Analízis II. gyakorlatok

Programtervező informatikus BSc
A és B szakirány

1. gyakorlat

Függvény határértéke

Szükséges ismeretek

- A határérték egységes definíciója. Speciális esetek.
- Kritikus határértékek.
- Nevezetes határértékek.
- Az exp, a sin és a cos függvény értelmezése.

Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$.

2. Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

határértéket, amennyiben az létezik, ha

(a) $f(x) := c \in \mathbb{R} \quad (x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})$, (b) $f(x) := |x| \quad (x \in \mathbb{R},\ a := 0)$,

(c) $f(x) := x^4 \quad (x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})$, (d) $f(x) := \dfrac{1}{x} \quad (x > 0, a > 0)$,

(e) $f(x) := \sqrt{x} \quad (x > 0,\ a > 0)$, (f) $f(x) := \sqrt[3]{x^2} \quad (x \in \mathbb{R},\ a := 0)$,

(g) $f(x) := e^x \quad (x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})$, (h) $f(x) := \sin x \quad (x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})$,

(i) $f(x) := \dfrac{x+2}{x^2-9} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\},\ a := -1\big)$,

(j) $f(x) := \begin{cases} x^4(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x}), & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ és $a := 0$.

Házi feladatok

1. Számítsa ki az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x) - \sin(2x)}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{e^x-1}$.

2. Számítsa ki a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

határértéket, amennyiben az létezik, ha

(a) $f(x) := \dfrac{1}{|x|+1} \ (x \in \mathbb{R},\ a := 0)$, (b) $f(x) := \cos x \quad (x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := \sqrt{x^2-1} \ (x \geq 1,\ a > 0)$, (d) $f(x) := \ln x \quad (x \geq 1,\ a > 1)$.

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki az alábbi határértékeket:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{tg}(2x)}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$.

2. Számítsa ki a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

határértéket, amennyiben az létezik, ha

(a) $f(x) := \dfrac{e^{-x}}{1+3\sin x}$ $\Big(x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}),\ a := 0\Big)$,

(b) $f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^3}\right), & \text{ha } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ és $a := 0$,

(c) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ és $a := 0$,

(d) $f(x) := \Big|\ln\left(|x|\right)\Big|$ $\Big(x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\ a := -1\Big)$,

(e) $f(x) := \sqrt{1-e^{-x^2}}$ $\Big(x \in \mathbb{R},\ a := 0\Big)$.

$\boxed{\text{2. gyakorlat}}$

Differenciálszámítás 1.

Szükséges ismeretek

- A pontbeli derivált definíciója.
- Deriválási szabályok: az algebrai műveletek és a derivált kapcsolata, az összetett függvény deriválása.
- Elemi függvények deriváltjai.

Feladatok

1. A definíció alapján lássuk be, hogy az

$$f(x) := \sqrt{x^2 - 1} \quad \big(x \in [1, +\infty)\big)$$

függvény deriválható minden $a \in (1, +\infty)$ pontban, és számítsuk ki $f'(a)$-t!

2. Számítsuk ki $f'(x)$-et, ha

(a) $f(x) := 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \quad (x > 0)$,

(c) $f(x) := x^3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5\,x^5} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$,

(d) $f(x) := x^a + a^x + ax + \dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{x} \quad \big(x > 0\big)$, $a > 0$ paraméter,

(e) $f(x) := x^2 \cdot \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$,

(f) $f(x) := \dfrac{x^3 + 2}{x^2 + x + 5} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(g) $f(x) := (5x^2 + 3x)^{2023} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(h) $f(x) := \sqrt{x + \sqrt{x}} \quad (x > 0)$,

(i) $f(x) := \sin \dfrac{x^2 + 1}{x + 3} \quad (x > -3)$,

(j) $f(x) := \sin^2\Big(\ln\sqrt{1 + \cos^2 x} + 1\Big) \quad (x \in \mathbb{R})$.

3. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények differenciálhatók, és számítsuk ki a derivált-függvényeiket:

(a) $f(x) := \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{1-x} \quad (x > 0)$,

(b) $f(x) := \big(\ln x\big)^{x+1} \quad (x > 1)$.

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki $f'(x)$-et, ha

(a) $f(x) := \dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}} \quad (x>0)$,

(b) $f(x) := \dfrac{e^x}{1+e^x} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := 3^{x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(d) $f(x) := \dfrac{1}{x} + \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} \quad (x>0)$,

(e) $f(x) := 2\,\mathrm{tg}\,x - 3\,\mathrm{ctg}\,x \quad \Big(x \in (0, \frac{\pi}{2})\Big)$,

(f) $f(x) := (2+\sin x)^{\cos x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki $f'(x)$-et, ha

(a) $f(x) := \sin\sqrt{1+x^3}$,

(b) $f(x) := \dfrac{(x+1)^3}{x^{3/2}}$,

(c) $f(x) := \ln\Big(e^{-x}\sin x\Big)$,

(d) $f(x) := \sqrt{1+\sin^2 x}\cdot\cos x$,

(e) $f(x) := e^x \sin x$,

(f) $f(x) := x^2\sqrt[3]{x}$,

(g) $f(x) := (x+2)^8(x+3)^6$,

(h) $f(x) := \Big(\sin^3 x\Big)\cdot\cos x$,

(i) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$,

(j) $f(x) := \dfrac{\sin(2x^2)}{3-\cos(2x)}$,

(k) $f(x) := \ln(x^2e^x)$,

(l) $f(x) := e^{\cos x} + \cos(e^x)$,

(m) $f(x) := \Big(x+\frac{1}{x^2}\Big)^{\sqrt{7}}$,

(n) $f(x) := \ln\Big(\cos x\Big)$,

(o) $f(x) := x^x$,

(p) $f(x) := (1+e^{3x+1})^{x^2+1}$,

(q) $f(x) := (\sin x)^{\cos x}$,

(r) $f(x) := (\mathrm{tg}\,x)^x$.

2. Hol deriválhatók az alábbi függvények? Ahol differenciálhatók, ott számítsa ki a deriváltat.

(a) $f(x) := \dfrac{1}{|x|+1} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := e^{|x|} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := |\ln(1+x)| \ (x > -1)$,

(d) $f(x) := \ln|x| \ (x \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$,

(e) $f(x) := x^2(\mathrm{sign}\,x + \mathrm{sign}\,|x-1|) \ (x \in \mathbb{R})$.

■ További feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy ha $f \in D\{a\}$, akkor

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Mutassa meg, hogy az állítás megfordítása nem igaz.

2. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f \in D(\mathbb{R})$ és $f' = f$. Bizonyítsa be, hogy van olyan $c \in \mathbb{R}$ szám, hogy

$$f(x) = ce^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Az $\ln' 1 = 1$ egyenlőség alapján vezessük le, hogy

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

4. Alkalmas függvények differenciálhatóságának a definíciójára gondolva számítsa ki az alábbi határértékeket:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h}, \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2+x-2}.$$

5. Igaz-e az, hogy ha $f, g \notin D\{a\}$, akkor $f+g$ (illetve $f\cdot g$) sem deriválható a-ban?

6. Adjon meg olyan $f, g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényeket és olyan $a\in\mathbb{R}$ pontot, amelyekre

(a) $g \in D\{a\}$ és $f \notin D\{g(a)\}$

(b) $g \notin D\{a\}$ és $f \in D\{g(a)\}$

(c) $g \notin D\{a\}$ és $f \notin D\{g(a)\}$

teljesül, azonban $f\circ g \in D\{a\}$.

7. Tegyük fel, hogy a $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény differenciálható. Fejezze ki az f függvény deriváltját g segítségével, ha:

(a) $f(x) := x^2 g(x) \quad (x\in\mathbb{R})$,

(b) $f(x) := g(x^2) \quad (x\in\mathbb{R})$,

(c) $f(x) := g^2(x) \quad (x\in\mathbb{R})$,

(d) $f(x) := g(g(x)) \quad (x\in\mathbb{R})$,

(e) $f(x) := g(e^x) \quad (x\in\mathbb{R})$,

(f) $f(x) := e^{g(x)} \quad (x\in\mathbb{R})$,

(g) $f(x) := g(\ln x) \quad (x>0)$,

(h) $f(x) := \ln|g(x)| \quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{y \mid g(y)=0\})$.

