7. GYAKORLAT

Vektor- és mátrixnormák

1. Tekintsük a $\mathbf{v} = (-1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 5) \in \mathbb{R}^5$ vektort!

(a) Határozzuk meg a $\mathbf{v}$ vektor 1–es, 2–es és ∞ vektornormáját!

(b) Igaz, hogy bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|\mathbf{x}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_q$, ha $1 \leq q \leq p$?

(c) Hogyan szemléltethető a (b) feladatbeli állítás az 1–es, 2–es és ∞ vektornormák és egy tetszőleges $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ vektor esetén?

2. Mutassuk meg, hogy az alábbi vektornormák ekvivalens vektornormák:

(a) az 1-es és a ∞ vektornorma;

(b) a 2-es és a ∞ vektornorma;

(c) az 1-es és a 2-es vektornorma.

3. Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra $\|A\|_m := n \cdot \max_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$.

(a) Igazoljuk, hogy $\|A\|_m$ mátrixnorma!

(b) Bizonyítsuk be, hogy a 2-es vektornormához illeszkedik!

4. Határozzuk meg a következő mátrixok $\|.\|_1$, $\|.\|_\infty$, $\|.\|_F$ és $\|.\|_2$ mátrixormáit!

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

5. Mutassuk meg, hogy

(a) Az egységmátrix indukált mátrixnormája 1.

(b) A Frobenius-norma nem indukált mátrixnorma.

(c) az 1-es vektornorma által indukált mátrixnorma a $\|A\|_1$ oszlopnorma;

(d) a ∞ vektornorma által indukált mátrixnorma a $\|A\|_\infty$ sornorma;

(e) a 2-es vektornorma által indukált mátrixnorma a $\|A\|_2$ spektrálnorma.

6. Legyen Q egy $n \times n$-es ortogonális mátrix, azaz $Q^{-1} = Q^T$. Igazoljuk az alábbi állításokat:

(a) $\|Q\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2 \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, azaz az ortogonális transzformáció távolságtartó;

(b) $\|Q\|_2 = \|Q^T\|_2 = 1$;

(c) $\|QA\|_2 = \|AQ\|_2 = \|A\|_2 \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

7. Igazoljuk az alábbi állításokat!

(a) $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(A^TA)}$, ahol $\mathrm{tr}(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii}$ a B mátrix nyoma (trace).

(b) Ha Q ortogonális mátrix, akkor

$$\|QA\|_F = \|AQ\|_F = \|A\|_F.$$

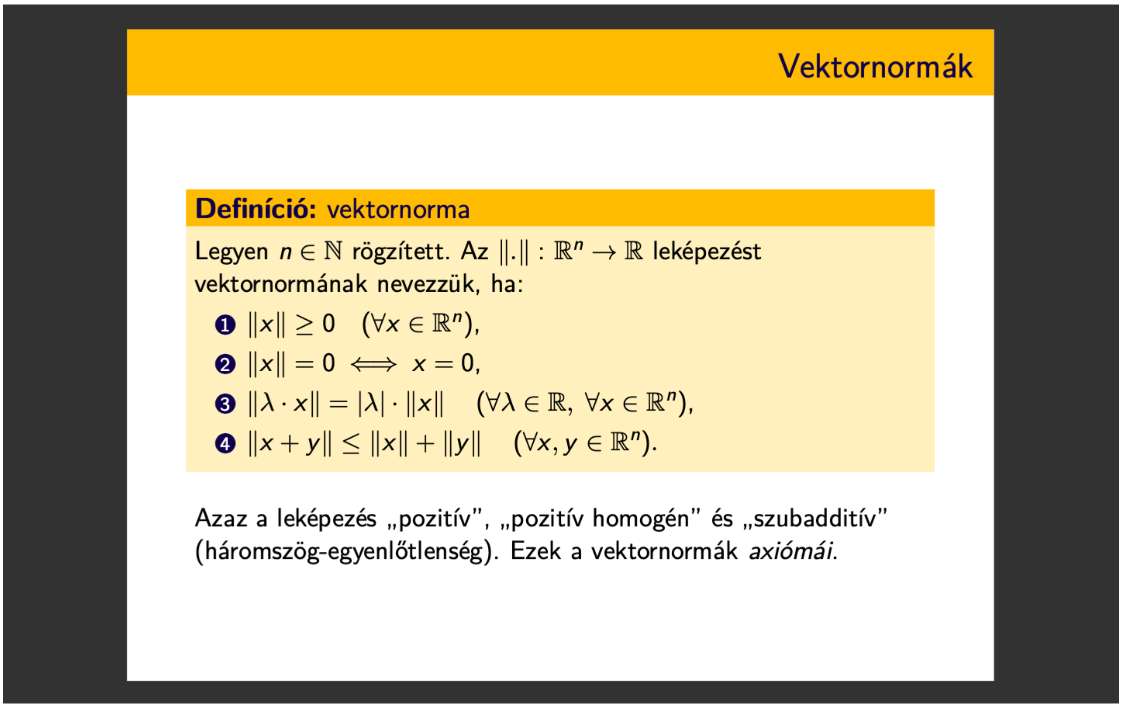
(c)

