# 9. gyakorlat

## DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 5.

### $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények feltételes szélsőértékei

***Emlékeztető.*** ***Általános feladat:*** Adott

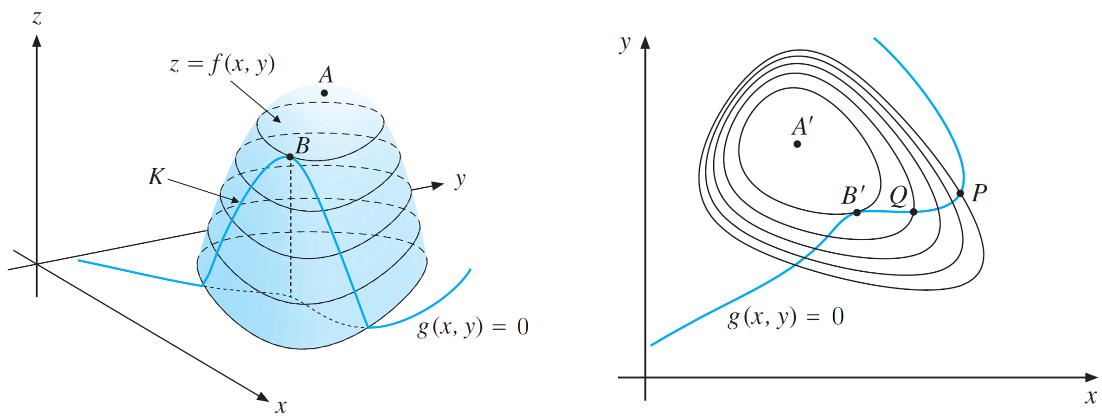
- $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz,
- $f : U \to \mathbb{R}$ (célfüggvény) és
- $g : U \to \mathbb{R}$ (feltételfüggvény).

Keressük az $f$ függvény szélsőértékeit a

$$H_g := \{(x,y) \in U \mid g(x,y) = 0\}$$

halmazon, azaz határozzuk meg az $f_{|H_g}$ függvény szélsőértékeit!

A problémát az alábbi ábrákon szemléltetjük:




Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz. Tegyük fel, hogy $f, g : U \to \mathbb{R}$ adott függvények és

$$a \in H_g := \{(x,y) \in U \mid g(x,y) = 0\} \neq \emptyset.$$

Azt mondjuk, hogy az $f$ függvénynek a $g = 0$ feltétel mellett az $a$ pontban

- ***feltételes abszolút maximuma van***, ha
$$\forall x \in H_g\colon f(x) \le f(a),$$
- ***feltételes lokális maximuma van***, ha
$$\exists K(a) \subset U,\ \forall x \in K(a) \cap H_g\colon f(x) \le f(a).$$

***Tétel.*** **(Szükséges feltétel a feltételes lokális szélsőértékre)** *Tegyük fel, hogy*

a) *$U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és az $f, g : U \to \mathbb{R}$ függvényeknek léteznek a parciális deriváltjaik, és ezek folytonosak az $U$ halmazon $(f, g \in C^1(U))$,*
b) *az $(x_0, y_0) \in U$ pontban az $f$ függvénynek a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális szélsőértéke van,*
c) $g'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix}\partial_1 g(x_0,y_0) & \partial_2 g(x_0,y_0)\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$.

*Ekkor van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám (ezt **Lagrange-szorzónak** szokás nevezni), hogy az*

$$\mathcal{L}(x,y) := f(x,y) + \lambda g(x,y) \qquad \big((x,y) \in U\big)$$

***Lagrange-függvénynek*** $(x_0, y_0)$ *stacionárius pontja, azaz*

$$\mathcal{L}'(x_0,y_0) = \begin{pmatrix}\partial_x \mathcal{L}(x_0,y_0) & \partial_y \mathcal{L}(x_0,y_0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}.$$

***Tétel.*** **(A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel)** *Tegyük fel, hogy*

a) *$U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és az $f, g : U \to \mathbb{R}$ függvényeknek léteznek a másodrendű parciális deriváltjaik és ezek folytonosak az $U$ halmazon $\big(f, g \in C^2(U)\big)$,*

b) *az $(x_0, y_0) \in U$ pontban a $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ számmal teljesül a szükséges feltétel.*

