Numerikus módszerek 1.

2. előadás: Lineáris egyenletrendszerek megoldása, Gauss-elimináció

Dr. Bozsik József

ELTE IK

Tartalomjegyzék

- **Általános iskolában:**
  Matematikai versenyfeladat 3. osztály

  A MATEK szó minden betűje egy-egy számjegyet jelöl. A számjegyekre igazak a következő állítások:

$$\begin{aligned} M+A+T+E+K &= 25 \\ M+A &= 11 \\ A+T &= 10 \\ T+E &= 12 \\ E+K &= 10 \end{aligned}$$

  Melyik betű melyik számjegyet jelöli, ha az öt betű öt különböző számjegyet jelöl?

- **Gazdasági számítások:**

  Tegyük fel, hogy egy üzem kétféle végterméket állít elő négyféle alkatrész felhasználásával. Jelölje $A_1, A2$ a végtermékeket, az A_3, A_4 a félkész termékeket és A_5, A_6 az alapanyagokat. Az egyes alapanyagok és félkész termékek egymásba és a végtermékbe való beépülését a **közvetlen ráfordítás mátrix (K)** adja meg. A mátrix k_{ij} eleme azt mutatja, hogy az i. termékből közvetlenül (nem más terméken keresztül) mennyi épül be a j. termékbe.

  A **teljes ráfordítások mátrixában (T)** a t_{ij} elem azt mutatja, hogy egy darab A_j termék összesen hány darab A_i elemet tartalmaz. Ennek meghatározása a $T = (I - K)^{-1}$ képletből történik. A kétféle mátrix alkalmazása:
  x alapanyagból $y = (I - K) \cdot x$ végtermék lesz és
  y végtermékhez $x = T \cdot y = (I - K)^{-1} \cdot y$ alapanyag kell.

3-5. Példa

- Mérnöki feladatok numerikus megoldása (lásd a bevezető példát)

3-5. Példa

- Mérnöki feladatok numerikus megoldása (lásd a bevezető példát)
- Interpolációs spline-ok megadása (lásd 2. félév)

3-5. Példa

- Mérnöki feladatok numerikus megoldása (lásd a bevezető példát)
- Interpolációs spline-ok megadása (lásd 2. félév)
- Approximációs feladatok megoldása (lásd 2. félév)

- **Hálózatok stacionárius modellezése:** villamos hálózatok, áramkörök, víz- és gázellátó csőrendszerek irányított gráffal történő leírása után. Az él iránya megfelel a várt áramlási iránynak. Minden élhez tartozik egy szám, az ott szállított áram (víz stb.) mennyiségét adja. Egyes csomópontokhoz is tartozhat áram, ezek a külső pontok. Ilyen áram a ponton keresztül be ill. kifolyó áram, amely ugyancsak ismeretlen lehet.

  A gráf minden csomópontjában felírjuk az első Kirchhoff–féle törvényt, amely szerint - figyelembe véve az élek irányát - a csomópontban találkozó élek áramainak összege nulla. Ez az anyag-megmaradási törvény egy lineáris reláció, és a minden csomóponthoz tartozó relációk összessége adja a lineáris egyenletrendszert.

Tartalomjegyzék

Lineáris egyenletrendszer (LER)

Hagyományos alak:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

n egyenlet, n ismeretlen

Mátrix alak:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

vagyis

$$Ax = b \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ b, x \in \mathbb{R}^n.$$

Feladat:

A és b adottak, keressük x-et.

Tétel: emlékeztető lin. alg.-ból

- LER megoldható $\Longleftrightarrow$ b felírható az A oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként.

Tétel: emlékeztető lin. alg.-ból

- LER megoldható $\iff$ b felírható az A oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként.
- Egyértelműen létezik megoldás $\iff$ A oszlopai lineárisan függetlenek $\iff$ $\operatorname{rang}(A) = n \iff \det(A) \neq 0 \iff A$ invertálható ($x = A^{-1}b$).

