Numerikus módszerek 1.

7. előadás: LER érzékenysége

Dr. Bozsik József

ELTE IK

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék

Definíció: mátrixok kondíciószáma

Adott $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix és $\|.\|$ mátrixnorma esetén a $\operatorname{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix *kondíciószámának* nevezzük. (Jele néha $\kappa(A)$. [kappa])

Definíció: mátrixok kondíciószáma

Adott $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix és $\|.\|$ mátrixnorma esetén a $\operatorname{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix *kondíciószámának* nevezzük. (Jele néha $\kappa(A)$. [kappa])

Megjegyzés:

- Csak invertálható mátrixokra értelmes.

Definíció: mátrixok kondíciószáma

Adott $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix és $\|.\|$ mátrixnorma esetén a $\operatorname{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix *kondíciószámának* nevezzük. (Jele néha $\kappa(A)$. [kappa])

Megjegyzés:

- Csak invertálható mátrixokra értelmes.
- Értéke függ a norma választásától.
  (Pl. $\operatorname{cond}_1(A), \operatorname{cond}_2(A), \dots$)

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

(a) Indukált mátrixnorma esetén $\mathrm{cond}\,(A) \geq 1$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

a) Indukált mátrixnorma esetén $\operatorname{cond}(A) \geq 1$.

b) $\operatorname{cond}(c \cdot A) = \operatorname{cond}(A), \quad (c \in \mathbb{R}, c \neq 0).$

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

- a) Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}\,(A) \geq 1$.
- b) $\text{cond}\,(c \cdot A) = \text{cond}\,(A), \quad (c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.
- c) Ha Q ortogonális, akkor $\text{cond}_2(Q) = 1$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

- a) Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}\,(A) \geq 1$.
- b) $\text{cond}\,(c \cdot A) = \text{cond}\,(A), \quad (c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.
- c) Ha Q ortogonális, akkor $\text{cond}_2(Q) = 1$.

Biz.:

- a) $1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}\,(A)$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

a) Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}\,(A) \geq 1$.

b) $\text{cond}\,(c \cdot A) = \text{cond}\,(A), \quad (c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.

c) Ha Q ortogonális, akkor $\text{cond}_2(Q) = 1$.

Biz.:

a) $1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}\,(A)$.

b) $\text{cond}\,(cA) = \|cA\| \cdot \|(cA)^{-1}\| = \|cA\| \cdot \left\|\frac{1}{c}A^{-1}\right\| =$

$$= |c| \cdot \|A\| \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}\,(A).$$

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

- a) Indukált mátrixnorma esetén $\mathrm{cond}\,(A) \geq 1$.
- b) $\mathrm{cond}\,(c \cdot A) = \mathrm{cond}\,(A), \quad (c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.
- c) Ha Q ortogonális, akkor $\mathrm{cond}_2(Q) = 1$.

Biz.:

- a) $1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \mathrm{cond}\,(A)$.
- b) $\mathrm{cond}\,(cA) = \|cA\| \cdot \|(cA)^{-1}\| = \|cA\| \cdot \left\|\frac{1}{c}A^{-1}\right\| =$

  $= |c| \cdot \|A\| \cdot \dfrac{1}{|c|} \cdot \|A^{-1}\| = \mathrm{cond}\,(A)$.
- c) $\|Q\|_2 = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Qx\|_2}{\|x\|_2} = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\sqrt{x^\top Q^\top Qx}}{\sqrt{x^\top x}} = 1$

  $\|Q^{-1}\|_2 = \left\|Q^\top\right\|_2 = 1, \quad \mathrm{cond}_2(Q) = 1$ □

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

d) Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \dfrac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d) Ha A szimmetrikus, akkor $\operatorname{cond}_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.
- e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\operatorname{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- d) Ha A szimmetrikus, akkor $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.
- e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.
- f) Ha A invertálható, akkor $\mathrm{cond}(A) \geq \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- (d) Ha A szimmetrikus, akkor $\operatorname{cond}_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.
- (e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\operatorname{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.
- (f) Ha A invertálható, akkor $\operatorname{cond}(A) \geq \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

- (d) Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.
  De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max|\lambda_i(A)|$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- **d** Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.
- **e** Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.
- **f** Ha A invertálható, akkor $\text{cond}(A) \geq \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

- **d** Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.
  De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max|\lambda_i(A)|$.
  Az inverzre: $\|A^{-1}\|_2 = \max|\lambda_i(A^{-1})| = \dfrac{1}{\min|\lambda_i(A)|}$.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- **d** Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.
- **e** Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max\lambda_i(A)}{\min\lambda_i(A)}$.
- **f** Ha A invertálható, akkor $\text{cond}(A) \geq \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

- **d** Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max\lambda_i(A^\top A)}$.
  De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max|\lambda_i(A)|$.
  Az inverzre: $\|A^{-1}\|_2 = \max|\lambda_i(A^{-1})| = \dfrac{1}{\min|\lambda_i(A)|}$.
- **e** A pozitiv definitség miatt nem kell abszolút érték.

