11. előadás

GÖRBÉK 1.

Egy anyagi pont mozgását a síkban vagy a térben úgy tudjuk legegyszerűbben leírni, ha egy rögzített koordináta rendszerre vonatkozóan megadjuk az anyagi pont helyzetét (az origóból a tömegpontba mutató vektort) az idő függvényében. Az így kapott valós változós vektor értékű függvényből meg kell tudnunk állapítani a mozgás kinematikai jellemzőit (pl. a sebességet és a gyorsulást).

A mozgó pont pályája egy ponthalmazt határoz meg a síkban vagy a térben. Ez a halmaz nem más, mint a pont helyzetét meghatározó $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ vagy $n = 3$) függvény Γ értékkészlete, ahol I egy (idő)intervallum. Bár egy ilyen Γ halmaz már görbének nevezhető, mi további feltételeket fogunk megkövetelni.

1. Definíció. *Akkor mondjuk, hogy $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) halmaz* **egyszerű sima görbe** *az $\mathbb{R}^n$ térben, ha létezik olyan I intervallumon értelmezett $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ függvény, amire*

- $\gamma : I \to \Gamma$ *bijekció,*
- $\gamma \in C^1(I)$ *és* $\forall t \in I\colon \gamma'(t) \neq 0$ *(nullmátrix).*

teljesül. A γ leképezést a **Γ görbe paraméterezésének** *nevezzük.*

Ebben a definícióban az egyszerű jelző arra utal, hogy a γ leképezés bijekció. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a mozgó pont a pályáját úgy futja be, hogy közben minden pontot csak egyszer érint, azaz nem tér vissza egy korábbi helyzetébe. Ezzel a kikötéssel kizártuk vizsgálataink köréből az önmagukat átmetsző görbéket. A sima jelzővel azt fejezzük ki, hogy a görbe paraméterezése folytonosan differenciálható, ami szemléletesen szólva azt jelenti, hogy a görbének nincsenek törései, és az érintő folytonosan változik.

Egy egyszerű sima görbének többféle paraméterezése van. Ti. adott $\gamma : I \to \Gamma$ paraméterezés és $\varphi : J \to I$ olyan intervallumon értelmezett folytonosan differenciálható bijekció, amelynek deriváltja nem tűnik el, akkor $\delta = \gamma \circ \varphi$ esetén igaz, hogy

- $\delta : J \to \Gamma$ bijekció,
- $\delta \in C^1(J)$ és $\forall t \in J\colon \delta'(t) = \gamma'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) \neq 0.$

Ezért δ szintén paraméterezése a Γ görbének.

2. Definíció. *Akkor mondjuk, hogy $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) halmaz* **egyszerű zárt görbe** *az $\mathbb{R}^n$ térben, ha létezik olyan $[a, b]$ véges zárt intervallumon értelmezett $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ függvény, amire:*

- $\gamma(a) = \gamma(b)$,
- γ *leszűkítése az $[a, b)$ intervallumra ($\gamma|_{[a,b)}$) paraméterezése a Γ görbének.*

Példa: A legegyszerűbb görbék az egyenes szakaszok. Legyen $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^n$ két különböző pont, amelynek helyzetvektora v_1 és v_2. A

$$\gamma(t) := v_1 + (v_2 - v_1)t \qquad \big(t \in [0,1]\big)$$

paraméterezéssel rendelkező görbét a ***P_1, P_2 pontokat összekötő ($\overline{P_1P_2}$) szakasznak***, míg a

$$\gamma(t) := v_1 + (v_2 - v_1)t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

paraméterezéssel rendelkező görbét a ***P_1, P_2 pontokon átmenő egyenesnek*** nevezzük. Nem nehéz igazolni, hogy γ valóban egy paraméterezés, ahol $\gamma'(t) = v_2 - v_1 \neq 0$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén.

Adott $\gamma : [a,b] \to \Gamma$ paraméterezésnél a $\Gamma_a := \gamma(a)$ és $\Gamma_b := \gamma(b)$ pontokat rendre ***a Γ görbe kezdő- és végpontjának*** nevezzük. A $\overline{P_1P_2}$ szakasznál P_1 a szakasz kezdőpontja és P_2 a szakasz végpontja, mert $v_1 = \gamma(0)$ és $v_2 = \gamma(1)$.