*Tekintsük ezzel a $\lambda_0$ számmal az*

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda_0 g(x, y) \qquad \big((x, y) \in U\big)$$

*Lagrange-függvényt. Legyen*

$$D(x_0, y_0; \lambda_0) := \det \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_2 g(x_0, y_0) \\ \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_{11}\mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{12}\mathcal{L}(x_0, y_0) \\ \partial_2 g(x_0, y_0) & \partial_{21}\mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{22}\mathcal{L}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

*Ekkor,*

- $D(x_0, y_0; \lambda_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_0, y_0)$ *feltételes lokális* **maximumhely**,
- $D(x_0, y_0; \lambda_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_0, y_0)$ *feltételes lokális* **minimumhely**.

A ***feltételes abszolút szélsőértékhelyek*** megkeresése egy „egyszerűbb” feladathoz vezethet, ha a

$$H_g := \big\{(x, y) \in U \;\big|\; g(x, y) = 0\big\}$$

halmaz korlátos és zárt. Ebben az esetben a Weierstrass-tétel garantálja a feltételes abszolút szélsőértékhelyek létezését, amelyek a Lagrange-függvény stacionárius pontjai lesznek. Így kevés számú stacionárius pont esetében elegendő a függvényértékük összehasonlításával eldönteni, hogy közülük melyik a feltételes abszolút maximum és minimum.

**1. Feladat.** *Határozza meg az $f(x, y) := x^2 + y^2$ $\big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény feltételes lokális minimumhelyeit a $g(x, y) = x + 2y - 4 = 0$ feltételre vonatkozóan!*

a) *Mi a feladat geometriai tartalma?*

b) *Oldja meg a feladatot úgy, hogy a korlátozó feltételből $y$ kifejezésével visszavezeti egyváltozós szélsőérték-problémára!*

c) *Oldja meg a feladatot a Lagrange-szorzók módszerével!*

***Megoldás.***

a) Mivel az egyenes egy $(x, y)$ pontjának az origótól vett távolsága $\sqrt{x^2 + y^2}$, ezért a feladat az $x + 2y = 4$ egyenes az origóhoz legközelebbi pontjának a meghatározása.

b) A $g(x, y) = x + 2y - 4 = 0$ egyenletből $y = -\frac{1}{2}x + 2$ adódik. Ezért a feladat a

$$h(x) := f\Big(x, -\tfrac{1}{2}x + 2\Big) = x^2 + \Big(-\tfrac{1}{2}x + 2\Big)^2 = \tfrac{5}{4}x^2 - 2x + 4 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

valós-valós függvény lokális minimumhelyeinek a megkeresése. Mivel

$$h'(x) = \frac{5}{2}x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \frac{4}{5} \text{ és } h''(x_0) = \frac{5}{2} > 0,$$

ezért $x_0$ a $h$ másodfokú polinomnak egyetlen lokális minimumhelye. Következésképpen az $(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ pont az $f$ függvénynek a $g = 0$ feltételre vonatkozó egyetlen feltételes lokális minimumhelye. Ez a pont egyúttal abszolút feltételes minimumhely is, hiszen $x_0$ a $h$ függvény abszolút minimumhelye.

c) A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó tételeket alkalmazzuk.

<u>*A szükséges feltétel*</u>: A szóban forgó tétel feltételei teljesülnek, mert $f, g \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ és

$$g'(x,y) = \left(\partial_1 g(x,y) \quad \partial_2 g(x,y)\right) = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} \neq \left(0,0\right) \qquad \left((x,y)\in\mathbb{R}^2\right).$$

A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x+2y-4) \qquad \left((x,y)\in\mathbb{R}^2\right).$$

A lehetséges lokális szélsőértékhelyek az

$$\begin{aligned} \partial_1\mathcal{L}(x,y) &= 2x+\lambda &&= 0\\ \partial_2\mathcal{L}(x,y) &= 2y+2\lambda &&= 0\\ g(x,y) &= x+2y-4 &&= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai. Az első és a második egyenletből adódó $x = -\frac{\lambda}{2}$ és $y = -\lambda$ értékeket a harmadik egyenletbe beírva kapjuk, hogy

$$0 = x+2y-4 = -\frac{\lambda}{2} - 2\lambda - 4 = -\frac{5}{2}\lambda - 4 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = -\frac{8}{5}.$$

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása tehát:

$$x_0 = \frac{4}{5}, \quad y_0 = \frac{8}{5}, \quad \lambda_0 = -\frac{8}{5}.$$

Következésképpen csak az $(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ pontban lehet lokális feltételes szélsőérték.

