Numerikus módszerek 1.

6. előadás: Vektor- és mátrixnormák

Dr. Bozsik József

ELTE IK

Tartalomjegyzék

Definíció: vektorok „hossza”

Az $x \in \mathbb{R}^n$ vektor hagyományos értelemben vett hosszát, avagy „kettes normáját” jelölje $\|.\|_2$.
A következőképpen számolható:

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^\top x} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

A *(vektor)norma* a „hossz”, „nagyság” általánosítása.

Definíció: vektornorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ leképezést vektornormának nevezzük, ha:

1. $\|x\| \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$,
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
3. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n)$,
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$.

Definíció: vektornorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ leképezést vektornormának nevezzük, ha:

1. $\|x\| \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$,
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
3. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n)$,
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$.

Azaz a leképezés „pozitív", „pozitív homogén" és „szubadditív" (háromszög-egyenlőtlenség). Ezek a vektornormák *axiómái*.

Állítás: skaláris szorzat által generált vektornorma

Ha adott az $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ skaláris szorzat, akkor az $f(x) := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ függvény *norma*. Jele: $\|x\|_2$.

Állítás: skaláris szorzat által generált vektornorma

Ha adott az $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ skaláris szorzat, akkor az $f(x) := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ függvény *norma*. Jele: $\|x\|_2$.

Biz.: Nem kell.
Ez a „hagyományos hossz”. $\square$

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Biz.: Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\|x - \alpha y\|_2^2 \geq 0$.

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Biz.: Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\|x - \alpha y\|_2^2 \geq 0$.

$$0 \leq \|x - \alpha y\|_2^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle =$$

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Biz.: Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\|x - \alpha y\|_2^2 \geq 0$.

$$0 \leq \|x - \alpha y\|_2^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle =$$
$$= \underbrace{\langle x, x\rangle}_{\|x\|_2^2} - 2\alpha \langle x, y\rangle + \alpha^2 \underbrace{\langle y, y\rangle}_{\|y\|_2^2} \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{R}).$$

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Biz.: Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\|x - \alpha y\|_2^2 \geq 0$.

$$0 \leq \|x - \alpha y\|_2^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle =$$
$$= \underbrace{\langle x, x\rangle}_{\|x\|_2^2} - 2\alpha \langle x, y\rangle + \alpha^2 \underbrace{\langle y, y\rangle}_{\|y\|_2^2} \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{R}).$$

Diszkrimináns nempozitív: $\langle x, y\rangle^2 - \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2 \leq 0$,

Állítás: Cauchy–Bunyakovszki–Schwarz-egyenlőtlenség (CBS)

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Biz.: Bármely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\|x - \alpha y\|_2^2 \geq 0$.

$$0 \leq \|x - \alpha y\|_2^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle x, x\rangle}_{\|x\|_2^2} - 2\alpha \langle x, y\rangle + \alpha^2 \underbrace{\langle y, y\rangle}_{\|y\|_2^2} \qquad (\forall \alpha \in \mathbb{R}).$$

Diszkrimináns nempozitív: $\langle x, y\rangle^2 - \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2 \leq 0$, így

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2 .$$

Állítás: Gyakori vektornormák $(1, 2, \infty)$

A következő formulák vektornormákat **definiálnak** $\mathbb{R}^n$ felett:

- $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (Manhattan-norma),
- $\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$ (Euklideszi-norma),
- $\|x\|_\infty := \max_{i=1}^{n} |x_i|$ (Csebisev-norma).

Biz.: Hf.

Példa: vektornormák

Számítsuk ki a következő vektorok $1, 2, \infty$ normáját:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Példa: vektornormák

Számítsuk ki a következő vektorok $1, 2, \infty$ normáját:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\|x\|_1 = 3 + 4 = 7,\ \|x\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,\ \|x\|_\infty = \max\{3, 4\} = 4.$

Példa: vektornormák

Számítsuk ki a következő vektorok $1, 2, \infty$ normáját:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\|x\|_1 = 3 + 4 = 7$, $\|x\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\|x\|_\infty = \max\{3, 4\} = 4$.

$\|y\|_1 = 4 + |-8| + 1 = 13$, $\|y\|_2 = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + 1^2} = \sqrt{73}$,
$\|y\|_\infty = \max\{4, |-8|, 1\} = 8$.

