2. gyakorlat

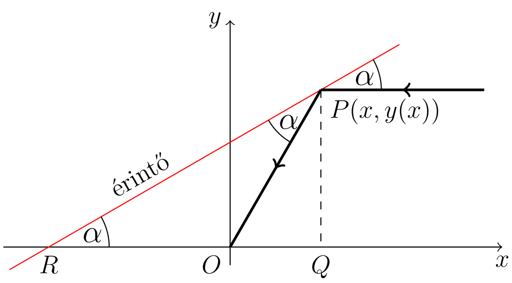
DIFFERENCIÁLEGYENLETEK 1.

A természet-, műszaki és gazdasági tudományban sok olyan feladattal találkozunk, amelyben ismeretlen függvényt kell meghatároznunk a függvény, annak deriváltjai és a független változó között fennálló egyenlőség. Az ilyen egyenleteket ***közönséges differenciálegyenleteknek*** nevezzük. A Szili László: Analízis feladatok fizikai alkalmazásokkal című jegyzet több ilyen feladatot is bemutat.

1. Feladat. *Határozzuk meg az összes olyan görbét, amely tengely körüli elforgatása után olyan felület kapunk, amely antennaernyőként alkalmazható, azaz egy távoli pontból sugárzott adást egy adott pontba képes fókuszálni!*

Megoldás. Válasszuk meg a koordináta-rendszert úgy, hogy az x tengely legyen a forgástengely és az O origó a fókuszpont. Ezenkívül az x tengely mutasson a sugárzott adás forrásának irányába. A forgásszimmetria miatt feltételezhető, hogy a görbét megadó $x \mapsto y(x)$ $(x \in I)$ függvény csak pozitív értékeket vesz fel.

Legyen P a görbe tetszőleges pontja, azaz koordinátai $P(x, y(x))$, ahol $x \in I$. Legyen R a görbe P pontbeli érintője és az x tengely metszéspontja, illetve Q a P pont merőleges vetülete x tengelyre, azaz koordinátai $Q(x, 0)$. Az elektromágneses sugarak visszaverődési törvénye alapján a beeső sugár és az érintő által bezárt szög egyenlő a visszavert sugár és az érintő által bezárt szöggel. Ha $x > 0$, akkor az ábrán látható, hogy a $\triangle OPR$ egyenlő szárú háromszögben $\overline{OR} = \overline{OP}$. Másrészt az $\overline{OP}$ szakasz hossza az $\triangle OQP$ derékszögű háromszögben könnyen kiszámolható Pitagorasz-tétellel, és így



$$\overline{OR} = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2(x)} \qquad (x > 0).$$

Ha az y függvény differenciálható, akkor a görbe P pontbeli érintőjének meredeksége (iránytangense) a függvény x pontban vett deriváltja. Így

$$y'(x) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ} + \overline{OR}} = \frac{y(x)}{x + \sqrt{x^2 + y^2(x)}} \qquad (x > 0).$$

Hasonlóan igazolható, hogy a fenti egyenlőség akkor is fennáll, ha $x \leq 0$.

A fentiek szerint azok és csak azok a differenciálható görbék oldjak meg a feladatot, amelyek teljesítik az alábbi ***elsőrendű differenciálegyenletet***:

(1) $$y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \qquad (x \in \mathbb{R}, y > 0).$$

Egy közönséges differenciálegyenlet rendje a benne szereplő legmagasabb derivált rendje.

Végezzük az alábbi átalakításokat!

$$y' = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y(\sqrt{x^2+y^2}-x)}{(x+\sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{x^2+y^2}-x)} = \frac{y(\sqrt{x^2+y^2}-x)}{x^2+y^2-x^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y},$$

ezért

$$x+yy' = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1.$$

Vegyük észre, hogy

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)' = \frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{és} \qquad (x)' = 1.$$

Mivel két, nyílt intervallumon értelmezett függvény deriváltja akkor és csak akkor azonos, ha a két függvény legfeljebb egy c konstanstól térhet el egymástól, így

$$\sqrt{x^2+y^2} = x+c,$$

ahol $c>0$ és $x+c>0$. Négyzetre emelés és egyszerűsítés után

$$x^2+y^2 = (x+c)^2 = x^2+2xc+c^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y^2 = 2xc+c^2,$$

azaz

$$y = \sqrt{2c\left(x+\tfrac{c}{2}\right)} \qquad \left(x \in I := \left(-\tfrac{c}{2}, +\infty\right), c>0\right). \tag{2}$$

Ezzel megtaláltuk az (1) differenciálegyenlet ***összes megoldását***. Eszerint, a forgásszimmetria figyelembe véve, a feladat megoldása minden olyan parabola, amelynek szimmetriatengelye az x tengely, és a fókuszpontja az origó.