Példa: Legyen $R > 0$ és $C(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. A

$$\gamma(t) := \big(c_1 + R\cos t, c_2 + R\sin t\big) \in \mathbb{R}^2 \qquad \big(t \in [0, 2\pi]\big)$$

paraméterezéssel rendelkező zárt görbét ***C középpontú R sugarú körnek*** nevezzük. Nem nehéz igazolni, hogy $\gamma|_{[0,2\pi)}$ valóban egy paraméterezés, $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (c_1 + R, c_2)$ és

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \big(t \in [0, 2\pi]\big).$$

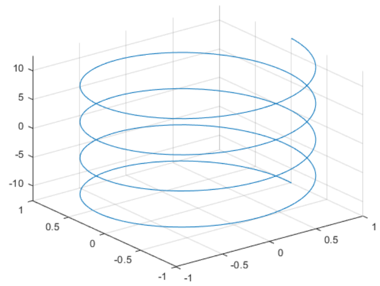
Könnyű kiszámítani, hogy ha $P(x,y)$ az origó középpontú R sugarú körnek egyik pontja, akkor az

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = R^2$$

egyenlet teljesül.

Példa: Adott $a, m > 0$ számok a

$$\gamma(t) := \left(a\cos t, a\sin t, \frac{m}{2\pi}\, t\right) \in \mathbb{R}^3 \qquad (t \in \mathbb{R})$$



paraméterezéssel rendelkező görbét ***a sugarú, m menetemelkedésű csavarvonalnak*** nevezzük. Nem nehéz igazolni, hogy γ valóban egy paraméterezés, ahol

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ m/2\pi \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Egy görbe paraméterezése egy $\gamma \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ típusú függvény, így $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ egy oszlopmátrix, amelynek elemei γ koordinátafüggvényeinek t-szerinti deriváltja. A továbbiakban ezt vektorként fogjuk tekinteni, azaz ha

$$\gamma(t) := \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n \qquad (t \in I),$$

akkor

$$\gamma'(t) := \big(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \ldots, \gamma_n'(t)\big) \in \mathbb{R}^n \qquad (t \in I).$$

és ***érintővektornak*** fogjuk hívni.

Görbék megadásának módjai

Tekintsük a $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ síkgörbét a

$$\gamma(t) := \big(x(t), y(t)\big) \in \mathbb{R}^2 \qquad (t \in I)$$

paraméterezéssel. Egy ilyen Γ görbe pontjainak a következő „megadási módozatai” lehetnek:

- ***Paraméteres alakban:*** A paraméterezésből kézenfekvő, hogy $(x, y) \in \Gamma$ akkor és csak akkor, ha az

  $$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right\} \qquad (t \in I)}$$

  paraméteres egyenletrendszer teljesül.

  Pl. az origó középpontú egységsugarú kör egy lehetséges paraméteres előállítása:

  $$\left.\begin{array}{r} x = \cos \pi t \\ y = \sin \pi t \end{array}\right\} \qquad \big(t \in [0, 2)\big).$$

  Azonban nem minden paraméteres egyenletrendszer egy egyszerű sima görbéhez vezet. Pl. az

  $$\left.\begin{array}{r} x = t^2 \\ y = t^3 \end{array}\right\} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

  esetén $\gamma(t) = (t^2, t^3) \quad \Longrightarrow \quad \gamma'(t) = (2t, 3t^2) \quad \Longrightarrow \quad \gamma'(0) = 0.$

- ***Függvénygrafikon alakjában:*** Ha $f : I \to \mathbb{R}$ egy intervallumon értelmezett folytonosan differenciálható függvény, akkor a

  $$\Gamma = Graf(f) := \Big\{\big(x, f(x)\big) \;\Big|\; x \in I\Big\}$$

  függvény grafikonja egyszerű sima görbeként írható fel a

  $$\boxed{\gamma(t) := \big(t, f(t)\big) \in \mathbb{R}^2 \qquad (t \in I)}$$

  paraméterezéssel. Vegyük észre, hogy

  $$\gamma'(t) = (1, f'(t)) \neq 0 \qquad (t \in I).$$

  Pl. az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ függvény grafikonjának egy paraméterezése:

  $$\gamma(t) := (t, t^2) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

- ***Implicit alakban:*** Ha $\exists F \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $\Gamma = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; F(x, y) = 0\Big\}$. Ekkor a görbe implicit alakja

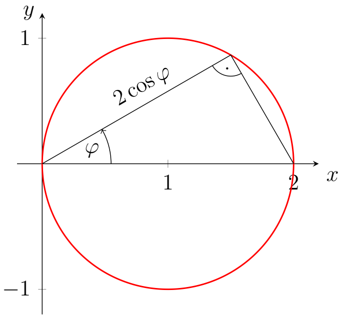
  $$\boxed{F(x, y) = 0.}$$

  Pl. az origó középpontú egységsugarú kör felírható

  $$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

  implicit alakban.

