11. gyakorlat

TÖBBSZÖRÖS INTEGRÁLOK 2.

Integráltranszformáció

Emlékeztető. Akkor mondjuk, hogy egy $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos síkidomnak van területe, ha a konstans 1 függvény Riemann-integrálható H-n, és ekkor a területét a

$$t(H) := \iint\limits_H 1\,dx\,dy$$

kettős integrállal értelmezzük. Hasonlóan járunk el egy $H \subset \mathbb{R}^3$ téridom térfogatának értelmezésekor hármas integrállal. Általánosan, akkor mondjuk, hogy a $H \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ korlátos halmaz Jordan-mérhető, ha a konstans 1 függvény Riemann-integrálható H-n, és ekkor a H halmaz Jordan-mértéke a

$$\mu(H) := \int\limits_H 1$$

integrállal értelmezzük.

Tétel. **(Integráltranszformáció)** *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ egy nem üres nyílt halmaz, és $H \subset U$ egy nem üres, Jordan-mérhető és zárt halmaz. Tegyük fel, hogy*

a) *$g : U \to \mathbb{R}^n$ egy folytonosan differenciálható függvény,*

b) *a g függvény injektív a H halmaz belsejében, azaz $g|_{\text{int}\, H}$ invertálható.*

Ekkor a $g[H]$ halmaz is Jordan-mérhető, illetve az $f : g[H] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény akkor és csak akkor integrálható, ha a

$$H \ni t \mapsto f\big(g(t)\big) \cdot \big|\det g'(t)\big|$$

függvény is integrálható, és

$$\int\limits_{g[H]} f(x)\,dx = \int\limits_H f\big(g(t)\big) \cdot \big|\det g'(t)\big|\,dt.$$

Síkbeli polárkoordináta-transzformáció: A

$$g(r,\varphi) := (r\cos\varphi,\, r\sin\varphi) \qquad \big((r,\varphi) \in \mathbb{R}^2\big)$$

leképezést alkalmazzuk. Ekkor $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ és $\det g'(r,\varphi) = r$. Adott $R > 0$, legyen

$$H \subset [0,R] \times [0, 2\pi]$$

egy nem üres, Jordan-mérhető, zárt halmaz. Ekkor $g|_{\text{int}\, H}$ invertálható, és így az integráltranszformációról szóló tétel feltételei teljesülnek. Ez azt jelenti, hogy az

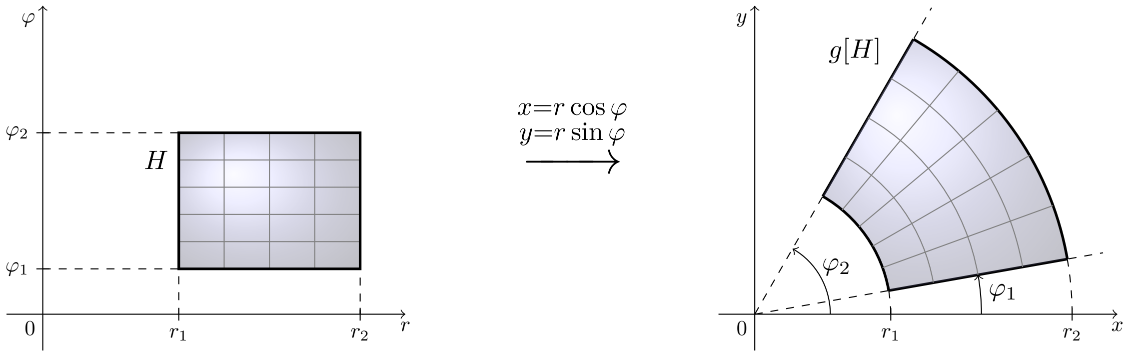
$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

transzformációval

$$(SPT) \qquad \iint\limits_{g[H]} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_H f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi.$$

Polárkoordináta-transzformációval egy téglalapot körgyűrűcikkbe képezhetünk. Ezt szemlélteti az alábbi ábra, ahol a téglalap:

$$H := \big\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 0 \le r_1 < r_2,\ 0 \le \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi\big\}.$$

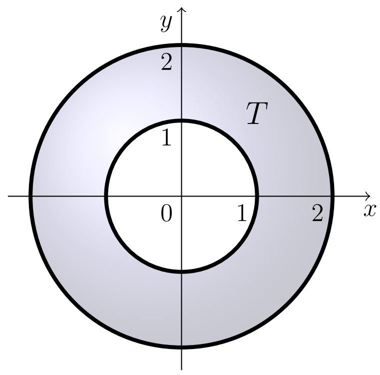


1. Feladat. *Számítsuk ki az*

$$\iint_{1\le x^2+y^2\le 4} \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

kettős integrált!