Állítás: *p*-normák

A következő $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények is vektornormákat **definiálnak**:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad (p \in \mathbb{R},\ 1 \leq p < \infty).$$

Állítás: *p*-normák

A következő $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények is vektornormákat **definiálnak**:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad (p \in \mathbb{R},\ 1 \le p < \infty).$$

Biz.: Nem kell. A háromszög-egyenlőtlenség a Minkovszki-egyenlőtlenség. $\square$

Állítás: p-normák

A következő $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények is vektornormákat **definiálnak**:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad (p \in \mathbb{R},\ 1 \le p < \infty).$$

Biz.: Nem kell. A háromszög-egyenlőtlenség a Minkovszki-egyenlőtlenség. $\square$

Megjegyzések:

- $0 \le p < 1$ esetén nem norma,
- $p_1 \le p_2 \Longrightarrow \|x\|_{p_1} \ge \|x\|_{p_2}$,
- Speciális esetek: $p = 1 \rightsquigarrow \|x\|_1$, $\quad p = 2 \rightsquigarrow \|x\|_2$,
- Sőt: $\lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Állítás: normák közötti egyenlőtlenségek

- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$,
- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$,
- $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_2$,
- sőt ezek alapján $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

Állítás: normák közötti egyenlőtlenségek

- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$,
- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$,
- $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_2$,
- sőt ezek alapján $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

Biz.: Nem kell. $\square$

(Az elsőbe könnyű belegondolni, a negyedikre láttunk példát.)

Definíció: ekvivalens normák

Az $\|.\|_a$ és $\|.\|_b$ vektornormák *ekvivalensek*, ha $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$c_1 \cdot \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq c_2 \cdot \|x\|_b \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

Definíció: ekvivalens normák

Az $\|.\|_a$ és $\|.\|_b$ vektornormák *ekvivalensek*, ha $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy

$$c_1 \cdot \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq c_2 \cdot \|x\|_b \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

Állítás: végesdimenziós normák ekvivalenciája

Tetszőleges $\mathbb{R}^n$-en értelmezett vektornorma ekvivalens az Euklideszi-vektornormával. (Azaz adott végesdimenziós térben minden norma ekvivalens.)

Definíció: konvergencia vektornormában

Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\lim_{k \to \infty} \|x_k - x^*\| = 0.$$

x^* a sorozat határértéke.

Definíció: konvergencia vektornormában

Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x^*\| = 0.$$

x^* a sorozat határértéke.

Megj.: Mivel $\mathbb{R}^n$-en a vektornormák ekvivalensek, ezért ha egy sorozat konvergens az egyik vektornormában, akkor mindegyikben.

Ekvivalens átfogalmazások a konvergenciára:

- Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall\, k \geq N_0 : \quad \|x_k - x^*\| < \varepsilon.$$

Ekvivalens átfogalmazások a konvergenciára:

- Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists N_0 \in \mathbb{N} \;\forall k \geq N_0 : \quad \|x_k - x^*\| < \varepsilon.$$

- Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists N_0 \in \mathbb{N} \;\forall k \geq N_0 : \quad x_k \in K_\varepsilon(x^*).$$

Ekvivalens átfogalmazások a konvergenciára:

- Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre
$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \ \forall\, k \geq N_0 : \quad \|x_k - x^*\| < \varepsilon.$$
- Az $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, ha létezik $x^* \in \mathbb{R}^n$ melyre
$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N_0 \in \mathbb{N} \ \forall\, k \geq N_0 : \quad x_k \in K_\varepsilon(x^*).$$

Matlab példák p-normákra, egységgömbökre $(p = 1, 2, \infty, \dots)$.

Definíció: mátrixnorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ leképezést mátrixnormának nevezzük, ha:

1. $\|A\| \geq 0 \quad (\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
2. $\|A\| = 0 \iff A = 0$,
3. $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n})$,
5. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n})$.

Definíció: mátrixnorma

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az $\|.\| : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ leképezést mátrixnormának nevezzük, ha:

1. $\|A\| \geq 0 \quad (\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n})$,
2. $\|A\| = 0 \iff A = 0$,
3. $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n})$,
4. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n})$,
5. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n})$.

Ugyanaz, mint a vektornormáknál, plusz: „szubmultiplikativitás”.
Ezek a mátrixnormák axiómái.