<u>*Az elégséges feltétel*</u>: Mivel minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban

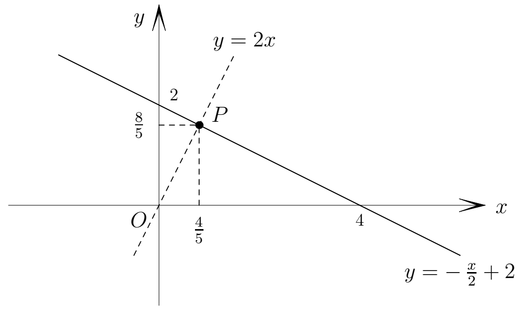
$$\partial_1 g(x,y) = 1, \qquad \partial_2 g(x,y) = 2;$$
$$\partial_{11}\mathcal{L}(x,y) = 2, \quad \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) = 0 = \partial_{21}\mathcal{L}(x,y), \quad \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) = 2;$$

$$D(x,y;\lambda) := \det\begin{pmatrix} 0 & \partial_1 g(x,y) & \partial_2 g(x,y)\\ \partial_1 g(x,y) & \partial_{11}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{12}\mathcal{L}(x,y)\\ \partial_2 g(x,y) & \partial_{21}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{22}\mathcal{L}(x,y)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&2\end{pmatrix} =$$

$$= 0\cdot(2\cdot 2 - 0\cdot 0) - 1(1\cdot 2 - 2\cdot 0) + 2\cdot(1\cdot 0 - 2\cdot 2) = -10 < 0.$$

így $D(x_0, y_0; \lambda_0) < 0$, ezért az $(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ pont <u>az egyetlen feltételes lokális minimumhely</u>.

***Megjegyzés.*** Az előző feladat megoldása megegyezik az elemi geometriából ismert eredménnyel, amit az alábbi ábrán szemléltetünk.




Az $y = 2x$ egyenletű egyenes merőleges az

$$y = -\frac{x}{2} + 2$$

egyenesre, mert a meredekségük szorzata $-1$. A két egyenes metszéspontja az $(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ pont. A szóban forgó egyenes és az origó távolsága tehát

$$\sqrt{f\left(x_0, y_0\right)} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

**2. Feladat.** *Legyen*

$$f(x,y) := xy \quad \text{és} \quad g(x,y) := x^2+y^2-1 \qquad \Big((x,y)\in\mathbb{R}^2\Big).$$

a) *Elemi úton keresse meg az $f$ függvény feltételes abszolút szélsőértékhelyeit a $g=0$ feltétel mellett!*

b) *A Lagrange-szorzók módszerével keresse meg az $f$ függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g=0$ feltétel mellett!*

***Megoldás.***

a) Az elemi megoldás alapötlete a számtani és mértani közepekre vonatkozó

$$|xy| = \sqrt{x^2y^2} \le \frac{x^2+y^2}{2} \qquad \Big((x,y)\in\mathbb{R}^2\Big)$$

egyenlőtlenség, ahol az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x^2=y^2$.

A $H_g := \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\Big|\; g(x,y)=0\Big\}$ halmaz pontjaiban $x^2+y^2=1$, ezért a fenti egyenlőtlenségek alapján

$$|xy| \le \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\frac{1}{2} \le xy \le \frac{1}{2} \qquad \Big((x,y)\in H_g\Big).$$

- Az első egyenlőtlenségben az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x=-y$. Mivel $x^2+y^2=1$, ezért $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $y=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ez viszont azt jelenti, hogy a

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

pontok az $f$ függvény feltételes abszolút minimumhelyei a $g=0$ feltétel mellett.

- A második egyenlőtlenségben az egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x=y$. Mivel $x^2+y^2=1$, ezért $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ez viszont azt jelenti, hogy a

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

pontok az $f$ függvény feltételes abszolút maximumhelyei a $g=0$ feltétel mellett.

b) A feltételes lokális szélsőértékekre vonatkozó tételeket alkalmazzuk.