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

- **d** Ha A szimmetrikus, akkor $\operatorname{cond}_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.
- **e** Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\operatorname{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.
- **f** Ha A invertálható, akkor $\operatorname{cond}(A) \geq \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

- **d** Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.
  De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max|\lambda_i(A)|$.
  Az inverzre: $\|A^{-1}\|_2 = \max|\lambda_i(A^{-1})| = \dfrac{1}{\min|\lambda_i(A)|}$.
- **e** A pozitiv definitség miatt nem kell abszolút érték.
- **f** $\|A\| \geq \varrho(A) = \max|\lambda_i(A)|$, $\|A^{-1}\| \geq \varrho(A^{-1}) = \frac{1}{\min|\lambda_i(A)|}$.

$\square$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1. **Eredeti:**
   adott A és b, kiszámíthatjuk a megoldást: x.
   $Ax = b$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk"! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1. **Eredeti:**
   adott A és b, kiszámíthatjuk a megoldást: x.
   $Ax = b$
2. **Módosult:**
   adott A és $b + \Delta b$, kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.
   $A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk"! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1. **Eredeti:**
   adott A és b, kiszámíthatjuk a megoldást: x.
   $Ax = b$
2. **Módosult:**
   adott A és $b + \Delta b$, kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.
   $A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$

Nyilván a megoldás is *kicsit* más lesz...

Példa:

1. **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{megoldás:} \;\; x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Példa:

1. **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. **Módosult:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

Példa:

1. **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. **Módosult:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

3. $$\text{A módosult LER megoldása:} \quad x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.97 \end{bmatrix}$$

Példa:

1. **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. **Módosult:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

3. $$\text{A módosult LER megoldása:} \quad x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.97 \end{bmatrix}$$

4. Mi történt?

Hogyan jellemezhető a megoldás megváltozása a jobb oldal megváltozásához képest?

- Mennyire változott a jobb oldal: $\delta b := \dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 9.4959e - 004.$
- Emiatt mennyire változik a megoldás: $\delta x := \dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 1.1732.$
- Vizsgáljuk a kettő hányadosát: $\dfrac{\delta x}{\delta b} = 1235.5.$
- $\text{cond}\,(A) = 1623$

Tétel: LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha A invertálható és $b \neq 0$, akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \operatorname{cond}(A) \cdot \delta b.$$

Tétel: LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha A invertálható és $b \neq 0$, akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \operatorname{cond}(A) \cdot \delta b.$$

Biz.:

1. $A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$-ből vonjuk ki az $Ax = b$ LER-t, így $A\Delta x = \Delta b$.

Tétel: LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha A invertálható és $b \neq 0$, akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \operatorname{cond}(A) \cdot \delta b.$$

Biz.:

1. $A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$-ből vonjuk ki az $Ax = b$ LER-t, így $A \Delta x = \Delta b$.
2. Viszont $x = A^{-1} b$ és $\Delta x = A^{-1} \Delta b$ is teljesül.

Biz. (folytatás):

3. Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \;\; x = A^{-1}b, \;\; \Delta b = A\Delta x, \;\; \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

Biz. (folytatás):

3. Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \;\; x = A^{-1}b, \;\; \Delta b = A\Delta x, \;\; \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

4. Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
   (A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)
   a. $\|b\| = \|Ax\| \quad \Rightarrow \quad \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$

Biz. (folytatás):

3. Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \;\; x = A^{-1}b, \;\; \Delta b = A\Delta x, \;\; \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

4. Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)
   - a) $\|b\| = \|Ax\| \quad \Rightarrow \quad \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$
   - b) $\|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$

Biz. (folytatás):

3. Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \;\; x = A^{-1}b, \;\; \Delta b = A\Delta x, \;\; \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

4. Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)
   - a) $\|b\| = \|Ax\| \quad \Rightarrow \quad \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$,
   - b) $\|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|}$,
   - c) $\|x\| = \left\|A^{-1}b\right\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|b\|$,

Biz. (folytatás):

3. Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \;\; x = A^{-1}b, \;\; \Delta b = A\Delta x, \;\; \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

4. Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)
   - a) $\|b\| = \|Ax\| \quad \Rightarrow \quad \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|},$
   - b) $\|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|},$
   - c) $\|x\| = \left\|A^{-1}b\right\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|b\|,$
   - d) $\|\Delta x\| = \left\|A^{-1}\Delta b\right\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\|.$

Biz. (folytatás):

3. Tehát a 4-féle alak:

$$b = Ax, \;\; x = A^{-1}b, \;\; \Delta b = A\Delta x, \;\; \Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

4. Bármely egyenlőségnél vehetjük a normát.
(A vektornormához illeszkedő mátrixnormát használunk.)
   a. $\|b\| = \|Ax\| \quad \Rightarrow \quad \|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$,
   b. $\|\Delta b\| = \|A\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta b\| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta x\| \geq \frac{\|\Delta b\|}{\|A\|}$,
   c. $\|x\| = \left\|A^{-1}b\right\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|b\|$,
   d. $\|\Delta x\| = \left\|A^{-1}\Delta b\right\| \quad \Rightarrow \quad \|\Delta x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\|$.