Tétel: emlékeztető lin. alg.-ból

- LER megoldható $\iff$ b felírható az A oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként.
- Egyértelműen létezik megoldás $\iff$ A oszlopai lineárisan függetlenek $\iff$ $\mathrm{rang}(A) = n$ $\iff$ $\det(A) \neq 0$ $\iff$ A invertálható ($x = A^{-1}b$).

Megj.:

- Ha A speciális alakú (pl. diagonális vagy háromszög alakú), akkor egyszerűen megkapható a megoldás.

Tétel: emlékeztető lin. alg.-ból

- LER megoldható $\iff$ b felírható az A oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként.
- Egyértelműen létezik megoldás $\iff$ A oszlopai lineárisan függetlenek $\iff$ $\operatorname{rang}(A) = n$ $\iff$ $\det(A) \neq 0$ $\iff$ A invertálható ($x = A^{-1}b$).

Megj.:

- Ha A speciális alakú (pl. diagonális vagy háromszög alakú), akkor egyszerűen megkapható a megoldás.
- Cramer-szabályt max. 3×3-as mátrixokra alkalmazunk.

Lineáris egyenletrendszerek megoldási módszerei

- Direkt módszerek, felbontások (véges lépésszám, „pontos” megoldás)
  - Gauss-elimináció, progonka módszer
  - LU-felbontás, LDU, $LL^\top$, Cholesky
  - QR-felbontás (Gram–Schmidt ort., Householder trf.)
  - ILU-felbontás
- Iterációs módszerek (vektor sorozat, mely a megoldáshoz „tart”)
  - mátrixnormák, Banach-féle fixponttétel
  - Jacobi-iteráció
  - Gauss–Seidel-iteráció
  - Richardson-iteráció
  - ILU-algoritmus
- Variációs módszerek (egy „célfüggvény” minimalizálása által)
  - Gradiens-módszer
  - Konjugált gradiens-módszer

Legyen $a_{in+1} := b_i$, azaz $[A|b]$ a tárolási forma.
GE := Gauss-elimináció.

$$A^{(0)} := \left[\begin{array}{cccc|r} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} = b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} = b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} = b_n \end{array}\right]$$

Legyen $a_{in+1} := b_i$, azaz $[A|b]$ a tárolási forma.
GE := Gauss-elimináció.

$$A^{(0)} := \left[\begin{array}{cccc|r} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} = b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} = b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} = b_n \end{array}\right]$$

Célunk: A LER-t egyszerűbb alakra hozni:

1. balról jobbra: a főátló alatt kinullázzuk az elemeket, „előre”, GE
2. jobbról balra: a főátló fölött nullázunk, „vissza”, visszahelyettesítés

Az 1. egyenletet változatlanul hagyjuk.

Ha $a_{11}^{(0)} \neq 0$, akkor az i-edik egyenletből ($i = 2, 3, \ldots, n$) kivonjuk az 1. egyenlet $\left(\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}\right)$-szeresét: hogy $a_{i1}^{(0)}$ kinullázódjon.
($\rightsquigarrow$ elimináció, kiküszöbölés)

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{nn+1}^{(1)} \end{array}\right],$$

ahol

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \cdot a_{1j}^{(0)} \qquad (i = 2, \ldots, n;\ j = 2, \ldots, n, n+1).$$

Az 1. és 2. egyenletet változatlanul hagyjuk.

Ha $a_{22}^{(1)} \neq 0$, akkor az i-edik egyenletből ($i = 3, 4, \dots, n$) kivonjuk a 2. egyenlet $\left(\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right)$-szeresét: hogy $a_{i2}^{(1)}$ kinullázódjon.

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & a_{3n+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{nn+1}^{(2)} \end{array}\right],$$

ahol

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot a_{2j}^{(1)} \qquad (i = 3, \dots, n;\ j = 3, \dots, n, n+1).$$

Az $1., 2., \dots, k$. egyenleteket változatlanul hagyjuk.