Megjegyzések.

1. Vegyük észre, hogy (2) tartalmaz egy c paramétert. Ha egy n-ed rendű közönséges differenciálegyenletnek van olyan megoldása, amely n darab független paramétert tartalmaz, akkor ezt ***általános megoldásnak*** nevezzük. Eszerint (1) összes megoldása a (2) általános megoldásként állítható elő. Ha egy megoldás nem tartalmaz paramétereket, akkor ezt ***partikuláris megoldásnak*** nevezzük. Az előző feladatban ilyen az

$$y = \sqrt{4x+4} \qquad \big(x \in (-1, +\infty)\big).$$

   megoldás.

2. Az (1) differenciálegyenlet illeszkedik a következő modellre. Legyen adott $T \subset \mathbb{R}^2$ tartomány (összefüggő nyílt ponthalmaz) és $f : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Azokat az $y : I \to \mathbb{R}$ nyílt intervallumon értelmezett, differenciálható függvényeket keresünk, amelyekre $\big(x, y(x)\big) \in T$ minden $x \in I$ esetén, és kielégítik az

$$y'(x) = f(x, y(x)) \qquad (x \in I)$$

   ún. ***közönséges, elsőrendű, explicit*** differenciálegyenletet.

3. Egy közönséges differenciálegyenlet felírását szokás rövidíteni azzal, hogy az y függvényből és deriváltjaiból elhagyjuk az x függvényváltozót.

4. Előfordulhat, hogy egy adott közönséges, elsőrendű, explicit differenciálegyenletnek csak olyan megoldásait keresünk, amelyek rögzített $(\xi, \eta) \in T$ esetén kielégítik az

$$y(\xi) = \eta$$

ún. ***kezdetiérték-feladatot***. Ha például az (1) differenciálegyenletnek azon megoldásait keressünk, amelyek eleget tesznek az $y(0) = 1$ feltételnek, akkor (2) miatt

$$1 = \sqrt{2c\left(0 + \tfrac{c}{2}\right)} \qquad \Longrightarrow \qquad c = 1.$$

Ezért a fenti kezdetiérték-feladat megoldása:

$$y = \sqrt{2x+1} \qquad \left(x \in \left(-\tfrac{1}{2}, +\infty\right)\right).$$

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Elméleti összefoglaló. Legyen I_1, $I_2 \subset \mathbb{R}$ két intervallum, és $f : I_1 \to \mathbb{R}$, $g : I_2 \to \mathbb{R}$ két folytonos függvény, illetve $T := I_1 \times I_2$. Az

$$y' = f(x)g(y) \qquad \big((x, y) \in T\big)$$

differenciálegyenletet ***szétválasztható változójú*** differenciálegyenletnek nevezzük.

Tegyük fel, hogy $g(y) \neq 0$ minden $y \in I_2$ esetén, továbbá F és G rendre az f és az $\frac{1}{g}$ függvényeknek egy primitív függvénye. Ekkor a szétválasztható változójú differenciálegyenlet minden y megoldása kielégíti a

$$G(y(x)) = F(x) + c \qquad (x \in \mathcal{D}_y)$$

implicit egyenletet valamely $c \in \mathbb{R}$ konstans esetén.

Legyen továbbá $\xi \in I_1$ és $\eta \in I_2$. Ekkor az $y(\xi) = \eta$ feltételhez kapcsolódó kezdetiérték-feladatnak mindig vagy egyértelmű, határtól határig haladó megoldása, ami a feladat ***teljes megoldása*** (minden más megoldás ennek leszűkítése).