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A^TA)}$$

(d) $\|.\|_2$ és $\|.\|_F$ ekvivalens mátrixnormák.

(e) A Frobenius mátrixnorma illeszkedik a $\|.\|_2$ vektornormához.

MEGOLDÁS



Manhattan norma

$$\boxed{\|\mathbf{v}\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |v_k|}$$

Euklideszi norma

$$\boxed{\|\mathbf{v}\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2}}$$

Csebisev norma

$$\boxed{\|\mathbf{v}\|_\infty := \max_{k=1}^{n} |v_k|}$$

és $p \geq 1$ esetén a p**-norma**

$$\boxed{\|\mathbf{v}\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\boxed{\mathbb{R}^n\text{−en bármely két vektornorma ekvivalens}}$$

azaz, ha $\|.\|_A$ és $\|.\|_B$ vektornormák $\mathbb{R}^n$-en, akkor

$$\exists C_1, C_2 > 0 : \quad C_1\|\mathbf{x}\|_A \leq \|\mathbf{x}\|_B \leq C_2\|\mathbf{x}\|_A \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

1. Tekintsük a $\mathbf{v} = (-1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 5) \in \mathbb{R}^5$ vektort!

(a) Határozzuk meg a $\mathbf{v}$ vektor $\|.\|_1,\ \|.\|_2,\ \|.\|_\infty$ normáját!

Megoldás:

- $\|.\|_1$:

$$\|\mathbf{v}\|_1 = |-1| + |0| + |1| + |3| + |5| = 10.$$

- $\|.\|_2$:

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{|(-1)|^2 + |0|^2 + |1|^2 + |3|^2 + |5|^2} = 6.$$

- $\|.\|_\infty$:

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max\{|-1|,\ |0|,\ |1|,\ |3|,\ |5|\} = 5.$$

(b) Igaz, hogy bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\|\mathbf{x}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_q$, ha $1 \leq q \leq p$?

Megoldás:

Legyen $p \geq q \geq 1$. Az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vektorra nyilvánvaló az állítás. Most legyen $\mathbf{x}$ tetszőleges nem nulla vektor, és legyen $\alpha = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_q}$.
Mivel

$$0 \leq \alpha|x_i| = \frac{|x_i|}{\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q\right)^{1/q}} = \left(\frac{|x_i|^q}{\sum_{k=1}^n |x_k|^q}\right)^{1/q} \leq 1,$$

azaz $0 \leq \alpha|x_i| \leq 1$, így $(\alpha|x_i|)^p \leq (\alpha|x_i|)^q$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén.