Definíció: Frobenius-norma

A következő függvényt *Frobenius-normának* nevezzük:

$$\|.\|_F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Állítás: Frobenius-norma

A $\|.\|_F$ függvény valóban mátrixnorma.

Definíció: Frobenius-norma

A következő függvényt *Frobenius-normának* nevezzük:

$$\|.\|_F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

Állítás: Frobenius-norma

A $\|.\|_F$ függvény valóban mátrixnorma.

Biz.: 1–4. következik a $\|.\|_2$ vektornorma tulajdonságaiból.
Az 5. belátható CBS segítségével. □

Példa: egyszerű mátrixnormák

Számítsuk ki a következő mátrixok Frobenius-normáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Példa: egyszerű mátrixnormák

Számítsuk ki a következő mátrixok Frobenius-normáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 2^2 + 2^2} = 5$$

$$\|B\|_F = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2 + 5^2} = 6$$

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Definíció: indukált norma, természetes mátrixnormák

Legyen $\|.\|_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges vektornorma. Ekkor a

$$\|.\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad \|A\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

függvényt a $\|.\|_v$ *vektornorma által indukált mátrixnormának* hívjuk. Egy mátrixnormát *természetesnek* nevezünk, ha van olyan vektornorma, ami indukálja.

Tétel: indukált normák

Az „indukált mátrixnormák” valóban mátrixnormák.

Biz.: Be kell látni, hogy a megadott alak teljesíti a mátrixnorma axiómáit.

1. Az $\|A\|$ értéke nemnegatív, hiszen vektorok normájának (nemnegatív számok) hányadosainak szuprémuma.

Biz.: Be kell látni, hogy a megadott alak teljesíti a mátrixnorma axiómáit.

1. Az $\|A\|$ értéke nemnegatív, hiszen vektorok normájának (nemnegatív számok) hányadosainak szuprémuma.
2. Ha $A = 0$, azaz nullmátrix, akkor $\|Ax\|_v = 0$ minden x vektorra, így a szuprémum értéke is 0. Valamint megfordítva, ha a szuprémum 0, akkor minden x-re Ax-nek nullvektornak kell lennie, ez csak úgy lehet, ha A nullmátrix.

Biz.: Be kell látni, hogy a megadott alak teljesíti a mátrixnorma axiómáit.

1. Az $\|A\|$ értéke nemnegatív, hiszen vektorok normájának (nemnegatív számok) hányadosainak szuprémuma.
2. Ha $A = 0$, azaz nullmátrix, akkor $\|Ax\|_v = 0$ minden x vektorra, így a szuprémum értéke is 0. Valamint megfordítva, ha a szuprémum 0, akkor minden x-re Ax-nek nullvektornak kell lennie, ez csak úgy lehet, ha A nullmátrix.
3. $$\|\lambda A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\lambda| \cdot \|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda| \cdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda| \cdot \|A\| \,.$$

Biz. (folytatás):

4.

$$\|A+B\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A+B)x\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v + \|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq$$

$$\leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} + \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| + \|B\|$$

Biz. (folytatás):

4.

$$\|A+B\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A+B)x\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v + \|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq$$

$$\leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} + \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| + \|B\|$$

5. $B = 0 \quad \Rightarrow \quad \|B\| = 0$, valamint
$A \cdot B = A \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \|AB\| = 0.$
Az egyenlőtlenség mindkét oldalán 0 áll, tehát igaz az állítás.

Biz. (folytatás): Ha $B \neq 0$, akkor

$$\|A \cdot B\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{x \neq 0, Bx \neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v} \cdot \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq$$

$$\leq \sup_{Bx \neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v} \cdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|_v}{\|y\|_v} \cdot \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| \cdot \|B\|\,.$$

Meggondolható, hogy a $Bx \neq 0$ feltétel nem változtatja meg a szuprémum értékét; közben bevezettük az $y := Bx$ jelölést. $\square$

Megjegyzések:

- Átfogalmazás:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{\|y\|_v = 1} \|Ay\|_v .$$

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Megjegyzések:

- Átfogalmazás:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{\|y\|_v = 1} \|Ay\|_v \, .$$

- A sup helyett max is írható.