Ha $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$, akkor az i-edik egyenletből $(i = k+1, \dots, n)$ kivonjuk a k-adik egyenlet $\left(\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right)$-szeresét: hogy $a_{ik}^{(k-1)}$ kinullázódjon. Ezt a lépést láttuk, amikor a 2. lépésben az 1. lépés eredményét felhasználtuk. Ha 2 helyére k-t írunk, akkor megkapjuk az általános képleteket.

Az $1., 2., \ldots, k$. egyenleteket változatlanul hagyjuk.

Ha $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$, akkor az i-edik egyenletből $(i = k+1, \ldots, n)$ kivonjuk a k-adik egyenlet $\left(\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right)$-szeresét: hogy $a_{ik}^{(k-1)}$ kinullázódjon. Ezt a lépést láttuk, amikor a 2. lépésben az 1. lépés eredményét felhasználtuk. Ha 2 helyére k-t írunk, akkor megkapjuk az általános képleteket.

Tétel: A Gauss-elimináció általános lépése

Ha $a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0$, akkor a k. lépés képletei

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)} \qquad \begin{aligned} &k = 1, \ldots, n-1;\\ &i = k+1, \ldots, n;\\ &j = k+1, \ldots, n, n+1. \end{aligned}$$

Így $n-1$ lépés után felső háromszögmátrix alakú LER-t kapunk:

$$A^{(n-1)} = \left[\begin{array}{rrcrr|r} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n-1}^{(0)} & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n-1n-1}^{(n-2)} & a_{n-1n}^{(n-2)} & a_{n-1n+1}^{(n-2)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & a_{nn+1}^{(n-1)} \end{array}\right].$$

Így $n-1$ lépés után felső háromszögmátrix alakú LER-t kapunk:

$$A^{(n-1)} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n-1}^{(0)} & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n-1n-1}^{(n-2)} & a_{n-1n}^{(n-2)} & a_{n-1n+1}^{(n-2)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & a_{nn+1}^{(n-1)} \end{array}\right].$$

Ezután visszafelé haladva: az aktuális egyenletet osztjuk a főátlóbeli elemmel, majd a főátló fölött kinullázzuk az elemeket, az eddigiekel analóg „sorműveletek” alkalmazásával.
Végül $[I|x]$ alakot nyerünk. ($I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egységmátrix.)

Az algoritmus második része („jobbról-balra”), a felső háromszög alakú LER megoldása képlettel is kifejezhető. Figyeljük meg, hogy a felső-háromszögmátrixú alaknál soronként azonos felső indexek vannak.

Az algoritmus második része („jobbról-balra”), a felső háromszög alakú LER megoldása képlettel is kifejezhető. Figyeljük meg, hogy a felső-háromszögmátrixú alaknál soronként azonos felső indexek vannak.

A visszahelyettesítés

$$x_n = \frac{a_{nn+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}},$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}} \left(a_{in+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} \cdot x_j \right) \qquad (i = n-1, \ldots, 1).$$

Példa: LER megoldása GE-val

Oldjuk meg a következő lineáris egyenletrendszert Gauss-elimináció alkalmazásával!

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Az elimináció: Kézi számolásnál függőleges vonalat húzunk a jobboldali vektor elé, számítógéppel ezt programozással oldjuk meg.

1. lépés:

$$2.\ \text{sor} - \underbrace{\left(\frac{-4}{2}\right)}_{+2} * 1.\ \text{sor}$$

$$3.\ \text{sor} - \underbrace{\left(\frac{6}{2}\right)}_{+3} * 1.\ \text{sor}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & -2 & 3 \\ 6 & -5 & 4 & -3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

2. lépés:

$$3.\ \text{sor}\ \underbrace{-\ \left(\frac{-5}{5}\right)}_{+1}\ *\ 2.\ \text{sor}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \to$$

A visszahelyettesítés:

3. sor $/(-1)$
2. sor $-$ 4 $*$ új 3. sor.
1. sor $-$ 3 $*$ új 3. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

2. sor $/5$
1. sor $/2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Tehát a lineáris egyenletrendszer megoldása az $\mathbf{x} = [1, 1, -1]^T$ vektor.

