11. GYAKORLAT

Iterációs módszerek: Richardson iteráció

1.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alkalmazzuk a LER-re a Richardson iterációt!

(a) Milyen p-re lesz konvergens?

(b) Mi az optimális p érték?

(c) Mennyi a kontrakciós együttható az optimális p esetén?

2.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Írjuk fel a Richardson-iteráció vektoros alakját!

(b) Pontosan mely értékekre konvergál?

(c) Mi az optimális p paraméter és mennyi ekkor a kontrakciós együttható?

(d) Írjuk fel a p paraméterrel a módszer hibabecslését alkalmas vektornormában, ha a kezdővektor a $\mathbf{0}$ vektor!

3. Tekintsük az

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \Big(I - \frac{2}{c}A\Big)\mathbf{x}^{(k)} + \frac{2}{c} \cdot \mathbf{b}$$

Richardson-iterációt az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldására, ahol A szimmetrikus, pozitív definit mátrix és $0 < c \in \mathbb{R}$, melyre $\varrho(A) < c$. Igazoljuk, hogy az iteráció tetszőleges $\mathbf{x}^{(0)}$-ra konvergens!

4. Legyen A szimmetrikus. Adott $\mathbf{b}$ jobboldal esetén tekintsük az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER-hez tartozó Richardson-iterációt. Adjuk meg azt a lépésenként optimális p paramétert, melyre a reziduum vektor kettes normája minimális!

MEGOLDÁS

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $p \in \mathbb{R} \quad (p \neq 0)$.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$p\,A\mathbf{x} = p\,\mathbf{b}$$

$$\mathbf{0} = -p\,A\mathbf{x} + p\,\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} - p\,A\mathbf{x} + p\,\mathbf{b}$$

$$\boxed{\mathbf{x} = (I - p\,A)\mathbf{x} + p\,\mathbf{b}}$$

R(p) Richardson-iteráció p paraméterrel

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{(I - p\,A)}_{B_{\mathrm{R(p)}}}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{p\,\mathbf{b}}_{\mathbf{c}_{\mathrm{R(p)}}}$$

Tétel: A Richardson-iteráció konvergenciája

Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szimmetrikus, pozitív definit és sajátértékeire $m = \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n = M$ teljesül, akkor $R(p)$ (azaz az $Ax = b$ LER-re felírt $p \in \mathbb{R}$ paraméterű Richardson-iteráció) pontosan a

$$p \in \left(0, \frac{2}{M}\right),$$

paraméter értékekre konvergens minden kezdővektor esetén. Az optimális paraméter $p_0 = \frac{2}{M+m}$, a hozzá kapcsolódó kontrakciós együttható pedig:

$$\varrho(B_{R(p_0)}) := \frac{M-m}{M+m} = \left\|B_{R(p_0)}\right\|_2 = q.$$

1.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alkalmazzuk a LER-re a Richardson-iterációt!

(a) Milyen p-re lesz konvergens?

Megoldás:

Számítsuk ki az A sajátértékeit:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1^2 = (2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = (1-\lambda)(3-\lambda).$$

A sajátértékek $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 3$ mind pozitívak, ez azt jelenti, hogy az A mátrix pozitív definit. Mivel még szimmetrikus is, alkalmazhatjuk a Richardson iterációra vonatkozó tételt:

$$m = \min_i \lambda_i = 1, \qquad M = \max_i \lambda_i = 3$$

és a tétel alapján

$$\forall\, p \in \left(0, \frac{2}{M}\right) = \left(0, \frac{2}{3}\right)$$

esetén a Richardson iteráció konvergál tetsz. $\mathbf{x}^{(0)}$-ra.

(b) Mi az optimális p?

Megoldás:

Az optimális p:

$$p_0 = \frac{2}{m+M} = \frac{2}{1+3} = \frac{1}{2}.$$

(c) Mennyi a kontrakciós együttható az optimális p esetén?

Megoldás:

A kontrakciós együttható

$$q = \varrho(B_{R(p_0)}) = \frac{M-m}{M+m} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}.$$