8. Legyenek $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ és $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ differenciálható függvények. Fejezze ki h'-t f és g segítségével, ha

(a) $h(x) := \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}} \quad (x\in\mathbb{R})$,

(b) $h(x) := f(g(\sin x)) \quad (x\in\mathbb{R})$,

(c) $h(x) := \log_{f(x)}\big(g(x)\big) \quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{y \mid f(y)=1\})$.

3. gyakorlat

Differenciálszámítás 2.

Szükséges ismeretek

- Az inverz függvény deriváltja.
- Lineáris közelítés.
- Az érintő értelmezése.
- Egyoldali deriváltak.

Feladatok

1. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) := \sqrt{e^{2x-1}+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény invertálható, inverze differenciálható és határozzuk meg $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{2}\right)$-t!

2. Legyen

$$f(x) := \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\left(x^2+1\right)^5} \qquad (x > -1).$$

(a) Vizsgáljuk meg deriválhatóság szempontjából az f függvényt, és határozzuk meg az f' deriváltfüggvényét!

(b) Mutassuk meg, hogy a függvény grafikonjának a $\left(0, f(0)\right)$ pontban van érintője, és írjuk fel az érintőegyenes egyenletét!

3. Hol deriválható az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény? Ahol differenciálható, ott számítsuk ki a deriváltat!

4. Legyenek a, b és c valós paraméterek. Határozzuk meg az

$$f(x) := \begin{cases} ax^2+bx+c, & \text{ha } \in (-\infty, 0) \\ e^x, & \text{ha } \in [0, +\infty) \end{cases}$$

függvény deriváltfüggvényét!

Házi feladatok

1. Mutassa meg, hogy az

$$f(x) := x^3 + x, \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény invertálható, $f^{-1} \in D$, és számítsa ki $\left(f^{-1}\right)'(2)$-t.

2. Írja fel az f függvény grafikonjának az a abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét, ha

$$f(x) := \sin\frac{x-1}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a = \frac{1}{2}.$$

3. Hol deriválható az

$$f(x) := \begin{cases} 1-x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

függvény? Ahol differenciálható, ott számítsa ki a deriváltat!

■ Gyakorló feladatok

1. Írja fel az f függvény grafikonjának az a abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét:

(a) $f(x) := \dfrac{x+1}{x-1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}), \quad a = 3;$

(b) $f(x) := \sqrt{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a = \dfrac{1}{2};$

(c) $f(x) := \sin x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a = 1/2;$

(d) $f(x) := \dfrac{1}{\ln^2(x - \frac{1}{x})} \quad (x > 1), \quad a = 2;$

(e) $f(x) := x^{\ln x} \quad (x > 0), \quad a = e^2.$

2. Írja fel az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű kör egy (a, b) pontjában húzott érintőegyenesének az egyenletét!

3. Írja fel az alábbi egyenletek által meghatározott síkgörbéknek a megadott pontokhoz tartozó érintőjük egyenletét:

(a) $y = \dfrac{x}{x^2-2}, \ (2, 1);$

(b) $y = e^x + e^{2x}, \ (0, 2);$

(c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \ (4, 1).$

4. Keressen az $y = e^x$ egyenletű görbéhez olyan érintőt, amely

(a) párhuzamos az $x - 4y = 1$ egyenessel,

(b) átmegy az origón.

5. Hol deriválhatók az alábbi függvények? Ahol differenciálhatók, ott számítsa ki a deriváltat.

(a) $f(x) := |3x - 1|, \quad (x \in \mathbb{R}),$

(b) $f(x) := e^{|x|} \quad (x \in \mathbb{R}),$

(c) $f(x) := |\ln(1 + x)| \ (x > -1),$

(d) $f(x) := \ln|x| \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$

(e) $f(x) := x^2(\operatorname{sign} x + \operatorname{sign}|x - 1|) \ (x \in \mathbb{R}).$

6. Hol deriválhatók az alábbi függvények? (a, b és c valós paraméterek.) Ahol differenciálhatók, ott számítsa ki a deriváltat.

(a) $f(x) := \begin{cases} ax + x^2, & x < 0 \\ x - x^2, & x \geq 0, \end{cases}$ (b) $f(x) := \begin{cases} 1 - ax, & x < 0 \\ e^{-x^2}, & x \geq 0, \end{cases}$

(c) $f(x) := \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0, \end{cases}$ (d) $f(x) := \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ a \sin x + x + b, & x > 0. \end{cases}$

■ További feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x) := x + e^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény invertálható, $f^{-1} \in D^2$, és számítsa ki $\left(f^{-1}\right)''(1)$-et.

2. Igazolja az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $1 + x < e^x \ \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right)$,

(b) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(x+1) < x \ \ (x \in \mathbb{R}^+)$,

(c) $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2} \ \ (x \in \mathbb{R}^+)$,

(d) $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

3. Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény végtelen sokszor deriválható az $\mathbb{R}$ halmazon, és $f^{(n)}(0) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

4. Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített természetes szám. Igazolja, hogy

(a) $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$;

(b) $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x, \quad (x \in \mathbb{R})$;

(c) $\ln^{(n)}(1+x) = (-1)^{n+1} \dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (x \in (-1, +\infty); \ \ n \geq 1)$;

(d) $\sin^{(n)} x = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$;

(e) $\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$.

4. gyakorlat

Differenciálszámítás 3.

Szükséges ismeretek

- A monotonitás és a derivált kapcsolata.
- Lokális szélsőértékekre vonatkozó szükséges, illetve elégséges feltételek.
- Az abszolút szélsőértékek.

Feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi függvények monotonitási intervallumait, valamint a lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit:

(a) $f(x) := 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \dfrac{x}{x^2 - 10x + 16} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 8\})$.

2. Számítsuk ki a következő függvények abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit:

(a) $f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \quad \big(x \in [-1, 4]\big)$,

(b) $f(x) := \dfrac{x}{x^2 + 1} \quad \big(x \in [-\frac{3}{2}, 2]\big)$.

3. Egy 100 cm^2 területű, négyzet alakú lemez sarkaiból egybevágó négyzeteket vágunk le, majd a lemez széleit felhajtjuk és dobozt készítünk belőle. Mekkora legyen a levágott négyzetek oldala, hogy a doboz térfogata maximális legyen?

4. Hogyan kell megválasztani az 1 liter térfogatú, mindkét végén zárt, henger alakú konzervdoboz méreteit, hogy az anyagköltség minimális legyen? Az anyagköltség a doboz felszínével egyenesen arányos.

Házi feladatok

1. Határozza meg

$$f(x) := x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény monotonitási intervallumait, valamint a lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

2. Határozza meg

$$f(x) := \frac{e^x}{x} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$$

függvény monotonitási intervallumait, valamint a lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

3. Határozza meg az

$$f(x) := \frac{x}{x^2 + x + 1} \quad \big(x \in [-2, 0]\big)$$

függvény abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit!

4. A $6x + y = 9$ egyenletű egyenesen keresse meg a $(-3, 1)$-hez legközelebbi pontot.

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki a következő függvények abszolút szélsőértékhelyeit és abszolút szélsőértékeit:

(a) $f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad \big(x \in [-3, 3]\big)$,

(b) $f(x) := \big(x^2 - x + 1\big) \cdot e^{-x} \quad \big(x \in [-2, 3]\big)$,

(c) $f(x) := x^2 \cdot e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(d) $f(x) := 2x + \dfrac{200}{x} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$.

2. Egységnyi kerületű téglalapok közül melyiknek legnagyobb, illetve legkisebb a területe?

3. Az $y^2 - x^2 = 4$ egyenletű hiperbolának mely pontja van legközelebb a $(2, 0)$ pothoz?

4. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik átmegy a $(3, 5)$ ponton és az első síknegyedből a legkisebb területű részt vágja le.

5. Igazolja, hogy ha két pozitív szám összege állandó, szorzatuk akkor a legnagyobb, ha a két szám egyenlő!

6. Határozza meg az R sugarú félkörbe írt legnagyobb területű téglalap méreteit, ha a téglalap egyik oldala a félkör átmérőjén fekszik!

