12. előadás

GÖRBÉK 2.

Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér geometriájáról

Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér geometriáját, azaz a szög- és távolságmérést, a térben értelmezett

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \qquad \Big(x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n\Big)$$

skaláris szorzatból származtatjuk a következő módon:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad \text{és} \qquad \cos\alpha := \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|},$$

ahol α az $x, y \in \mathbb{R}^n$ nem nullvektorok által bezárt szög. Ez azt jelenti, hogy két vektor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk nulla, illetve a skaláris szorzat értéke az egyik vektor előjeles merőleges vetülete a másik vektor irányába megszorozva a másik vektor hosszával.

Gyakran szükség van arra, hogy az $\mathbb{R}^n$ tér adott, $n-1$ számú $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ vektorának mindegyikére merőleges vektort szerkesszünk. Ilyen vektor – felhasználva a determináns fogalmát – a következő módon adható meg explicit alakban:

$$b := \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)n} \end{vmatrix} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n,$$

ahol $e_1, e_2, \dots, e_n$ a kanonikus bázis és $a_k := a_{k1}e_1 + a_{k2}e_2 + \dots + a_{kn}e_n$ $(k = 1, 2, \dots, n-1)$. A most értelmezett b vektort az $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ vektorok vektoriális szorzatának nevezzük, és az

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{n-1}$$

szimbólummal jelöljük. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisára

$$e_3 = e_1 \times e_2, \qquad e_1 = e_2 \times e_3, \qquad e_2 = e_3 \times e_1$$

teljesül.

Görbék érintői

Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ egy $\gamma \in I \to \Gamma$ paraméterezéssel rendelkező egyszerű sima görbe és $t_0 \in I$ az intervallum egyik pontja. A $\gamma_0 := \gamma(t_0)$ ponton áthaladó, $\gamma'(t_0)$ irányvektorral rendelkező

$$\Gamma_{\gamma_0} := \Big\{\gamma(t_0) + t\gamma'(t_0) \ \Big|\ t \in \mathbb{R}\Big\} \subset \mathbb{R}^n$$

egyenest a $\boldsymbol{\Gamma}$ ***görbe*** $\boldsymbol{\gamma_0}$ ***pontbeli érintőjének*** nevezzük.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a Γ görbe egy másik $\delta := \gamma \circ \varphi : J \to \Gamma$ paraméterezéséből kiindulva ugyanazt az érintőt kapjuk. Valóban, a $\varphi(s_0) = t_0$ jelöléssel, $\varphi'(s_0) \neq 0$ figyelembevételével

$$\Big\{\delta(s_0) + s\delta'(s_0) \ \Big|\ s \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{\gamma\big(\varphi(s_0)\big) + s\gamma'\big(\varphi(s_0)\big)\varphi'(s_0) \ \Big|\ s \in \mathbb{R}\Big\} = \Big\{\gamma(t_0) + t\gamma'(t_0) \ \Big|\ t \in \mathbb{R}\Big\}$$

adódik a $t = s\varphi'(s_0)$ transzformációval.

A görbe érintője az az egyenes, amely a görbét az érintési pont egy környezetében legjobban közelíti. A $\gamma' \neq 0$ tulajdonság kizárja a sarkok, illetve a csúcsok meglétét a görbe képében.

Példa: Adjuk meg az
$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \qquad \big(t \in [0, 2\pi]\big)$$
kör érintőjét a $t_0 = \frac{\pi}{6}$-hoz tartozó pontban!