Megoldás. Az alábbi ábra a T-vel jelölt integrálási tartományt szemlélteti.



Az integrál kiszámításához az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\big(1 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\big)$$

síkbeli polárkoordinátás helyettesítést alkalmazzuk. Legyen

$$H := [1,2] \times [0, 2\pi].$$

Ekkor az (SPT) integráltranszformáció alapján

$$\iint_T \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_H \ln(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi = \iint_H \ln(r^2)\cdot r\,dr\,d\varphi$$

ami integrálható, hiszen az integrandus folytonos a H téglalapon. Ezt már szukcesszív integrálással tudjuk kiszámítani:

$$\iint_H \ln(r^2)\cdot r\,dr\,d\varphi = \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \ln(r^2)\cdot r\,d\varphi\right) dr = \left(\int_1^2 \ln r^2\cdot r\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi\right) =$$

$$= \left(2\int_1^2 r\cdot\ln r\,dr\right)\cdot 2\pi = 4\pi\int_1^2 \ln r\left(\frac{r^2}{2}\right)' dr = 4\pi\left(\left[\frac{r^2}{2}\cdot\ln r\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{r^2}{2}\cdot\frac{1}{r}\,dr\right) =$$

$$= 4\pi\left(\big(2\ln 2 - 0\big) - \left[\frac{r^2}{4}\right]_1^2\right) = 8\pi\ln 2 - 3\pi.$$

2. Feladat. *Kettős integrállal határozzuk meg az R sugarú kör területét!*

Megoldás. Jelölje T_R az origó középpontú R sugarú zárt körlapot. T_R területe definíció szerint

$$t(T_R) := \iint\limits_{T_R} 1\,dx\,dy,$$

ha a fenti kettős integrál létezik. Ezt az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\big(0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\big)$$

síkbeli polárkoordinátás helyettesítéssel számoljuk ki. A $H_R := [0,R] \times [0,2\pi]$ jelöléssel (SPT) alapján

$$t(T_R) = \iint\limits_{H_R} 1 \cdot r\,dr\,d\varphi,$$

ami integrálható, hiszen az integrandus folytonos a H_R téglalapon. Ezt már szukcesszív integrálással könnyű kiszámítani:

$$t(T_R) = \iint\limits_{H_R} r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^R r\,dr\right)d\varphi = \left(\int\limits_0^R r\,dr\right)\cdot\left(\int\limits_0^{2\pi} 1 d\varphi\right) = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \cdot 2\pi = \frac{R^2}{2}\,2\pi = R^2\pi.$$

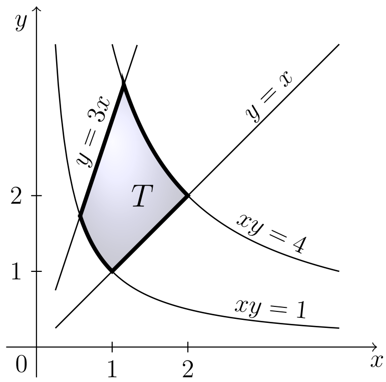
Megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy az egyváltozós analízisben a félkör területét a

$$\int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

határozott integrállal számoltuk ki.

3. Feladat. *Számítsuk ki az $xy = 1$, $xy = 4$, valamint az $y = x$ és az $y = 3x$ egyenletű görbék által meghatározott és az első síknegyedben fekvő zárt síkrész területét!*

Megoldás. Jelöljük T-vel a szóban forgó síkidomot, és ábrázoljuk a T halmazt!



T területe definíció szerint

$$t(T) := \iint\limits_{T} 1\,dx\,dy,$$

ha a fenti kettős integrál létezik. Ennek kiszámítására az

$$u := xy \qquad \text{és} \qquad v := \frac{y}{x}$$

„új” változókat vezetjük be. Az ábrából látható, hogy a T halmaz pontjaira igaz, hogy

$$1 \le u \le 4 \qquad \text{és} \qquad 1 \le v \le 3.$$

Másrészt könnyen látható, hogy

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}} \qquad \text{és} \qquad y = \sqrt{uv}.$$

Legyen $U := (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ és

$$g(u, v) := \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) \qquad \big((u, v) \in U\big).$$

Világos, hogy $g \in C^1(U)$, illetve

$$\det g'(u, v) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{uv}}\,\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} + \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}\,\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v^3}} = \frac{1}{2v}.$$