5. Az alsó becslés (b) és (c) alapján:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \geq \frac{\frac{\|\Delta b\|}{\|A\|}}{\|A^{-1}\| \cdot \|b\|} = \frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Biz. (folytatás):

6. A felső becslés (a) $\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$ és (d) $\|\Delta x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\|$ alapján:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\Delta b\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}} = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

$\square$

Tartalomjegyzék

LER mátrixának megváltozása

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1. **Eredeti:**
   adott A és b, kiszámíthatjuk a megoldást: x.
   $Ax = b$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1. **Eredeti:**
   adott A és b, kiszámíthatjuk a megoldást: x.
   $Ax = b$
2. **Módosult:**
   adott $A + \Delta A$ és b, kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.
   $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk"! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1. **Eredeti:**
   adott A és b, kiszámíthatjuk a megoldást: x.
   $Ax = b$
2. **Módosult:**
   adott $A + \Delta A$ és b, kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.
   $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$

Nyilván a megoldás is *kicsit* más lesz...

Példa:

1. **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Példa:

1. **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{megoldás:} \;\; x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. **Módosult:**

$$\begin{bmatrix} 4.11 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

Példa:

1. **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{megoldás:} \; x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. **Módosult:**

$$\begin{bmatrix} 4.11 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

3.

$$\text{A módosult LER megoldása:} \quad x + \Delta x = \begin{bmatrix} 2.94 \\ -2.85 \end{bmatrix}$$

Példa:

1. **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \quad \to \quad \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. **Módosult:**

$$\begin{bmatrix} 4.11 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

3. $$\text{A módosult LER megoldása: } \quad x + \Delta x = \begin{bmatrix} 2.94 \\ -2.85 \end{bmatrix}$$

4. Mi történt?

Hogyan jellemezhető a megoldás megváltozása a jobb oldal megváltozásához képest?

- Mennyire változott a mátrix: $\delta A := \dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = 7.8495e - 004.$
- Emiatt mennyire változik a megoldás: $\delta x := \dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} = 3.4507.$
- Vizsgáljuk a kettő hányadosát: $\dfrac{\delta x}{\delta A} = 4396.1.$
- $\text{cond}\,(A) = 1623$

Tétel: LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha A invertálható, $b \neq 0$ és $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Tétel: LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha A invertálható, $b \neq 0$ és $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Lemma

Ha $\|M\| < 1$, akkor $(I + M)$ invertálható és indukált mátrixnormában

$$\left\|(I + M)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}.$$

Tétel: LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha A invertálható, $b \neq 0$ és $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Lemma

Ha $\|M\| < 1$, akkor $(I + M)$ invertálható és indukált mátrixnormában

$$\left\|(I + M)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|M\|}.$$

Megj: A lemmához kell az indukált mátrixnorma.

Biz. lemma:

- Az $I + M$ mátrix tényleg invertálható, hiszen $\varrho(M) \le \|M\| < 1$, azaz M sajátértékeire: $|\lambda_i(M)| < 1$, vagyis az egységsugarú körön belül helyezkednek el. Meggondolható, hogy $I + M$ sajátvektorai ugyanazok, mint M sajátvektorai, a sajátértékekre pedig $\lambda_i(I + M) = 1 + \lambda_i(M)$ teljesül, így $I + M$ minden sajátértéke pozitív, következésképpen $I + M$ invertálható.

Biz. lemma:

- Az $I+M$ mátrix tényleg invertálható, hiszen $\varrho(M) \leq \|M\| < 1$, azaz M sajátértékeire: $|\lambda_i(M)| < 1$, vagyis az egységsugarú körön belül helyezkednek el. Meggondolható, hogy $I+M$ sajátvektorai ugyanazok, mint M sajátvektorai, a sajátértékekre pedig $\lambda_i(I+M) = 1 + \lambda_i(M)$ teljesül, így $I+M$ minden sajátértéke pozitív, következésképpen $I+M$ invertálható.
- Vizsgáljuk most $I+M$ inverzét, majd ennek normáját.