7. Keresse meg azt a maximális területű téglalapot az első síknegyedben, amelynek az egyik csúcsa az origó, az ebből kiinduló két oldala a koordinátatengelyekre illeszkedik, és az origóval szemközti csúcs az

$$f(x) := e^{-3x} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$$

függvény grafikonján helyezkedik el!

■ További feladatok

1. Mutassa meg, hogy ha $f \in D(\mathbb{R})$ és f páros (páratlan), akkor f' páratlan (páros)!

2. Milyen $p \in \mathbb{R}$ esetén van az $x^3 - 6x^2 + 9x + p = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke?

3. Vizsgálja meg van-e lokális szélsőértéke az

$$f(x) := (x - a)^n \, \varphi(x) \quad (x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R})$$

függvénynek az $x = a$ pontban, ha a φ függvény folytonos az a pontban, $\varphi(a) \neq 0$ és n egy pozitív egész szám!

4. Legfeljebb mekkora lehet annak a gerendának a hossza, amelyet egy 4 m átmérőjű, kör keresztmetszetű toronyba, egy a torony falán vágott 2 m magas ajtón át bevihetünk?

5. Két, egymást derékszögben metsző egyenes egy-egy pontja egyidejűleg kezd a metszéspont felé mozogni. Az egyik 100 m, a másik 60 m távolságban indul a metszésponttól. Az első sebessége 4 m/s, a másiké 2 m/s. Mikor lesz a két pont egymáshoz legközelebb, és mekkora lesz ekkor egymástól a távolságuk?

6. Egy 5 m széles csatornán szálfákat úsztatnak. A csatornából egy $2,5$ m széles mellékág vezet le, amelynek az iránya az eredetivel derékszöget zár be. Legfeljebb hány méter hosszúságú szálfát tudunk a szóban forgó mellékágra terelni?

5. gyakorlat

Differenciálszámítás 4.

Szükséges ismeretek

- Trigonometrikus függvények és inverzeik.
- Teljes függvényvizsgálat.

Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:

$$\operatorname{arc\,sin} \tfrac{1}{2}, \quad \operatorname{arc\,sin}\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \operatorname{arc\,cos}\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$\operatorname{arc\,tg} 1, \quad \operatorname{arc\,tg}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{3}.$$

2. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázoljuk az

$$f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját!

3. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázoljuk az

$$f(x) := \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

függvény grafikonját!

4. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázoljuk az

$$f(x) := x \cdot \ln^2 x \qquad (x > 0)$$

függvény grafikonját!

Házi feladatok

1. Számítsa ki az alábbi függvényértékeket:

$$\operatorname{arc\,cos}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \log_{1/4} \tfrac{1}{1024}, \quad e^{-2\ln 3}, \quad 8^{\log_4 9}.$$

2. Teljes függvényvizsgálat végzése után szemléltesse az

$$f(x) := \left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

függvény grafikonját!

3. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := x - \operatorname{arctg}(2x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját!

4. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := \frac{e^x}{1+e^x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját!

■ Gyakorló feladatok

1. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken, és vázolja a grafikonjukat:

(a) $f(x) := 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\})$,

(c) $f(x) := x + 2 - \dfrac{4x}{x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(d) $f(x) := \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\})$,

(e) $f(x) := e^{2x-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(f) $f(x) := \dfrac{1+x^2}{e^{x^2}} \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(g) $f(x) := e^{\frac{1}{1-x}} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$,

(h) $f(x) := \ln(x^2-1) \qquad (|x| > 1)$,

(i) $f(x) := \dfrac{\ln x}{x} \qquad (x > 0)$,

(j) $f(x) := x \ln|x| \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$,

(k) $f(x) := \ln\left(x^2 + 2x + 2\right) \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(l) $f(x) := x^x \qquad (x > 0)$.

■ További feladatok

1. Számítsa ki az $\arcsin(\sin 10)$ függvényértéket!

Megoldás. A definíció alapján

$$\arcsin(\sin 10) = y \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \quad \iff \quad \sin y = \sin 10.$$

Emlékeztetünk arra, hogy

$$\sin y = \sin z \quad \iff \quad y - z = 2k\pi \ \text{ vagy } \ y + z = (2l+1)\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}). \ \text{Így}$$

$$\sin y = \sin 10 \quad \iff \quad y - 10 = 2k\pi \ \text{ vagy } \ y + 10 = (2l+1)\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Mivel $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ezért a $\pi \approx 3,14$ közelítést felhasználva azt kapjuk, hogy $y = 10 + 2k\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $(\forall\, k \in \mathbb{Z})$. Az első eset tehát nem lehetséges. A második esetben $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pontosan akkor teljesül, ha $l = 1$, azaz $y = -10 + 3\pi$ (≈ -0.58). Ezzel beláttuk, hogy $\arcsin(\sin 10) = -10 + 3\pi$.

2. Szemléltesse az

$$f(x) := \arcsin(\sin x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját!

Megoldás. A sin függvény, következésképpen az f is 2π szerint periodikus. Így f-et elég megvizsgálni egy 2π hosszúságú intervallumon, például $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$-n.

Az arc sin függvény definíciójából következik, hogy

$$\arcsin(\sin x) = y \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \quad \Longleftrightarrow \quad \sin x = \sin y \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Legyen $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. A $\sin_{|\,[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ függvény $\uparrow$, ezért a $\sin x = \sin y$ egyenlőség csak $x = y$ esetén teljesül. Így

$$f(x) = x, \quad \text{ha} \ \ x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

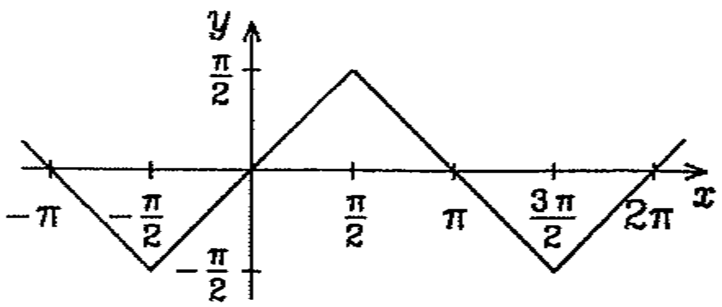
Tegyük fel, hogy $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Ekkor

$$\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}, \quad \text{azaz} \quad -\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}.$$

A $\sin x = \sin(\pi - x) = \sin y$ egyenlőség csak akkor igaz, ha $\pi - x = y$. Így

$$f(x) = \pi - x, \quad \text{ha} \ \ x \in \left[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right].$$

A fentiek alapján az f függvény grafikonját az alábbi ábrán szemléltetjük:



3. Teljes függvényvizsgálat végzése után szemléltesse az

$$f(x) := \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\big)$$

függvény grafikonját.

Megoldás.

$\boxed{1.}$ ***Kezdeti vizsgálatok***. A deriválási szabályok alapján f minden $x \neq \pm 1$ pontban akárhányszor deriválható. A függvény páratlan, hiszen

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3 + x}{x^2 - 1} = -f(x) \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\big).$$

Másrészt

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} = \frac{x(x^2 + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0.$$

Előjelvizsgálat

	$x<-1$	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	$x>1$
f	$-$	$+$	0	$-$	$+$

$\boxed{2.}$ ***Monotonitás***. Minden $x \neq \pm 1$ valós szám esetén

$$f'(x) = \frac{(3x^2+1)(x^2-1)-(x^3+x)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2-2)^2-5}{(x^2-1)^2}.$$

$$f'(x)=0 \quad\iff\quad (x^2-2)^2-5=0 \quad\iff\quad x^2 = 2\pm\sqrt{5}$$

Mivel csak $2+\sqrt{5}>0$, így $x = x_1 := \sqrt{2+\sqrt{5}} \approx 2,058$ vagy $x=-x_1 \approx -2,058$.

	$x<-x_1$	$-x_1$	$-x_1<x<-1$	$-1<x<1$	$1<x<x_1$	x_1	$x>x_1$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\uparrow$	$-3,33$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	3.33	$\uparrow$
lok.		max				min	

$\boxed{3.}$ ***Konvexitás***. Minden $x \neq \pm 1$ valós szám esetén

$$f''(x) = \frac{(4x^3-8x)(x^2-1)^2-(x^4-4x^2-1)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(x^4-4x^2-1)\cdot 4x}{(x^2-1)^3} = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

$$f''(x)=0 \quad\iff\quad x=0.$$

	$x<-1$	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	$x>1$
f''	$-$	$+$	0	$-$	$+$
f	$\frown$	$\smile$	0	$\frown$	$\smile$
			infl.		

