

10. GYAKORLAT

Iterációs módszerek: a Gauss-Seidel-iteráció

1. Konvergál-e az A mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Tekintsük a

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

lineáris egyenletrendszer! A megoldáshoz a Gauss-Seidel-iterációt szeretnénk alkalmazni.

- (a) Konvergens-e tetszőleges $\mathbf{x}^{(0)}$ esetén?
- (b) Írjuk fel a hibabecslést!
- (c) $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ esetén számítsuk ki a $\mathbf{x}^{(1)}$ -et koordinátánként!
- (d) Hány lépést kell végeznünk a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

3. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Megoldható az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER a Gauss-Seidel iteráció segítségével?
 - (b) Ha igen, hány lépés szükséges a 10^{-3} pontosság eléréséhez, ha az iterációt az $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ vektorral indítjuk?
4. Vizsgáljuk meg a Gauss-Seidel és a relaxált Gauss-Seidel iterációk konvergenciáját az alábbi mátrix esetén

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS

Legyen $A = L + D + U$, ekkor

$$(L + D + U)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$(L + D)\mathbf{x} = -U\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

innen

$$\mathbf{x} = -(L + D)^{-1}U\mathbf{x} + (L + D)^{-1}\mathbf{b},$$

és a

Gauss-Seidel-iteráció

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{-(L + D)^{-1}U}_{B_S} \cdot \mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{(L + D)^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}_S},$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -(L + D)^{-1}U\mathbf{x}^{(k)} + (L + D)^{-1}\mathbf{b}$$

$$(L + D)\mathbf{x}^{(k+1)} = -U\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

$$D\mathbf{x}^{(k+1)} = -L\mathbf{x}^{(k+1)} - U\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -D^{-1} \left(L\mathbf{x}^{(k+1)} + U\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b} \right)$$

A Gauss-Seidel-iteráció koordinátás alakja:

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} - b_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ha A szigorúan diagonálisan domináns a mátrix soraira nézve, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER-re felírt Gauss-Seidel-iteráció konvergens tetszőleges kezdővektor esetén.

1. Konvergál-e az A mátrixra felírt Gauss-Seidel-iteráció?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Az A mátrix **nem** szigorúan diagonálisan domináns a soraira nézve, ezért ennek alapján nem tudunk semmit sem mondani az iteráció konvergenciájáról.

Írjuk fel a $B_S = -(L + D)^{-1}U$ átmenetmátrixot. Ehhez először is invertáljuk $(L + D)$ -t a Gauss-elimináció segítségével.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{array} \right], \end{aligned}$$

azaz

$$(L + D)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Az iterációs mátrix meghatározásához már csak egy mátrix szorzást kell elvégeznünk, ugyanis $B_s = -(L + D)^{-1} \cdot U = (L + D)^{-1} \cdot (-U)$. Tehát

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -6 \end{bmatrix} = B_s$$

A Gauss-Seidel iteráció akkor és csak akkor konvergens, ha $\varrho(B_s) < 1$. A szükséges feltétel ellenőrzéséhez meg kell határoznunk B_s sajátértékeit. Ennek első lépéseként írjuk fel a B_s mátrixhoz tartozó karakterisztikus polinomot.

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(B_s - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & 8 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda \cdot [(2 - \lambda)(-6 - \lambda) + 8] = -\lambda \cdot (\lambda^2 + 4\lambda - 4) \end{aligned}$$

A sajátértékek ebből már (másodfokú megoldóképlettel) könnyedén meghatározhatók:

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = -2 - \sqrt{8}, \quad \lambda_2 = -2 + \sqrt{8}.$$

A B_s iterációs mátrix spektrál sugara ennek alapján $\rho(B_s) = 2 + \sqrt{8} > 1$, azaz az iteráció **nem** konvergál minden $\mathbf{x}^{(0)}$ esetén.

2. Tekintsük a

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

lineáris egyenletrendszer! A megoldáshoz a Gauss-Seidel-iterációt szeretnénk alkalmazni.