*A szükséges feltétel*: A szóban forgó tétel feltételei teljesülnek, mert $f,g\in C^1\Big(\mathbb{R}^2\Big)$ és

$$g'(x,y) = \Big(\partial_1 g(x,y) \quad \partial_2 g(x,y)\Big) = \Big(2x \quad 2y\Big) \ne \Big(0 \quad 0\Big) \qquad \Big((x,y)\in H_g\Big),$$

hiszen ha $\Big(2x \quad 2y\Big) = \Big(0 \quad 0\Big)$, akkor $x=y=0$, de ekkor $g(0,0)=-1\ne 0$.

A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y)+\lambda g(x,y) = xy+\lambda(x^2+y^2-1) \qquad \Big((x,y)\in\mathbb{R}^2\Big).$$

A lehetséges lokális szélsőértékhelyek az alábbi egyenletrendszer megoldásai:

$$\begin{aligned} \partial_1\mathcal{L}(x,y) &= y+2\lambda x &&= 0,\\ \partial_2\mathcal{L}(x,y) &= x+2\lambda y &&= 0,\\ g(x,y) &= x^2+y^2-1 &&= 0. \end{aligned}$$

Az $x = 0$ nem megoldás (hiszen akkor $y$ is 0 lenne, ami a 3. egyenlet miatt lehetetlen), ezért az első egyenletből $2\lambda = -\frac{y}{x}$. Ezt a 2. egyenletbe beírva

$$x + \left(-\frac{y}{x}\right) \cdot y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - \frac{y^2}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = y^2.$$

A 3. egyenletből pedig azt kapjuk, hogy $2x^2 = 1$. Ezek alapján az egyenletrendszernek megoldásából a következő pontokat kapjuk

$$P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2},$$

$$P_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Az $f$ függvénynek csak ezekben lehetnek a feltételes lokális szélsőértékhelyei.

<u>*Az elégséges feltétel*</u>: Mivel minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_1 g(x, y) = 2x, \qquad \partial_2 g(x, y) = 2y,$$

$$\partial_{11}\mathcal{L}(x, y) = 2\lambda, \quad \partial_{12}\mathcal{L}(x, y) = 1 = \partial_{21}\mathcal{L}(x, y), \quad \partial_{22}\mathcal{L}(x, y) = 2\lambda;$$

ezért

$$D(x, y; \lambda) : = \det \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 g(x, y) & \partial_2 g(x, y) \\ \partial_1 g(x, y) & \partial_{11}\mathcal{L}(x, y) & \partial_{12}\mathcal{L}(x, y) \\ \partial_2 g(x, y) & \partial_{21}\mathcal{L}(x, y) & \partial_{22}\mathcal{L}(x, y) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -2x(2x \cdot 2\lambda - 2y) + 2y(2x - 2\lambda \cdot 2x) =$$

$$= -8\lambda(\underbrace{x^2 + y^2}_{=1}) + 8xy = 8(xy - \lambda).$$

Így

$$D(P_1, \lambda_1) = D(P_2, \lambda_1) = 8 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{P_1 \text{ és } P_2 \text{ feltételes lokális maximumhelyek}}},$$

$$D(P_3, \lambda_2) = D(P_4, \lambda_2) = -8 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{P_3 \text{ és } P_4 \text{ feltételes lokális minimumhelyek}}}.$$

***Megjegyzések.***

1. A eredményből következik, hogy körbe írható maximális területű téglalap a négyzet.

2. Az a tény, hogy $P_1$, $P_2$, $P_3$ és $P_4$ feltételes abszolút szélsőértékhelyek, nem csak az a) pontban bemutatott „elemi” megoldásból adódik. Ti. $f$ folytonos a

$$H_g := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

korlátos és zárt halmazon (pontjai egy kör kerületén vannak). Így a Weierstrass-tétel szerint $f$ felveszi a maximumát és a minimumát $H_g$-n. Mivel a b) pont szerint $P_1$, $P_2$, $P_3$ és $P_4$ egyedül a Lagrange-függvény stacionárius pontjai, és

$$f(P_1) = f(P_2) = \frac{1}{2}, \quad \text{illetve} \quad f(P_3) = f(P_4) = -\frac{1}{2},$$

így $P_1$ és $P_2$ feltételes abszolút maximumhelyek és $P_3$ és $P_4$ feltételes abszolút minimumhelyek.

