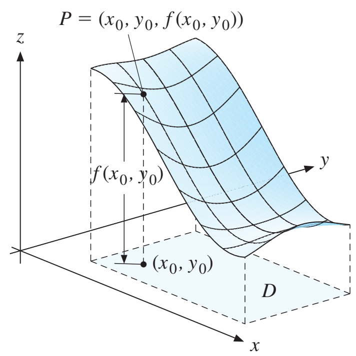
4. gyakorlat

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ TÍPUSÚ FÜGGVÉNYEK

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvények szemléltetése

Emlékeztető.
Ha $n = 2$, akkor ***kétváltozós valós értékű függvényekről*** beszélünk. Az ilyen függvényeket a

$$\mathrm{Gr}_f := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f\}$$



térbeli halmazzal, az ún. **függvény grafikonjával** tudjuk ábrázolni, ami egy térbeli felületet határoz meg. Ennek alakját úgy tudjuk szemléltetni, hogy a felületen olyan görbesereget rajzolunk fel, amelynek tagjai a felület és olyan sík metszete, amely az xy síkra merőleges, de az x vagy az y tengellyel párhuzamos. Egy másik módszer olyan görbesereget felrajzolni, amelynek tagjai a felület és olyan sík metszete, amely párhuzamos az xy síkkal. Adott $c \in \mathcal{R}_f$ az

$$\{(x, y, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{D}_f,\ f(x, y) = c\}$$

halmazt a grafikon c paraméterhez tartozó ***szintvonalának*** nevezzük.

1. Feladat. *A koordinátasíkokkal párhuzamos metszetgörbék vizsgálata alapján szemléltessük az*

$$f(x, y) := y^2 - x^2 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény grafikonját, vagyis a $z = y^2 - x^2$ egyenletű felületet (ez az ún. **nyeregfelület***)!*

Megoldás. A szóban forgó felületnek

a) az $x = k$ egyenletű síkokkal (ezek az yz koordinátasíkok) vett síkmetszetei a

$$z = y^2 - k^2$$

egyenletű felfele nyitott parabolák,

b) az $y = k$ egyenletű síkokkal (ezek az xz koordinátasíkok) vett síkmetszetei a

$$z = -x^2 + k^2$$

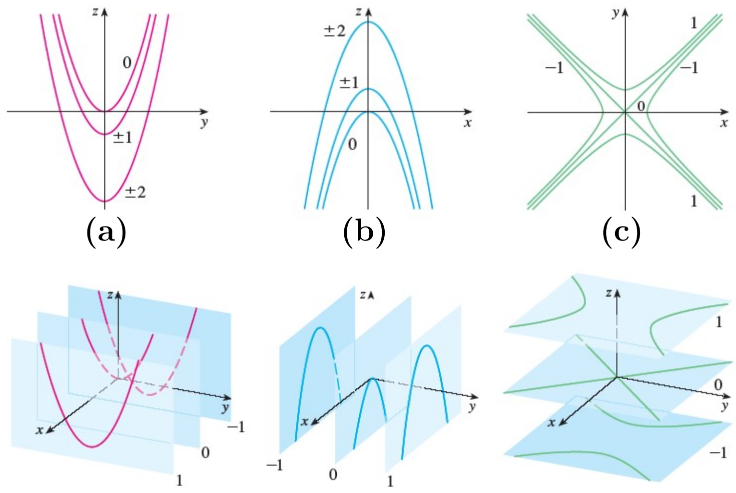
egyenletű lefele nyitott parabolák,

c) az $z = k$ egyenletű síkokkal (ezek az xy koordinátasíkok) vett síkmetszetei az

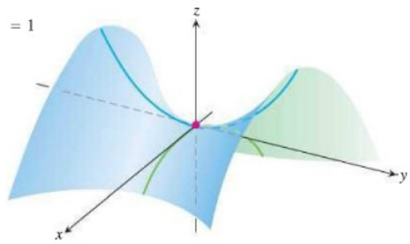
$$y^2 - x^2 = k$$

egyenletű hiperbolaágak.