Továbbá a $H := [1, 4] \times [1, 3]$ halmazra igaz, hogy $T = g[H]$ és a g függvény injektív a H halmaz belsejében, hiszen

$$g^{-1}(x, y) = \left(xy, \frac{y}{x}\right) \qquad \big((x, y) \in T\big).$$

Ezért az integráltranszformációra vonatkozó képlet alapján

$$t(T) := \iint\limits_T 1\,dx\,dy = \iint\limits_H 1 \cdot \left|\det g'(u, v)\right| du\,dv = \iint\limits_H \frac{1}{2v}\,du\,dv,$$

ami integrálható, mert az integrandus folytonos a H téglalapon. Így szukcesszív integrálással

$$t(T) = \int_1^4 \left(\int_1^3 \frac{1}{2v}\,dv\right) du = \left(\int_1^4 1\,du\right) \cdot \left(\int_1^3 \frac{1}{2v}\,dv\right) = 3 \cdot \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{v}\,dv = \frac{3}{2}\Big[\ln v\Big]_{v=1}^{v=3} =$$

$$= \frac{3}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{3\ln 3}{2}.$$

Emlékeztető. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz és $f : D \to \mathbb{R}$ nemnegatív korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy a

$$T := \big\{(x, y, z) \;\big|\; (x, y) \in D,\ 0 \le z \le f(x, y)\big\} \subset \mathbb{R}^3$$

„térrésznek” (hengerszerű testnek) ***van térfogata***, ha $f \in R(D)$. Ekkor a

$$V(T) := \iint\limits_D f = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$$

kettős integrált a T test ***térfogatának*** nevezzük.

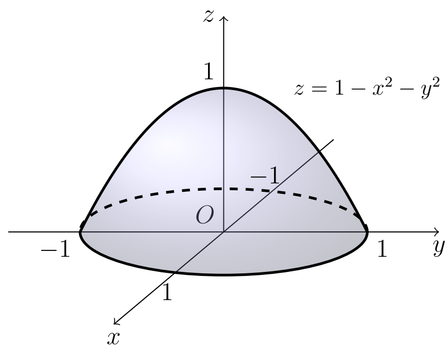
A kettős integrál geometriai interpretációja tehát

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$$

a $z = f(x, y)$ egyenletű felület alatti és az xy síkban lévő D tartomány feletti test térfogata, feltéve, hogy $f \ge 0$ a D halmazon.

4. Feladat. *Határozzuk meg a $z = 1 - x^2 - y^2$ egyenletű felület (forgásparaboloid) és az xy sík által határolt korlátos és zárt térrész térfogatát!*

Megoldás. Ábrázoljuk a kérdéses térrészt!



Ennek pontjaira igaz a $z \geq 0$ feltétel. Mivel

$$z \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + y^2 \leq 1,$$

így a $z = 1 - x^2 - y^2$ egyenletű felület alatti és az xy síkban lévő

$$D := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x^2 + y^2 \leq 1\Big\}$$

tartomány feletti test térfogatát kell számolnunk, azaz a

$$T := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; (x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\Big\}$$

test térfogatát, aminek értéke

$$V(T) := \iint\limits_D (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy.$$

A fenti integrál kiszámításához az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\Big(0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\Big)$$

síkbeli polárkoordinátás helyettesítést alkalmazzuk. Legyen

$$H := [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Az (SPT) integráltranszformáció alapján

$$\iint\limits_D (1 - x^2 - y^2)\, dx\, dy = \iint\limits_H \Big(1 - (r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2\Big) \cdot r\, dr\, d\varphi = \iint\limits_H \Big(1 - r^2\Big) \cdot r\, dr\, d\varphi,$$

ami integrálható, mert az integrandus folytonos a H téglalapon. Így szukcesszív integrálással

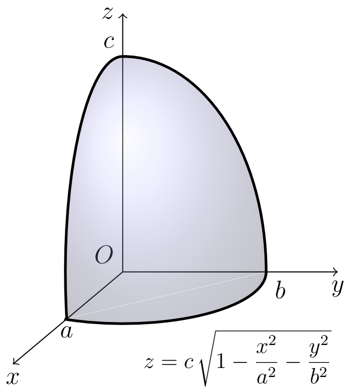
$$V(T) = \left(\int_0^1 (r - r^3)\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\, d\varphi\right) = \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}.$$

5. Feladat. *Legyenek a, b és c pozitív valós paraméterek. Határozzuk meg az*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

egyenletű ellipszoiddal határolt térrész térfogatát!

