7. előadás

AZ INVERZFÜGGVÉNY- ÉS AZ IMPLICITFÜGGVÉNY-TÉTEL

Az inverzfüggvény-tétel

A valós-valós függvények inverzére vonatkozó deriválási szabály azt mondja ki, hogy ha az I nyílt intervallumon értelmezett, és ott szigorúan monoton és folytonos f függvény egy $a \in I$ pontban differenciálható, és $f'(a) \neq 0$, akkor a létező f^{-1} függvény differenciálható a $b = f(a)$ pontban, és

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

A fenti állítás kiterjeszthető ***az a pont egy környezetére***, ha $f : I \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható az I nyílt intervallumon, és $f'(a) \neq 0$. Ti. a folytonosság miatt $\exists U := K(a)$ környezet, hogy $f'(u) > 0$ (vagy $f'(u) < 0$) minden $u \in U$ esetén, ezért f szigorúan monoton és folytonos U-n, továbbá a $V := f[U]$ képhalmaz olyan nyílt intervallum, amely tartalmazza az $f(a)$ pontot, és

1. f lokálisan invertálható, azaz $f|_U : U \to V$ függvény bijekció,
2. az f^{-1} inverz függvény folytonosan deriválható V-n, és

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} \qquad (y \in V).$$

Többváltozós esetben hasonló állítás érvényes. A tételt nem bizonyítjuk.

1. Tétel (Inverzfüggvény-tétel). *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Tegyük fel, hogy,*

a) *f folytonosan deriválható Ω-n,*

b) *az $a \in \Omega$ pontban* $\det f'(a) \neq 0$.

Ekkor

1. *f* **lokálisan invertálható** *az a pontban, azaz vannak olyan $a \in U$ és $f(a) \in V$ nyílt halmazok, hogy az $f|_U : U \to V$ függvény bijekció (következésképpen invertálható),*
2. *az f^{-1} inverz függvény folytonosan deriválható V-n, és*

$$(*) \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \left[f'\left(f^{-1}(y)\right)\right]^{-1} \qquad (y \in V).$$

Megjegyzések.

1. Az inverz függvény létezése a többváltozós esetben *minőségileg bonyolultabb* az egyváltozós esetnél. Ez tehát egy olyan pont, ahol az egyváltozós analógia létezik ugyan, az immár nem elegendő.

2. Az f függvény explicit alakjának az ismeretében f^{-1} helyettesítési értékeire általában nincs explicit képlet, viszont $(*)$ alapján a derivált helyettesítési értékei az f' helyettesítési értékeinek felhasználásával már kiszámíthatók.

Az inverzfüggvény-tételnek egyenletrendszerek megoldásával kapcsolatos értelmezés is adható. Legyen $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Jelölje

$$f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

az f függvény koordinátafüggvényeit: $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Tekintsük az

$$f(x) = y$$

egyenletet. A komponensekre bontott alakba írva kapjuk az n egyenletből álló

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= y_1, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= y_2, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= y_n \end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ számokat paramétereknek tekintjük, és $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az ismeretlenek.

Legyen $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{D}_f$ és $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) := f(a)$. Tegyük fel, hogy f folytonosan deriválható az a pont egyik Ω környezetében, továbbá teljesül a $\det f'(a) \neq 0$ feltétel. Ekkor az inverzfüggvény-tétel szerint megadható olyan $b \in V$ paramétertartomány, hogy az egyenletrendszer egyértelműen megoldható az a pont egy U környezetében.

Implicit függvények (egyenletek megoldása)

Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre

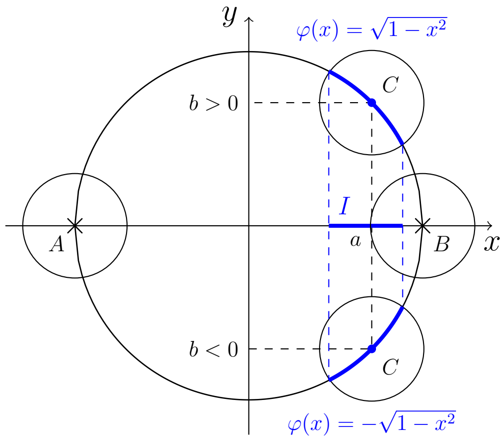
$$H := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x, y) = 0\right\} \neq \emptyset$$

teljesül. Szeretnénk kifejezni az y változót az x változóból, azaz egy olyan $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt találni, hogy $y = \varphi(x)$ ekvivalens legyen az $f(x, y) = 0$ egyenlettel.