Ezeket szemléltetik az alábbi ábrák:



A következő ábrán a nyeregfelületet szemléltetjük:



Emlékeztető. Előfordul, hogy a kétváltozós f függvény értéke minden $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ pontban csak az $x^2 + y^2$ értéktől függ, azaz a $\|(x, y)\|$ értéktől, ami a pont nullától (origótól) való távolsága. Ekkor a függvény szintvonalai olyan körök (vagy egy pont), amiknek középpontja a z tengelyen található. Elég lenne megtartani mindegyikből egyetlen egy pontot, és ezeket megforgatni a z tengely körül, hogy előállítsuk a felületet. Legyen ez a pont az, amire $x \geq 0$ és $y = 0$ teljesül. Így az f függvény grafikonját a

$$g(x) := f(x, 0) \qquad \big((x, 0) \in \mathcal{D}_f,\ x \geq 0\big)$$

függvény a z tengely körüli megforgatásával kapjuk.

2. Feladat. *Milyen felülettel szemléltethető az alábbi függvény a térbeli koordináta-rendszerben?*

$$a) \quad f(x, y) := \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad \Big((x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1\Big),$$

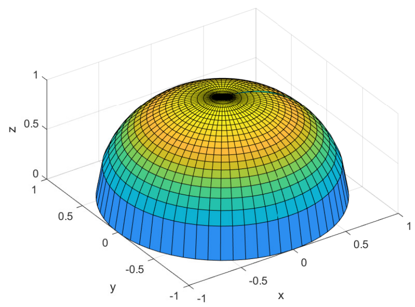
$$b) \quad f(x, y) := e^{-(x^2+y^2)} \qquad \Big((x, y) \in \mathbb{R}^2\Big).$$

Megoldás. Mindkét függvény csak az $x^2 + y^2$ értéktől függ, ezért grafikonjuk egy forgásfelület.

a) A függvény értelmezési tartománya az xy síkon az origó középpontú 1 sugarú zárt körlap. A keletkezett forgásfelületet a

$$g(x) := \sqrt{1 - x^2} \qquad \big(x \in [0, 1]\big)$$

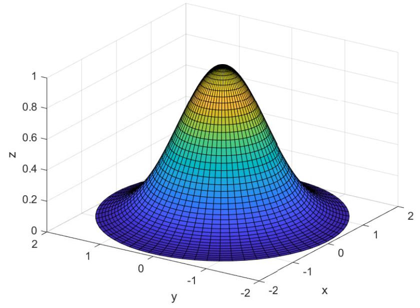
negyed körív z tengely körüli megforgatásával kapjuk. Az eredmény az ábrán látható félgömbfelület.



b) A keletkezett forgásfelületet a

$$g(x) := e^{-x^2} \qquad (x \geq 0)$$

Gaussgörbe z tengely körüli megforgatásával kapjuk. Az eredmény az ábrán látható felület.



$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvények folytonossága

Emlékeztető. Az $\mathbb{R}^2$ lineáris téren az $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vektor ***euklideszi normáját*** így értelmezzük:

$$\|(x,y)\| := \sqrt{x^2+y^2}.$$

Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény ***folytonos az $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}_f$ pontban***, (jelben $\boldsymbol{f \in C\{(a_1,a_2)\}}$), ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathcal{D}_f,\ \big\|(x,y)-(a_1,a_2)\big\| < \delta\colon\ \big|f(x,y) - f(a_1,a_2)\big| < \varepsilon.$$

Tétel. **(A folytonosságra vonatkozó átviteli elv)** *Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $(a_1,a_2) \in \mathcal{D}_f$. Ekkor*

$$f \in C\{(a_1,a_2)\} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_k,y_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim_{k\to+\infty} (x_k,y_k) = (a_1,a_2) \text{ esetén } \lim_{k\to+\infty} f(x_k,y_k) = f(a_1,a_2).$$

Az átviteli elvből következik, hogy ha $\exists (x_k,y_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f$ sorozat, amely az (a_1,a_2) ponthoz konvergál, de

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k,y_k) \neq f(a_1,a_2),$$

akkor az f függvény nem folytonos az (a_1,a_2) pontban.

Műveletek folytonos függvényekkel:

1. Ha $f,g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $f,g \in C\{a\}$, akkor
$$f+g \in C\{a\}, \quad \lambda f \in C\{a\}\ (\lambda \in \mathbb{R}), \quad f \cdot g \in C\{a\} \quad \text{és} \quad g(a) \neq 0 \text{ esetén } \frac{f}{g} \in C\{a\}.$$
2. Ha $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g \in C\{a\}$ és $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C\{g(a)\}$, akkor $f \circ g \in C\{a\}$.