2. Feladat. *Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet és kezdetiérték-feladatokat!*

$$a) \quad y' = xy \qquad (x, y \in \mathbb{R}),$$

$$b) \quad y' = \frac{x^3}{(1+y)^2}, \quad y(1) = 2 \qquad (x \in \mathbb{R}, y > -1),$$

$$c) \quad y' = y + y^2, \quad y(0) = -\tfrac{1}{2} \qquad (x \in \mathbb{R}, -1 < y < 0),$$

$$d) \quad y' = \frac{\sqrt{y^2+1}}{xy}, \quad y(e^2) = \sqrt{3} \qquad (x, y > 0).$$

Megoldás. Az elméleti összefoglalóban szereplő állításhoz eljutunk, ha formálisan követjük az

$$y' = f(x)g(y) \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \to \quad \frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx \quad \to \quad \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$

könnyen megjegyezhető megoldási eljárást.

a) A $T := \Big\{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y > 0\Big\}$ tartományon haladó bármely megoldásra

$$y' = xy \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = xy \quad \to \quad \frac{1}{y}\,dy = x\,dx \quad \to \quad \int \frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx \quad \to \quad \ln y = \frac{x^2}{2} + c$$

teljesül, ahol $c \in \mathbb{R}$. Ezért a tartományon haladó teljes megoldások:

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}+c} = e^c \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = Ce^{\frac{x^2}{2}} > 0 \qquad (x \in \mathbb{R},\, C > 0).$$

A $T := \Big\{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y < 0\Big\}$ tartományon haladó bármely megoldásra

$$y' = xy \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = xy \quad \to \quad \frac{1}{y}\,dy = x\,dx \quad \to \quad \int \frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx \quad \to \quad \ln(-y) = \frac{x^2}{2} + c$$

teljesül, ahol $c \in \mathbb{R}$. Ezért a tartományon haladó teljes megoldások:

$$y(x) = -e^{\frac{x^2}{2}+c} = -e^c \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = Ce^{\frac{x^2}{2}} < 0 \qquad (x \in \mathbb{R},\, C < 0).$$

Vegyük észre még, hogy az $y(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$ szintén megoldása az egyenletnek. Ezért a differenciálegyenlet megoldása:

$$\underline{\underline{y(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}} \qquad (x \in \mathbb{R},\, C \in \mathbb{R})}}\ .$$

b) A $T := \Big\{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y > -1\Big\}$ tartományon haladó bármely megoldásra

$$y' = \frac{x^3}{(1+y)^2} \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{(1+y)^2} \quad \to \quad (1+y)^2\,dy = x^3\,dx \quad \to$$

$$\to \quad \int (1+y)^2\,dy = \int x^3\,dx \quad \to \quad \frac{(1+y)^3}{3} = \frac{x^4}{4} + c$$

teljesül, ahol $c \in \mathbb{R}$. A kezdeti feltétel miatt az $x = 1$, $y = 2$ értékpár kielégíti a fenti egyenletet, ezért

$$\frac{(1+2)^3}{3} = \frac{1^4}{4} + c \qquad \Longrightarrow \qquad c = 9 - \frac{1}{4} = \frac{35}{4}.$$

A c érték behelyettesítése után

$$\frac{(1+y)^3}{3} = \frac{x^4}{4} + \frac{35}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad (1+y)^3 = \frac{3x^4 + 105}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad y = \sqrt[3]{\frac{3x^4+105}{4}} - 1.$$

Ekkor $y > -1$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Ezért a differenciálegyenlet teljes megoldása:

$$\underline{\underline{y(x) = \sqrt[3]{\frac{3x^4+105}{4}} - 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).}}$$

c) A $T := \Big\{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, -1 < y < 0\Big\}$ tartományon haladó bármely megoldásra

$$y' = y + y^2 \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = y + y^2 \quad \to \quad \frac{1}{y+y^2}\,dy = 1\,dx \quad \to$$
$$\to \quad \int \frac{1}{y+y^2}\,dy = \int 1\,dx = x + c$$

teljesül, ahol $c \in \mathbb{R}$. Másrészt parciális törtekre bontással

$$\int \frac{1}{y+y^2}\,dy = \int \frac{1}{y(y+1)}\,dy = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right)dy = (-1 < y < 0 \text{ miatt}) =$$
$$= \ln(-y) - \ln(y+1) + c = \ln\frac{-y}{y+1} + c.$$

teljesül, ahol $c \in \mathbb{R}$. Ezért

$$\ln\frac{-y}{y+1} = x + c \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-y}{y+1} = e^{x+c} = Ce^x$$

teljesül, ahol $C > 0$. A kezdeti feltétel miatt az $x = 0$, $y = -\frac{1}{2}$ értékpár kielégíti a fenti egyenletet, ezért

$$\frac{-(-\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}+1} = Ce^0 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 = C.$$