- LER megoldása (láttuk példán is)

- LER megoldása (láttuk példán is)
- Determináns meghatározása: mivel a GE lépései determináns tartók, ezért

$$\det(A) = \det(\Delta\text{alak}) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k-1)}$$

Vigyázzunk : ha sort vagy oszlopot cserélünk, a determináns értéke változik.

Gauss-elimináció: alkalmazások

- LER megoldása (láttuk példán is)
- Determináns meghatározása: mivel a GE lépései determináns tartók, ezért

$$\det(A) = \det(\Delta \mathrm{alak}) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k-1)}$$

  Vigyázzunk : ha sort vagy oszlopot cserélünk, a determináns értéke változik.
- Több jobb oldallal (b) megoldás: lehet egyszerre, így a mátrixon csak egyszer eliminálunk.

$$[A|b_1|b_2|b_3] \to \mathrm{GE} \to \mathrm{visszahely} \to [I|x_1|x_2|x_3]$$

- Mátrix inverzének meghatározása az $A \cdot X = I$ mátrixegyenlet megoldását jelenti.

$$A \cdot [x_1 | \dots | x_n] = [e_1 | \dots | e_n] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} Ax_1 &= e_1 \\ &\dots \\ Ax_n &= e_n \end{aligned}$$

Visszavezettük az előző pontra. A GE-t kiterjesztett mátrixon hajtjuk végre

$$[A \,|\, I] \to \text{GE} \to \text{visszahely} \to [I \,|\, A^{-1}],$$

visszahelyettesítés után jobb oldalon kapjuk az inverz mátrixot. Sor csere esetén az inverz nem változik, oszlopcsere esetén változik (lásd gyak.).

Példa: mátrix determinánsának és inverzének számítása GE-val

Mi az előző példa mátrixának determinánsa és inverze?

Példa: mátrix determinánsának és inverzének számítása GE-val

Mi az előző példa mátrixának determinánsa és inverze?

$$\det(A) = \det(\Delta\text{alak}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot (-1) = -10$$

Az elimináció:

1. lépés:

$$2.\ \text{sor} - \underbrace{\left(\frac{-4}{2}\right)}_{+2} * 1.\ \text{sor}$$

$$3.\ \text{sor} - \underbrace{\left(\frac{6}{2}\right)}_{3} * 1.\ \text{sor}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

2. lépés:

$$3.\ \text{sor}\ \underbrace{-\left(\frac{-5}{5}\right)}_{+1} * 2.\ \text{sor}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to$$

A visszahelyettesítés:

3. sor $/(-1)$
2. sor $-\ 4\ *$ új 3. sor.
1. sor $-\ 3\ *$ új 3. sor.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

2. sor $/5$
1. sor $/2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] = [I|A^{-1}]$$

Az inverz a jobb oldalon álló mátrix.

Gauss-elimináció: megjegyzések

Megoldható-e egyáltalán a LER? Vizsgáljuk?

Megoldható, de mégsem tudjuk a GE-t végigcsinálni?

Megoldható-e egyáltalán a LER? Vizsgáljuk?

Majd GE közben kiderül.

Megoldható, de mégsem tudjuk a GE-t végigcsinálni?

Megoldható-e egyáltalán a LER? Vizsgáljuk?

Majd GE közben kiderül.

Megoldható, de mégsem tudjuk a GE-t végigcsinálni?

Előfordulhat. . . $\rightsquigarrow$ *sort cserélünk* $\rightsquigarrow$ *nem változik a megoldás. Ha oszlopot cserélünk, akkor a megoldás komponensei a cserének megfelelően változnak.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Megoldható-e egyáltalán a LER? Vizsgáljuk?