Előadáson igazoltuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|x\|$ normafüggvény folytonos. Másrészt a

$$\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \mathrm{pr}_1(x,y) := x \qquad \text{és} \qquad \mathrm{pr}_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \mathrm{pr}_2(x,y) := y$$

ún. ***projekciófüggvények*** szintén folytonos függvények.

3. Feladat. *A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}\Big) \\ 0 & \big((x,y) = (0,0)\big) \end{cases}$$

függvény minden értermezési tartománybeli pontjában folytonos!

Megoldás. Legyen $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$. Ekkor az

$$f(x,y) = \frac{\mathrm{pr}_1^2(x,y) \cdot \mathrm{pr}_2^3(x,y)}{2\mathrm{pr}_1^2(x,y) + \mathrm{pr}_2^2(x,y)}$$

felírásból, a műveleti tételekből, és a projekciófüggvények folytonosságából látható, hogy f folytonos minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ pontban.

Most megvizsgáljuk f folytonosságát a $(0,0)$ pontban. A tört számlálója és a nevezője az origóhoz közeli pontokban 0-hoz közeli értékeket vesz fel. Két kicsi szám hányadosáról van szó. Azt már tudjuk, hogy az bármi lehet. A feladat állítása szerint a tört az origóhoz közeli pontokban 0-hoz közeli értékeket vesz fel.

A folytonosság definíciója alapján azt kell belátnunk, hogy

$$(*)\qquad \forall\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\delta > 0,\ \forall(x,y) \in \mathcal{D}_f,\ \Big\|(x,y) - (0,0)\Big\| < \delta\colon \Big|f(x,y) - f(0,0)\Big| < \varepsilon.$$

Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ valós számot. Ha $(x,y) = (0,0)$, akkor $\Big|f(x,y) - f(0,0)\Big| = 0 < \varepsilon$.

Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Big\{(0,0)\Big\}$, akkor

$$\Big|f(x,y) - f(0,0)\Big| = \left|\frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} - 0\right| = \frac{x^2\cdot|y|^3}{2x^2+y^2} \le \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot|y|^3 \le \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\cdot|y|^3 = |y|^3 \le$$

$$\le \left(\text{ha felteszük, hogy } \Big\|(x,y)\Big\| < 1, \text{ akkor } |y| < 1\right) \le |y|^2 \le x^2+y^2 = \underbrace{\Big\|(x,y)\Big\|^2 < \varepsilon}_{\|(x,y)\|<\sqrt{\varepsilon}}.$$

Így, ha $\delta := \min\{1, \sqrt{\varepsilon}\}$, akkor $(*)$ teljesül, ami azt jelenti, hogy $f \in C\Big\{(0,0)\Big\}$.

4. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Big\{(0,0)\Big\}\Big) \\ 0 & \Big((x,y) = (0,0)\Big) \end{cases}$$

függvény nem folytonos a $(0,0)$ *pontban!*

Megoldás. Az előző feladathoz hasonlóan az f függvényértékek az origóhoz közeli pontokban két kicsi szám hányadosa. Most azt kell megmutatnunk, hogy nem igaz az, hogy minden ilyen hányados közel van a 0-hoz.

A folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint elég lenne olyan, a $(0,0)$ ponthoz tartó (x_n, y_n) $(n \in \mathbb{N})$ pontsorozatot találni, amelyre a függvényértékek sorozatának a határértéke nem egyenlő a $(0,0)$ pontban felvett $f(0,0) = 0$ függvényértékkel.

Vegyük észre, hogy ha f értékeit például az $y = x$ egyenes pontjaiban tekintjük, akkor azt kapjuk, hogy

$$f(x,y) = f(x,x) = \frac{2x\cdot x}{x^2+x^2} = 1 \qquad \Big(x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\Big).$$

Így, ha $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, akkor a sorozat az origóhoz konvergál:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0), \quad \text{ha } n \to +\infty,$$

de $f(x_n, y_n) = 1$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra, tehát $f(x_n, y_n) \to 1$, ha $n \to +\infty$. Ez a határérték különbözik az $f(0,0) = 0$ függvényértéktől, ami azt jelenti, hogy az f függvény nem folytonos az origóban.

5. Feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \Big((x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\big\{(0,0)\big\}\Big) \\ 0 & \big((x,y)=(0,0)\big). \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy f leszűkítése minden, az origón átmenő egyenesre egy folytonos egyváltozós függvény, de $f\notin C\{(0,0)\}$.

