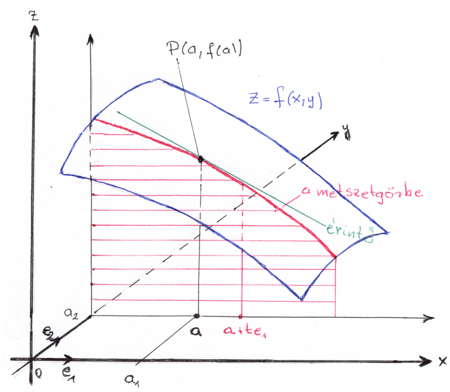
5. gyakorlat

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 1.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények parciális deriváltjai



Emlékeztető. Legyen

$$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{és} \quad a = (a_1, a_2) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f.$$

Fektessünk az a ponton át az x tengellyel párhuzamos egyenest. Ennek pontjai az xy síkban

$$(a_1 + t, a_2) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Vegyük a függvény értékeit ezekben a pontokban, és képezzük velük az

$$F_x(t) := f(a_1 + t, a_2) \qquad \big(t \in K(0)\big)$$

valós-valós függvényt. ***Az f függvény x változó szerinti parciális deriváltját az a pontban*** (jele: $\boldsymbol{\partial_x f(a)}$ vagy $\boldsymbol{\partial_1 f(a)}$) úgy értelmezzük, mint ***az F_x függvény deriváltja a 0 pontban***, feltéve, hogy a derivált létezik, azaz

$$\partial_x f(a) := \partial_1 f(a) := F_x'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{F_x(t) - F_x(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}.$$

Az y változó szerinti parciális deriváltat hasonló módon értelmezzük: $F_y(t) := f(a_1, a_2 + t)$ $(t \in K(0))$, és

$$\partial_y f(a) := \partial_2 f(a) := F_y'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{F_y(t) - F_y(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + t) - f(a_1, a_2)}{t}.$$

Egy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény i-edik $(i = 1, 2)$ változója szerinti parciális deriváltját úgy számítjuk ki, hogy az a pont koordinátáit az i-edik kivételével rögzítjük, és az így kapott valós-valós függvényt deriváljuk (ha az deriválható).

Legyen f értelmezve az $a \in \mathbb{R}^2$ pont egy környezetében. Ha rögzített $i = 1, 2$ esetén a $\partial_i f$ parciális derivált létezik az a pont egy környezetében és a $\partial_i f$ parciális deriváltfüggvénynek létezik a j-edik $(j = 1, 2)$ változó szerinti parciális deriváltja az a pontban, akkor a $\partial_{ij} f(a) := \partial_i \partial_j f(a) := \partial_j \big(\partial_i f\big)(a)$ számot (mint $\partial_i f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény a-beli j-edik változó szerinti parciális deriváltját) a függvény a-beli ij-edik ***másodrendű parciális deriváltjának*** nevezzük.

1. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi függvény x és y változók szerinti parciális deriváltjait!*

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^3}{xy} \qquad (x, y > 0).$$

Megoldás. Ha x szerint deriválunk, akkor y rögzített és x-et tekintjük változónak:

$$\partial_x f(x, y) = \frac{2x \cdot xy - (x^2 - y^3) \cdot y}{(xy)^2} = \frac{2x^2 y - x^2 y + y^4}{x^2 y^2} = \frac{x^2 y + y^4}{x^2 y^2} = \frac{x^2 + y^3}{x^2 y}.$$

Ha y szerint deriválunk, akkor x rögzített és y-et tekintjük változónak:

$$\partial_y f(x, y) = \frac{-3y^2 \cdot xy - (x^2 - y^3) \cdot x}{(xy)^2} = \frac{-3xy^3 - x^3 + xy^3}{x^2 y^2} = \frac{-2xy^3 - x^3}{x^2 y^2} = -\frac{x^2 + 2y^3}{xy^2}.$$

2. Feladat. *Melyik $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt határozzák meg (együtt) az alábbi egyenlőségek?*

$$\partial_x f(x,y) = x^2 y, \quad \partial_y f(x,y) = 1 + \frac{x^3}{3} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Megoldás. Legyen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ egy rögzített pont. A $\partial_x f(x,y) = x^2 y$ feltételből következik, hogy

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3}\, y + g(y),$$

ahol $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges, az $\mathbb{R}$ halmazon deriválható függvény. Az f függvényt az y változó szerint deriválva azt kapjuk, hogy

$$\partial_y f(x,y) = \frac{x^3}{3} \cdot 1 + g'(y) = \ \text{(a feltétel miatt)}\ = 1 + \frac{x^3}{3},$$

ezért $g'(y) = 1 \ \ (y \in \mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad g(y) = y + c \ \ (y \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})$. Így

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{3} + y + c \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ c \in \mathbb{R}\big).$$

Ez a függvény valóban kielégíti a feladat feltételeit.

3. Feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := x^3 y + x^2 y^2 + x + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Számítsa ki a függvény másodrendű parciális deriváltjait az $(x,y) = (1,0)$ pontban!

Megoldás. Először kiszámoljuk az f függvény elsőrendű parciális deriváltjait minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén:

$$\begin{aligned}
\partial_x f(x,y) &= 3x^2 y + 2xy^2 + 1,\\
\partial_y f(x,y) &= x^3 + 2x^2 y + 2y.
\end{aligned}$$

Ha a fenti függvényeket tovább deriváljuk x és y szerint, akkor megkapjuk f másodrendű parciális deriváltjait minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban:

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} f(x,y) &= \partial_x(\partial_x f)(x,y) = \partial_x(3x^2 y + 2xy^2 + 1) = 6xy + 2y^2,\\
\partial_{xy} f(x,y) &= \partial_y(\partial_x f)(x,y) = \partial_y(3x^2 y + 2xy^2 + 1) = 3x^2 + 4xy,\\
\partial_{yx} f(x,y) &= \partial_x(\partial_y f)(x,y) = \partial_x(x^3 + 2x^2 y + 2y) = 3x^2 + 4xy,\\
\partial_{yy} f(x,y) &= \partial_y(\partial_y f)(x,y) = \partial_y(x^3 + 2x^2 y + 2y) = 2x^2 + 2.
\end{aligned}$$

Végül az $(x,y) = (1,0)$ behelyettesítéssel megkapjuk a végeredményt:

$$\partial_{xx} f(1,0) = 0, \quad \partial_{xy} f(1,0) = 3, \quad \partial_{yx} f(1,0) = 3, \quad \partial_{yy} f(1,0) = 4.$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a vegyes parciális deriváltak megegyeznek!

4. Feladat. *Igazoljuk, hogy az*

$$f(x,y) := \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\neq 0\big)$$

függvény teljesíti az $\partial_{xx}f + \partial_{yy}f = 0$ *egyenlőséget!*

Megoldás. Először kiszámoljuk az f függvény elsőrendű parciális deriváltjait minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $y\neq 0$ esetén:

$$\partial_x f(x,y) = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{y^2} = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Ezek alapján a függvény másodrendű tiszta parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned}\partial_{xx}f(x,y) &= \partial_x(\partial_x f)(x,y) = \partial_x\big(y(x^2+y^2)^{-1}\big) =\\ &= y(-1)(x^2+y^2)^{-2}\,2x = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\\ \partial_{yy}f(x,y) &= \partial_y(\partial_y f)(x,y) = \partial_y\big(-x(x^2+y^2)^{-1}\big) =\\ &= -x(-1)(x^2+y^2)^{-2}\,2y = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Így

$$\partial_{xx}f(x,y) + \partial_{yy}f(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0 \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\neq 0\big).$$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények iránymenti deriváltjai

Emlékeztető. A parciális deriváltaknál az e_i kanonikus vektorokkal párhuzamos „irányokban” deriváltuk az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény értékeiből keletkezett valós-valós függvényt az a pontban. Ezt úgy fogjuk általánosítani, hogy egy tetszőleges irányban csináljuk ugyanezt.

Egy $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény minden $v = (v_1, v_2)$ egységvektor ($v_1^2 + v_2^2 = 1$) szerint képezhetjük a v irányú iránymenti deriváltat valamely $a = (a_1, a_2) \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban. Az

$$F_v : K(0) \ni t \mapsto f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2) = f(a + tv)$$

valós-valós függvény $t = 0$ pontban vett deriváltját (amennyiben létezik) nevezzük ***az f függvény v irányú iránymenti deriváltjának az a pontban***, azaz

$$\partial_v f(a) := F_v'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{F_v(t)-F_v(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(a_1+tv_1, a_2+tv_2) - f(a_1,a_2)}{t}.$$