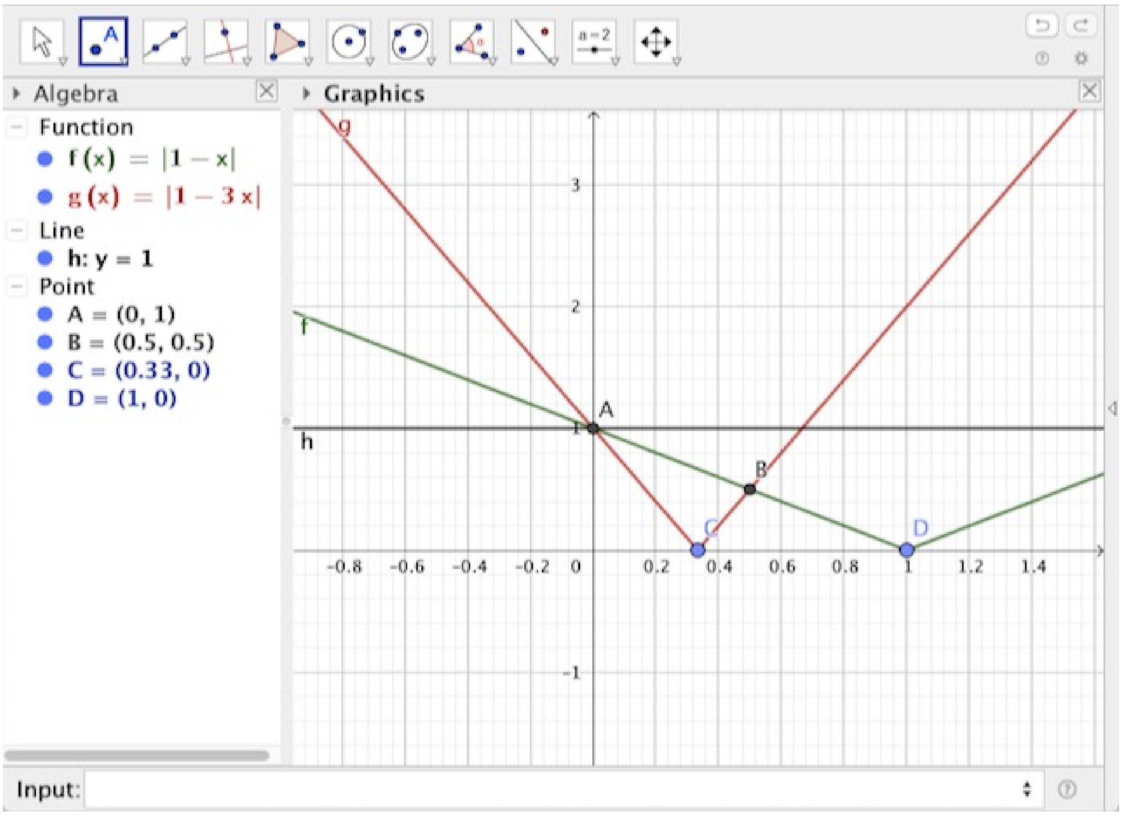
Másik megoldás: Ha $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ valamely $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ esetén akkor

$$B_{R(P)}\mathbf{v} = (I - pA)\mathbf{v} = \mathbf{v} - p\lambda\mathbf{v} = (1 - p\lambda)\mathbf{v},$$

azaz ha λ az A sajátértéke, akkor $(1 - p\lambda)$ sajátértéke a $B_{R(P)}$-nek, azaz

$$\lambda_1(B_{R(p)}) = 1 - p \qquad \text{és} \qquad \lambda_2(B_{R(p)}) = 1 - 3p.$$

Ábrázoljuk a sajátértékek abszolútértékét (p függvényében):



Az ábráról leolvashatjuk, hogy a konvergencia pontosan akkor teljesül, ha a spekrálsugár $\varrho(B_{R(p)}) < 1$, azaz $0 < p < \frac{2}{3}$. Továbbá, a spektrálsugár akkor lesz optimális, azaz akkor veszi fel a legkisebb értéket, amikor

$$|1 - p| = |1 - 3p|,$$

azaz

$$1 - p = -(1 - 3p) \quad \Rightarrow \quad p_0 = \frac{1}{2} \text{ az optimális } p.$$

Mivel A szimmetrikus, $B_{R(p)}$ is az, és

$$q = \|B_{R(p)}\|_2 = \varrho(B_{R(p)}) < 1 \qquad \forall\, p \in \Big(0, \frac{2}{3}\Big).$$

2.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Írjuk fel a Richardson-iteráció vektoros alakját!

Megoldás:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (I - p\,A)\mathbf{x}^{(k)} + p\,\mathbf{b}$$

Ellenőrizzük, hogy alkalmazható-e a tétel. Az A sajátértékei:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\Big((3-\lambda)^2-1\Big)-(3-\lambda+1)-(1+3-\lambda) =$$

$$= (3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) - 2(4-\lambda) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0,$$

ha

$$\lambda_1 = 1 = m \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4 = M.$$

A sajátértékek pozitívak, azaz A pozitív definit és szimmetrikus is, ezért alkalmazhatjuk a tételt.