Ezt az összefüggést minden komponensre felírjuk, majd ezeket összeadva kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n (\alpha|x_i|)^p \leq \sum_{i=1}^n (\alpha|x_i|)^q = \alpha^q \sum_{i=1}^n |x_i|^q = 1.$$

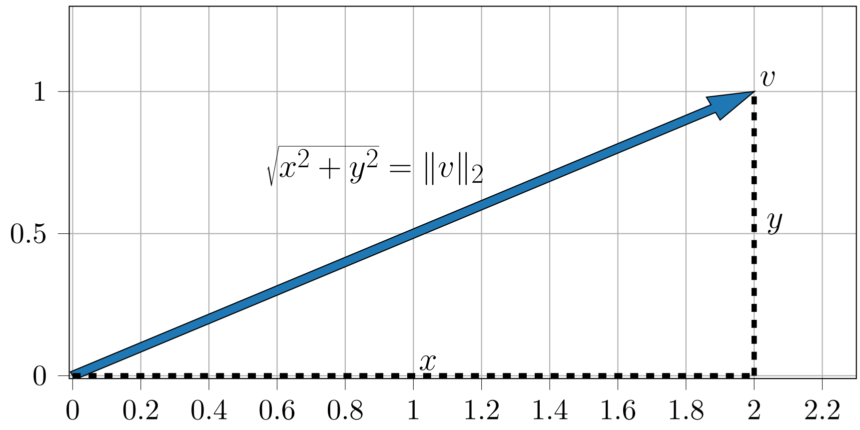
Innen viszont

$$\alpha\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n (\alpha|x_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1.$$

Leosztva α-val és kihasználva, hogy $\alpha = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_q}$:

$$\|\mathbf{x}\|_p \leq \frac{1}{\alpha} = \|\mathbf{x}\|_q.$$

(c) Egy tetszőleges $v = (x, y)$ (hely)vektort ábrázoljunk derékszögű koordinátarendszerben!



Ekkor a v vektor, valamely tengelyre vett merőleges vetülete és az origó egy derékszögű háromszöget határoz meg. A háromszög befogói $|x|$ és $|y|$ hosszúságúak, az átfogó pedig a Pitagorasz-tétel szerint $\sqrt{x^2+y^2}$ hosszú. Mivel

$$\|v\|_1 = |x| + |y|, \qquad \|v\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \|v\|_\infty = \max\{|x|, |y|\},$$

így $\|v\|_1$ a két befogó együttes hosszával egyenlő, $\|v\|_2$ az átfogó hosszával, $\|v\|_\infty$ pedig a hosszabbik befogó hosszával, melyek között a

$$\|v\|_1 \geq \|v\|_2 \geq \|v\|_\infty$$

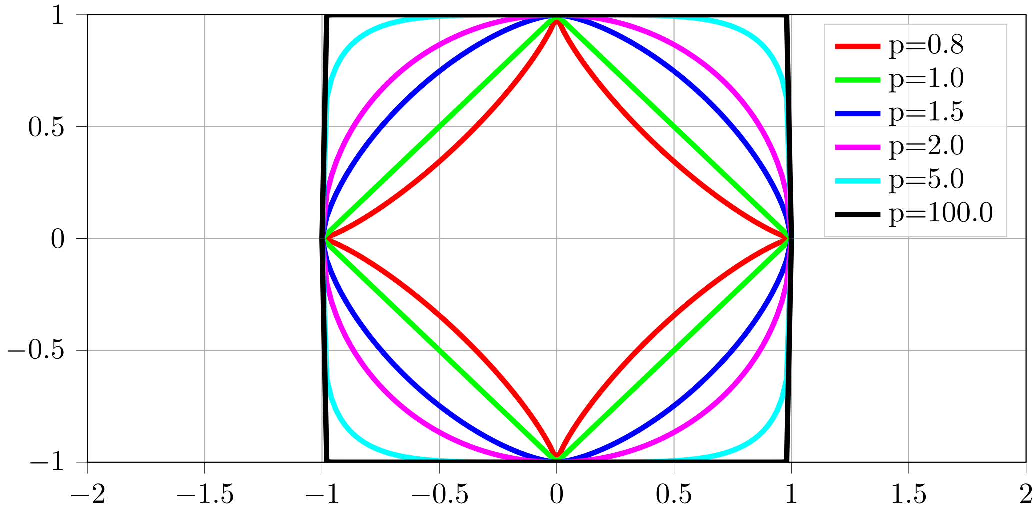
egyenlőtlenségek nyilván fennállnak.