Tétel. *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2) \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$, illetve az f függvénynek léteznek a parciális deriváltjai egy $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezetben, és ezek folytonosak az a pontban. Ekkor az f függvénynek az a pontból induló tetszőleges $v = (v_1, v_2)$ egységvektor irányban létezik az iránymenti deriváltja, és*

$$\partial_v f(a) = \partial_1 f(a)\cdot v_1 + \partial_2 f(a)\cdot v_2.$$

5. Feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := x^2 - xy + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$a = (a_1, a_2) = (1,1)$ *és* v *az* x*-tengely pozitív ágával* α *szöget bezáró euklideszi normában vett egységvektor.*

a) *Határozzuk meg a definíció alapján a* $\partial_v f(a)$ *iránymenti deriváltat!*

b) *Ellenőrizzük a kapott eredményt a tanult tétellel!*

c) *Melyik irány esetén lesz a derivált értéke a legnagyobb?*

Megoldás. Az origóból kiinduló irányokat a

$$v := (v_1, v_2) = (\cos\alpha, \sin\alpha) \qquad \big(\alpha \in [0, 2\pi)\big)$$

vektorokkal adjuk meg. Ezek egységvektorok, mert

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1 \qquad \big(\alpha \in [0, 2\pi)\big).$$

a) Tekintsünk egy rögzített $\alpha \in [0, 2\pi)$ paraméterrel megadott v vektort. Az iránymenti deriválhatósághoz a definíció szerint azt kell megmutatni, hogy a

$$\begin{aligned} F_v(t) :&= f(a + tv) = f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2) = f(1 + t\cos\alpha, 1 + t\sin\alpha) = \\ &= (1 + t\cos\alpha)^2 - (1 + t\cos\alpha)(1 + t\sin\alpha) + (1 + t\sin\alpha)^2 = \\ &= \Big(1 - (\sin\alpha)(\cos\alpha)\Big) \cdot t^2 + (\sin\alpha + \cos\alpha) \cdot t + 1 \qquad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

valós-valós függvény deriválható a $t = 0$ pontban.

Ez viszont nyilván igaz, és $F'(0) = \sin\alpha + \cos\alpha$. Ezért az f függvénynek létezik a v irányban vett iránymenti deriváltja. Az iránymenti derivált értéke $F'(0)$. Így minden rögzített $\alpha \in [0, 2\pi)$ esetén

$$\partial_v f(1,1) = \sin\alpha + \cos\alpha.$$

b) Először az iránymenti derivált kiszámolására vonatkozó állítás feltételeit ellenőrizzük. Az f függvény parciális deriváltfüggvényei léteznek:

$$\partial_1 f(x,y) = 2x - y, \quad \partial_2 f(x,y) = -x + 2y \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

és folytonosak minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban. A szóban forgó tétel szerint a kérdezett iránymenti derivált létezik, és minden $\alpha \in [0, 2\pi)$ paraméter esetén

$$\partial_v f(1,1) = \left\langle \begin{pmatrix} \partial_1 f(1,1) \\ \partial_2 f(1,1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right\rangle = \cos\alpha + \sin\alpha.$$

Ez megegyezik a definíció alapján kapott eredménnyel.

c) Tudjuk, hogy a

$$\operatorname{grad} f(1,1) := \Big(\partial_1 f(1,1), \partial_2 f(1,1)\Big) = (1,1) = \sqrt{2}\Big(\cos\tfrac{\pi}{4}, \sin\tfrac{\pi}{4}\Big)$$

gradiens vektor irányába mutató iránymenti derivált a legnagyobb az összes közül. Az iránymenti derivált tehát az $\alpha = \frac{\pi}{4}$ irányszögű egységvektor esetén lesz a legnagyobb.

A fenti eredményt is megkaphatjuk a

$$g : [0, 2\pi) \ni \alpha \mapsto \sin\alpha + \cos\alpha$$

függvény abszolút maximumának kiszámításával. Valóban, az addíciós tétel alapján

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\Big(\sin\alpha\cos\tfrac{\pi}{4} + \cos\alpha\sin\tfrac{\pi}{4}\Big) = \sqrt{2}\sin\Big(\alpha + \tfrac{\pi}{4}\Big),$$

ezért g-nek van abszolút maximuma, ha $\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, azaz az $\alpha = \frac{\pi}{4}$ pontban.