**3. Feladat.** *Legyen*

$$f(x,y) := 2x + 3y \quad \textit{és} \quad g(x,y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big).$$

*Határozza meg az $f$ függvény feltételes lokális szélsőértékhelyeit a $g = 0$ feltétel mellett!*

***Megoldás.*** A feltételes lokális szélsőértékekre vonatkozó tételeket alkalmazzuk.

*A szükséges feltétel*: A szóban forgó tétel feltételei teljesülnek, mert $f, g \in C^1\Big(\mathbb{R}^2\Big)$ és

$$g'(x,y) = \Big((\partial_1 g(x,y) \quad \partial_2 g(x,y)\Big) = \Big(2x \quad 2y\Big) \neq \Big(0 \quad 0\Big) \qquad \Big((x,y) \in H_g\Big),$$

hiszen ha $\Big(2x \quad 2y\Big) = \Big(0 \quad 0\Big)$, akkor $x = y = 0$, de ekkor $g(0,0) = -1 \neq 0$.

A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = 2x + 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big).$$

A szóban forgó tétel szerint a lehetséges feltételes lokális szélsőértékhelyek az

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathcal{L}(x,y) &= 2 + 2\lambda x &&= 0 \\ \partial_2 \mathcal{L}(x,y) &= 3 + 2\lambda y &&= 0 \\ g(x,y) &= x^2 + y^2 - 1 &&= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásaiból adódnak.

A $\lambda = 0$ nyilván nem megoldás, ezért az első és a második egyenletből $x = -\frac{1}{\lambda}$ és $y = -\frac{3}{2\lambda}$ adódik. Ezeket az értékeket a 3. egyenletbe beírva azt kapjuk, hogy

$$0 = x^2 + y^2 - 1 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} - 1 = \frac{13 - 4\lambda^2}{4\lambda^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \pm\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Az egyenletrendszer megoldásai, tehát a *lehetséges* feltételes lokális szélsőértékhelyek:

$$P_1\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right), \quad \lambda_1 = \frac{\sqrt{13}}{2}, \qquad \text{és} \qquad P_2\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right), \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

*Az elégséges feltétel*: Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\partial_1 g(x,y) = 2x, \qquad \partial_2 g(x,y) = 2y;$$

$$\partial_{11}\mathcal{L}(x,y) = 2\lambda, \quad \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) = 0 = \partial_{21}\mathcal{L}(x,y), \quad \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) = 2\lambda;$$

ezért

$$D(x,y;\lambda) := \det\begin{pmatrix} 0 & \partial_1 g(x,y) & \partial_2 g(x,y) \\ \partial_1 g(x,y) & \partial_{11}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) \\ \partial_2 g(x,y) & \partial_{21}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -2x(2x \cdot 2\lambda - 0) + 2y(0 - 2\lambda \cdot 2y) = -8\lambda\Big(\underbrace{x^2 + y^2}_{=1}\Big) = -8\lambda.$$

Így

$$D\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}; \frac{\sqrt{13}}{2}\right) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{P_1 \text{ feltételes lokális minimumhely,}}}$$

$$D\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}; -\frac{\sqrt{13}}{2}\right) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{P_2 \text{ feltételes lokális maximumhely.}}}$$

***Megjegyzés.*** Az előző feladathoz hasonlóan most sem szükséges elvégezni az elégséges feltétel számításait, hiszen $H_g$ korlátos és zárt halmaz, $f$ folytonos függvény, és csak két stacionárius pont van. Ezért az egyik feltételes abszolút maximum, és a másik feltételes abszolút minimum.

