

**Többváltozós függvénytan**  
**Programtervező informatikus szak**

*Elméleti kérdések a röpdolgozatokhoz*

**1. Előadás**

1. Adja meg a normált tér fogalmát!
2. Adjon meg három különböző normát az  $\mathbb{R}^n$  lineáris téren!
3. Adja meg a környezet fogalmát az  $\mathbb{R}^n$  euklideszi térben!
4. Adja meg a torlódási pont fogalmát az  $\mathbb{R}^n$  euklideszi térben!
5. Adja meg a belső pont fogalmát az  $\mathbb{R}^n$  euklideszi térben!
6. Mikor mondjuk, hogy egy sorozat konvergens az  $\mathbb{R}^n$  euklideszi térben?
7. Milyen kapcsolat van egy sorozat konvergenciája és a határértéktől való távolsága között?
8. Milyen kapcsolat van egy sorozat konvergenciája és a koordinátasorozatainak konvergenciája között?
9. Mit állít a Cauchy-féle konvergenciakritérium az  $\mathbb{R}^n$  euklideszi térbeli sorozatokra?
10. Mit állít a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel az  $\mathbb{R}^n$  euklideszi térre?

**2. Előadás**

1. Hogyan értelmezzük egy kétváltozós valós értékű függvény grafikonját?
2. Mikor mondjuk, hogy egy  $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvény folytonos egy adott pontban?
3. Igazolja, hogy az  $\mathbb{R}^n$  térben értelmezett norma egy folytonos függvény!
4. Mit mond a folytonosságra vonatkozó átviteli elv  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  típusú függvények esetére?
5. Mondja ki az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételt többváltozós függvények esetére!
6. Milyen kapcsolat van egy függvény folytonossága és a koordinátafüggvényei folytonossága között?
7. Fogalmazza a Weierstrass tételét többváltozós függvények esetére!
8. Mikor mondjuk, hogy egy  $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvénynek van pontbeli határértéke?
9. Mit mond a határértékre vonatkozó átviteli elv  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  típusú függvények esetére?
10. Adjon példát olyan  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre, amelynek nincs határértéke egy megadott pontban!

**3. Előadás**

1. Adja meg egy függvény pontbeli  $i$ -edik változó szerinti parciális deriváltjának fogalmát!
2. Adja meg  $\partial_x f(a)$  geometriai jelentését  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  típusú függvények esetében!

3. Mit nevezünk parciális függvénynek, és milyen szerepük van a parciális deriváltak kiszámításában?
4. Mit jelent a  $\partial_{ij}f(a)$  jelölést?
5. Adja meg egy függvény pontbeli  $v$  irányú iránymenti deriváltjának fogalmát!
6. Adja meg  $\partial_v f(a)$  geometriai jelentését  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  típusú függvények esetében!
7. Igaz-e, hogy minden parciális derivált egyben egy iránymenti derivált? A válaszát indokolja meg!
8. Hogyan számítható ki egy iránymenti derivált a parciális deriváltak ismeretében? Adja meg az ehhez elegendő feltételeket!

#### 4. Előadás

1. Adja meg a totális derivált fogalmát!
2. Hogyan fogalmazható át a totális deriválhatóság lineáris közelítéssel?
3. Milyen kapcsolat van a totális derivált és a folytonosság között?
4. Adjon példát olyan  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  típusú függvényre, amely folytonos, de nem totálisan differenciálható egy adott pontban!
5. Milyen kapcsolat van a totális és az iránymenti derivált között?
6. Adja meg Jacobi-mátrix fogalmát!
7. Mit állít a deriváltmátrix előállításáról szóló tétel?
8. Milyen feltételek mellett következik a parciális deriválhatóságról a totális deriválhatóság?
9. Adja meg az érintősík fogalmát!
10. Mit mond az összetett függvény deriválási szabálya többváltozós függvények esetén?

#### 5. Előadás

1. Adja meg a gradiens vektor fogalmát!
2. Legyen  $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  és  $f \in D\{a\}$ . Milyen  $v \in \mathbb{R}^n$  irányban lesz a  $\partial_v f(a)$  iránymenti derivált értéke a legnagyobb?
3. Legyen  $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  és  $f \in D\{a\}$ . Milyen  $v \in \mathbb{R}^n$  irányban lesz a  $\partial_v f(a)$  iránymenti derivált értéke nulla?
4. Mikor mondjuk, hogy az  $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény kétszer differenciálható az  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$  pontban?
5. Mikor mondjuk, hogy az  $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény kétszer folytonosan differenciálható az  $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$  pontban?
6. Adja meg Hesse-féle mátrix fogalmát!
7. Mondja ki a Young-tételt!
8. Mit állít a „Taylor-formula a Peano-féle maradéktaggal” című tételt?