(b) Pontosan mely értékekre konvergál?

Megoldás:

A tétel alapján a Richardson-iteráció konvergens tetsz. kezdővektor esetén, ha

$$p \in \Big(0, \frac{2}{M}\Big) = \Big(0, \frac{1}{2}\Big).$$

(c) Mi az optimális p_0 paraméter és mennyi ekkor a kontrakciós együttható?

Megoldás:

Mi az optimális p_0 paraméter

$$p_0 = \frac{2}{M+m} = \frac{2}{5},$$

és a kontrakciós együttható

$$q = \|B_{R(p_0)}\|_2 = \frac{3}{5}.$$

(d) Írjuk fel a p_0 paraméterrel a módszer hibabecslését alkalmas vektornormában, ha a kezdővektor a $\mathbf{0}$ vektor!

Megoldás:

Hibabecslés:

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|_2 = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^k}{\frac{2}{5}} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_2 = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^k}{\frac{2}{5}} \|\mathbf{x}^{(1)}\|_2 = \left(\frac{3}{5}\right)^k \sqrt{11},$$

ahol $\mathbf{x}^{(1)} = \frac{2}{5}\mathbf{b}$.

3. Tekintsük az

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \Big(I - \frac{2}{c} A\Big)\mathbf{x}^{(k)} + \frac{2}{c} \cdot \mathbf{b}$$

Richardson-iterációt az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldására, ahol A szimmetrikus, pozitív definit mátrix és $0 < c \in \mathbb{R}$, melyre $\varrho(A) < c$. Igazoljuk, hogy az iteráció tetszőleges $\mathbf{x}^{(0)}$-ra konvergens!

Megoldás:

Az iteráció átmenetmátrixa: $\quad B = I - \dfrac{2}{c} A,$

sajátértékei: $\quad 1 - \frac{2}{c}\lambda_i,\;$ ahol λ_i az A sajátértéke, melyre a feltétel alapján

$$0 < \lambda_i < c$$

$$0 < \frac{2}{c}\lambda_i < 2$$

$$-1 < \frac{2}{c}\lambda_i - 1 < 1$$

$$-1 < 1 - \frac{2}{c}\lambda_i < 1$$

$$\Big|1 - \frac{2}{c}\lambda_i\Big| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \varrho(B) < 1,$$

ami ekvivalens azzal, hogy az iteráció konvergens bármely kezdővektor esetén.

4. Legyen A szimmetrikus. Adott $\mathbf{b}$ jobboldal esetén tekintsük az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER-hez tartozó Richardson-iterációt. Adjuk meg azt a lépésenként optimális p paramétert, melyre a reziduum vektor kettes normája minimális!

Megoldás:

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER-hez tartozó Richardson-iteráció

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \Big(I - p\,A\Big)\mathbf{x}^{(k)} + p\,\mathbf{b} = \mathbf{x}^{(k)} + p\Big(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}\Big),$$

az k-adik reziduum vektor

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)},$$

és

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + p\,\mathbf{r}^{(k)}.$$

A $(k+1)$-edik reziduum vektor

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - A\Big(\mathbf{x}^{(k)} + p\,\mathbf{r}^{(k)}\Big) = \mathbf{r}^{(k)} - p\,A\mathbf{r}^{(k)}$$

kettes normanégyzetét szeretnénk minimalizálni, mely p-nek függvénye:

$$F(p) = \|\mathbf{r}^{(k+1)}\|_2^2 = \|\mathbf{r}^{(k)} - p\,A\mathbf{r}^{(k)}\|_2^2 = \Big(\mathbf{r}^{(k)} - pA\mathbf{r}^{(k)}\Big)^T\Big(\mathbf{r}^{(k)} - pA\mathbf{r}^{(k)}\Big) \underset{A \text{ szim.}}{=}$$

$$= \|\mathbf{r}^{(k)}\|_2^2 - 2p\,(\mathbf{r}^{(k)})^T A\mathbf{r}^{(k)} + p^2\|A\mathbf{r}^{(k)}\|_2^2$$

Az $F(p)$ másodfokú függvénye p-nek, minimum helye ott van, ahol a deriváltja 0.

$$F'(p) = 2p\,\|A\mathbf{r}^{(k)}\|_2^2 - 2\,(\mathbf{r}^{(k)})^T A\mathbf{r}^{(k)} = 0,$$

melyből a minimális p érték

$$p_k = \frac{(\mathbf{r}^{(k)})^T A\mathbf{r}^{(k)}}{\|A\mathbf{r}^{(k)}\|_2^2}.$$