Ezért

$$\frac{-y}{y+1} = e^x \quad \Longleftrightarrow \quad -y = e^x(y+1) = e^x y + e^x \quad \Longleftrightarrow \quad -y(e^x+1) = e^x.$$

Tehát

$$y = \frac{-e^x}{e^x+1}, \qquad \text{illetve} \qquad -1 < \frac{-e^x}{e^x+1} < 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezért a differenciálegyenlet teljes megoldása:

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{-e^x}{e^x+1} \qquad (x \in \mathbb{R}).}}$$

d) A $T := \Big\{(x,y) \mid x, y > 0\Big\}$ tartományon haladó bármely megoldásra

$$y' = \frac{\sqrt{y^2+1}}{xy} \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2+1}}{xy} \quad \to \quad \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\,dy = \frac{1}{x}\,dx \quad \to$$
$$\to \quad \int \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx \quad \to \quad \sqrt{y^2+1} = \ln x + c$$

teljesül, ahol $c \in \mathbb{R}$. A kezdeti feltétel miatt az $x = e^2$, $y = \sqrt{3}$ értékpár kielégíti a fenti egyenletet, ezért

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2+1} = \ln e^2 + c \qquad \Longrightarrow \qquad 2 = 2 + c \qquad \Longrightarrow \qquad c = 0.$$

A c érték behelyettesítése után

$$\sqrt{y^2+1} = \ln x \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \sqrt{\ln^2 x - 1},$$

ami csak $\ln x > 1$, azaz $x > e$ esetén értelmezhető. Ezért a differenciálegyenlet teljes megoldása:

$$\underline{\underline{y(x) = \sqrt{\ln^2 x - 1} \qquad (x > e)}}\ .$$

3. Feladat. *Egy csónakkal evezünk egy csendes tavon. Amikor elérjük az 1,5 m/s sebességet, abbahagyjuk az evezést. Ekkor a csónak mozgása lassulni kezd a víz ellenállásának hatására, amely egyenesen arányos a csónak sebességével, és így a sebesség 4 másodperc múlva 1 m/s lesz. Mekkora utat tud a csónak megtenni megállásáig?*

Megoldás. Az Analízis II. kurzuson megismertük a differenciálhányados fizikai értelmezését. Nevezetesen, egy fizikai mennyiség változásának sebessége egy adott pillanatban nem más, mint a fizikai mennyiség deriváltja az adott pillanatban. Ha egy pontszerű test mozgást végez egy egyenes pályán, akkor az $s(t)$ elmozdulásfüggvény deriváltja a $v(t)$ pillanatnyi sebességfüggvény lesz. Ennek deriváltja pedig adja az $a(t)$ pillanatnyi gyorsulásfüggvényt.

Legyen $t = 0$ a kezdőpillanat, amikor abbahagyjuk az evezést. A feladatban szereplő feltételek szerint

$$v(0) = \frac{3}{2} \qquad \text{és} \qquad v(4) = 1.$$

A fizikai törvény szerint a lassulás, ami egy negatív gyorsulás, egyenesen arányos a csónak sebességével. Ezzel a következő egyenletet lehet felírni

$$a(t) = v'(t) = -kv(t),$$

ahol $k > 0$ egy ismeretlen állandó. Ez azt jelenti, hogy szükséges megoldanunk a

$$v' = -kv \qquad (t \geq 0, v > 0)$$

differenciálegyenletet. A $T := \Big\{(t,v) \mid t \geq 0, v > 0\Big\}$ tartományon haladó bármely megoldásra

$$v' = -kv \quad \to \quad \frac{dv}{dt} = -kv \quad \to \quad \frac{1}{v}\,dv = -k\,dt \quad \to \quad \int \frac{1}{v}\,dv = \int -k\,dt \quad \to \quad \ln v = -kt + c$$

teljesül, ahol $c \in \mathbb{R}$. Ezért a tartományon haladó teljes megoldások:

$$v(t) = e^{-kt+c} = Ce^{-kt} > 0 \qquad (t \geq 0,\ C > 0),$$

Ekkor a megadott feltételekkel:

$$\frac{3}{2} = v(0) = Ce^{-k\cdot 0} = C \qquad \text{és} \qquad 1 = v(4) = \frac{3}{2}\,e^{-k\cdot 4} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-k} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/4}.$$