$\boxed{4.}$ ***Határértékek és aszimptoták***. A határértékeket most a $(+\infty)$-ben és a $(-\infty)$-ben, ill. a -1 és az 1 pontok bal és jobb oldalán kell megvizsgálni. Mivel tudjuk, hogy a függvény páratlan, így a számítások leegyszerűsödnek.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x}{x^2-1} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{2x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{2} = +\infty, \qquad \text{és így} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad (f \text{ páratlan}).$$

$$\lim_{x\to1\pm0} f(x) = \lim_{x\to1\pm0}\frac{x^3+x}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1\pm0}\frac{x^3+x}{x+1}\cdot\lim_{x\to1\pm0}\frac{1}{x-1} = \frac{2}{2}\cdot(\pm\infty) = \pm\infty,$$

és így $\lim_{x\to-1\pm0} f(x) = \pm\infty$, hiszen f páratlan.

Mivel a

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+x}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+x}{x^3-x} = \left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+1}{3x^2-1} =$$

$$= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x}{6x} = 1 := A,$$

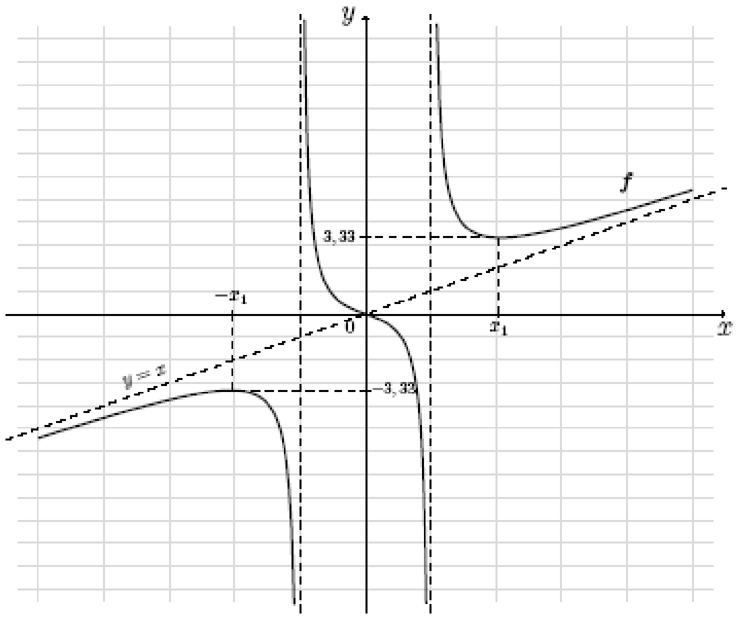
és

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-Ax) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+x}{x^2-1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2-1} = \left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'Hospital}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{2x} = 0 := B$$

ezért f-nek a $-\infty$-ben és a $+\infty$-ben van aszimptotája, és ez mindkét esetben az $y = x$ egyenletű egyenes

$\boxed{5.}$ ***A függvény grafikonja.***



4. A $\sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ $(y \in \mathbb{R})$ azonosság felhasználásával bizonyítsa be, hogy

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \big(x \in [-1, 1]\big).$$

Milyen kapcsolat van az arc sin és az arc cos függvények garfikonjai között?

5. A $\operatorname{ctg} y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ $\big(y \in (0, \pi)\big)$ azonosság felhasználásával bizonyítsa be, hogy

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big).$$

Milyen kapcsolat van az arc tg és az arc ctg függvények garfikonjai között?

6. gyakorlat

Differenciálszámítás 5.

Szükséges ismeretek

- L'Hospital szabályok.
- Taylor-polinomok és Taylor-sorok.

Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x)$,

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(xe^{1/x} - x\right)$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{1/x} \qquad (a, b, c > 0)$.

2. Rendezzük át a $2x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ polinomot $(x+1)$ hatványai szerint! A feladat általánosításaként mutassuk meg, hogy ha P egy legfeljebb n-edfokú polinom és $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

3. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \qquad (x > -1).$$

(a) Írjuk fel az f függvény 0 pont körüli harmadfokú Taylor-polinomját, és határozzuk meg, hogy a $\left[0, \frac{1}{10}\right]$ intervallomon mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt.

(b) Számítsuk ki az $A := \dfrac{1}{\sqrt[3]{1,03}}$ szám egy közelítő értékét, és a közelítés hibáját.

Házi feladatok

1. Számítsa ki a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0+0} \sin x \cdot \ln x$,

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x-x^2} \cdot \ln(x^2 - x + 1)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0+0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg} x} - \dfrac{1}{x}\right)$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0+0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. Írja fel az

$$f(x) := \sqrt[3]{1+x} \qquad \big(x \in (-1, +\infty)\big)$$

függvény 0 pont körüli második Taylor-polinomját, $T_{0,2}(f,x)$-et. Adjon becslést az

$$|f(x) - T_{0,2}(f,x)|$$

hibára a $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ intervallumon.

■ Gyakorló feladatok

1. Mutassa meg, hogy a

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

határérték létezik, és azt számítsa is ki!

2. Írja fel az f függvény $a = 0$ pont körüli n-edik Taylor-polinomját, $T_{n,a}(f,x)$-et. Adjon becslést az

$$|f(x) - T_{n,a}(f,x)|$$

hibára az I intervallumon, ha

(a) $f(x) := \sqrt{1+x} \quad (x \in (-1, +\infty)), \quad n = 2, \quad I = [0, 1];$

(b) $f(x) := \operatorname{tg} x \quad (|x| < \frac{\pi}{2}), \quad n = 3, \quad I = \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right].$

■ További feladatok

1. Adja meg a következő függvények 0 pont körüli Taylor-sorát:

(a) $f(x) := \sin^3 x \quad (x \in \mathbb{R}),$

(b) $f(x) := \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}).$

Milyen intervallumon állítja elő a Taylor-sor a függvényt?

Megoldás.

Megjegyzés. Egy f függvény 0 pont körüli Taylor-sorának a felírásához ismernünk kell *minden* $n \in \mathbb{N}$ számra az $f^{(n)}(0)$ függvényértékeket. Ezek meghatározása az „esetek többségében” nem egyszerű feladat. Már *ismert* Taylor-sorok felhasználásával a feladat azonban jóval *egyszerűbben* is megoldható. Itt is ilyen eljárásokat fogunk bemutatni. □

(a) Az alapvető trigonometrikus képleteket felhasználva $\sin^3 x$ a következőképpen „linearizálható”:

$$\sin^3 x = \sin x \cdot \Big(1 - \cos^2 x\Big) = \sin x - \sin x \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} =$$

$$= \frac{\sin x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(x + 2x) + \sin(x - 2x)}{2} = = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Tudjuk, hogy a sin függvényt a 0 pont körüli Taylor-sora előállítja:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Így azonnal felírhatjuk a $g(x) := \sin 3x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény 0 pont körüli Taylor-sorát. Ez a sor is az egész $\mathbb{R}$-en előállítja g-t, ezért

$$\sin 3x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot 3^{2n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A fentiek alapján tehát *egyszerűen* megkapjuk a kérdezett Taylor-sort. Ez a sor is egész $\mathbb{R}$-en előállítja a $\sin^3$ függvényt, ezért

$$\sin^3 x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(1 - 3^{2n}\right) \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R})\,.$$

(b) Vegyük észre, hogy az

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \quad \left(x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}\right)$$

azonosság alapján a törtet két egyszerű alakú tört összegére bonthatjuk. Itt a törtek mindegyike geometriai sor összegeként fogható fel.