## 6. Előadás

1. Mit ért azon, hogy az  $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek valamely helyen lokális maximuma van?
2. Mit ért azon, hogy az  $f \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek valamely helyen abszolút maximuma van?
3. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel többváltozós függvények esetén?
4. Mondjon példát olyan  $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre, amelynek egy stacionárius pontján nincs lokális szélsőértéke!
5. Mikor mondjuk, hogy egy kvadratikus alak pozitív definit?
6. Mikor mondjuk, hogy egy kvadratikus alak pozitív szemidefinit?
7. Mikor mondjuk, hogy egy kvadratikus alak negatív definit?
8. Mikor mondjuk, hogy egy kvadratikus alak negatív szemidefinit?
9. Mikor mondjuk, hogy egy kvadratikus alak indefinit?
10. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel többváltozós függvények esetén?
11. Mit mondhatunk egy függvény lokális szélsőértékéről egy adott pontban, ha ott a Hesse-féle mátrix indefinit, és ez milyen feltételek mellett mondható ki?

## 7. Előadás

1. Mit jelent az, hogy egy  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  típusú függvény lokálisan invertálható?
2. Fogalmazza meg az inverzfüggvény-tételt!
3. Mikor mondjuk, hogy a  $\varphi$  függvény az  $f(x, y) = 0$  egyenletnek egy implicit megoldása?
4. Fogalmazza meg az egyváltozós implicitfüggvény-tételt!
5. Adja meg a feltételes abszolút maximum fogalmát!
6. Adja meg a feltételes lokális maximum fogalmát!
7. Igaz-e, hogy egy feltételes abszolút maximum egyben feltételes lokális maximum? A válaszát indokolja meg!
8. Hogyan szól a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó szükséges feltétel többváltozós függvények esetén?
9. Hogyan szól a feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó elégséges feltétel többváltozós függvények esetén?
10. Milyen esetekben és hogyan tudjuk a Weierstrass-tételt alkalmazni a feltételes abszolút szélsőértékek keresésében?

## 8. Előadás

1. Mit nevezünk  $n$ -dimenziós intervallumnak?

2. Hogyan értelmezzük egy  $n$ -dimenziós intervallum mértékét?
3. Mit értünk az  $n$ -dimenziós intervallumnak egy felosztásán?
4. Adja meg az alsó és felső közelítő összeg fogalmát egy  $n$ -dimenziós intervallumon értelmezett függvényre vonatkozóan!
5. Adja meg a Darboux-féle alsó és felső integrál fogalmát egy  $n$ -dimenziós intervallumon értelmezett függvényre vonatkozóan!
6. Mikor mondjuk, hogy egy  $n$ -dimenziós intervallumon értelmezett függvény (Riemann)-integrálható?
7. Adjon példát olyan kétváltozós függvényre, amely nem (Riemann)-integrálható!
8. Mi a kapcsolat a Riemann-integrálhatóság és a folytonosság között?
9. Hogyan szól a Riemann-integrálhatóság Lebesgue-kritériuma?
10. Fogalmazza meg a Fubini-tételt!

## 9. Előadás

1. Mikor mondjuk, hogy egy  $H \subset \mathbb{R}^n$  korlátos halmazon értelmezett függvény (Riemann)-integrálható?
2. Hogyan értelmezzük egy  $H \subset \mathbb{R}^2$  korlátos halmaznak a területét?
3. Hogyan értelmezzük a tanult  $\mathbb{R}^3$ -beli hengerszerű test térfogatát?
4. Adja meg az  $x$  tengelyre nézve normáltartomány fogalmát!
5. Adja meg az  $y$  tengelyre nézve normáltartomány fogalmát!
6. Hogyan számolható ki egy kettős integrál, ami egy  $x$  tengelyre nézve normáltartományon van értelmezve?
7. Hogyan számolható ki egy kettős integrál, ami egy  $y$  tengelyre nézve normáltartományon van értelmezve?
8. Igaz-e a következő állítás? „Ha egy tartomány az  $x$  és az  $y$  tengelyre nézve is normáltartomány, akkor a tartományon vett kettős integrál kiszámításakor ugyanilyen integrálási nehézségek lépnek fel, ha az integrálási sorrendet felcseréljük.” A válaszát indokolja meg!

## 10. Előadás

1. Hogyan szól a helyettesítéssel integrálról szóló tétel valós-valós függvények határozott integráljaira?
2. Hogyan értelmezzük egy  $H \subset \mathbb{R}^n$  korlátos halmaznak a Jordan-mértékét?
3. Mit állít az integráltranszformációról szóló tétel?
4. Mikor beszélünk síkbeli polárkoordináta-transzformációról? Ebben az esetben mivel egyenlő a Jacobi-determináns?
5. Milyen típusú tartományoknál érdemes síkbeli polárkoordináta-transzformációt alkalmazni? Adjon egy példát!

6. Fogalmazza meg az integráltranszformációról szóló tételt síkbeli polárkoordináta-transzformáció esetén!
7. Mikor beszélünk térbeli polárkoordináta-transzformációról? Ebben az esetben mivel egyenlő a Jacobi-determináns?
8. Mikor beszélünk hengerkoordináta-transzformációról? Ebben az esetben mivel egyenlő a Jacobi-determináns?