Majd GE közben kiderül.

Megoldható, de mégsem tudjuk a GE-t végigcsinálni?

Előfordulhat... $\rightsquigarrow$ *sort cserélünk* $\rightsquigarrow$ *nem változik a megoldás. Ha oszlopot cserélünk, akkor a megoldás komponensei a cserének megfelelően változnak.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Biztos és stabil megoldás a főelemkiválasztás.

Definíció: részleges főelemkiválasztás

A k-adik lépésben válasszunk egy olyan m indexet, melyre $\left|a_{mk}^{(k-1)}\right|$ maximális ($m \in \{ k, k+1, \ldots, n \}$), majd cseréljük ki a k-adik és m-edik sort.

Definíció: részleges főelemkiválasztás

A k-adik lépésben válasszunk egy olyan m indexet, melyre $\left|a_{mk}^{(k-1)}\right|$ maximális ($m \in \{ k, k+1, \ldots, n \}$), majd cseréljük ki a k-adik és m-edik sort.

Definíció: teljes főelemkiválasztás

A k-adik lépésben válasszunk egy olyan (m_1, m_2) indexpárt, melyre $\left|a_{m_1 m_2}^{(k-1)}\right|$ maximális ($m_1, m_2 \in \{ k, k+1, \ldots, n \}$), majd cseréljük ki a k-adik és m_1-edik sort, valamint a k-adik és m_2-edik oszlopot.

Tétel:

A GE elvégezhető sor és oszlopcsere nélkül
$\Leftrightarrow \quad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots, n-1).$

Tétel:

A GE elvégezhető sor és oszlopcsere nélkül
$\Leftrightarrow \quad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \;\; (k = 1, 2, \ldots, n-1).$

Biz.: trivi a rekurzióból. $\square$

Tétel:

A GE elvégezhető sor és oszlopcsere nélkül
$\Leftrightarrow \quad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Biz.: trivi a rekurzióból. $\square$

Definíció: főminorok

Az A főminorai a

$$D_k = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix}\right), \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

determinánsok. Ezek az A bal felső $k \times k$-s részmátrixaimak determinánsai.

Tétel:

$D_k \neq 0 \;\; (k = 1, 2, \ldots, n-1) \quad \Leftrightarrow \quad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \;\; (k = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Tétel:

$D_k \neq 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots, n-1) \quad \Leftrightarrow \quad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Biz.: A GE átalakításai determináns tartók, ezért

$$D_k = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{kk}^{(k-1)} = D_{k-1} \cdot a_{kk}^{(k-1)},$$

amiből az állítás adódik. A $D_n \neq 0$ illetve az $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$ feltétel nem szükséges a GE-hoz, csak a LER megoldhatóságához. □

Tétel:

$D_k \neq 0 \;\; (k = 1, 2, \ldots, n-1) \quad \Leftrightarrow \quad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \;\; (k = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Biz.: A GE átalakításai determináns tartók, ezért

$$D_k = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{kk}^{(k-1)} = D_{k-1} \cdot a_{kk}^{(k-1)},$$

amiből az állítás adódik. A $D_n \neq 0$ illetve az $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$ feltétel nem szükséges a GE-hoz, csak a LER megoldhatóságához. $\square$

Megj.:

- Numerikus szempontból jobb, ha alkalmazunk főelemkiválasztást. Ezzel a GE-s hányadosaink pontosabbak lesznek.

Tétel:

$D_k \neq 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n-1) \quad \Leftrightarrow \quad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Biz.: A GE átalakításai determináns tartók, ezért

$$D_k = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{kk}^{(k-1)} = D_{k-1} \cdot a_{kk}^{(k-1)},$$

amiből az állítás adódik. A $D_n \neq 0$ illetve az $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$ feltétel nem szükséges a GE-hoz, csak a LER megoldhatóságához. □

Megj.:

- Numerikus szempontból jobb, ha alkalmazunk főelemkiválasztást. Ezzel a GE-s hányadosaink pontosabbak lesznek.
- Determináns számításakor a cserékkel vigyázni kell!