Ez azt jelenti, hogy a pillanatnyi sebességfüggvény egyenlete:

$$v(t) = Ce^{-kt} = C\Big(e^{-k}\Big)^t = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{t/4} \qquad (t \geq 0).$$

Vegyük észre, hogy $v(t) > 0$ minden $t \geq 0$ esetén, ezért ***a csónak elméletileg sohasem áll meg!*** Azonban, ha a t értéke nagyon nagy, akkor a $v(t)$ értéke nagyon kicsi, ezért úgy tűnik mintha a csónak megállna. A teljes s út meghatározásához integrálni a v függvényt, hiszen $s'(t) = v(t)$, de az idővel tartani kell a végtelenhez. Így a megoldást az impropriusz integrál alkalmazásával kapjuk:

$$s = \int_0^{+\infty} v(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{t/4} dt = \frac{3}{2} \cdot \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{t/4}}{\frac{1}{4}\ln\frac{2}{3}}\right]_0^x =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{\ln\frac{2}{3}} \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{x/4} - 1\right) = \frac{-6}{\ln\frac{2}{3}} \approx \underline{\underline{14,8\ (\text{méter})}}\ .$$

4. Feladat (Korlátozott növekedés modellje). *Egy szigeten legfeljebb M mennyiségű (például tömegű) nyúl számára terem elegendő fű. Betelepítenek m_0 mennyiségű nyulat. Írjuk le a nyulak mennyiségének időbeli változását! A nyulak szaporodásának sebessége egyenesen arányos a nyulak mennyisége és a maximális M mennyiségig fennmaradó nyúlmennyiség szorzatával.*

Megoldás. A nyulak egy zárt populációt alkotnak, ahol véges sok erőforrás érhető el. Az $m(t)$ a t időben megfigyelhető populációmennyiség megváltozásának sebességét két mennyiség fogja egyszerre befolyásolni: az $m(t)$ és az $M - m(t)$. A modellt alkotó kezdetiérték-feladat

$$m' = km(M-m), \quad m(0) = m_0 \qquad (t \geq 0,\ 0 < m < M),$$

ahol $k > 0$ a szaporodási tényező.

A $T := \Big\{(t,m) \mid t \geq 0,\ 0 < m < M\Big\}$ tartományon haladó bármely megoldásra

$$m' = km(M-m) \quad \to \quad \frac{dm}{dt} = km(M-m) \quad \to \quad \frac{1}{m(M-m)}\,dm = k\,dt \quad \to$$

$$\to \quad \int \frac{1}{m(M-m)}\,dm = \int k\,dt = kt + c$$

teljesül, ahol $c \in \mathbb{R}$. Másrészt parciális törtekre bontással

$$\int \frac{1}{m(M-m)}\,dm = \frac{1}{M} \int \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M-m}\right) dm = (0 < m < M \text{ miatt}) =$$

$$= \frac{1}{M}\Big(\ln(m) - \ln(M-m)\Big) + c = \frac{1}{M}\,\ln\frac{m}{M-m} + c.$$

teljesül, ahol $c \in \mathbb{R}$.

Ezért

$$\frac{1}{M}\ln\frac{m}{M-m} = kt + c \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{m}{M-m} = e^{Mkt+Mc} = e^{Mkt}e^{Mc}$$

teljesül. A kezdeti feltétel miatt az $t = 0$, $m = m_0$ értékpár kielégíti a fenti egyenletet, ezért

$$\frac{m_0}{M-m_0} = e^{M\cdot k\cdot 0}e^{Mc} = e^{Mc}.$$

Ezért

$$\frac{m}{M-m} = e^{Mkt}e^{Mc} = e^{Mkt}\frac{m_0}{M-m_0} \quad\Longleftrightarrow\quad m = M\,\frac{e^{Mkt}}{e^{Mkt}+\frac{M-m_0}{m_0}}.$$

Mivel a fenti összefüggésben minden $t \geq 0$ esetén $0 < m < M$, így a differenciálegyenlet teljes megoldása:

$$\underline{\underline{m(t) = M\,\frac{e^{Mkt}}{e^{Mkt}+\frac{M-m_0}{m_0}} \qquad (t \geq 0).}}$$