Megjegyzések:

- Átfogalmazás:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{\|y\|_v = 1} \|Ay\|_v \,.$$

- A sup helyett max is írható.
- Átfogalmazás:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \implies \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \leq \|A\| \implies \|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \,.$$

  Sőt: $\|A\|$ a legkisebb ilyen felső korlát.

Definíció: illeszkedő normák

Ha egy mátrix- és egy vektornormára

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n})$$

teljesül, akkor *illeszkedőknek* nevezzük őket.

Definíció: illeszkedő normák

Ha egy mátrix- és egy vektornormára

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n})$$

teljesül, akkor *illeszkedőknek* nevezzük őket.

Állítás: természetes mátrixnormák illeszkedéséről

A természetes mátrixnormák illeszkednek az őket indukáló vektornormákhoz.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Definíció: illeszkedő normák

Ha egy mátrix- és egy vektornormára

$$\|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n})$$

teljesül, akkor *illeszkedőknek* nevezzük őket.

Állítás: természetes mátrixnormák illeszkedéséről

A természetes mátrixnormák illeszkednek az őket indukáló vektornormákhoz.

Biz.: Láttuk az előbb. Az $x = 0$ eset meggondolandó. $\square$

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

Tétel: Nevezetes mátrixnormák $(1, 2, \infty)$

A $\|.\|_p$ $(p = 1, 2, \infty)$ vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (oszlopnorma),

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

Tétel: Nevezetes mátrixnormák $(1, 2, \infty)$

A $\|.\|_p$ $(p = 1, 2, \infty)$ vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (oszlopnorma),
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (sornorma),

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

Tétel: Nevezetes mátrixnormák $(1, 2, \infty)$

A $\|.\|_p$ $(p = 1, 2, \infty)$ vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (oszlopnorma),
- $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (sornorma),
- $\|A\|_2 = \left(\max\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$ (spektrálnorma).

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Milyen mátrixnormákat indukálnak az elterjedt vektornormák?

Tétel: Nevezetes mátrixnormák $(1, 2, \infty)$

A $\|.\|_p$ $(p = 1, 2, \infty)$ vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (oszlopnorma),
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (sornorma),
- $\|A\|_2 = \left(\max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A)\right)^{1/2}$ (spektrálnorma).

Jel.: $\lambda_i(M)$: az M mátrix i-edik sajátértéke $(Mv = \lambda v,\ v \neq 0)$.

A bizonyítás „dallama”:

- Az adott $f(A)$ értékre: $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Van olyan x vektor, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Ekkor az $f(A)$ érték, tényleg a $\|.\|_v$ vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így: $\|A\|_v$.

A bizonyítás „dallama”:

- Az adott $f(A)$ értékre: $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Van olyan x vektor, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Ekkor az $f(A)$ érték, tényleg a $\|.\|_v$ vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így: $\|A\|_v$.

Bizonyítás $\|.\|_1$ esetén:

Állítás: $\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

A bizonyítás „dallama”:

- Az adott $f(A)$ értékre: $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Van olyan x vektor, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Ekkor az $f(A)$ érték, tényleg a $\|.\|_v$ vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így: $\|A\|_v$.

Bizonyítás $\|.\|_1$ esetén:

Állítás: $\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| =$$

A bizonyítás „dallama”:

- Az adott $f(A)$ értékre: $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Van olyan x vektor, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Ekkor az $f(A)$ érték, tényleg a $\|.\|_v$ vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így: $\|A\|_v$.

Bizonyítás $\|.\|_1$ esetén:

Állítás: $\|A\|_1 = \max\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j| \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|} \right) \leq \underbrace{\left(\max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)} \cdot \|x\|_1 .$$

A bizonyítás „dallama”:

- Az adott $f(A)$ értékre: $\|Ax\|_v \leq f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Van olyan x vektor, hogy $\|Ax\|_v = f(A) \cdot \|x\|_v$.
- Ekkor az $f(A)$ érték, tényleg a $\|.\|_v$ vektornorma által indukált mátrixnorma, ezért jelölhetjük így: $\|A\|_v$.

Bizonyítás $\|.\|_1$ esetén:

Állítás: $\|A\|_1 = \max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j| \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|} \right) \leq \underbrace{\left(\max_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)} \cdot \|x\|_1 .$$

Legyen $x = e_k$, ahol a k-adik oszlopösszeg maximális. Ekkor

$$\|Ae_k\|_1 = \underbrace{\ldots} \underbrace{\|e_k\|_1}_{1} .$$

Bizonyítás $\|.\|_\infty$ esetén:

Állítás: $\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

- A becslés ugyanolyan stílusú, mint $\|.\|_1$ esetén. Gyakorlaton.
- Válasszuk az

$$x = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

vektort az egyenlőséghez, megfelelően választott előjelekkel...

