u_{ab}(t) = R\, i_{ab}(t)$, ahol $R > 0$ az ohmos ellenállás.

Tekercs: $u_{ab}(t) = L\, i'_{ab}(t)$, ahol $L > 0$ az önindukciós együttható.

Kondenzátor: $i_{ab}(t) = C\, u'_{ab}(t)$, ahol $C > 0$ a kondenzátor kapacitása.

Fontos tudni még, hogy sorosan kapcsolt elemeken az áramerősség azonos. A feladatban ezt az $i(t)$ áramerősséget szeretnénk meghatározni.



Az ábrán szemléltetjük a feladatban szereplő áramkört. A huroktörvény értelmében

$$u(t) = u_{bc}(t) + u_{ca}(t) = R\, i(t) + L\, i'(t),$$

ahol $t \geq 0$. Ez pedig a következő állandó együtthatós elsőrendű lineáris kezdetiérték-feladathoz vezet.

$$i' + \frac{R}{L}\, i = \frac{U}{L}\sin(\omega t), \quad i(0) = 0 \qquad (t \geq 0).$$

A homogén egyenlet összes megoldása

$$i(t) = c\, e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (t \geq 0,\, c \in \mathbb{R}).$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$i_p(t) = \alpha\sin(\omega t) + \beta\cos(\omega t) \qquad (t \geq 0)$$

alakban fogjuk megkeresni. Ekkor

$$i'_p(x) = \alpha\omega\cos(\omega t) - \beta\omega\sin(\omega t) \qquad (t \geq 0),$$

és így az inhomogén egyenletbe behelyettesítve:

$$\Big(\alpha\omega\cos(\omega t)-\beta\omega\sin(\omega t)\Big)+\frac{R}{L}\Big(\alpha\sin(\omega t)+\beta\cos(\omega t)\Big)=\frac{U}{L}\sin(\omega t)\quad\to$$
$$\to\quad\frac{\alpha R-\beta L\omega}{L}\sin(\omega t)+\frac{\alpha L\omega+\beta R}{L}\cos(\omega t)=\frac{U}{L}\sin(\omega t).$$

Ez csak akkor lehetséges, ha

$$\alpha R-\beta L\omega=U\qquad\text{és}\qquad\alpha L\omega+\beta R=0.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\beta=-\frac{\alpha L\omega}{R}\quad\to\quad\alpha R+\frac{\alpha L\omega}{R}L\omega=U\quad\to\quad\alpha=\frac{UR}{R^2+L^2\omega^2}\ \text{ és }\ \beta=\frac{-UL\omega}{R^2+L^2\omega^2}$$

Ezért

$$i_p(t)=\frac{UR}{R^2+L^2\omega^2}\sin(\omega t)-\frac{UL\omega}{R^2+L^2\omega^2}\cos(\omega t)\qquad(t\geq 0)$$

és a differenciálegyenlet összes megoldása:

$$i(t)=c\,e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{UR}{R^2+L^2\omega^2}\sin(\omega t)-\frac{UL\omega}{R^2+L^2\omega^2}\cos(\omega t)\qquad(t\geq 0,\ c\in\mathbb{R}).$$

Az $i(0)=0$ kezdeti feltétel miatt

$$0=i(0)=c\cdot 1+\frac{UR}{R^2+L^2\omega^2}\cdot 0-\frac{UL\omega}{R^2+L^2\omega^2}\cdot 1\qquad\Longleftrightarrow\qquad c=\frac{UL\omega}{R^2+L^2\omega^2}.$$

Így a kezdetiérték-feladat megoldása

$$\underline{\underline{i(t)=\frac{UL\omega}{R^2+L^2\omega^2}\,e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{UR}{R^2+L^2\omega^2}\sin(\omega t)-\frac{UL\omega}{R^2+L^2\omega^2}\cos(\omega t)\qquad(t\geq 0)}}\ .$$

Megjegyzés. Az előző feladatban kapott megoldás leegyszerűsödik, ha észrevesszük, hogy $\exists\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ szám, amire

$$\cos\theta=\frac{R}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\qquad\text{és}\qquad\sin\theta=\frac{L\omega}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}$$

teljesül, hiszen a fenti két pozitív szám négyzetösszege 1. Ekkor az addíciós tétel szerint

$$i(t)=\frac{UL\omega}{R^2+L^2\omega^2}\,e^{-\frac{R}{L}t}+\frac{U}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}\sin(\omega t-\theta)\qquad(t\geq 0).$$

A fenti képletben az első tag tart nullához, ha $t\to+\infty$, ezért elegendően nagy idő elteltével az áramerősség ugyanolyan frekvenciával fog rezegni, mint a feszültségforrás, de θ fázisszög késéssel. A

$$\sqrt{R^2+L^2\omega^2}$$

mennyiséget szokás ***impedanciának*** nevezni.