Például az elsőt ilyen alakban is írhatjuk:

$$\frac{1}{x-3} = \frac{-1}{3-x} = \frac{-1}{3\left(1 - \frac{x}{3}\right)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{3}}.$$

Itt a második tényező $|x| < 3$ esetén az $\frac{x}{3}$ hányadosú geometriai összegeként fogható fel. Tehát, ha $x \in (-3, 3)$, akkor

$$\frac{1}{x-3} = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \cdots + \frac{x^n}{3^n} + \cdots\right) = -\frac{1}{3} - \frac{x}{3^2} - \frac{x^2}{3^3} - \cdots - \frac{x^n}{3^{n+1}} - \cdots\,.$$

Hasonlóan:

$$-\frac{1}{x-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} + \cdots + \frac{x^n}{2^{n+1}} + \cdots, \quad \text{ha } x \in (-2, 2).$$

Elvégezve a tagonkénti összeadást megkapjuk az f függvény 0 pont körüli Taylor-sorát. A fentiekből az is következik, hogy a Taylor sor a $(-2, 2)$ intervallumban állítja elő az f függvényt:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6^2}x + \frac{19}{6^3}x^2 + \cdots + \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{6^{n+1}}x^n + \cdots\,. \ \blacksquare$$

2. Milyen $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens az

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

hatványsor, és mi az összegfüggvény?

3. Számítsa ki az $\operatorname{arc\,tg}$ függvény deriváltjait a 0 pontban.

7. gyakorlat

Primitív függvény, határozatlan integrál 1.

Szükséges ismeretek

- A primitív függvény és a határozatlan integrál fogalma.
- Alapintegrálok.
- A határozatlan integrál linearitása.
- Az első helyettesítési szabály. Speciális esetek.
- A parciális integrálás szabálya.

Feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

(a) $f(x) := 6x^2 - 8x + 3 \quad \big(x \in \mathbb{R}),$

(b) $f(x) := \dfrac{x^2}{x^2+1} \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(c) $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big),$

(d) $f(x) := \dfrac{\cos^2 x - 5}{1 + \cos 2x}\, dx \quad \big(x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\big).$

2. Számítsuk ki a következő határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+3}\, dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

(b) $\displaystyle\int \sin^3 x \cdot \cos x\, dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} \quad \big(x \in (1, +\infty)\big),$

(d) $\displaystyle\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x\, dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

(e) $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}\, dx \quad \Big(x \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)\Big).$

3. A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int (x^2 + 2x - 1)e^{2x}\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(b) $\displaystyle\int e^{2x} \sin x\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

(c) $\displaystyle\int x^2 \cdot \ln x\, dx \quad \big(x > 0\big),$

(d) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg}(3x)\, dx \quad (x \in \mathbb{R}).$

4. Parciális integrálással számítsuk ki az

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \quad \Big(x \in (-1,1)\Big)$$

határozatlan integrált!

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}\,dx \quad \Big(x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\Big),$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx \quad \Big(x \in (0,+\infty)\Big),$

(c) $\displaystyle\int \cos(2x+1) \cdot e^{3x+2}\,dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

(d) $\displaystyle\int \arcsin(3x)\,dx \quad (x \in \mathbb{R}).$

■ Gyakorló feladatok

1. Keresse meg azt az f függvényt, amelyre

(a) $\displaystyle f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad (x > -1), \quad f(0) = 2;$

(b) $\displaystyle f''(x) = \frac{1}{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}^+), \quad f(1) = 0, \; f'(2) = 0.$

2. Számítsa ki a következő határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x - 5}{1+\cos 2x}\,dx \quad \Big(x \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big)\Big),$

(b) $\displaystyle\int \frac{8x+14}{\sqrt[4]{(2x^2+7x+8)^5}}\,dx \quad \Big(x \in \mathbb{R}\Big),$

(c) $\displaystyle\int x \cdot \ln^2 x\,dx \quad \Big(x \in \mathbb{R}^+\Big),$

(d) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx \quad \Big(x > 0\Big),$

(e) $\displaystyle\int x^5 \cdot e^{x^3}\,dx \quad \Big(x \in \mathbb{R}\Big).$

8. gyakorlat

Primitív függvény, határozatlan integrál 2.

Szükséges ismeretek

- Racionális törtfüggvények primitív függvényei.

Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}\,dx \qquad \big(x \in (-\infty,\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R},\ n = 1,2,\dots\big)$,

(b) $\displaystyle\int \frac{3}{2x+6}\,dx \quad \big(x \in (-3,+\infty)\big)$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(d) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$.

2. Fogalmazzuk meg a parciális törtekre bontás tételét, és gyakoroljuk az ebből adódó integrálási módszert:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+8}\,dx \quad \big(x \in (2,4)\big)$,

(b) $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2+2x+1}\,dx \quad \big(x \in (-1,+\infty)\big)$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-x+3}{x^2-1}\,dx \quad \big(x \in (-1,1)\big)$,

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+4x}\,dx \quad \big(x \in (0,+\infty)\big)$,

(e) $\displaystyle\int \frac{x^3+9x-9}{x^4+9x^2}\,dx \quad \big(x \in (0,+\infty)\big)$.

Házi feladatok

1. Számítsa ki a követekező integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{7x+5}{x^2+2x-3}\,dx \quad \big(x \in (-3,1)\big)$,

(b) $\displaystyle\int \frac{2-x}{x^2-2x+10}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3-4}{x^3+x}\,dx \quad (x > 0)$.

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{7x+2}{x^2+x-2}\,dx \quad \big(x \in (-2,1)\big)$,

(b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}\,dx \quad \big(x > 3\big)$,

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$,

(d) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-x+5}\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$,

(e) $\displaystyle\int \frac{6x}{x^2-2x+7}\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$,

(f) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{(x-1)^3}\,dx \quad \big(x > 1\big)$,

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}\,dx \quad \big((-1,+\infty)\big)$,

(h) $\displaystyle\int \frac{x^3-x^2+4x-2}{x^4+x^2}\,dx \quad \big(x > 0\big)$,

(i) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^4-1}\,dx \quad \big(x > 1\big)$,

(j) $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3+x^2+1}{x^3-1}\,dx \quad \big(x \in (1,+\infty)\big)$,

(k) $\displaystyle\int \frac{x^3-4}{x^3+x}\,dx \quad \big(x \in (0,+\infty)\big)$,

(l) $\displaystyle\int \frac{(x+2)^2}{x^4+2x^2+1}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(m) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(2x-1)^3}\,dx \quad \big(x > 1/2\big)$,

(n) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+2x^2+2}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(o) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(p) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^4}\,dx \quad \big(x > 1\big)$.

■ További feladatok

1. Igazolja, hogy tetszőleges $n = 2, 3, 4, \ldots$ esetén

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cdot\cos x\cdot\sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\cdot\int \sin^{n-2} x\,dx.$$

Hogyan lehet erre a képletre „rájönni”?

2. Igazolja, hogy tetszőleges $n = 2, 3, 4, \dots$ esetén

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cdot \sin x \cdot \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \cdot \int \cos^{n-2} x\, dx.$$

3. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$

Ötlet: Alkalmazza a következő azonosságot:

$$\begin{aligned} 2\,\frac{1}{(1+x^2)^2} &= \frac{(1+x^2)+(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{x}{1+x^2}\right)'. \end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big).$

4. Igazolja, hogy tetszőleges $n = 1, 2, \dots$ esetén

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx = \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx.$$

Ennek felhasználásával határozza meg a következő integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^3}\, dx \quad (x \in \mathbb{R}).$

$\boxed{\text{9. gyakorlat}}$

Primitív függvény, határozatlan integrál 3.

■ Szükséges ismeretek

- A második helyettesítési szabály.
- Racionális törtfüggvények integrálása.

■ Feladatok

1. $\int \boldsymbol{S(e^x)\,dx}$ **alakú integrálok**, ahol $S(u)$ egyváltozós polinomok hányadosa. Ebben az esetben a

$$\boxed{t = e^x}$$

helyettesítést, azaz az $x = \ln t =: g(t)$ helyettesítő függvényt alkalmazva a feladatot racionális törtfüggvény integráljára vezetjük vissza.

Ezt felhasználva számítsuk ki az

(a) $\displaystyle\int \frac{4}{e^{2x} - 4}\,dx \quad (x > \ln 2),$

(b) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^x + 2}\,dx \quad (x \in \mathbb{R})$

határozatlan integrálokat!