A szóban forgó normákat szokás az „egységgömbjükkel” jellemezni, ehhez meg kell találnunk az összes olyan síkbeli vektort, amelyek valamely normában mért hosszúsága éppen 1.
A fentiek szerint a tetszőleges v síkvektorhoz szerkesztett T derékszögű háromszögre a következők igazak:

- $\|v\|_1 = 1$ akkor és csak akkor, ha a T befogói hosszának összege 1,
- $\|v\|_2 = 1$ akkor és csak akkor, ha a T átfogója 1 hosszú,
- $\|v\|_\infty = 1$ akkor és csak akkor, ha a T hosszabbik befogója 1 hosszú.

A következő ábrán néhány $\|.\|_p$ „norma” egységgömbjét ábrázoltuk.

Fontos megjegyezni, hogy a $\|.\|_p$ kifejezés ugyan értelmezhető abban az esetben is, ha $0 < p < 1$, azonban ekkor $\|.\|_p$ nem norma, ugyanis nem teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget.



2. Mutassuk meg, hogy az alábbi vektornormák ekvivalens vektornormák!

(a) Mutassuk meg, hogy az 1-es és a ∞ vektornorma ekvivalens vektornormák!

Megoldás:

A feladat az, hogy találjunk olyan C_1 és C_2 pozitív konstansokat, melyekre

$$\exists\, C_1, C_2 > 0 : \quad C_1\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq C_2\|\mathbf{x}\|_\infty \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Az alábbi egyenlőtlenséget

$$\max_i |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \cdot \max_i |x_i|$$

átírva normákra

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \cdot \|\mathbf{x}\|_\infty,$$

látszik, hogy $C_1 = 1$ és $C_2 = n$ megfelel a feladatnak.

(b) Mutassuk meg, hogy a 2-es és a ∞ vektornorma ekvivalens vektornormák!

Megoldás:

Az alábbi egyenlőtlenséget

$$\left(\max_i |x_i|\right)^2 = \max_i |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq n \cdot \max_i |x_i|^2 = n\left(\max_i |x_i|\right)^2$$

átírva normákra

$$\left(\|\mathbf{x}\|_\infty\right)^2 \leq \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq n \cdot \left(\|\mathbf{x}\|_\infty\right)^2,$$

négyzetgyököt vonva látszik, hogy $C_1 = 1$ és $C_2 = \sqrt{n}$ megfelel a feladatnak.

(c) Mutassuk meg, hogy az 1-es és a 2-es vektornorma ekvivalens vektornormák!

Megoldás: ld. példatár 100. oldal 5. feladat.

Mátrixnormák

Definíció: mátrixnorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ leképezést mátrixnormának nevezzük, ha:

1. $\|A\| \geq 0 \quad (\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
2. $\|A\| = 0 \iff A = 0$,
3. $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
5. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n})$.

Ugyanaz, mint a vektornormáknál, plusz: „szubmultiplikativitás”.
Ezek a mátrixnormák axiómái.

Oszlopnorma

$$\boxed{\|A\|_1 := \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|}$$

Sornorma

$$\boxed{\|A\|_\infty := \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}$$

Frobenius-norma

$$\boxed{\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}}$$

Spekrálnorma

$$\boxed{\|A\|_2 := \sqrt{\max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^T A)} = \sqrt{\varrho(A^T A)}}$$

szimmetrikus A mátrix esetén

$$\boxed{\|A\|_2 := \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)| = \varrho(A)}$$

ahol $\lambda_i(A)$ az A mátrix sajátértékeit, $\varrho(A)$ pedig a spektrálsugarát jelöli.

Az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett $\|.\|_v$ **vektornorma által indukált (természetes) mátrixnorma**

$$\boxed{\|A\| := \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v} = \sup_{\|\mathbf{x}\|_v = 1} \|A\mathbf{x}\|_v = \max_{\|\mathbf{x}\|_v = 1} \|A\mathbf{x}\|_v.}$$

3. Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra legyen $\|A\|_m := n \cdot \max_{i,j=1}^n |a_{ij}|$.

(a) Igazoljuk, hogy $\|A\|_m$ mátrixnorma!