- (a) Konvergens-e tetszőleges $\mathbf{x}^{(0)}$ esetén?
- (b) Írjuk fel a hibabecslést!
- (c) $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ esetén számítsuk ki a $\mathbf{x}^{(1)}$ -et koordinátánként!
- (d) Hány lépést kell végeznünk a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

Megoldás:

- (a) A feladatunk (Gauss-Seidel-iteráció) átmeneti mátrixa

$$B_S = -(D + L)^{-1}U,$$

ahol

$$D + L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad (D + L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/16 & 1/4 & 0 \\ 1/64 & 1/16 & 1/4 \end{bmatrix},$$

végül

$$B_S = (D + L)^{-1}(-U) = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/16 & 1/4 & 0 \\ 1/64 & 1/16 & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/16 & 1/4 \\ 0 & 1/64 & 1/16 \end{bmatrix}$$

amelyből $\|B_S\|_\infty = \frac{5}{16} = q < 1$, azaz az iteráció bármely $\mathbf{x}^{(0)}$ esetén konvergens.

Másik megoldás: Az A mátrix szigorúan diagonálisan domináns a soraira nézve, ez biztosítja az iteráció konvergenciáját tetszőleges kezdővektor esetén.

A konvergencia igazolására az előadás anyagából további tételeket is felhasználhatunk:

- i. Az A mátrix szimmetrikus és pozitív definit, így az $S(1)$ iteráció konvergens.

ii. Az A mátrix tridiagonális, ezért az $S(1)$ (sőt a $J(1)$ is) konvergens.

(b) A hibabecslést a fixpont tétel segítségével írjuk fel:

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{\left(\frac{5}{16}\right)^k}{1 - \frac{5}{16}} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty$$

(c) Ha $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{x}^{(1)} = B_S \cdot \mathbf{0} + \mathbf{c}_S = \mathbf{c}_S = (L+D)^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/16 & 1/4 & 0 \\ 1/64 & 1/16 & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 11/16 \\ 59/64 \end{bmatrix}.$$

Koordináták alakban felírhatjuk az \mathbf{x}^{k+1} vektort az alábbi formula segítségével is:

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Megjegyezzük, hogy a képletből látszik, hogy a Gauss-Seidel-iteráció azonnal felhasználja a $(k+1)$ -ik lépés során a közben kiszámított koordinátákat. Ezzel szemben, a Jacobi-iteráció a $(k+1)$ -ik lépés során csak a k -adik lépésben kiszámolt koordinátákat használja fel.

Alkalmazzuk a formulát a feladatra. Ekkor

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= -\frac{1}{a_{11}} (a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} - b_1) = -\frac{1}{4} \cdot (-3) = \frac{3}{4} \\ x_2^{(1)} &= -\frac{1}{a_{22}} (a_{21}x_1^{(1)} + a_{23}x_3^{(0)} - b_2) = -\frac{1}{4} \left(-\frac{3}{4} + 0 - 2 \right) = \frac{11}{16} \\ x_3^{(1)} &= -\frac{1}{a_{33}} (a_{31}x_1^{(1)} + a_{32}x_2^{(1)} - b_3) = -\frac{1}{4} \left(0 \cdot \frac{3}{4} - 1 \cdot \frac{11}{16} - 3 \right) = \frac{59}{64}. \end{aligned}$$

(d) Mivel $\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{(1)}$, ezért $\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{59}{64}$. Innen a korábban felírt hibabecslésünk

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{\left(\frac{5}{16}\right)^k}{1 - \frac{5}{16}} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty = \left(\frac{5}{16}\right)^k \cdot \frac{16}{11} \cdot \frac{59}{64} = \left(\frac{5}{16}\right)^k \cdot \frac{59}{44}$$

Ahhoz, hogy 10^{-3} -nál kisebb hibát kapjunk, k -t úgy kell megválasztanunk, hogy

$$\left(\frac{5}{16}\right)^k \cdot \frac{59}{44} \leq 10^{-3}$$

teljesüljön. Átrendezzük az egyenlőtlenséget, majd mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát vesszük

$$\frac{59}{44} \cdot 10^3 \leq \left(\frac{16}{5}\right)^k \implies k \geq \frac{\log\left(\frac{59}{44} \cdot 10^3\right)}{\log\left(\frac{16}{5}\right)} \approx 6.19$$

azaz legalább hét lépés elvégzése szükséges a kívánt pontosság eléréséhez.

Megjegyezzük, hogy a Jacobi-iterációhoz képest erre a feladatra nézve a Gauss-Seidel iteráció majdnem kétszer olyan gyorsan konvergál a megoldáshoz. Végtelen normában tekintve a kontrakciós paramétereket ugyanis azt látjuk, hogy

$$q_J = \frac{1}{2}, \quad q_S = \frac{5}{16}.$$

3. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Megoldható az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER a Gauss-Seidel iteráció segítségével?
- (b) Ha igen, hány lépés szükséges a 10^{-3} pontosság eléréséhez, ha az iterációt az $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ vektorral indítjuk?