6. Feladat. *Határozzuk meg az*

$$f(x,y) := \frac{y^3}{e^{2x+1}} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény iránymenti deriváltját a $P\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ *pontban a* $u = (1,2)$ *vektor által meghatározott irány mentén!*

Megoldás. Az iránymenti derivált kiszámítására vonatkozó tételt alkalmazzuk. Mindkét változó szerinti elsőrendű parciális deriváltak léteznek minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban, és

$$\partial_x f(x,y) = -2\frac{y^3}{e^{2x+1}}, \qquad \partial_y f(x,y) = \frac{3y^2}{e^{2x+1}}.$$

Ezek a függvények minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban folytonosak és

$$f'(x,y) = \big(\partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y)\big) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Az f függvénynek tehát a P pontban minden irányban létezik az iránymenti deriváltja és

$$\partial_v f(P) = \langle f'(P), v\rangle,$$

ahol

$$f'(P) = f'\Big(-\tfrac{1}{2}, 1\Big) = \Big(\partial_x f\Big(-\tfrac{1}{2}, 1\Big), \partial_y f\Big(-\tfrac{1}{2}, 1\Big)\Big) = (-2, 3)$$

és v az u irányú euklideszi normában vett egységvektor, azaz

$$v = \frac{u}{\|u\|} = \frac{(1,2)}{\sqrt{1^2+2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Így

$$\partial_v f\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \left\langle (-2,3), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények totális deriváltja

Emlékeztető. Az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény ***totálisan deriválható*** az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelben: $\boldsymbol{f \in D\{a\}}$), ha

$$\exists A \in \mathbb{R}^{1\times 2}\colon \quad \lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - A\cdot h|}{\|h\|} = 0.$$

Ekkor $f'(a) := A$ az f függvény ***deriváltmátrixa*** az a pontban.

Ha $f \in D\{a\}$, akkor az $f'(a)$ deriváltmátrix egyértelműen meghatározott.

Tétel. **(A deriváltmátrix előállítása)** *Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy függvény és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ha $f \in D\{a\}$, akkor $\exists \partial_1 f(a)$, $\exists \partial_2 f(a)$ és*

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) & \partial_2 f(a) \end{pmatrix}$$

az ún. **Jacobi-mátrix**.

7. Feladat. *A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az*

$$f(x,y) := 2x^2 + 3xy - y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény totálisan deriválható az $a := (1,2)$ pontban, és adjuk meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot! Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizzük a Jacobi-mátrix kiszámításával!

Megoldás. A deriválhatóság igazolása. Legyen $a = (a_1, a_2) = (1,2)$ és $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$. Azt kell belátnunk, hogy van olyan $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ sormátrix, amire:

$$\lim_{h\to\mathbf{0}} \frac{\big|f(a+h) - f(a) - A\cdot h\big|}{\|h\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|f(a+h) - f(a) - \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Ezzel a tulajdonsággal rendelkező A mátrixot így lehet meghatározni:

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = \\ &= 2(1+h_1)^2 + 3(1+h_1)(2+h_2) - (2+h_2)^2 - \Big[2\cdot 1^2 + 3\cdot 1\cdot 2 - 2^2\Big] = \\ &= 10h_1 - h_2 + 2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2 = \begin{pmatrix} 10 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + 2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2. \end{aligned}$$

Legyen $A := \begin{pmatrix} 10 & -1 \end{pmatrix}$. Az előző egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{\left|f(a+h) - f(a) - A\cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{|2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Most megmutatjuk azt, hogy a jobb oldalon álló függvénynek a határértéke a $(0,0)$ pontban 0-val egyenlő. Mivel

$$0 \le \frac{|2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \le \frac{2(h_1^2 + h_2^2) + 3|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \le \Big(|h_1h_2| \le \tfrac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2) \text{ miatt}\Big) \le$$

$$\le \frac{2(h_1^2 + h_2^2) + \frac{3}{2}(h_1^2 + h_2^2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \le 4\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \to 0 \quad (\text{ha } h_1 \to 0 \text{ és } h_2 \to 0),$$

ezért a közrefogási elvből következik, hogy a

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\big|2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2\big|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

egyenlőség valóban teljesül. Azt igazoltuk tehát, hogy $f \in D\{(1,2)\}$ és a deriváltmátrix az $f'(1,2) = \begin{pmatrix} 10 & -1 \end{pmatrix}$ sormátrix.

Ellenőrzés. Mivel

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= 4x+3y, &\qquad \partial_1 f(1,2) &= 10,\\ \partial_2 f(x,y) &= 3x-2y, &\qquad \partial_2 f(1,2) &= -1, \end{aligned}$$

ezért a Jacobi-mátrix:

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f(1,2) & \partial_2 f(1,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 \end{pmatrix},$$

és ez valóban megegyezik a definíció alapján kapott deriváltmátrixszal.