Megoldás:

Megmutatjuk, hogy az $\|A\|_m$-ra teljesülnek a mátrixnormára vonatkozó axiómák.

(1) $\|A\|_m = n \cdot \max_{i,j=1}^n |a_{ij}| \geq 0.$

(2) $\|A\|_m = n \cdot \max_{i,j=1}^n |a_{ij}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = 0 \ (\forall i,j) \quad \Leftrightarrow \quad A = 0.$

(3) $\|\lambda A\|_m = n \cdot \max_{i,j=1}^n |\lambda a_{ij}| = |\lambda| \|A\|_m.$

(4)

$$\begin{aligned}\|A+B\|_m &= n \cdot \max_{i,j=1}^n |a_{ij}+b_{ij}| \leq n \cdot \max_{i,j=1}^n (|a_{ij}|+|b_{ij}|) \leq n \cdot \left(\max_{i,j=1}^n |a_{ij}| + \max_{i,j=1}^n |b_{ij}|\right) \\ &= n \cdot \max_{i,j=1}^n |a_{ij}| + n \cdot \max_{i,j=1}^n |b_{ij}| = \|A\|_m + \|B\|_m.\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\|AB\|_m &= n \cdot \max_{i,j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right| \leq n \cdot \max_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}|\,|b_{kj}| \leq n \cdot \max_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\max_{p,q=1}^n |a_{pq}|\right) |b_{kj}| \\ &\leq n \cdot \max_{p,q=1}^n |a_{pq}| \cdot \max_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |b_{kj}| \leq n \cdot \max_{p,q=1}^n |a_{pq}| \cdot n \max_{j,k=1}^n |b_{jk}| = \|A\|_m \cdot \|B\|_m\end{aligned}$$

(b) Bizonyítsuk be, hogy $\|A\|_m$ a 2-es vektornormához illeszkedik!

Az $\|.\|$ mátrixnorma és a $\|.\|_v$ vektornorma **illeszkedő normák**, ha

$$\|A\mathbf{x}\|_v \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|_v \qquad (\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ \ A \in \mathbb{R}^{n\times n})$$

Megoldás:

Az illeszkedés bizonyításához szükségünk lesz a **Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség**re:

$$|\mathbf{x}^\mathbf{T}\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \cdot \|\mathbf{y}\|_2$$

azaz

$$\boxed{\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}}$$

$$\|A\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}(A\mathbf{x})_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2 \underset{CBS}{\leq} \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) =$$

$$= \|\mathbf{x}\|_2^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right) \leq \|\mathbf{x}\|_2^2 \cdot n^2 \max_{i.j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \|A\|_m^2 \cdot \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

Innen négyzetgyökvonással kapjuk az állítást.

4. Határozzuk meg a következő mátrixok $\|.\|_1$, $\|.\|_\infty$, $\|.\|_F$ és $\|.\|_2$ mátrixnormáit!

Megoldás:

(a)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- $\|.\|_1$: Az A mátrix oszlopnormája

  Mivel $n = 2$, ezért

  $$\|A\|_1 = \max_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}|a_{ij}| = \max\{|-1| + |1|, \quad |0| + |2|\} = 2$$

- $\|.\|_\infty$: Az A mátrix sornormája

  $$\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}|a_{ij}| = \max\{|-1| + |0|, |1| + |2|\} = 3$$

- $\|.\|_F$: Az A mátrix Frobenius-normája:

  $$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}|a_{ij}|^2} = \sqrt{|-1|^2 + |1|^2 + |0|^2 + |2|^2} = \sqrt{6}$$

- $\|.\|_2$: Az A mátrix spektrálnormája

  $$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{i=1}^{2}\lambda_i(A^TA)} = \sqrt{\varrho(A^TA)}$$

  Így

  $$A^TA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

  Tudjuk, hogy A^TA sajátértékei nemnegatívak és a karakterisztikus polinomjának gyökei. Keressük meg a szóban forgó gyököket:

  $$\begin{aligned} P(\lambda) = |A^TA - \lambda I| \quad &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (2-\lambda)(4-\lambda) - 2\cdot 2 = \\ &= 8 - 4\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0. \end{aligned}$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete használatával megkapjuk a két gyököt, melyek tehát az A^TA mátrix sajátértékei.