**4. Feladat.** *Határozza meg az*

$$f(x,y) := x^2 + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

*függvény abszolút szélsőértékeit az*

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

*egyenletet kielégítő ellipszisen!*

***Megoldás.*** Legyen

$$g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Meg kell határozni az $f$ feltételes abszolút szélsőértékeit a $g = 0$ feltétel mellett. Mivel az ellipszis pontjai korlátos és zárt halmazt alkotnak, illetve az $f$ függvény folytonos, így a Weierstrass-tétel szerint az $f$ függvénynek vannak feltételes abszolút szélsőértékhelyei a

$$H_g := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0\Big\}$$

halmazon. A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó szükséges feltétel alapján meghatározzuk a lehetséges feltételes lokális szélsőértékhelyeket, és függvényértékük összehasonlításával eldöntjük, hogy közülük melyik a feltételes abszolút maximum és minimum.

A szükséges feltételre vonatkozó tétel feltételei teljesülnek, mert $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ és

$$g'(x,y) = \big(\partial_1 g(x,y) \quad \partial_2 g(x,y)\big) = \big(2x + y \quad x + 2y\big) \neq \big(0 \quad 0\big) \qquad \big((x,y) \in H_g\big),$$

hiszen ha $\big(2x + y \quad x + 2y\big) = \big(0 \quad 0\big)$, akkor $x = y = 0$, de ekkor $g(0,0) = -3 \neq 0$.

A Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L}(x,y) := f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 3) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó *szükséges* feltétel az $x, y, \lambda$ ismeretlenekre az alábbi egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathcal{L}(x,y) &= 2x + 2\lambda x + \lambda y &= 0, \\ \partial_2 \mathcal{L}(x,y) &= 2y + \lambda x + 2\lambda y &= 0, \\ g(x,y) &= x^2 + xy + y^2 - 3 = 0. \end{aligned}$$

Az első és a második egyenlet összegéből azt kapjuk, hogy

$$2(x+y)+3\lambda(x+y)=(x+y)(2+3\lambda)=0.$$

Ez két esetben teljesülhet:

i) ha $\lambda=-\frac{2}{3}$. Ekkor az első egyenletből $x=y$, ezt felhasználva a harmadikból $x=\pm 1$ adódik. A $P_1(1,1)$ és a $P_2(-1,-1)$ pontok tehát lehetséges szélsőértékhelyek.

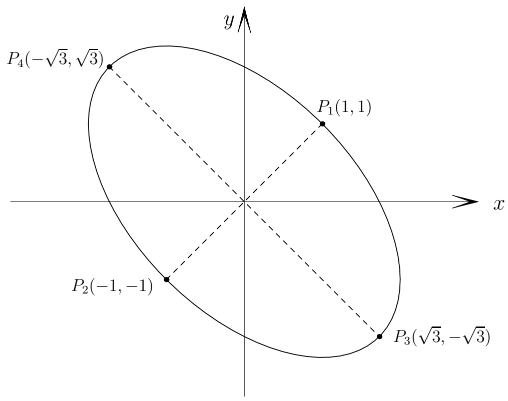
ii) ha $x+y=0$, akkor a harmadik egyenlet alapján $x=\pm\sqrt{3}$. Tehát a $P_3(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ és a $P_4(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ pontok is lehetséges szélsőértékhelyek. Ebben az esetben $\lambda=-2$.

Mivel

$$f(P_1)=f(P_2)=2 \qquad \text{és} \qquad f(P_3)=f(P_4)=6,$$

így az $f$ függvény az ellipszisen vett abszolút maximuma 6 és abszolút minimuma 2.

***Megjegyzés.*** A feladat geometriailag azt jelenti, hogy keressük az ellipszis azon pontjai, amelyeknek az origótól való távolsága a legkisebb és a legnagyobb.




Az

$$x^2+xy+y^2=3$$

egyenletet kielégítő $P(x,y)$ pontok valóban egy ellipszisen vannak, hiszen a fenti egyenlet a következő módon írható át:

$$\frac{1}{6}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2=1.$$

Így az

$$\overline{x}:=\frac{x-y}{\sqrt{2}} \qquad \text{és} \qquad \overline{y}:=\frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

helyettesítéssel az

$$\frac{\overline{x}^2}{(\sqrt{6})^2}+\frac{\overline{y}^2}{(\sqrt{2})^2}=1$$

kanonikus egyenletű ellipszist kapjuk új $\overline{x},\overline{y}$ tengelyekre nézve. Ezeket az új tengelyeket a „régi” tengelyek 45°-ös elforgatásával kapjuk, hiszen

$$\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 45^\circ & -\sin 45^\circ\\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$