$$(I+M)^{-1} = I \cdot (I+M)^{-1} = (I+M-M)(I+M)^{-1} =$$

$$= I - M \cdot (I+M)^{-1},$$

$$\left\|(I+M)^{-1}\right\| \leq \|I\| + \|M\| \cdot \left\|(I+M)^{-1}\right\|,$$

$$(1-\|M\|) \cdot \left\|(I+M)^{-1}\right\| \leq \|I\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \left\|(I+M)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|M\|}.$$

Biz. tétel: Az $(A+\Delta A)(x+\Delta x)=b$ LER-ből $Ax=b$-t kivonva $(A+\Delta A)\cdot\Delta x+\Delta A\cdot x=0$, másképp

$$(A+\Delta A)\cdot\Delta x=-\Delta A\cdot x,$$
$$A\cdot(I+A^{-1}\cdot\Delta A)\cdot\Delta x=-\Delta A\cdot x.$$

Biz. tétel: Az $(A+\Delta A)(x+\Delta x)=b$ LER-ből $Ax=b$-t kivonva $(A+\Delta A)\cdot\Delta x+\Delta A\cdot x=0$, másképp

$$(A+\Delta A)\cdot\Delta x=-\Delta A\cdot x,$$
$$A\cdot(I+A^{-1}\cdot\Delta A)\cdot\Delta x=-\Delta A\cdot x.$$

Mivel feltevésünk szerint $\|A^{-1}\cdot\Delta A\|\leq\|A^{-1}\|\cdot\|\Delta A\|<1$, a lemma alapján mondhatjuk, hogy $(I+A^{-1}\cdot\Delta A)$ invertálható.

$$\Delta x=-(I+A^{-1}\cdot\Delta A)^{-1}A^{-1}\Delta A\cdot x$$

Biz. tétel: Az $(A+\Delta A)(x+\Delta x)=b$ LER-ből $Ax=b$-t kivonva $(A+\Delta A)\cdot\Delta x+\Delta A\cdot x=0$, másképp

$$\begin{aligned}(A+\Delta A)\cdot\Delta x&=-\Delta A\cdot x,\\ A\cdot(I+A^{-1}\cdot\Delta A)\cdot\Delta x&=-\Delta A\cdot x.\end{aligned}$$

Mivel feltevésünk szerint $\left\|A^{-1}\cdot\Delta A\right\|\leq\left\|A^{-1}\right\|\cdot\|\Delta A\|<1$, a lemma alapján mondhatjuk, hogy $(I+A^{-1}\cdot\Delta A)$ invertálható.

$$\Delta x=-(I+A^{-1}\cdot\Delta A)^{-1}A^{-1}\Delta A\cdot x$$

Az inverz normájára adott becslésünket is felhasználva:

$$\|\Delta x\|\leq\left\|(I+A^{-1}\cdot\Delta A)^{-1}\right\|\cdot\left\|A^{-1}\right\|\cdot\|\Delta A\|\cdot\|x\|$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\leq\frac{1}{1-\|A^{-1}\cdot\Delta A\|}\cdot\left\|A^{-1}\right\|\cdot\|\Delta A\|\leq\frac{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|\Delta A\|}\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Tétel átfogalmazás:

$$\frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} =$$

Tétel átfogalmazás:

$$\frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} =$$

$$= \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \cdot \|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} =$$

Tétel átfogalmazás:

$$\frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1-\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} =$$

$$= \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1-\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \cdot \|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} =$$

$$= \frac{\operatorname{cond}(A)}{1-\operatorname{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Megjegyzés: egyesített tétel LER érzékenységéről

Ha az

$$A \cdot x = b$$

LER esetén mind a bal oldal mátrixa, mind a jobb oldal vektora megváltozik, és az így számolt megoldásra

$$(A + \Delta A) \cdot (x + \Delta x) = b + \Delta b$$

teljesül, akkor a következő becslés igazolható:

Megjegyzés: egyesített tétel LER érzékenységéről

Ha az

$$A \cdot x = b$$

LER esetén mind a bal oldal mátrixa, mind a jobb oldal vektora megváltozik, és az így számolt megoldásra

$$(A + \Delta A) \cdot (x + \Delta x) = b + \Delta b$$

teljesül, akkor a következő becslés igazolható:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\operatorname{cond}(A)}{1 - \operatorname{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$$

Példa

Hogyan befolyásolja az LU-felbontás a feladat kondicionáltságát? Mutassuk meg, hogy nem javul.