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{2} = 3 \pm \sqrt{5}$$

Ebből pedig

$$\varrho(A^TA) = \max_{i=1}^{2} \lambda_i(A^TA) = \max\{3-\sqrt{5},\ 3+\sqrt{5}\} = 3+\sqrt{5},$$

végül

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^TA)} = \sqrt{3+\sqrt{5}}.$$

(b)

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- $\|.\|_1$: oszlopnorma

$$\|B\|_1 = \max_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} |b_{ij}| = \max\{|4|+|2|, \quad |2|+|4|\} = 6$$

- $\|.\|_\infty$: sornorma

  A B szimmetriája miatt a sor- és az oszlopnormák megegyeznek.

  Így $\|B\|_\infty = 6$.

- $\|.\|_F$: Alkalmazzuk a Frobenius-norma definícióját:

$$\|B\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} |b_{ij}|^2} = \sqrt{|4|^2+|2|^2+|2|^2+|4|^2} = \sqrt{40}$$

- $\|.\|_2$: Mivel a B mátrix szimmetrikus, ezért $\|B\|_2$-t kiszámíthatjuk B spektrálsugarával:

$$\|B\|_2 = \max_{i=1}^{2} |\lambda_i(B)|$$

  Írjuk fel B karakterisztikus polinomját:

$$\begin{aligned} P(\lambda) = |B-\lambda I| &= \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= (4-\lambda)^2 - 2\cdot 2 = 16 - 8\lambda + \lambda^2 - 4 = \\ &= \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0 \end{aligned}$$

  A $P(\lambda) = 0$ egyenletet megoldva kapjuk a sajátértékeket:

$$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 12}}{2\cdot 1} = 4 \pm 2$$

  Az előzőek alapján pedig

$$\|B\|_2 = \varrho(B) = \max_{i=1}^{2} |\lambda_i(B)| = \max\{|2|,\ |6|\} = 6$$

(c)

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- $\|.\|_1$: oszlopnorma

$$\|C\|_1 = \max_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} |c_{ij}| = 6$$

- $\|.\|_\infty$: sornorma

  A C szimmetriája miatt a sor- és az oszlopnormák megegyeznek.

  Így $\|C\|_\infty = 6$.

- $\|.\|_F$: Alkalmazzuk a Frobenius-norma definícióját:

$$\|C\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} |b_{ij}|^2} = \sqrt{52}$$

- $\|.\|_2$: Mivel a C mátrix szimmetrikus, ezért $\|C\|_2$-t kiszámíthatjuk C spektrálsugarával:

$$\|C\|_2 = \max_{i=1}^{3} |\lambda_i(C)|$$

  Írjuk fel C karakterisztikus polinomját:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (4-\lambda)\left((4-\lambda)^2 - 1 \cdot 1\right) - (4-\lambda) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 14) = \\ &= (4-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 14) = 0 \end{aligned}$$

  A $P(\lambda) = 0$ egyenletet megoldva kapjuk a sajátértékeket:

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_{2,3} = 4 \pm \sqrt{2}$$

  Az előzőek alapján pedig

$$\|C\|_2 = \varrho(C) = \max_{i=1}^{3} |\lambda_i(C)| = 4 + \sqrt{2}.$$

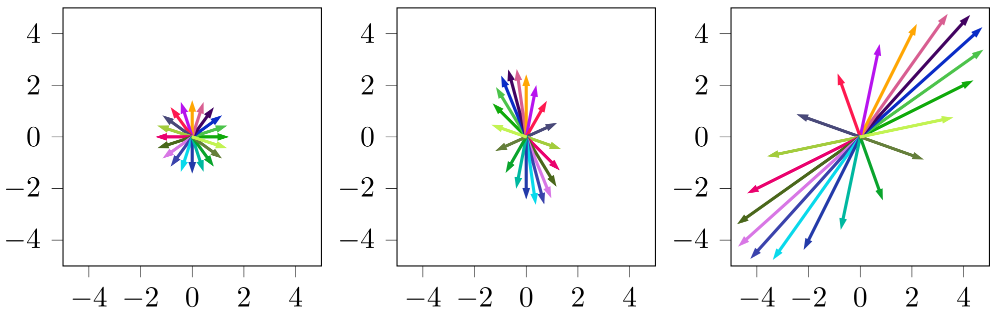
Érdemes geometriai szemléletet is társítani a most megoldott feladat (a) és (b) részéhez, ahol