Megoldás. Három esetet fogunk megkülönböztetni:

- f leszűkítése az $y=0$ egyenesre: $\varphi(x) := f(x,0) = 0$ $(x\in\mathbb{R})$ folytonos függvény.
- f leszűkítése az $x=0$ egyenesre: $\varphi(y) := f(0,y) = 0$ $(y\in\mathbb{R})$ folytonos függvény.
- f leszűkítése az $y=mx$ egyenesekre, ahol $m\neq 0$ rögzített paraméter:

  $$\varphi(x) := f(x,mx) = \frac{x^2\cdot(mx)}{x^4+(mx)^2} = m\cdot\frac{x}{x^2+m^2} \qquad \big(x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\big).$$

  Mivel $f(0,0)=0$, így $\varphi(0)=0$, azaz a fenti összefüggés is igaz $x=0$-ra. Tehát φ folytonos függvény tetszőleges $m\neq 0$ paraméter esetén.

A feladat első állítása szerint, ha egyenes mentén az origóhoz közeledünk, akkor a függvényben szereplő hányados értéke nullához tart.

A feladat második állítása szerint nem igaz az, hogy az origóhoz közeli *tetszőleges* pontokban felvett függvényértékek is közel vannak a $(0,0)$ pontban felvett $f(0,0)=0$ függvényértékhez. A folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint elég lenne olyan, a $(0,0)$ ponthoz tartó (x_n,y_n) $(n\in\mathbb{N})$ pontsorozatot találni, amelyre a függvényértékek sorozatának a határértéke nem egyenlő a $(0,0)$ pontban felvett $f(0,0)=0$ függvényértékkel.

Vegyük észre, hogy most az $y=mx^2$ parabolák mentén kaphatunk ilyen sorozatokat, mivel

$$f(x,y) = f(x,mx^2) = \frac{x^2\cdot(mx^2)}{x^4+(mx^2)^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

nem függ az x értéktől. Legyen például $m=1$, és vegyük például az

$$\big(x_n,y_n\big) = \big(x_n,x_n^2\big) := \left(\frac{1}{n},\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) \qquad (n\in\mathbb{N}^+)$$

sorozatot. Világos, hogy ez a sorozat az origóhoz konvergál:

$$(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right) \to (0,0), \quad \text{ha} \quad n\to+\infty,$$

de $f(x_n,y_n)=\frac{1}{2}$ minden $n\in\mathbb{N}^+$ számra, tehát $f(x_n,y_n)\to\frac{1}{2}$, ha $n\to+\infty$. Ez a határérték különbözik az $f(0,0)=0$ függvényértéktől, ami azt jelenti, hogy az f függvény nem folytonos az origóban.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ típusú függvények határértéke

Emlékeztető. Az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}_f'$ pontban ***van határértéke***, ha $\exists A \in \mathbb{R}$, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathcal{D}_f, 0 < \|(x,y) - (a_1,a_2)\| < \delta\colon |f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

Tétel. **(A határértékre vonatkozó átviteli elv)** *Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f = A \quad\Longleftrightarrow\quad \forall (x_k,y_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \big\{(a_1,a_2)\big\},\ \lim_{k\to+\infty} (x_k,y_k) = (a_1,a_2) \text{ esetén } \lim_{k\to+\infty} f(x_k,y_k) = A.$$

Az átviteli elvből következik, hogy ha van két olyan $(x_k,y_k),(u_k,v_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \big\{(a_1,a_2)\big\}$ sorozat, amely az (a_1,a_2) ponthoz konvergál, de

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_k,y_k) \neq \lim_{k\to+\infty} f(u_k,v_k),$$

akkor az f függvénynek nincs határértéke az (a_1,a_2) pontban.

6. Feladat. *Lássuk be, hogy*

$$a)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \qquad\qquad b)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2.$$

Megoldás. A definíció alapján fogjuk a határértékeket igazolni.

a) Azt kell megmutatni, hogy

$$(\#)\qquad \begin{gathered} \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}, 0 < \Big\|(x,y) - (0,0)\Big\| < \delta\colon \\ \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| < \varepsilon. \end{gathered}$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Ekkor $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ pontban

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \left(|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} \text{ miatt}\right) \leq$$

$$\leq \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{1}{2}\Big\|(x,y)\Big\| < \varepsilon}_{\|(x,y)\| < 2\varepsilon}.$$

Így, ha $\delta := 2\varepsilon$, akkor $(\#)$ teljesül.