Példa

Hogyan befolyásolja az LU-felbontás a feladat kondicionáltságát? Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \quad \Rightarrow \quad LUx = b \quad \Rightarrow \quad Ly = b, Ux = y,$

Példa

Hogyan befolyásolja az LU-felbontás a feladat kondicionáltságát? Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \quad \Rightarrow \quad LUx = b \quad \Rightarrow \quad Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \quad \Rightarrow \quad \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$

Példa

Hogyan befolyásolja az LU-felbontás a feladat kondicionáltságát? Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \quad \Rightarrow \quad LUx = b \quad \Rightarrow \quad Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \quad \Rightarrow \quad \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$
- $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \quad \Rightarrow \quad \|A^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\|$

Példa

Hogyan befolyásolja az LU-felbontás a feladat kondicionáltságát? Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \quad \Rightarrow \quad LUx = b \quad \Rightarrow \quad Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \quad \Rightarrow \quad \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$
- $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \quad \Rightarrow \quad \|A^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\|$
- $\text{cond}\,(A) \leq \text{cond}\,(L) \cdot \text{cond}\,(U)$ $\square$

Példa

Hogyan befolyásolja az LU-felbontás a feladat kondicionáltságát? Mutassuk meg, hogy nem javul.

Biz.:

- $Ax = b \quad \Rightarrow \quad LUx = b \quad \Rightarrow \quad Ly = b, Ux = y,$
- $A = L \cdot U \quad \Rightarrow \quad \|A\| \leq \|L\| \cdot \|U\|$
- $A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1} \quad \Rightarrow \quad \|A^{-1}\| \leq \|L^{-1}\| \cdot \|U^{-1}\|$
- $\text{cond}\,(A) \leq \text{cond}\,(L) \cdot \text{cond}\,(U)$ $\square$

Sőt előfordulhat, hogy $\text{cond}\,(L), \text{cond}\,(U) >> \text{cond}\,(A)$, azaz bizonyos mátrixok esetén előfordulhat, hogy a Gauss-elimináció nagyon pontatlan eredményt ad.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a QR-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a QR-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a Cholesky-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a QR-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Példa gyakorlatra

Igazoljuk, hogy a Cholesky-felbontással a feladat kondicionáltsága nem változik.

Ez is mutatja a QR- és Cholesky-felbontáson alapuló módszerek stabilitását.

Tartalomjegyzék

A kondíciószám, csak a LER megoldás (vagyis a feladat) érzékenységét jellemzi, a megoldó algoritmusét nem. A megoldó módszer jellemzésére a maradékvektort használjuk.

A kondíciószám, csak a LER megoldás (vagyis a feladat) érzékenységét jellemzi, a megoldó algoritmusét nem. A megoldó módszer jellemzésére a maradékvektort használjuk.

Definíció: reziduum- vagy maradékvektor

Legyen $\widetilde{x}$ az $Ax = b$ LER egy közelítő megoldása. Ekkor az $r := b - A\widetilde{x}$ vektort **reziduum-** vagy **maradékvektornak** nevezzük.

A kondíciószám, csak a LER megoldás (vagyis a feladat) érzékenységét jellemzi, a megoldó algoritmusét nem. A megoldó módszer jellemzésére a maradékvektort használjuk.

Definíció: reziduum- vagy maradékvektor

Legyen $\widetilde{x}$ az $Ax = b$ LER egy közelítő megoldása. Ekkor az $r := b - A\widetilde{x}$ vektort **reziduum-** vagy **maradékvektornak** nevezzük.

Látjuk, hogy a reziduum vektor könnyen számolható, alkalmazható direkt- és iterációs módszerek esetén is. Az utóbbi esetben leállási feltétel is készíthető a segítségével.

Definíció: relatív maradék

- Az $\eta := \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\widetilde{x}\|}$ ([éta]) mennyiséget **relatív maradéknak** nevezzük.

Definíció: relatív maradék

- Az $\eta := \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\widetilde{x}\|}$ ([éta]) mennyiséget **relatív maradéknak** nevezzük.
- A stabilitás inverz megfogalmazása alapján a módszer stabil, ha az $\widetilde{x}$ közelítő megoldáshoz tartozó $(A + \Delta A) \cdot \widetilde{x} = b$ LER csak kicsit perturbált az eredetihez képest, azaz $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ kicsi.

Definíció: relatív maradék

- Az $\eta := \frac{\|r\|}{\|A\|\cdot\|\widetilde{x}\|}$ ([éta]) mennyiséget **relatív maradéknak** nevezzük.
- A stabilitás inverz megfogalmazása alapján a módszer stabil, ha az $\widetilde{x}$ közelítő megoldáshoz tartozó $(A+\Delta A)\cdot\widetilde{x}=b$ LER csak kicsit perturbált az eredetihez képest, azaz $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ kicsi.

η értéke a közelítő megoldás ismeretében könnyen számolható.
A továbbiakban ΔA ismerete nélkül szeretnénk becsléseket adni a nem ismert $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ mennyiségre.

Tétel: becslés a relatív maradékra

Ha A invertálható, akkor illeszkedő mátrixnormában

$$\eta \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

azaz ha η nagy, akkor $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ is nagy.