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Legyen

$$\mathbf{v_k} := \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right) \end{bmatrix} \qquad (m \in \mathbb{N},\ k = 0 \ldots, m-1)$$

Ekkor a $\mathbf{v_k}$ vektorok egy egységkörbe írt szabályos m oldalú sokszög csúcsaiba mutató helyvektorok. Ha a $\mathbf{v_k}$ vektorokat megszorozzuk az előző feladatbeli A és B mátrixokkal, akkor azok iránya és hossza megváltozik. A következő ábrán balról jobbra az egyes $\mathbf{v_k}$, $A\mathbf{v_k}$, $B\mathbf{v_k}$ vektorokat tüntettük fel (a különböző színek különböző k indexhez tartoznak).



Mivel $\mathbf{v_k}$ az egységkör (vagyis az euklideszi norma egységgömbjének) egy pontja, így $\|\mathbf{v_k}\|_2 = 1$. Tudjuk, hogy

$$\|A\|_2 = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\|\mathbf{x}\|_2 = 1} \|A\mathbf{x}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2 = 1} \|A\mathbf{x}\|_2$$

azaz $\|A\|_2$ az a legnagyobb szám, ahányszorosára változhat az egységvektorok hossza az A mátrix által leírt transzformáció hatására. Az ábrákról leolvasható, hogy az A mátrixszal transzformált vektorok közül a leghosszabb kb. 2 hosszúságú, míg a B-vel transzformált vektorok leghosszabbika kb. 6 egység hosszú. Emlékezzünk, hogy $\|A\|_2 = \sqrt{3 + \sqrt{5}} \approx 2.29$, míg $\|B\|_2 = 6$, mely a fenti ábrákról leolvasható hosszváltozásokat megmagyarázza.

5. Mutassuk meg, hogy

(a) Az egységmátrix indukált mátrixnormája 1.

Megoldás:

Legyen $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, ekkor

$$\frac{\|I\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|I\| = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|I\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 1.$$

(b) A Frobenius-norma nem indukált mátrixnorma.

Megoldás:

$$\|I\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} = \sqrt{n} \neq 1.$$

(c) az 1-es vektornorma által indukált mátrixnorma az oszlopnorma, $\|A\|_1$.

Megoldás: ld. példatár 101. oldal 6. feladat.

(d) a ∞ vektornorma által indukált mátrixnorma a sornorma, $\|A\|_\infty$.

Megoldás:

$$\boxed{\|A\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|A\mathbf{x}\|_\infty}$$

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |(A\mathbf{x})_i| = \max_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \leq \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j| \leq$$

$$\leq \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \cdot \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Láthatjuk, hogy

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|A\mathbf{x}\|_\infty \leq \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Megmutatjuk, hogy ez a maximum felvétetik, tehát az egyenlőtlenségben $\leq$ helyett $=$ áll.

Tegyük fel, hogy valamely p-re $(1 \leq p \leq n)$

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{pj}| = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

azaz az $\|A\|_\infty$ a p-edik sorban vétetik fel, és tekintsük azt az $\tilde{\mathbf{x}}$ vektort, melyre
$\tilde{x}_j = \mathrm{sgn}(a_{pj})$ $(j = 1, \dots, n)$. Ekkor $\|\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty = 1$ és

$$\|A\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{sgn}(a_{pj}) \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{pj}|,$$

ugyanis

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{sgn}(a_{pj}) \right| \begin{cases} \leq \quad \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}\mathrm{sgn}(a_{pj})| = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{pj}|, & (i \neq p), \\ \\ = \quad \sum_{j=1}^{n} |a_{pj}|, \qquad (i = p). \end{cases}$$

(e) a 2-es vektornorma által indukált mátrixnorma a spektrálnorma, $\|A\|_2$.