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

Bizonyítás $\|.\|_\infty$ esetén: Állítás: $\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

- A becslés ugyanolyan stílusú, mint $\|.\|_1$ esetén. Gyakorlaton.
- Válasszuk az

$$x = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

  vektort az egyenlőséghez, megfelelően választott előjelekkel...

Bizonyítás $\|.\|_2$ esetén: Állítás: $\|A\|_2 = \left(\max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$.

- Előbb belátjuk, hogy a sajátértékek nemnegatívak.
- A becslés a diagonalizálás alapján adódik.
- Válasszuk a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektort az egyenlőséghez.

Biz. (folytatás): Először belátjuk, hogy $A^\top A$ szimmetrikus és sajátértékei nemnegatívak (azaz $A^\top A$ pozitív szemidefinit).

- $(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$, azaz $A^\top A$ szimmetrikus, vagyis $A^\top A$ sajátértékei valósak.

Biz. (folytatás): Először belátjuk, hogy $A^\top A$ szimmetrikus és sajátértékei nemnegatívak (azaz $A^\top A$ pozitív szemidefinit).

- $(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$, azaz $A^\top A$ szimmetrikus, vagyis $A^\top A$ sajátértékei valósak.
- Legyen $y \neq 0$ az $A^\top A$ mátrix λ-hoz tartozó sajátvektora, azaz
  $$A^\top A y = \lambda \cdot y.$$
  Szorozzuk meg mindkét oldalt balról az $y^\top$ vektorral:
  $$y^\top A^\top A y = \lambda \cdot y^\top y.$$
  Innen

Biz. (folytatás): Először belátjuk, hogy $A^\top A$ szimmetrikus és sajátértékei nemnegatívak (azaz $A^\top A$ pozitív szemidefinit).

- $(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$, azaz $A^\top A$ szimmetrikus, vagyis $A^\top A$ sajátértékei valósak.

- Legyen $y \neq 0$ az $A^\top A$ mátrix λ-hoz tartozó sajátvektora, azaz

$$A^\top A y = \lambda \cdot y.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt balról az $y^\top$ vektorral:

$$y^\top A^\top A y = \lambda \cdot y^\top y.$$

Innen

$$\lambda = \frac{y^\top A^\top A y}{y^\top y} = \frac{(Ay)^\top (Ay)}{y^\top y} = \frac{\|Ay\|_2^2}{\|y\|_2^2} \geq 0.$$

Biz. (folytatás): Ezután az indukált mátrixnormák definícióját követve Ax normáját fogjuk vizsgálni.

Kihasználjuk, hogy $A^\top A$ szimmetrikus, és így (lásd lineáris algebra) létezik U ortogonális (unitér) mátrix, amire

$$A^\top A = U^\top DU \quad \Leftrightarrow \quad UA^\top AU^\top = D$$

úgy, hogy a diagonálisban $A^\top A$ sajátértékei vannak (ezek nemnegatívak). Bevezetjük az $y = Ux$ jelölést.

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax)^\top (Ax) = x^\top A^\top Ax = x^\top U^\top DUx = (Ux)^\top D(Ux)$$

$$= y^\top Dy = \sum_{i=1}^n \underbrace{d_{ii}}_{\geq 0} \cdot |y_i|^2 \leq \max_{i=1}^n d_{ii} \cdot \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = \max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \cdot \|y\|_2^2 \, .$$

Biz. (folytatás): Ezután az indukált mátrixnormák definícióját követve Ax normáját fogjuk vizsgálni.

Kihasználjuk, hogy $A^\top A$ szimmetrikus, és így (lásd lineáris algebra) létezik U ortogonális (unitér) mátrix, amire

$$A^\top A = U^\top D U \quad \Leftrightarrow \quad U A^\top A U^\top = D$$

úgy, hogy a diagonálisban $A^\top A$ sajátértékei vannak (ezek nemnegatívak). Bevezetjük az $y = Ux$ jelölést.