Megoldás: A megadott paraméterezés mellett
$$\gamma(t) = (\cos t,\, \sin t) \quad \Longrightarrow \quad \gamma'(t) = (-\sin t,\, \cos t) \qquad \big(t \in [0, 2\pi]\big).$$
Ekkor
$$\gamma\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \Big(\cos\frac{\pi}{6},\, \sin\frac{\pi}{6}\Big) = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2},\, \frac{1}{2}\Big) \qquad \text{és} \qquad \gamma'\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \Big(-\sin\frac{\pi}{6},\, \cos\frac{\pi}{6}\Big) = \Big(-\frac{1}{2},\, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big).$$
Ezért
$$\gamma\Big(\frac{\pi}{6}\Big) + t\gamma'\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2},\, \frac{1}{2}\Big) + t\Big(-\frac{1}{2},\, \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}t,\, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}t\Big) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$
A keresett Γ kör érintője a $\gamma_0 = \gamma\big(\frac{\pi}{6}\big)$ pontban:
$$\Gamma_{\gamma_0} = \Big\{\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}t,\, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}t\Big) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; t \in \mathbb{R}\Big\}.$$

A kísérő triéder

Az előzőek szerint egy egyszerű sima görbe pontbeli érintőjének irányvektora egy adott iránnyal párhuzamos a paraméterezéstől függetlenül. Ezért, tetszőleges $\gamma \in I \to \Gamma$ paraméterezés esetén rögzített $t_0 \in I$ mellett az
$$e(t_0) := \frac{\gamma'(t_0)}{\big\|\gamma'(t_0)\big\|}$$
egységvektor csak γ „haladási irányától” függ. Az $e(t_0)$ egységvektort ***érintő egységvektornak*** nevezzük.

Megjegyzünk, hogy egy $\delta := \gamma \circ \varphi : J \to \Gamma$ paraméterezés haladási iránya azonos a γ-éval, ha $\varphi'(s) > 0$, és ellentétes, ha $\varphi'(s) < 0$ minden $s \in J$ esetén.

Tegyük fel, hogy a
$$\gamma(t) := \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n \qquad (t \in I),$$
paraméterezés kétszer folytonosan differenciálható, azaz $\gamma \in C^2(I)$. Ekkor a
$$\gamma''(t) := \big(\gamma_1''(t), \gamma_2''(t), \ldots, \gamma_n''(t)\big) \in \mathbb{R}^n \qquad (t \in I),$$
második deriváltját úgy értelmezzük, mint egy $I \to \mathbb{R}^n$ típusú függvény.

Tegyük fel még, hogy van olyan $t_0 \in I$ pont, ahol $\gamma''(t_0) \neq 0$, sőt a $\gamma'(t_0)$ és a $\gamma''(t_0)$ vektorok nem párhuzamosak egymással. Ekkor a $\gamma'(t_0)$ és $\gamma''(t_0)$ vektorok által kifeszített síkot a Γ görbe $\gamma_0 := \gamma(t_0)$ pontjához tartozó ***simulósíkjának*** nevezzük. Ennek
$$b(t_0) := \frac{\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)}{\big\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\big\|}$$
normálvektorát ***binormális egységvektornak*** nevezzük.

A simulósík elnevezés onnan ered, hogy a görbe γ_0 pontján átmenő érintőegyenesre illeszkedő síkok közül a görbe ehhez simul a legjobban. Síkgörbe simulósíkja minden pontban a görbe síkja. Az egyenesnek nincsen simulósíkja.

Példa: Adjuk meg a

$$\gamma(t) := (t,\, t^2,\, t^3) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

paraméterezésű görbe $\gamma(1/2)$ ponthoz tartozó simulósíkját és binormális egységvektorát!

Megoldás: Mivel

$$\gamma'(t) := (1,\, 2t,\, 3t^2) \quad \text{és} \quad \gamma''(t) := (0,\, 2,\, 6t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

így

$$\gamma'(1/2) := (1,\, 1,\, 3/4) \qquad \text{és} \qquad \gamma''(1/2) := (0,\, 2,\, 3).$$

A simulósík egyik normálvektora:

$$\gamma'(1/2) \times \gamma''(1/2) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 3/4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}\, e_1 - 3e_2 + 2e_3 = \left(\frac{3}{2},\, -3,\, 2\right).$$

Mivel $\gamma(1/2) := (1/2,\, 1/4,\, 1/8)$, ezért simulósík egyenlete:

$$\frac{3}{2}\, x - 3y + 2z = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} \qquad \Longrightarrow \qquad 6x - 12y + 8z = 1.$$