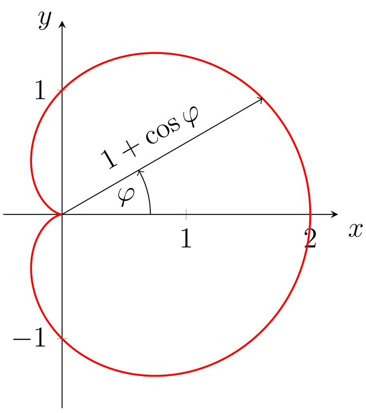
- ***Polárkoordinátás alakban:*** Az
$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$
síkbeli polárkoordináta-transzformáció mellett tegyük fel, hogy r felírható
$$\boxed{r = r(\varphi) \qquad (\varphi \in I)}$$
a φ függvényeként. Ekkor a
$$\gamma(t) := \big(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\big) \in \mathbb{R}^2 \qquad (t \in I)$$
paraméterezéssel állunk szembe.
Pl. az $r = 2$ $\big(\varphi \in [0, 2\pi]\big)$ polárkoordinátás alak az $x^2 + y^2 = r^2 = 4$ implicit alakhoz vezet, ami az origó középpontú 2 sugarú kör.
Egy másik példa az
$$r = 2\cos\varphi \qquad \big(\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]\big),$$
amiből $r^2 = 2r\cos\varphi$. Így
$$x^2 + y^2 = 2x \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x-1)^2 + y^2 = 1,$$
ami a $C(1, 0)$ középpontú egységsugarú kör.



Az előbbi síkgörbékkel ellentétben egy
$$\gamma(t) := \big(x(t), y(t), z(t)\big) \in \mathbb{R}^3 \qquad (t \in I)$$
paraméterezéssel megadott $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ térgörbe alternatív megadására kizárólag a
$$\boxed{\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \qquad (t \in I)}$$
paraméteres egyenletrendszert fogjuk használni.

Példa: Szemléltessük az
$$r = 1 + \cos\varphi \qquad \big(\varphi \in [0, 2\pi]\big)$$
egyenletű görbét (***kardioidat***, azaz ***szívgörbét***), és írjuk fel különböző megadási módon!

Megoldás: A görbe paraméteres alakja:
$$\left.\begin{aligned} x &= (1 + \cos\varphi)\cos\varphi \\ y &= (1 + \cos\varphi)\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad \big(\varphi \in [0, 2\pi]\big).$$
Ha $\varphi = 0$, akkor $r = 2$, ami megfelel a $P_1(2, 0)$ pontnak. Onnan indulva az r értéke csökken, ha φ értéke nő. Ha $\varphi = \pi/2$, akkor $r = 1$, ami megfelel a $P_2(0, 1)$ pontnak. r értéke tovább csökken $\varphi = \pi$-ig, és ott $r = 0$, ami megfelel az O origónak. A
$$\cos(\pi + \varphi) = \cos(\pi - \varphi)$$



azonosság miatt a görbe szimmetrikus az x tengelyre nézve. Az implicit alakja meghatározásához vegyük észre, hogy
$$r = 1 + \cos\varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad r^2 = r + r\cos\varphi \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x.$$

Görbék ívhossza

Az Analízis II. kurzuson láttuk, hogy valós-valós függvények grafikonjának az ívhosszát úgy érdemes értelmezni, hogy a grafikont törtvonallal közelítjük, és egy ilyen „elég finom” beírt törtvonal annyira fogja megközelíti a grafikon pontjaiból álló görbét, hogy hosszúsága elég közel lesz a keresett ívhosszhoz. Azt is láttuk, hogy a törtvonal finomításával nő ennek hosszúsága. Ezért a grafikon ívhosszát a beírt törtvonalak hosszának a szuprémumaként értelmeztük.