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax)^\top (Ax) = x^\top A^\top A x = x^\top U^\top D U x = (Ux)^\top D (Ux)$$

$$= y^\top D y = \sum_{i=1}^n \underbrace{d_{ii}}_{\geq 0} \cdot |y_i|^2 \leq \max_{i=1}^n d_{ii} \cdot \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = \max_{i=1}^n \lambda_i(A^\top A) \cdot \|y\|_2^2 \, .$$

Belátjuk, hogy $\|y\|_2^2 = \|x\|_2^2$.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

$\|y\|_2^2 = y^\top y = (Ux)^\top (Ux) = x^\top U^\top Ux = x^\top x = \|x\|_2^2$, ezért

$$\|Ax\|_2^2 \leq \ldots \leq \max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \cdot \|x\|_2^2 \,.$$

$\|y\|_2^2 = y^\top y = (Ux)^\top (Ux) = x^\top U^\top Ux = x^\top x = \|x\|_2^2$, ezért

$$\|Ax\|_2^2 \leq \ldots \leq \max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \cdot \|x\|_2^2 .$$

$x \neq 0$ esetén:

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \left(\max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$$

Még azt kell belátni, hogy van is olyan $x \neq 0$ vektor, amire a szuprémum felvétetik.

Természetes mátrixnormák, avagy indukált normák

$\|y\|_2^2 = y^\top y = (Ux)^\top (Ux) = x^\top U^\top U x = x^\top x = \|x\|_2^2$, ezért

$$\|Ax\|_2^2 \leq \ldots \leq \max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \cdot \|x\|_2^2 \, .$$

$x \neq 0$ esetén:

$$\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \left(\max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$$

Még azt kell belátni, hogy van is olyan $x \neq 0$ vektor, amire a szuprémum felvétetik.

Legyen $\lambda_m = \max \lambda_i(A^\top A)$ és $v_m \neq 0$, $\|v_m\|_2 = 1$ a hozzá tartozó sajátvektor.

$$\|Av_m\|_2^2 = (Av_m)^\top (Av_m) = v_m^\top \underbrace{A^\top A \, v_m}_{\lambda_m \cdot v_m} = \lambda_m \cdot \underbrace{v_m^\top v_m}_{=1} = \lambda_m .$$

Definíció: spektrálsugár

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix *spektrálsugara* $\varrho(A) := \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|$.

Definíció: spektrálsugár

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix *spektrálsugara* $\varrho(A) := \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|$.

Megj.: A spektrálnormát a spektrálsugárral is meg tudjuk adni:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^\top A)}.$$

Definíció: spektrálsugár

Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix *spektrálsugara* $\varrho(A) := \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|$.

Megj.: A spektrálnormát a spektrálsugárral is meg tudjuk adni:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^\top A)}.$$

Állítás:

Egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus (önadjungált) mátrix spektrálnormája

$$\|A\|_2 = \varrho(A).$$

Definíció: spektrálsugár

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix *spektrálsugara* $\varrho(A) := \max_{i=1}^{n} |\lambda_i(A)|$.

Megj.: A spektrálnormát a spektrálsugárral is meg tudjuk adni:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^\top A)}.$$

Állítás:

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus (önadjungált) mátrix spektrálnormája

$$\|A\|_2 = \varrho(A).$$

Biz.: Trivi.

Állítás:

Ha A normális ($A^*A = AA^*$), akkor $\|A\|_2 = \varrho(A)$.
(Spec.: ha A önadjungált, akkor normális.)

Állítás:

Ha A normális ($A^*A = AA^*$), akkor $\|A\|_2 = \varrho(A)$.
(Spec.: ha A önadjungált, akkor normális.)

Biz.: Lineáris algebrából ismert, hogy normális mátixok esetén létezik U unitér hasonlósági transzformáció, mellyel A diagonális alakra hozható.

$$U^*AU = D = \operatorname{diag}(\lambda_i(A)) \quad \Leftrightarrow \quad A = UDU^*$$

$$A^*A = (UDU^*)^*UDU^* = UD^*U^*UDU^* = UD^*DU^*$$

$$\lambda_i(A^*A) = \lambda_i(D^*D) = |\lambda_i(A)|^2$$

$$\varrho(A^*A) = \varrho(A)^2$$

Állítás:

Ha A normális ($A^*A = AA^*$), akkor $\|A\|_2 = \varrho(A)$.
(Spec.: ha A önadjungált, akkor normális.)