A binormális egységvektor:

$$b(1/2) := \frac{\gamma'(1/2) \times \gamma''(1/2)}{\left\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\right\|} = \frac{(3/2,\, -3,\, 2)}{\sqrt{9/4 + 9 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{61}}(3,\, -6,\, 4).$$

Az érintő és a binormális egységvektorok mellett kitüntetett szerepe van az

$$n(t_0) = e(t_0) \times b(t_0)$$

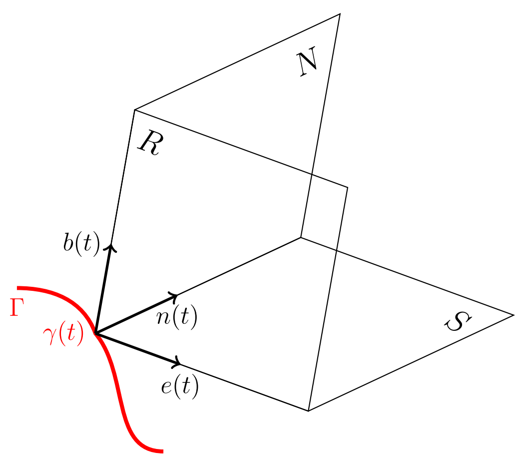
vektornak, amit ***főnormális egységvektornak*** nevezünk. Az $n(t_0)$ és $b(t_0)$ vektorok által kifeszített síkot ***normálsíknak***, az $e(t_0)$ és $b(t_0)$ vektorok által kifeszített síkot ***rektifikáló-síknak*** nevezzük.

Ha minden $t \in I$ pontnál a $\gamma'(t)$ és a $\gamma''(t)$ vektorok nem párhuzamosak egymással, akkor képezhetjük az $e(t)$, $n(t)$ és $b(t)$ egymásra merőleges egységvektorokat a teljes görbe mentén. Minden egyes t pontban egy jobbsodrású rendszert alkotnak:

$$e(t) \times n(t) = b(t), \qquad n(t) \times b(t) = e(t), \qquad b(t) \times e(t) = n(t).$$

Ezt a vektorhármast a görbe ***kísérő triéderének*** nevezzük.

A kísérő triéder a t érték haladtával foroghat a térben, de vektorai egymáshoz képest mindig ugyanúgy helyezkednek el.



Az ívhossz, mint természetes paraméterezés

Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ egy $\gamma \in [a,b] \to \Gamma$ paraméterezéssel rendelkező egyszerű sima görbe. Jelöljük $S(t)$-vel a görbe $\left\{\gamma(u) \;\middle|\; a \le u \le t\right\}$ részének ívhosszát. Ekkor a tanult formula alapján

$$S(t) = \int_a^t \left\|\gamma'(u)\right\| du \qquad \big(t \in [a,b]\big).$$

Minthogy a $\|\gamma'\|$ függvény folytonos, azért S integrálfüggvénye differenciálható, és deriváltja

$$S'(t) = \left\|\gamma'(t)\right\| > 0 \qquad \big(t \in [a,b]\big).$$

Ezért S szigorúan monoton növekvő függvény, következésképpen $S : [a,b] \to [0,L]$ egy folytonosan differenciálható bijekció, ahol L a Γ görbe teljes ívhossza az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor a $T := S^{-1}$ inverz függvénye egy $T : [0,L] \to [a,b]$ folytonosan differenciálható bijekció, amire

$$T'(s) = \frac{1}{S'\big(T(s)\big)} = \frac{1}{\left\|\gamma'\big(T(s)\big)\right\|} > 0 \qquad \big(s \in [0,L]\big)$$

teljesül az inverz függvény deriválási szabálya miatt. Ezért $\tilde{\gamma} := \gamma \circ T : [0,L] \to \Gamma$ szintén paraméterezése lesz a Γ görbének, amit ***természetes paraméterezésnek*** nevezünk.