Tétel: becslés a relatív maradékra

Ha A invertálható, akkor illeszkedő mátrixnormában

$$\eta \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

azaz ha η nagy, akkor $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ is nagy.

Biz.: $b = (A + \Delta A) \cdot \widetilde{x} = A \cdot \widetilde{x} + \Delta A \cdot \widetilde{x}$, innen
$b - A \cdot \widetilde{x} = r = \Delta A \cdot \widetilde{x}$, a mátrixnorma illeszkedését felhasználva

$$\|r\| \leq \|\Delta A\| \cdot \|\widetilde{x}\| .$$

Tétel: becslés a relatív maradékra

Ha A invertálható, akkor illeszkedő mátrixnormában

$$\eta \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$

azaz ha η nagy, akkor $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ is nagy.

Biz.: $b = (A + \Delta A) \cdot \widetilde{x} = A \cdot \widetilde{x} + \Delta A \cdot \widetilde{x}$, innen
$b - A \cdot \widetilde{x} = r = \Delta A \cdot \widetilde{x}$, a mátrixnorma illeszkedését felhasználva

$$\|r\| \leq \|\Delta A\| \cdot \|\widetilde{x}\| .$$

A relatív maradékot becsülve

$$\eta = \frac{\|r\|}{\|A\| \cdot \|\widetilde{x}\|} \leq \frac{\|\Delta A\| \cdot \|\widetilde{x}\|}{\|A\| \cdot \|\widetilde{x}\|} \leq \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Tétel: relatív maradék 2-es normában

Ha A invertálható, akkor

$$\eta_2 = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}.$$

Tétel: relatív maradék 2-es normában

Ha A invertálható, akkor

$$\eta_2 = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}.$$

Biz.: Belátjuk, hogy

$$\Delta A = \frac{r\widetilde{x}^\top}{\widetilde{x}^\top \widetilde{x}}$$

jó lesz perturbációnak, vagyis $\widetilde{x}$ egy ennyivel megváltoztatott mátrixú LER pontos megoldása.

Tétel: relatív maradék 2-es normában

Ha A invertálható, akkor

$$\eta_2 = \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}.$$

Biz.: Belátjuk, hogy

$$\Delta A = \frac{r\widetilde{x}^\top}{\widetilde{x}^\top \widetilde{x}}$$

jó lesz perturbációnak, vagyis $\widetilde{x}$ egy ennyivel megváltoztatott mátrixú LER pontos megoldása. Végezzük el a behelyettesítést:

$$(A + \Delta A) \cdot \widetilde{x} = \left(A + \frac{r\widetilde{x}^\top}{\widetilde{x}^\top \widetilde{x}} \right) \cdot \widetilde{x} =$$

$$= A\widetilde{x} + \frac{r\widetilde{x}^\top \widetilde{x}}{\widetilde{x}^\top \widetilde{x}} = A\widetilde{x} + (b - A\widetilde{x}) = b.$$

Biz.: folyt. Felhasználjuk, hogy

$$\left\| r\widetilde{x}^\top \right\|_2 = \|r\|_2 \cdot \|\widetilde{x}\|_2 \,.$$

(Beadható HF-nak kitűzött feladat.)

Biz.: folyt. Felhasználjuk, hogy

$$\left\| r\widetilde{x}^\top \right\|_2 = \|r\|_2 \cdot \|\widetilde{x}\|_2 .$$

(Beadható HF-nak kitűzött feladat.)

A relatív maradékot becsülve

$$\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} = \frac{\left\| r\widetilde{x}^\top \right\|_2}{\|A\|_2 \|\widetilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2 \|\widetilde{x}\|_2}{\|A\|_2 \|\widetilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2}{\|A\|_2 \|\widetilde{x}\|_2} = \eta_2.$$

$\square$

Biz.: folyt. Felhasználjuk, hogy

$$\left\| r\widetilde{x}^{\top} \right\|_2 = \|r\|_2 \cdot \|\widetilde{x}\|_2 \,.$$

(Beadható HF-nak kitűzött feladat.)

A relatív maradékot becsülve

$$\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} = \frac{\left\| r\widetilde{x}^{\top} \right\|_2}{\|A\|_2 \, \|\widetilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2 \, \|\widetilde{x}\|_2}{\|A\|_2 \, \|\widetilde{x}\|_2^2} = \frac{\|r\|_2}{\|A\|_2 \, \|\widetilde{x}\|_2} = \eta_2.$$

$\square$

Ha η_2 kicsi, akkor $\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}$ is kicsi.
Ha $\eta_2 < \varepsilon_1$, akkor ebben az adott aritmetikában pontosabb megoldás nem adható.