2. $\int \boldsymbol{R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx}$ **alakú integrálok**, ahol $R(u, v)$ kétváltozós polinomok hányadosa. Ezekben a gyökös kifejezést egy új változóval helyettesítve racionális törtfüggvény integrálására jutunk. Pontosabban: legyen

$$\boxed{t := \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}}.$$

A $x = g(t)$ helyettesítő függvényt úgy kapjuk meg, hogy ebből x-et kifejezzük, majd a második helyettesítési szabályt alkalmazzuk.

Ezt felhasználva számítsuk ki az

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\,dx \quad (x > 0),$

(b) $\displaystyle\int x\sqrt{5x+3}\,dx \quad (x > -\tfrac{3}{5}),$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\,dx \quad (x > 0).$

határozatlan integrálokat!

3. Számítsuk ki az

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\,dx \quad (x > 0)$$

határozatlan integrált!

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki az következő határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \quad (x\in\mathbb{R}),$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt[3]{x+1}+1}\,dx \quad (x>0),$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-3}{x}}\,dx \quad \left(x>\tfrac{3}{2}\right).$

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki az

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx \quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$$

határozatlan integrált

(a) az $x=\operatorname{sh} t=g(t) \quad (t\in\mathbb{R})$ helyettesítéssel,

(b) parciális integrálással,

(c) az alábbi azonosság felhasználásával:

$$2\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Számítsa ki az

$$\int \frac{e^x+4}{e^{2x}+4e^x+3}\,dx \quad (x\in\mathbb{R})$$

határozatlan integrált!

3. Számítsa ki a következő határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx \quad (x>0),$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2}\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx \quad (x>0),$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x-1}\cdot\sqrt{\frac{x}{x-1}}\,dx \quad (x>1).$

■ További feladatok

Megjegyzések.

1^o Sok esetben primitív függvényeket **különböző módszerekkel** is meghatározhatunk, és esetenként kaphatunk (formai szempontból) különböző képleteket is. Az egyenlőségük igazolásához vegyük két különböző alakú primitív függvény különbségét, és lássuk be, hogy ennek a deriváltja a megadott intervallumon azonosan nulla.

2^o Az „ügyeskedésekről”. Sok integrandustípus esetén vannak olyan általános módszerek, amelyekkel a primitív függvényeket meg tudjuk határozni. Ezek alkalmazásai azonban időnként meglehetősen sok számolást igényelnek. Bizonyos esetekben az integrálandó függvény alkalmas („ügyes”) átalakításával jóval egyszerűbben is célhoz érhetünk. □

1. Számítsa ki az

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \quad \big(x \in (-1,1)\big)$$

integrált kétféleképpen:

(a) Alkalmazza a $t = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ helyettesítést.

(b) Szorozza meg az integrálandó függvényt $\sqrt{\dfrac{1+x}{1+x}} = 1$-gyel.

A végeredmény:

(a)

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = 2\,\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} + c \qquad \big(x \in (-1,1)\big),$$

(b)

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + c \qquad \big(x \in (-1,1)\big).$$

A *Mathematica* programcsomag a következő eredményt adja:

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = 2\,\arcsin\sqrt{\frac{1+x}{2}} - \sqrt{1-x^2} + c \qquad \big(x \in (-1,1)\big).$$

2. Az $\boldsymbol{\int R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)\,dx}$ alakú integrálokat, ahol $R(u,v)$ kétváltozós polinomok hányadosa és $a \neq 0$ az ***Euler-féle helyettesítésekkel*** racionális törtfüggvények integrálására vezethetjük vissza.

(a) Ha ax^2+bx+c-nek van valós gyöke, akkor $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, tehát

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = \big|x-x_1\big|\sqrt{\frac{a(x-x_2)}{x-x_1}},$$

és ezzel a feladatot visszavezettük az $\int R\Big(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\,dx$ típusú integrálra.

(b) Ha ax^2+bx+c-nek nincs valós gyöke, akkor mindenütt pozitívnak kell lennie, mert különben az integrálandó függvény sehol sincs értelmezve. Így $a > 0$ és $c > 0$. Ebben az esetben a

$$t \pm \sqrt{a}\cdot x = \sqrt{ax^2+bx+c},$$

vagy a

$$tx \pm \sqrt{c} = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

helyettesítések mindegyike racionális törtfüggvény integráljára vezet.

Számítsa ki a következő integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{3x-x^2-2}}\,dx \quad \big(x \in (1,2)\big),$ illetve $\big(x \in (2,+\infty)\big);$

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big),$ mindkét helyettesítéssel.

$\boxed{\textbf{10. gyakorlat}}$

Primitív függvény, határozatlan integrál 4.

Feladatok

1. $\int \boldsymbol{R}\,(\sin x, \cos x)\; dx$ **alakú integrálok**, ahol $R(u,v)$ kétváltozós polinomok hányadosa. Ebben az esetben a

$$\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

helyettesítést, azaz az $x = 2\operatorname{arc\,tg} t =: g(t)$ helyettesítő függvényt alkalmazva a feladatot racionális törtfüggvény integráljára vezetjük vissza.

Ezt felhasználva számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\, dx \quad \big(x \in (0,\pi)\big),$

(b) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\, dx \quad \big(x \in (0,\pi)\big).$

2. Számítsuk ki az

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\, dx \quad \big(x \in (0,\pi)\big)$$

határozatlan integrált az integrandus alábbi átalakításaival:

(a) az integrálandó függvényt $\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = 1$-gyel megszorozzuk,

(b) félszögekre térünk át!

Hasonlítsuk össze a háromféleképpen kapott eredményt!

Megjegyzés. Az integrandus a $(0,2\pi)$ intervallumon folytonos, ezért van primitív függvénye. A (b) átalakítással ezen az intervallumon is megkapjuk a primitív függvényt.

3. Számítsuk ki az

(a) $\displaystyle\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\, dx \quad (x \in \mathbb{R}),$

(b) $\displaystyle\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\, dx \quad (x \in \mathbb{R})$

határozatlan integrálokat!

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx \quad \big(x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})\big),$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\,dx \quad \big(x \in (0,\pi)\big),$

(c) $\displaystyle\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x\,dx \quad (x \in \mathbb{R}).$

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx \quad \big(x \in (-\pi,\pi)\big),$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{2\,\sin x-\cos x+5}\,dx \quad \big(x \in (-\pi,\pi)\big),$

(c) $\displaystyle\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x\,dx \quad (x \in \mathbb{R}).$

■ További feladatok

1. Az integrandus $f^\alpha \cdot f'$ típusúra való átalakítása után számítsa ki az

$$\int \frac{\cos x+\sin x}{1-\sin(2x)}\,dx \qquad \Big(x \in \big(0, \tfrac{\pi}{4}\big)\Big)$$

határozatlan integrált!

2. A $t = \operatorname{tg} x$ helyettesítéssel számítsuk ki az

$$\int \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx \qquad \Big(x \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big)\Big)$$

határozatlan integrált!

Megjegyzés. Az $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ alakú integrálokra a $t = \operatorname{tg} x$ helyettesítés is célhoz vezet akkor, ha minden $(x,y) \in \mathcal{D}_R$ esetén $(-x,-y) \in \mathcal{D}_R$ és $R(-x,-y) = R(x,y)$.

3. A $t = \sin x$ helyettesítéssel számítsa ki az

$$\int \frac{\cos x}{\cos^2 x+\sin^3 x-1}\,dx \qquad \Big(x \in \big(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\big)\Big)$$

határozatlan integrált!

Megjegyzés. Az $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ alakú integrálokra a $t = \sin x$ helyettesítés is célhoz vezet akkor, ha minden $(x,y) \in \mathcal{D}_R$ esetén $(x,-y) \in \mathcal{D}_R$ és $R(x,-y) = -R(x,y)$.

4. A $t = \cos x$ helyettesítéssel számítsa ki az

$$\int \frac{\sin x}{2 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \cos x} \, dx \qquad \left(x \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right)\right)$$

határozatlan integrált!

Megjegyzés. Az $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ alakú integrálokra a $t = \cos x$ helyettesítés is célhoz vezet akkor, ha minden $(x, y) \in \mathcal{D}_R$ esetén $(-x, y) \in \mathcal{D}_R$ és $R(-x, y) = -R(x, y)$.

5. Legyen $m, n \in \mathbb{N}$. Számítsa ki az

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx \quad (x \in \mathbb{R})$$

határozatlan integrált!