Hasonló megfontolásokból a

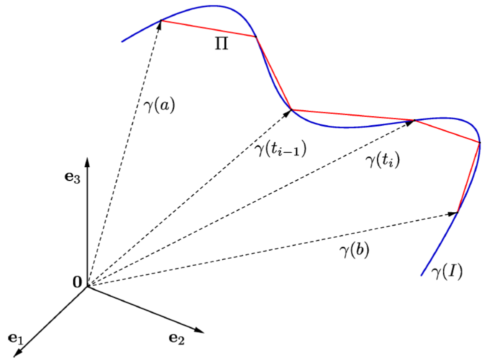
$$\gamma(t) := \big(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n \qquad (t \in [a, b])$$

paraméterezéssel megadott $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ térgörbék esetében ugyanazt a gondolatmenetet alkalmazzuk. Az $I = [a, b]$ intervallumnak egy

$$\tau\colon a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

felosztásából indulunk ki. A

$$\overline{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$



szakaszok egyesítésével a **Γ** ***görbébe írt poligont*** kapjuk, amelynek ***hossza***

$$\ell_\tau := \sum_{i=1}^{n} \big\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\big\|.$$

3. Definíció. *Akkor mondjuk, hogy a* Γ *görbe* **rektifikálható**, *ha a* Γ *görbébe írt poligonok hosszának halmaza korlátos. Ekkor az*

$$L = L_\Gamma := \sup_\tau \ell_\tau$$

számot a Γ **görbe ívhosszának** *nevezzük.*

Egyszerű sima görbék esetén érvényes a következő állítás.

1. Tétel. *Minden egyszerű sima* Γ *görbe rektifikálható, és ívhossza*

$$L_\Gamma = \int_a^b \big\|\gamma'(t)\big\|\, dt,$$

ahol γ *a* Γ *görbének egy paraméterezése.*

Más szavakkal, ha

$$\gamma(t) := \big(x(t), y(t), z(t)\big) \in \mathbb{R}^3 \qquad (t \in [a, b]),$$

akkor

$$L_\Gamma = \int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(z'(t)\big)^2}\, dt.$$

Vegyük észre, hogy valós-valós f függvénygrafikon ívhossza esetében megkapjuk a tanult

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(t)\big)^2}\, dt$$

összefüggést, hiszen ekkor $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$ és $z(t) = 0$.

Példa: Számítsuk ki a

$$\gamma(t) := \big(\cos t, \sin t, 2t\big) \qquad \big(t \in [0, 2\pi]\big)$$

paraméterezésű hengerre írt csavarvonal ívhosszát!

Megoldás: Mivel

$$\gamma'(t) := \big(-\sin t, \cos t, 2\big) \qquad \big(t \in [0, 2\pi]\big),$$

így

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (2)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{5}\, dt = 2\sqrt{5}\pi.$$

Az $r = r(\varphi)$ $\big(\varphi \in [a, b]\big)$ polárkoordinátás alakban megadott síkgörbék esetén

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= r(\varphi)\cos\varphi && \Longrightarrow && x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi, \\ y(\varphi) &= r(\varphi)\sin\varphi && \Longrightarrow && y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi, \end{aligned}$$

amiből

$$\big(x'(\varphi)\big)^2 + \big(y'(\varphi)\big)^2 = \big(r(\varphi)\big)^2 + \big(r'(\varphi)\big)^2.$$

Ezért

$$L = \int_a^b \sqrt{\big(r(\varphi)\big)^2 + \big(r'(\varphi)\big)^2}\, d\varphi.$$

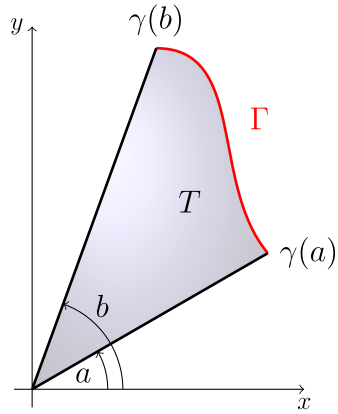
Területszámítás polárkoordinátás alakban

Tegyük fel, hogy ki akarjuk számolni az ábrán látható T síkidom területét, és a Γ határoló görbe az

$$r = r(\varphi) \qquad \big(\varphi \in [a, b]\big)$$

polárkoordinátás alakban van megadva. A tanult polárkoordináta-transzformációval a keresett terület

$$t(T) = \iint_T 1 = \iint_H r\, dr\, d\varphi,$$



ahol

$$H := \Big\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; a \le \varphi \le b,\; 0 \le r \le r(\varphi)\Big\}$$

normáltartomány a φ változóra nézve, hiszen $r(\varphi)$ folytonos függvény. Ezért

$$t(T) = \int_a^b \left(\int_0^{r(\varphi)} r\, dr \right) d\varphi = \int_a^b \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=r(\varphi)} d\varphi = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Fontos megjegyezni, hogy az előző formulával ki tudunk számolni egyszerű zárt görbék által közrezárt területeket is.