Példák Matlab-ban

1. Egy perturbált LER (jobboldala változik, mátrixa a Hilbert mátrix).
2. $\operatorname{cond}_2(H_n)$ változása a méret függvényében.
3. $\operatorname{cond}_2(V_n)$ változása a méret függvényében.
4. $\operatorname{cond}_2(\operatorname{tridiag}(-1, 2, -1))$ változása a méret függvényében.
5. $\operatorname{cond}_2(rand_n)$ változása a méret függvényében.

Példa:

Jelöljük H_5-tel az 5×5-ös Hilbert mátrixot.

$$H_5 = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1}^{5} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{bmatrix}$$

1. Példa:

1. **Eredeti LER:**

$$H_5 \cdot x = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1/7 \\ 1/8 \\ 1/9 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Példa:

1. **Eredeti LER:**

$$H_5 \cdot x = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1/7 \\ 1/8 \\ 1/9 \end{bmatrix} \quad \to \quad \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. **Módosult LER:**

$$H_5 \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1/7 \\ 1/8 \\ 1/9 + 1/1000 \end{bmatrix}$$

A módosult LER megoldása: $$x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$$

Mi történt?

A módosult LER megoldása: $$x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$$

Mi történt?

1. $\delta b = 0.0029$: a jobboldal relatív hibája

A módosult LER megoldása: $$x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$$

Mi történt?

1. $\delta b = 0.0029$: a jobboldal relatív hibája
2. $\delta x = 114.4469$ a megoldás relatív hibája

A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

1. $\delta b = 0.0029$: a jobboldal relatív hibája
2. $\delta x = 114.4469$ a megoldás relatív hibája
3. a két mennyiség hányadosa: $\delta x / \delta b = 3.9006e + 004$

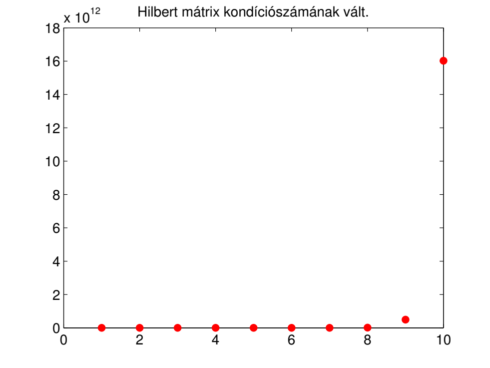
A módosult LER megoldása: $x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.6300 \\ -12.6000 \\ 56.7000 \\ -88.2000 \\ 45.1000 \end{bmatrix}$

Mi történt?

1. $\delta b = 0.0029$: a jobboldal relatív hibája
2. $\delta x = 114.4469$ a megoldás relatív hibája
3. a két mennyiség hányadosa: $\delta x / \delta b = 3.9006e + 004$
4. ennek becslése a tétellel: $cond_2(H_5) = 4.7661e + 005$.

2. Példa:

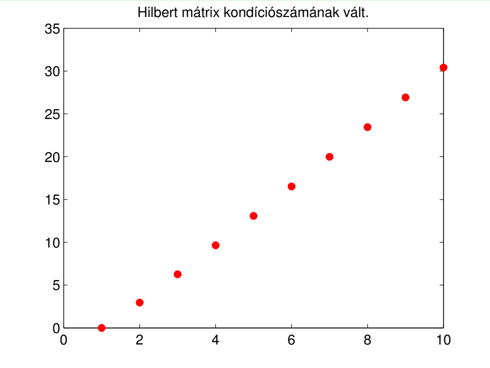
A Hilbert mátrix kondíciószámának változását vizsgáljuk:



Nem sok látszik az ábrából, mintha csak az utolsó érték lenne nagy.

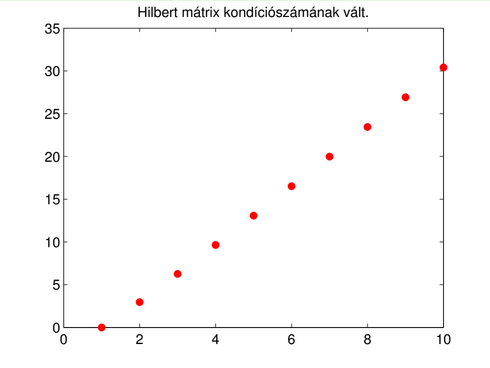
2. Példa:

Vegyük a kondíciószámok logaritmusát!