Tartalomjegyzék

A Gauss-elimináció műveletigénye

Tétel: A Gauss-elimináció műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Tétel: A Gauss-elimináció műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Biz.: Rögzített k-ra: a k. lépés képletéből számolva

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)} \qquad \begin{array}{l} k = 1, \ldots, n-1; \\ i = k+1, \ldots, n; \\ j = k+1, \ldots, n, n+1. \end{array}$$

$(n-k)$ osztás, $(n-k)(n-k+1)$ szorzás és $(n-k)(n-k+1)$ összeadás kell.

A Gauss-elimináció műveletigénye

Tétel: A Gauss-elimináció műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$

Biz.: Rögzített k-ra: a k. lépés képletéből számolva

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)} \qquad \begin{array}{l} k = 1, \ldots, n-1; \\ i = k+1, \ldots, n; \\ j = k+1, \ldots, n, n+1. \end{array}$$

$(n-k)$ osztás, $(n-k)(n-k+1)$ szorzás és $(n-k)(n-k+1)$ összeadás kell.
Összesen $(n-k)(2(n-k)+3)$ művelet. $(n-k =: s)$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(2(n-k)+3) = \sum_{s=1}^{n-1} s(2s+3) = 2\sum_{s=1}^{n-1} s^2 + 3\sum_{s=1}^{n-1} s =$$

$$= 2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 3\frac{(n-1)n}{2} = \frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2). \quad \square$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(2(n-k)+3)=\sum_{s=1}^{n-1}s(2s+3)=2\sum_{s=1}^{n-1}s^2+3\sum_{s=1}^{n-1}s=$$
$$=2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+3\frac{(n-1)n}{2}=\frac{2}{3}n^3+\mathcal{O}(n^2). \quad \square$$

Definíció: $\mathcal{O}(n^2)$ függvény

Az $f(n)$ függvényt $\mathcal{O}(n^2)$-es nagyságrendűnek nevezzük, ha $\frac{f(n)}{n^2}$ korlátos minden $n \in \mathbb{N}$-re.

A felső háromszögmátrixú LER megoldásának műveletigénye.

Tétel: A visszahelyettesítés műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

A felső háromszögmátrixú LER megoldásának műveletigénye.

Tétel: A visszahelyettesítés műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

Biz.:

$$x_n = \frac{a_{nn+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \quad x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}} \left(a_{in+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} \cdot x_j \right) \quad (i = n-1, \ldots, 1).$$

Rögzített i. sorra 1 db osztás, $(n-i)$ szorzás és $(n-i)$ összeadás.
Összesen: $2(n-i)+1$ művelet $(n-i =: s)$.

A visszahelyettesítés műveletigénye

A felső háromszögmátrixú LER megoldásának műveletigénye.

Tétel: A visszahelyettesítés műveletigénye

$$n^2 + \mathcal{O}(n)$$

Biz.:

$$x_n = \frac{a_{nn+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}, \quad x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}} \left(a_{in+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} \cdot x_j \right) \quad (i = n-1, \ldots, 1).$$

Rögzített i. sorra 1 db osztás, $(n-i)$ szorzás és $(n-i)$ összeadás.
Összesen: $2(n-i)+1$ művelet ($n-i =: s$).

$$1 + \sum_{s=1}^{n-1} (2s+1) = 1 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) = n^2 + \mathcal{O}(n). \quad \square$$

Példák Matlab-ban

1. A Gauss-elimináció működése „kisebb” ($n \approx 7$) LER-ekre
2. A beépített megoldó rutin persze sokkal gyorsabb
3. Egyre nagyobb méretű ($n = 10, 20, 30, \ldots, 200$) mátrixokra a GE futási idejének viselkedése tényleg n^3-szerű