Megoldás. Szimmetria okok miatt elég a test (pl.) első térnyolcadba eső részének a térfogatát kiszámolni.



Az ellipszoid egyenletéből $z \geq 0$ esetén azt kapjuk, hogy

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad \text{ha} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Ezért a keresett ellipszoid térfogata

$$V = 8 \iint\limits_D c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy,$$

ahol

$$D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,\, x \geq 0,\, y \geq 0\right\}.$$

Ennek kiszámításához az

$$x = ar\cos\varphi, \quad y = br\sin\varphi$$
$$\big(0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2\big)$$

Nem nehéz igazolni, hogy a

$$g(r, \varphi) := (ar\cos\varphi,\, br\sin\varphi) \qquad \big((r, \varphi) \in \mathbb{R}^2\big)$$

kielégíti az integráltranszformációról szóló tétel feltételeit, és

$$\det g'(r, \varphi) = \det \begin{pmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\,\cos\varphi \end{pmatrix} = abr.$$

Legyen

$$H := [0, 1] \times [0, \pi/2].$$

Az integráltranszformáció alapján

$$\iint\limits_D c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy = c \iint\limits_H \sqrt{1 - \frac{(ar\cos\varphi)^2}{a^2} - \frac{(br\sin\varphi)^2}{b^2}} \cdot abr\, dr\, d\varphi =$$
$$= abc \iint\limits_H \sqrt{1 - r^2} \cdot r\, dr\, d\varphi,$$

ami integrálható, mert az integrandus folytonos a H téglalapon. Így szukcesszív integrálással

$$V = 8abc \left(\int_0^1 \sqrt{1 - r^2} \cdot r\, dr\right)\left(\int_0^{\pi/2} 1\, d\varphi\right) = 4abc\left(-\int_0^1 (1 - r^2)^{1/2} \cdot (-2r)\, dr\right) \cdot \frac{\pi}{2} =$$
$$= (f^\alpha f' \text{ típus}) = 2abc\pi\left[-\frac{(1 - r^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = 2abc\pi\left(\frac{0 - (-1)}{3/2}\right) = \frac{4abc\pi}{3}.$$

6. Feladat. *Szemléltessük rajzon a*

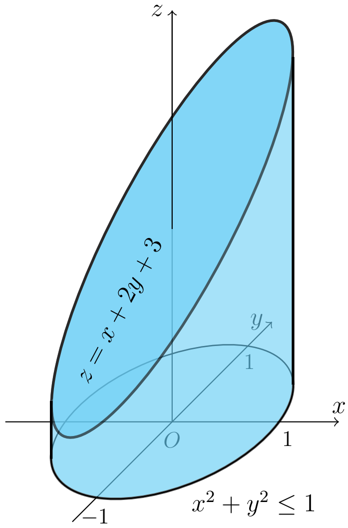
$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0, \quad z = x + 2y + 3$$

felületek által határolt korlátos és zárt térbeli tartományt, majd kettős integrál alkalmazásával számítsuk ki e tartomány térfogatát!

Megoldás. A szóban forgó test a $z = x + 2y + 3$ egyenletű sík alatti és az xy síkban $(z = 0)$ lévő

$$D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

körlap feletti hengerszerű test.



Valóban, ha $x^2 + y^2 \le 1$, akkor $x, y \ge -1$, és így

$$z = x + 2y + 3 \ge -1 + 2(-1) + 3 = 0.$$

Az ábrán szemléltetünk egy ilyen típusú hengerszerű testet. Ennek térfogata

$$V := \iint\limits_D (x + 2y + 3)\, dx\, dy.$$

A fenti integrál kiszámításához az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
$$\big(0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\big)$$

síkbeli polárkoordinátás helyettesítést alkalmazzuk. Legyen

$$H := [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Az (SPT) integráltranszformáció alapján

$$\iint\limits_D (x + 2y + 3)\, dx\, dy = \iint\limits_H (r\cos\varphi + 2r\sin\varphi + 3) \cdot r\, dr\, d\varphi,$$

ami integrálható, mert az integrandus folytonos a H téglalapon. Így szukcesszív integrálással

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (r^2\cos\varphi + 2r^2\sin\varphi + 3r)\, d\varphi\right) dr = \int_0^1 \Big[r^2\sin\varphi - 2r^2\cos\varphi + 3r\varphi\Big]_0^{2\pi} dr =$$

$$= \int_0^1 \big((0 - 2r^2 + 6\pi r) - (0 - 2r^2 + 0)\big)\, dr = \int_0^1 6\pi r\, dr = \Big[3\pi r^2\Big]_0^1 = 3\pi.$$