Megoldás:

- (a) Felírjuk az iteráció átmenetmátrixát és ellenőrizzük, hogy teljesíti-e a konvergencia valamelyik elégséges feltételét. A Gauss-Seidel-iteráció átmeneti mátrixa

$$\begin{aligned} B_S &= -(L + D)^{-1}U = - \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -2/25 & 1/5 & 0 \\ 13/50 & 1/10 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -3/5 & -1/5 \\ 0 & 6/25 & 12/25 \\ 0 & -39/50 & -3/50 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mivel

$$\|B_S\|_\infty = \frac{21}{25} < 1,$$

az iteráció konvergens bármely $\mathbf{x}^{(0)}$ esetén.

(b) Felírjuk az iterációhoz tartozó hibaformulát:

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{\left(\frac{21}{25}\right)^k}{1 - \frac{21}{25}} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_\infty = \left(\frac{21}{25}\right)^k \cdot \frac{25}{4} \cdot \|\mathbf{x}^{(1)}\|_\infty,$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= B_S \cdot \mathbf{0} + (L + D)^{-1} \mathbf{b} = (L + D)^{-1} \mathbf{b} = \\ &= \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -2/25 & 1/5 & 0 \\ 13/50 & 1/10 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 3/25 \\ -7/50 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

és

$$\|\mathbf{x}^{(1)}\|_\infty = \frac{1}{5}.$$

Behelyettesítve a hibaformulába

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \left(\frac{21}{25}\right)^k \cdot \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{5} = \left(\frac{21}{25}\right)^k \cdot \frac{5}{4}.$$

Keressük azt a legkisebb k -t, amelyre

$$\left(\frac{21}{25}\right)^k \cdot \frac{5}{4} \leq 10^{-3}$$

Átrendezve az egyenlőtlenséget, majd mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve kapjuk, hogy

$$k \geq \frac{\log(\frac{5}{4} \cdot 10^3)}{\log(\frac{25}{21})} \approx 40.9,$$

tehát legalább 41 lépés kell a 10^{-3} pontossághoz.

4. Vizsgáljuk meg a Gauss-Seidel és a relaxált Gauss-Seidel iterációk konvergenciáját az alábbi mátrix esetén

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

(a) Először írjuk fel a Gauss-Seidel iteráció átmenetmátrixát:

$$B_S = -(L + D)^{-1}U = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A $\|B_S\|_\infty = 1$ miatt nem teljesül a konvergencia elégséges feltétele, ezért megvizsgáljuk a B_S spektrálsugarát (a konvergencia szükséges és elégséges feltételét).

A B_S mátrix karakterisztikus polinomja

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (-1 - \lambda) = \lambda(\lambda + 1)$$

A keresett sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1$$

és $\varrho(B_S) = 1$, ami azt jelenti, hogy a Gauss-Seidel iteráció nem konvergens.

- (b) Vizsgáljuk meg, hogy relaxációs paraméter alkalmazásával konvergenssé tehető-e a Gauss-Seidel iteráció. Ehhez először is számoljuk ki a $B_{S(\omega)}$ iterációs mátrixot, a

$$B_{S(\omega)} = (D + \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D - \omega U]$$

képlet alapján elvégezve a kívánt műveleteket kapjuk, hogy

$$B_{S(\omega)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \omega & \omega \\ 0 & 1 - \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \omega & \omega \\ \omega^2 - \omega & -\omega^2 - \omega + 1 \end{bmatrix}$$

Vizsgáljuk meg a $0 < \omega < 1$ esetet!

Látjuk, hogy a $B_{S(\omega)}$ mátrix első sorára $|1 - \omega| + |\omega| = 1 - \omega + \omega = 1$, ezért

$$\|B_{S(\omega)}\|_\infty \geq 1.$$

Mi a helyzet az oszlopnormával?

$$1 - \omega + \omega(1 - \omega) = 1 - \omega^2, \quad \omega + 1 - \omega^2 - \omega = 1 - \omega^2,$$

ha $\omega \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0,618$, és ekkor

$$\|B_{S(\omega)}\|_1 = 1 - \omega^2.$$

Az utóbbi norma pl. az $\omega = \frac{1}{2}$ paraméter esetén

$$\|B_{S(\frac{1}{2})}\|_1 = \frac{3}{4} < 1.$$

Mivel az $\|\cdot\|_1$ illeszkedő mátrixnorma, az iteráció konvergens lesz.