2. Példa:

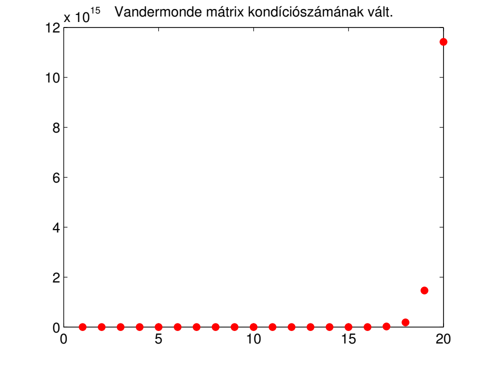
Vegyük a kondíciószámok logaritmusát!



$$\mathrm{cond}_2(H_n) \approx \exp(3.1n) \approx 22^n$$

3. Példa:

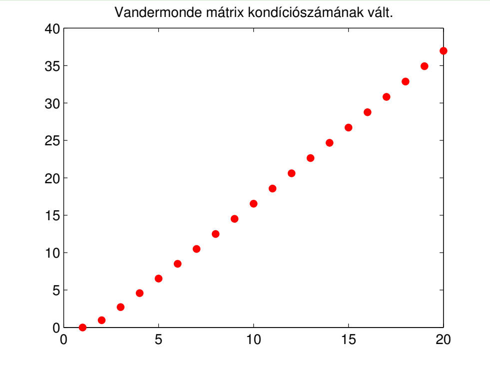
A $[0,1]$ intervallum egyenletes felosztású pontjaiból képzett Vandermonde mátrix kondíciószámának változását vizsgáljuk:



Nem sok látszik az ábrából, mintha csak az utolsó érték lenne nagy.

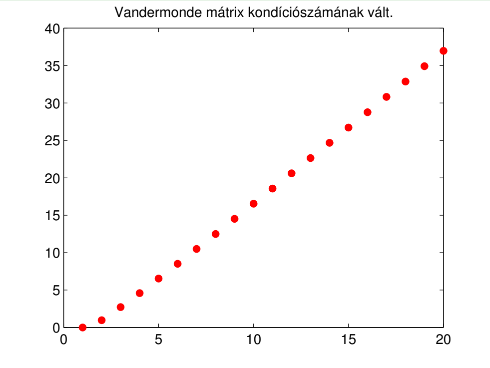
3. Példa:

Vegyük a kondíciószámok logaritmusát!



3. Példa:

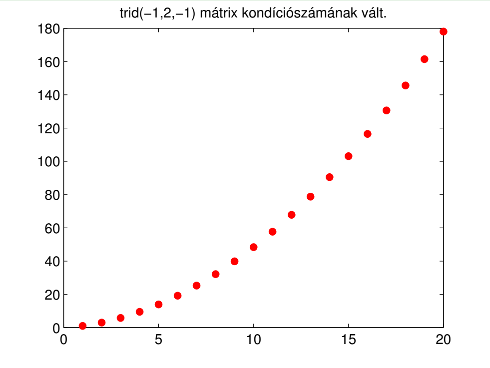
Vegyük a kondíciószámok logaritmusát!



$$\mathrm{cond}_2(V_n) \approx \exp(1.85n) \approx (6.4)^n$$

4. Példa:

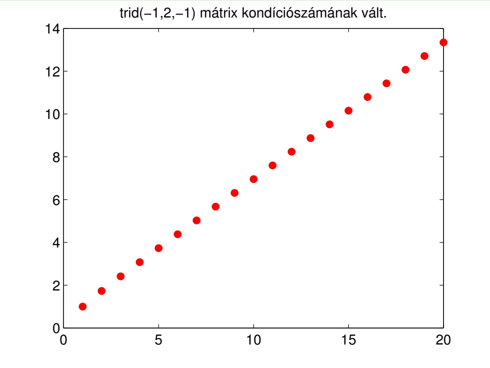
A tridiag $(-1, 2, -1)$ mátrix kondíciószámának változását vizsgáljuk:



Az ábra alapján sejthető, hogy a növekedés a méret négyzetével arányos.

4. Példa:

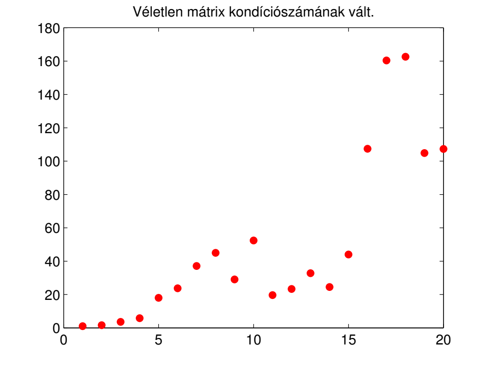
Vegyük a kondíciószámok gyökét!



Elméletileg igazolható, hogy
$\text{cond}_2(\text{tridiag}\,(-1, 2, -1)) \approx \left(\frac{2(n+1)}{\pi}\right)^2.$

5. Példa:

Véletlen mátrix kondíciószámának változását vizsgáljuk:



Az előző mátrixokhoz képest egész kicsi értékeket kaptunk.