Megjegyzés. A számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség miatt

$$\sqrt{x^2y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{2} \qquad\Longrightarrow\qquad |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} \qquad (x,y \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. A határértékre vonatkozó átviteli elvvel is igazolni tudjuk, hogy az

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}\Big)$$

függvénynek van határérték a $(0,0)$ pontban, és ez nullával egyenlő. Legyen

$$(x_n,y_n) \to (0,0), \quad \text{ha } n \to +\infty,$$

egy tetszőleges pontsorozat, amire $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor

$$x_n \to 0 \quad \text{és} \quad y_n \to 0, \qquad \text{ha } n \to +\infty.$$

Jelölje $z_n := f(x_n, y_n)$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor

$$0 \leq |z_n| = \frac{|x_n y_n|}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \leq \frac{x_n^2 + y_n^2}{2\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} = \frac{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}{2} \to \frac{\sqrt{0^2 + 0^2}}{2} = 0, \qquad \text{ha } n \to +\infty.$$

Ezért a közrefogási elv szerint $|z_n| \to 0$, azaz $z_n \to 0$, ha $n \to +\infty$. Ezért a határértékre vonatkozó átviteli elv szerint

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

b) Azt kell megmutatni, hogy

$$(\#\#) \qquad \begin{gathered} \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}, 0 < \big\|(x,y) - (0,0)\big\| < \delta: \\ \left| \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} - 2 \right| < \varepsilon. \end{gathered}$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Ekkor $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ pontban

$$\left| \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} - 2 \right| = \frac{\left|(x^2 + y^2 + 1) - 2\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1\right|}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \frac{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1\right)^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} =$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1 = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1} =$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x,y)\| < \varepsilon.$$

Így, ha $\delta := \varepsilon$, akkor $(\#\#)$ teljesül.

7. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy*

a) Az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} & \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}\Big) \\ 0 & \Big((x,y) = (0,0)\Big) \end{cases}$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban!

b) A

$$g(x,y) := \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}\Big)$$

függvénynek nincs határértéke a $(0,0)$ pontban!

Megoldás.

a) A folytonosság definíciója alapján azt kell megmutatni, hogy

$$(\star) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathcal{D}_f,\ \Big\|(x,y)-(0,0)\Big\| < \delta \colon \Big|f(x,y)-f(0,0)\Big| < \varepsilon.$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Big\{(0,0)\Big\}$, akkor

$$\Big|f(x,y)-f(0,0)\Big| = \left|\frac{x^4 y}{\Big(x^2+y^2\Big)^2} - 0\right| = |y| \cdot \frac{\Big(x^2\Big)^2}{\Big(x^2+y^2\Big)^2} \leq |y| \cdot \frac{\Big(x^2+y^2\Big)^2}{\Big(x^2+y^2\Big)^2} =$$

$$= |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \Big\|(x,y)\Big\| < \varepsilon.$$

Így, ha $\delta := \varepsilon$, akkor $(\star)$ teljesül.

b) A határértékre vonatkozó átviteli elv szerint elegendő két olyan, a $(0,0)$ ponthoz tartó sorozatot találni, amelyekre a függvényértékek sorozatának a határértéke különböző.

Rögzített $m \in \mathbb{R}$ esetén tekintsük g értékeit az $y = mx$ egyenletű egyenes pontjaiban:

$$g(x,y) = g(x,mx) = \frac{x^4}{\big(x^2+(mx)^2\big)^2} = \frac{1}{\big(1+m^2\big)^2} \qquad \Big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\Big).$$

Ekkor

- ha $m = 0$ és így $(x_n, y_n) := \Big(\frac{1}{n}, 0\Big) \to (0,0) \quad \Longrightarrow \quad g(x_n,y_n) = \dfrac{1}{(1+0^2)^2} = 1,$
- ha $m = 1$ és így $(u_n, v_n) := \Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\Big) \to (0,0) \quad \Longrightarrow \quad g(u_n,v_n) = \dfrac{1}{(1+1^2)^2} = \dfrac{1}{4}.$

Mivel

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n,y_n) = (0,0) = \lim_{n\to+\infty} (u_n,v_n),$$

de

$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n,y_n) = 1 \neq \frac{1}{4} = \lim_{n\to+\infty} g(u_n,v_n),$$

ezért a g függvénynek nincs határértéke a $(0,0)$ pontban.