11. és 12. gyakorlat

A határozott integrál és alkalmazásai

Szükséges ismeretek

- A Newton–Leibniz-tétel.
- Síkidom területe.
- Síkbeli görbe ívhossza.
- Forgástest térfogata.
- Forgástest felszíne.
- Összeg határértékének kiszámolása.

Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat:

(a) $\displaystyle\int_{10}^{66} \frac{1}{x-\sqrt[3]{x-2}-2}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{\sqrt{3}-2} \frac{dx}{x^2+4x+5},$

(d) $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{dx}{x^2-3x+2},$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^{-x}\cdot\cos^2 x\,dx.$

2. Számoljuk ki az $y=x-1$ egyenletű egyenes és az $y^2=2x+6$ egyenletű parabola által közrezárt korlátos síkidom területét!

3. Milyen arányú részekre osztja az $y^2=2x$ egyenletű parabola az $x^2+y^2=8$ egyenletű kör által határolt síkrész területét?

4. Határozzuk meg az

$$f(x) := \sin^2 x \quad \big(x\in[0,\pi]\big)$$

függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát!

5. Határozzuk meg az

$$f(x) := \frac{2(x-1)^{3/2}}{3} \qquad (2\le x\le 5)$$

függvény grafikonjának a hosszát!

6. Bizonyítsuk be, hogy
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\ln 2.$$

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$,

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\, dx$.

2. Határozza meg annak a korlátos síkidomnak a területét, amelyet az $x = 0$ egyenletű egyenes, valamint az $y = \sqrt{x}+1$, $y = 3-x$ és az $y = \dfrac{x^2}{4}$ egyenletű görbék határolnak.

3. Határozza meg az
$$f(x) := \sqrt{\sin x}\cdot e^x, \qquad \big(x\in[0,\pi]\big)$$
függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát!

■ Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az $y = x^3$, az $x^2+y^2 = 2$ egyenletű görbék és az x-tengely által közrezárt, az első síknegyedbe eső korlátos síkrész területét!

2. Határozza meg az $\alpha > 0$ valós paramétert úgy, hogy az $f(x) := \alpha\cdot\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ függvény grafikonja felezze el a $g(x) := \sqrt{1-x}$ $(x\in[0,1])$ függvény grafikonja alatti területet!

3. Számítsa ki az $x = 1$, $\quad x = 4$, $\;y = \dfrac{1}{x}$ és az $y = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkidom területét!

4. Számítsa ki az

(a) $y = x^4$ és az $y = 4-x^4$,

(b) $y = x^4$ és az $y = 3x^2-2$.

egyenletű görbék által közrezárt korlátos síkidom területét!

5. Határozza meg az

(a) $f(x) := \sqrt{\operatorname{arc\,tg} x}$ $\;(x\in[0,1])$,

(b) $f(x) := \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ $\;\big(x\in[0,4]\big)$,

(c) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{3+2\cos x}}$ $\;\big(x\in[0,\pi/3]\big)$,

(d) $f(x) := xe^x$ $\;(x\in[0,1])$

függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát!

6. Határozza meg az

(a) $f(x) = \sqrt{x} \quad (1 \le x \le 2)$;

(b) $f(x) = x^{3/2} \quad (0 \le x \le 4)$;

(c) $f(x) = \ln\big(\cos x\big) \quad (0 \le x \le \frac{\pi}{3})$,

(d) $f(x) := \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x} \quad (1/2 \le x \le 1)$

függvény grafikonjának a hosszát.

7. Számítsa ki a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}}\right)$$

határértéket!

8. Számítsa ki a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{1+n^2} + \frac{n}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

határértéket!

■ További feladatok

1. Határozza meg az

$$f(x) := \sin x \quad \big(x \in [0,\pi]\big)$$

függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest felszínét!

Megoldás. $0 \le f \in C^1[0,\pi]$, és a deriváltja

$$f'(x) = \cos x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A forgástest felszíne:

$$A := 2\pi \int_0^\pi f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_0^\pi \sin x \cdot \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx =$$

$$= -2\pi \int_0^\pi (\cos x)' \cdot \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx.$$

Ez egy $\int f \circ g \cdot g'$ alakú integrál. Először az

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx \qquad (x \in \mathbb{R})$$

integrált határozzuk meg. Ehhez alkalmazzuk az

$$x = \operatorname{sh} t =: g(t) \qquad (x, t \in \mathbb{R})$$

helyettesítést.

A g függvény deriválható:

$$g'(t) = \operatorname{ch} t \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

továbbá $g'(t) > 0$, így g szigorúan monoton növekvő, tehát invertálható, és

$$g^{-1}(x) = t = \operatorname{ar\,sh} x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

A második helyettesítési szabály alapján:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} \cdot \operatorname{ch} t\,dt = \int \operatorname{ch}^2 t\,dt = \int \frac{1+\operatorname{ch}(2t)}{2}\,dt = \\
&= \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \operatorname{ch}(2t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sh}(2t)}{2} + c = \\
&= \frac{1}{2}\cdot t + \frac{1}{2}\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + c = \frac{1}{2}\cdot t + \frac{1}{2}\operatorname{sh} t\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} + c\Big|_{t=\operatorname{ar\,sh} x} = \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{ar\,sh} x + \frac{1}{2}\cdot x \cdot \sqrt{1+x^2} + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Tehát a felszín:

$$\begin{aligned}
A &= -2\pi \int_0^\pi (\cos x)' \cdot \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx = -2\pi\left[\frac{1}{2}\operatorname{ar\,sh}\cos x + \frac{1}{2}\cdot\cos x\cdot\sqrt{1+\cos^2 x}\right]_0^\pi = \\
&= -\pi\left[\operatorname{ar\,sh}\cos x + \cos x\cdot\sqrt{1+\cos^2 x}\right]_0^\pi = \\
&= -\pi\left(\left(\operatorname{ar\,sh}\cos\pi + \cos\pi\cdot\sqrt{1+\cos^2\pi}\right) - \left(\operatorname{ar\,sh}\cos 0 + \cos 0\cdot\sqrt{1+\cos^2 0}\right)\right) = \\
&= -\pi\left(\left(\operatorname{ar\,sh}(-1) - \sqrt{2}\right) - \left(\operatorname{ar\,sh} 1 + \sqrt{2}\right)\right) = \\
&= 2\pi\left(\operatorname{ar\,sh} 1 + \sqrt{2}\right) \underset{\boxed{\operatorname{ar\,sh} x = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}{=} \underline{\underline{2\pi\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\right)}} \approx 14.424.
\end{aligned}$$

2. Bizonyítsa be, hogy

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx + \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Megoldás.

1. Algebrai megoldás. Számítsuk ki a megadott integrálokat!

Az arc tg függvény határozatlan integrálja parciális integrálással:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx &= \int 1\cdot\operatorname{arc\,tg} x\,dx = \int (x)'\cdot\operatorname{arc\,tg} x\,dx = \\
&= x\cdot\operatorname{arc\,tg} x - \int x\cdot(\operatorname{arc\,tg} x)'\,dx = x\cdot\operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \\
&= x\cdot\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\cdot\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx = \\
&= x\cdot\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c = \\
&= x\cdot\operatorname{arc\,tg} x - \ln\sqrt{1+x^2} + c \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}),
\end{aligned}$$

így a Newton–Leibniz-tétel alapján:

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \left[x\cdot\operatorname{arc\,tg} x - \ln\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \left(\operatorname{arc\,tg} 1 - \ln\sqrt{2}\right) - (0 - \ln 1) = \underline{\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}}.$$

A tg függvény határozatlan integrálja:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = \\ &= -\ln\cos x + c \qquad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ c \in \mathbb{R}\right),\end{aligned}$$

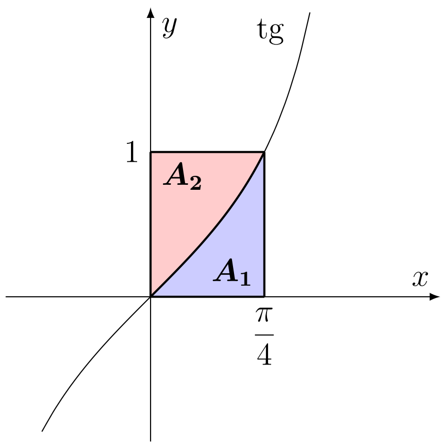
így a Newton–Leibniz-tétel alapján:

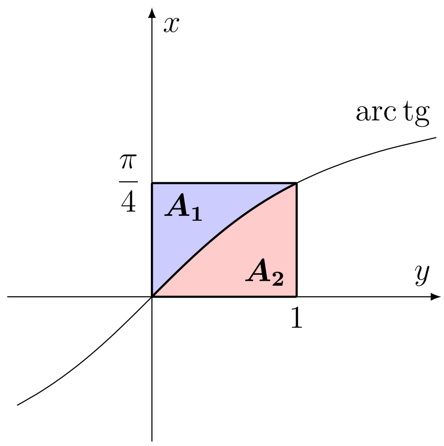
$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx = -\left[\ln\cos x\right]_0^{\pi/4} = -\left(\ln\cos\frac{\pi}{4} - \ln\cos 0\right) = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln 1 = \underline{\ln\sqrt{2}}.$$

Tehát:

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx + \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2} + \ln\sqrt{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

2. Geometriai megoldás.





A tg függvény (lásd bal oldali ábra) két részre bontja az

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le y \le 1\right\}$$

téglalapot:

$$\begin{aligned}A_1 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le y \le \operatorname{tg} x\right\}, \\ A_2 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ \operatorname{tg} x \le y \le 1\right\}.\end{aligned}$$

A tg grafikonja alatti A_1 síkidom területe:

$$t(A_1) = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx.$$

A grafikon feletti A_2 síkidom az x és y változók felcserélésével értelmezhető az arc tg grafikonja alatti területként (lásd jobb oldali ábra):

$$\begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg} x \le y \le 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \le \operatorname{tg} x \le 1 \\ \operatorname{tg} x \le y \le 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le \operatorname{tg} x \le y \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le \operatorname{arc\,tg} y, \end{cases}$$

azaz

$$A_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \operatorname{arc\,tg} y \right\},$$

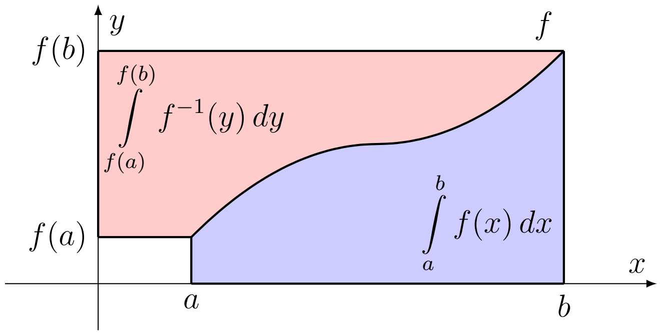
így a területe:

$$t(A_2) = \int_0^1 \operatorname{arc\,tg} y \, dy = \int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x \, dx.$$

A két síkidom kiadja a teljes téglalapot, tehát:

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x \, dx + \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \, dx = t(A_2) + t(A_1) = t(A) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

3. Általános megoldás. (L. Wikipédia) Fejezzük ki f^{-1} integrálját f integráljának segítségével!



Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertálható és deriválható (így létezik primitív függvénye), akkor f^{-1}-nek is létezik primitív függvénye:

$$\int f^{-1}(y)\,dy \underset{\boxed{y=f(x)}}{=} \int f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = \int x \cdot f'(x)\,dx =$$

$$= x \cdot f(x) - \int x' \cdot f(x)\,dx = x \cdot f(x) - \int f(x)\,dx \bigg|_{x=f^{-1}(y)}$$

Továbbá, ha $f \in R[a,b]$, akkor $f^{-1} \in R[f(a), f(b)]$, és

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy = [x \cdot f(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\,dx.$$

Átrendezve (lásd ábra):

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy = [x \cdot f(x)]_a^b = b \cdot f(b) - a \cdot f(a),$$

tehát

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx + \int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx + \int_{\operatorname{tg} 0}^{\operatorname{tg}(\pi/4)} \operatorname{arc\,tg} y\,dy =$$

$$= [x \cdot \operatorname{tg} x]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - 0 \cdot \operatorname{tg} 0 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

3. A Stirling-formula:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1,$$

azaz $n!$ közelítésére az alábbi formula érvényes:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \text{ha } n \to +\infty.$$

Megoldás. Az alapötlet az, hogy az $\int_1^n \ln x\,dx$ integrált, azaz az ln függvény $[1,n]$ intervallumon vett grafikonja alatti területet a beírt trapézok területének összegével közelítjük.

A szóban forgó integrál könnyen meghatározható:

$$\int_1^n \ln x\,dx = \Big[x\ln x - x\Big]_1^n = n\ln n - n + 1 = \ln n^n - \ln e^n + \ln e = \ln\Big(e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\Big).$$

Tekintsük most az ln (konkáv!) függvény grafikonjába beírt azon töröttvonalat, amelynek szögpontjai a görbe $1,2,\ldots,n$ abszcisszákhoz tartozó pontjai. Az e töröttvonal alatti síkidom területe egy háromszögnek és $(n-1)$ trapéznak a területéből tevődik össze, és az értéke:

$$\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 2 + \ln 3}{2} + \cdots + \frac{\ln(n-1) + \ln 2}{2} =$$
$$= \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n - \frac{1}{2}\ln n = \ln\Big(\frac{n!}{\sqrt{n}}\Big),$$

ezért a területek különbsége:

$$\triangle_n := \ln\Big(e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\Big) - \ln\Big(\frac{n!}{\sqrt{n}}\Big) = \ln\left(\frac{e\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}{n!}\right) > 0 \qquad (\forall\, n\in\mathbb{N}).$$

($\triangle_n$ azért pozitív, mert az ln függvény konkáv az egész $\mathbb{R}^+$-on.) A geometriai tartalomból nyilvánvaló, hogy a $(\triangle_n)$ sorozat monoton növekedő. Egy szellemes geometriai megfontolásból az is következik, hogy a $(\triangle_n)$ sorozat felülről korlátos és $\triangle_n \le \frac{\ln 2}{2}$ minden $n\in\mathbb{N}$ esetén. Ezért **a** $(\triangle_n)$ **sorozat konvergens**. Az exp függvény szigorúan monoton növekedő, ezért az

$$\frac{e^{\triangle_n}}{e} = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}{n!}$$

sorozat is konvergens, és a határértéke pozitív. A sorozat reciproka, tehát az

$$a_n := \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

sorozat is konvergens. Feladatunk a határértékének a kiszámolása.

Ehhez két **észrevételt** érdemes megjegyezni: egyrészt azt, hogy

$$0 < \lim(a_n) = \lim\Big(\frac{a_n^2}{a_{2n}}\Big),$$

ami az $\frac{a_n^2}{a_{2n}} = a_n\cdot\frac{a_n}{a_{2n}}$ és $\lim(a_n) = \lim(a_{2n})$ nyilvánvaló következménye. A másik észrevétel az, hogy $\frac{a_n^2}{a_{2n}}$ a Wallis-formulával hozható kapcsolatba:

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{\big[n!\big]^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} n}\cdot\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n}}{(2n)!} = \frac{\big[2^n n!\big]^2}{(2n)!}\cdot\sqrt{\frac{2}{n}} =$$

$$= \frac{\big[2\cdot4\cdot6\cdots(2n)\big]^2}{1\cdot2\cdot3\cdots(2n)}\cdot\sqrt{\frac{2}{n}} = \frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}}.$$

A Wallis-formula alapján

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ezért

$$\lim(a_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}=\lim\Big(\frac{a_n^2}{a_{2n}}\Big)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot 2=\sqrt{2\pi},$$

ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}=1.$$

4. Határozza meg az alábbi szélsőértékeket:

(a) $\min\left\{\int_0^1 \left|x^2-c\right|\,dx \mid c\in\mathbb{R}\right\}$,

(b) $\max\left\{\int_a^b \left(2+x-x^2\right)\,dx \mid a,b\in\mathbb{R},\ a<b\right\}$.

5. Legyen $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény és

$$I(f)=\int_0^1 x^2 f(x)\,dx,\quad \text{valamint}\quad J(f)=\int_0^1 x\,(f(x))^2\,dx.$$

Határozza meg $I(f)-J(f)$ maximális értékét.