Biz.: Lineáris algebrából ismert, hogy normális mátixok esetén létezik U unitér hasonlósági transzformáció, mellyel A diagonális alakra hozható.

$$U^*AU = D = \operatorname{diag}(\lambda_i(A)) \quad \Leftrightarrow \quad A = UDU^*$$

$$A^*A = (UDU^*)^*UDU^* = UD^*U^*UDU^* = UD^*DU^*$$

$$\lambda_i(A^*A) = \lambda_i(D^*D) = |\lambda_i(A)|^2$$

$$\varrho(A^*A) = \varrho(A)^2$$

Innen $\|A\|_2 = \varrho(A^*A)^{1/2} = \varrho(A)$.

Példa: $\|.\|_1$ és $\|.\|_\infty$ mátrixnormára

Számítsuk ki a következő mátrix $\|.\|_1$ és $\|.\|_\infty$ mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Példa: $\|.\|_1$ és $\|.\|_\infty$ mátrixnormára

Számítsuk ki a következő mátrix $\|.\|_1$ és $\|.\|_\infty$ mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max\{1 + 2, |-4| + 2\} = 6$$

$$\|A\|_\infty = \max\{1 + |-4|, 2 + 2\} = 5$$

Példa: $\|.\|_2$ mátrixnorma

Számítsuk ki a következő mátrix $\|.\|_2$ mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Példa: $\|.\|_2$ mátrixnorma

Számítsuk ki a következő mátrix $\|.\|_2$ mátrixnormáját.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix},$$

Szerencsénkre látjuk a sajátértékeit...

$$\|A\|_2 = \left(\max_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2} = \sqrt{\max\{5, 20\}} = \sqrt{20} \approx 4.4721.$$

Tartalomjegyzék

Állítás

A Frobenius-norma nem természetes mátrixnorma.

Állítás

A Frobenius-norma nem természetes mátrixnorma.

Biz.: Tekintsük az $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egységmátrix normáját.

- Indukált mátrixnormák esetén $\|I\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ix\|_v}{\|x\|_v} = 1$.
- Másrészt $\|I\|_F = \sqrt{n}$.
- Tehát nincs olyan vektornorma, ami a Frobenius-normát indukálná (ha $n > 1$). $\square$

Állítás: spektrálsugár és norma

$$\varrho(A) \leq \|A\|$$

Állítás: spektrálsugár és norma

$$\varrho(A) \leq \|A\|$$

Biz.: Belátjuk, hogy $|\lambda| \leq \|A\|$.
(Legyen λ tetszőleges sajátérték és $v \neq 0$ a hozzátartozó sajátvektor.)

$$Av = \lambda v$$
$$Avv^\top = \lambda vv^\top$$
$$\|A\| \cdot \left\|vv^\top\right\| \geq \left\|Avv^\top\right\| = \left\|\lambda vv^\top\right\| = |\lambda| \cdot \left\|vv^\top\right\|$$

Leosztva $\left\|vv^\top\right\| \neq 0$-val $\|A\| \geq |\lambda|$. $\square$

Feladatok gyakorlatra

Igazoljuk a következő állításokat.

a) Ha Q ortogonális (unitér), akkor
   - $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$,
   - $\|Q\|_2 = 1$,
   - $\|QA\|_2 = \|AQ\|_2 = \|A\|_2$.

Feladatok gyakorlatra

- b) $\|A\|_F^2 = \operatorname{tr}(A^\top A)$, ahol $\operatorname{tr}(B) := \sum_{k=1}^{n} b_{kk}$ a mátrix *nyoma*.
- c) Ha Q ortogonális (unitér), akkor $\|QA\|_F = \|AQ\|_F = \|A\|_F$.
- d) $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A)$.
- e) $\|.\|_F$ és $\|.\|_2$ ekvivalens mátrixnormák.
- f) A Frobenius-norma illeszkedik a kettes vektornormához.

Példák Matlab-ban

1. Indukált mátrixnorma szemléltetése $\mathbb{R}^2$, $p = 2$ esetén.
2. Indukált mátrixnormák közelítő számítása tetszőleges $\mathbb{R}^n$ és p esetén ($m = 100, \ldots, 1000$ vektor próbájával).