Természetes paraméterezés deriváltja mindig egységvektor, hiszen

$$\tilde{\gamma}'(s) = \gamma'\big(T(s)\big) \cdot T'(s) = \frac{\gamma'\big(T(s)\big)}{\left\|\gamma'\big(T(s)\big)\right\|} \qquad \big(s \in [0,L]\big),$$

azaz $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$ minden $s \in [0,L]$ esetén. Így $e(s) = \tilde{\gamma}'(s)$, azaz természetes paraméterezés mellett az $e(s)$ érintő egységvektor és a $\tilde{\gamma}'(s)$ érintővektor megegyezik. Fordítva, ha van olyan γ paraméterezés, amire $\|\gamma'(s)\| = 1$ minden $s \in [0,b]$ esetén, akkor

$$S(t) = \int_0^t \left\|\gamma'(s)\right\| ds = \int_0^t 1\, ds = t \qquad \big(t \in [0,b]\big),$$

tehát t a görbe $\left\{\gamma(u) \;\middle|\; a \le u \le t\right\}$ részének ívhossza. Ez azt jelenti, hogy egy $\gamma \in [a,b] \to \Gamma$ paraméterezésű görbének egyetlen olyan természetes paraméterezése van, amelynek kezdőpontja $\gamma(a)$ és végpontja $\gamma(b)$.

Példa: Írjuk fel a

$$\gamma(t) := \left(t - \sin t,\ 1 - \cos t,\ 4 \sin \tfrac{t}{2}\right) \qquad \left(t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]\right)$$

paraméterezésű görbét a természetes paraméter segítségével!

Megoldás: Mivel

$$\gamma'(t) := \left(1 - \cos t,\ \sin t,\ 2 \cos \tfrac{t}{2}\right) \qquad \left(t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]\right),$$

így az előzőek szerint

$$s = S(t) = \int\limits_{-\pi/2}^{t} \left\|\gamma'(u)\right\| du = \int\limits_{-\pi/2}^{t} \sqrt{(1-\cos u)^2 + \sin^2 u + 4\cos^2 \tfrac{u}{2}}\, du =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{t} \sqrt{2 - 2\cos u + 4\cos^2 \tfrac{u}{2}}\, du = \int\limits_{-\pi/2}^{t} \sqrt{2 - 2\cos u + 4\,\frac{1+\cos u}{2}}\, du =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{t} 2\, du = 2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \left(t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]\right).$$

Tehát

$$s = 2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad s = 2t + \pi \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \frac{s-\pi}{2}.$$

Így a természetes paraméterezés:

$$\tilde{\gamma}(s) := \left(\tfrac{s-\pi}{2} - \sin\left(\tfrac{s-\pi}{2}\right), 1 - \cos\left(\tfrac{s-\pi}{2}\right), 4\sin\left(\tfrac{s-\pi}{4}\right)\right) \qquad \left(s \in [0, 2\pi]\right).$$

A $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$ $\left(s \in [0, L]\right)$ azonosságnak még van egy fontos következménye. Ha $\tilde{\gamma} \in C^2[a, b]$, akkor

$$1 = \left\|\tilde{\gamma}'(s)\right\|^2 = \left(\tilde{\gamma}_1'(s)\right)^2 + \cdots + \left(\tilde{\gamma}_n'(s)\right)^2$$

mindkét oldalának differenciálásával:

$$0 = 2\tilde{\gamma}_1'(s)\tilde{\gamma}_1''(s) + \cdots + 2\tilde{\gamma}_n'(s)\tilde{\gamma}_n''(s) \qquad \Longrightarrow \qquad \left\langle \tilde{\gamma}'(s), \tilde{\gamma}''(s) \right\rangle = 0 \qquad \left(s \in [0, L]\right).$$

következésképpen a $\tilde{\gamma}'(s)$ és a $\tilde{\gamma}''(s)$ vektorok mindig egymásra merőlegesek. Ha $\tilde{\gamma}''(s) \neq 0$, akkor igazolható, hogy

$$n(s) = \frac{\tilde{\gamma}''(s)}{\left\|\tilde{\gamma}''(s)\right\|} \qquad \text{és} \qquad b(s) = \frac{\tilde{\gamma}'(s) \times \tilde{\gamma}''(s)}{\left\|\tilde{\gamma}''(s)\right\|}.$$

Görbület és torzió

A görbülettel a görbének az egyenestől való eltérését mérjük. Akkor lesz nagy a görbület egy adott pontban, ha annak környezetében a érintő jelentősen változtatja az irányát.

Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima görbe $\gamma : I \to \Gamma$ paraméterezéssel, $t_0 \in I$ és $\Delta t \neq 0$ egy valós szám. Jelölje

- $\Delta\alpha$ a $\gamma'(t_0)$ és a $\gamma'(t_0 + \Delta t)$ vektorok által bezárt szöget,
- ΔS a $\gamma(t_0)$ és a $\gamma(t_0 + \Delta t)$ görbepontok közötti görbeszakasz ívhosszát.

A $\gamma(t_0)$ ponthoz tartozó ***görbület***:

$$\kappa(t_0) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta S}.$$

Igazolható, hogy ha $\gamma \in C^2(I)$, akkor

$$\kappa(t) = \frac{\left\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\right\|}{\left\|\gamma'(t)\right\|^3} \qquad (t \in I),$$

illetve természetes paraméterezés mellett

$$\kappa(s) = \left\|\tilde{\gamma}''(s)\right\| \qquad \bigl(s \in [0, L]\bigr).$$

Ez utóbbiból következik, hogy csak az egyenesek vagy az egyenes szakaszok tudják azt, hogy minden pontjukban a görbület nulla.

A torzióval (csavarodással) a térgörbének a síktól való eltérését mérjük. Egy síkgörbe a simulósíkjában van. Egy térgörbének van olyan pontja, amelynek környezete nincs a pont simulósíkjában. Ennek a távolodásának mértékét jelzi a torzió. Akkor lesz nagy a torzió egy adott pontban, ha annak környezetében a pontok jelentősen eltérnek a pont simulósíkjától. Mivel binormális vektor a simulósík normálvektora, ezért az eltérés a binormális vektorok egymással bezárt szögével jellemezhető.

Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima görbe $\gamma : I \to \Gamma$ paraméterezéssel, $t_0 \in I$ és $\Delta t \neq 0$ egy valós szám. Jelölje

- $\Delta\beta$ a $b(t_0)$ és a $b(t_0 + \Delta t)$ binormális egységvektorok által bezárt szöget,
- ΔS a $\gamma(t_0)$ és a $\gamma(t_0 + \Delta t)$ görbepontok közötti görbeszakasz ívhosszát.

A $\gamma(t_0)$ ponthoz tartozó ***torzió abszolút értéke***:

$$|\tau(t_0)| := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta S}.$$

A torzió előjeles mennyiség, lehet jobb- vagy balcsavarodású. Szemléletesen, t_0-hoz közeli $t_0+\Delta t$ paraméterértékekhez $\Delta t \to 0$ tartozó pontokban $b(t_0 + \Delta t)$ „forgása" a $\gamma'(t_0)$ érintővektor irányával szembenézve pozitívnak ill. negatívnak látszik (az óramutató járásával ellentétes ill. megegyező).

Igazolható, hogy ha $\gamma \in C^3(I)$, akkor

$$\tau(t) = \frac{\langle \gamma'(t) \times \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2} \qquad (t \in I),$$

illetve természetes paraméterezés mellett

$$\tau(s) = \frac{\langle \tilde{\gamma}'(t) \times \tilde{\gamma}''(t), \tilde{\gamma}'''(t) \rangle}{\kappa^2(s)} \qquad \bigl(s \in [0, L]\bigr).$$

Fontos megjegyezni, hogy adott három a_1, a_2, a_3 vektor az $\langle a_1 \times a_2, a_3 \rangle$ számot a vektorok ***vegyes szorzatának*** nevezzük, és – felhasználva a determináns fogalmát – a következő módon adható meg explicit alakban:

$$\langle a_1 \times a_2, a_3 \rangle = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

ahol $a_k := a_{k1}e_1 + a_{k2}e_2 + a_{k3}e_3$ $(k = 1, 2, 3)$.