Megoldás: ld. előadás, NM1ea06.pdf 28. oldal.

6. Igazoljuk az alábbi állításokat:

(a) A Q ortogonális mátrixra $\|Q\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$ $(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$, azaz az ortogonális transzformáció távolságtartó.

Megoldás:

Emlékeztető: Q ortogonális mátrix, ha $Q^{-1} = Q^T$, azaz $QQ^T = Q^TQ = I$.

$$\|Q\mathbf{x}\|_2^2 = (Q\mathbf{x})^T(Q\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q^T Q\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(Q^{-1}Q)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

(b) A Q ortogonális mátrixra $\|Q\|_2 = \|Q^T\|_2 = 1$.

Megoldás:

A $\|.\|_2$ mátrixnorma indukált mátrixnorma, ezért

$$\|Q\|_2 = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|Q\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = 1.$$

(c) A Q ortogonális mátrixra $\|QA\|_2 = \|AQ\|_2 = \|A\|_2 \qquad (\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n})$.

Megoldás:

$$\|QA\|_2 = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|(QA)\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|Q(A\mathbf{x})\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \|A\|_2,$$

és

$$\|AQ\|_2 = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|(AQ)\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A(Q\mathbf{x})\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A(Q\mathbf{x})\|_2}{\|Q\mathbf{x}\|_2} = \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2} = \|A\|_2,$$

ahol $\mathbf{y} = Q\mathbf{x}$.

7. Igazoljuk az alábbi állításokat!

(a) $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(A^TA)}$, ahol $\mathrm{tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ a B mátrix nyoma (trace).

Megoldás:

$$(A^TA)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^T a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ki})^2,$$

és

$$\mathrm{tr}(A^TA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (a_{ki})^2 = \|A\|_F^2.$$

(b) Ha Q ortogonális mátrix, akkor

$$\|QA\|_F = \|AQ\|_F = \|A\|_F.$$

Megoldás:

$$\|QA\|_F^2 = \mathrm{tr}\left((QA)^T(QA)\right) = \mathrm{tr}\left(A^T(Q^TQ)A)\right) = \mathrm{tr}(A^TA) = \|A\|_F^2,$$

és

$$\|AQ\|_F^2 = \|(AQ)^T\|_F^2 = \|Q^TA^T\|_F^2 = \|A^T\|_F^2 = \|A\|_F^2,$$

ahol felhasználtuk, hogy Q^T is ortogonális mátrix, valamint $\|A^T\|_F = \|A\|_F$.

(c)

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A^T A)}$$

Megoldás:

Mivel $A^T A$ szimmetrikus mátrix, létezik olyan Q ortogonális mátrix, amivel a hasonlósági transzformációt végrehajtva

$$Q^{-1}(A^T A)Q = D = diag\left(\lambda_i(A^T A)\right),$$

és

$$D = Q^{-1}A^T AQ = Q^T A^T AQ = (AQ)^T (AQ),$$

ezért

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A^T A) = \mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}\left((AQ)^T (AQ)\right) \underset{\text{(a)}}{=} \|AQ\|_F^2 = \|A\|_F^2.$$

(d) $\|.\|_2$ és $\|.\|_F$ ekvivalens mátrixnormák.

Megoldás:

Egyrészt

$$\|A\|_2^2 = \max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^T A) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A^T A) = \|A\|_F^2,$$

másrészt

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A^T A) \leq n \max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^T A) = n\|A\|_2^2.$$

Tehát

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2.$$

(e) A Frobenius mátrixnorma illeszkedik a $\|.\|_2$ vektornormához.

Megoldás:

Az $\|.\|$ **mátrixnorma illeszkedik** a $\|.\|_v$ **vektornormára**, ha

$$\|A\mathbf{x}\|_v \leq \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|_v \qquad (\forall \mathbf{x})$$

$$\|A\mathbf{x}\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|A\|_F \cdot \|\mathbf{x}\|_2,$$

ahol az első egyenlőtlenség abból adódik, hogy indukált norma illeszkedő is, a második egyenlőtlenséget pedig a feladat **(d)** részében láttuk.