A fenti problémának gyakran nincs megoldása ilyen általános formában. Tudjuk pl., hogy az $x^2+y^2-1 = 0$ egyenlet megoldásai az origó középpontú egység sugarú kör pontjai, és nincs olyan valós-valós függvény, amelynek grafikonja teljes kört alkot. Ezért az eredeti problémának egy „lokális” változatával foglalkozunk, nevezetesen olyan $\varphi : I \to \mathbb{R}$ nyílt intervallum értelmezett függvényt keresünk, amire

$$f\big(x, \varphi(x)\big) = 0 \qquad (x \in I)$$

teljesül. Ekkor azt mondjuk, hogy φ az $f(x, y)=0$ egyenletnek egy ***implicit megoldása***.



Nézzük újra az

$$f(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvényből származó $x^2 + y^2 - 1 = 0$ egyenletet! Ha $C(a, b)$ olyan pont, hogy $f(a, b) = 0$ és $b > 0$, akkor $\exists I \ni a$ nyílt halmaz, hogy

$$\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad (x \in I)$$

implicit megoldása lesz az egyenletnek, illetve ha $b < 0$, akkor

$$\varphi(x) = -\sqrt{1-x^2} \qquad (x \in I)$$

implicit megoldása lesz az egyenletnek. Azonban nincs olyan implicit megoldás, amely az $A(-1,0)$ vagy a $B(1,0)$ ponton menne át, azaz ha $b = 0$.

Vegyük észre, hogy $\partial_2 f(x,y) = 2y \implies \partial_2 f(A) = \partial_2 f(B) = 0$, de a többi C pontban (ahol $\exists \varphi$) igaz, hogy $\partial_2 f(C) \neq 0$.

2. Tétel (Egyváltozós implicitfüggvény-tétel). *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

a) *f folytonosan deriválható Ω-n,*

b) *az $(a,b) \in \Omega$ pontban $f(a,b) = 0$ és $\partial_2 f(a,b) \neq 0$.*

Ekkor

1. *van olyan $U := K(a)$ környezet és $b \in V$ nyílt halmaz $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $x \in U$ ponthoz létezik egyetlen $\varphi(x) \in V$, amelyre $f\big(x, \varphi(x)\big) = 0$ teljesül,*
2. *az így definiált $\varphi : U \to V$ függvény folytonosan deriválható U-n és*

$$(**) \qquad \varphi'(x) = -\frac{\partial_1 f\big(x, \varphi(x)\big)}{\partial_2 f\big(x, \varphi(x)\big)} \qquad (x \in U).$$

Megjegyzés. Világos, hogy $\varphi(a) = b$. A φ függvényt az $f\big(x, \varphi(x)\big) = 0$ $(x \in U)$ egyenlőség „implicit” (= nem kifejtett, burkolt, rejtett) módon definiálja. Innen származik a tétel neve.

3. Tétel (Implicitfüggvény-tétel az általános esetben). *Legyenek $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ és $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ nyílt halmazok $(n_1, n_2 \in \mathbb{N}^+)$, illetve $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^{n_2}$. Tegyük fel, hogy,*

a) *f folytonosan deriválható az $\Omega_1 \times \Omega_2$ halmazon,*

b) *az $(a,b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ pontban $f(a,b) = 0$ és $\det \partial_2 f(a,b) \neq 0$.*

Ekkor

1. *létezik a-nak olyan $U := K(a) \subset \Omega_1$ környezet és $b \in V \subset \Omega_2$ nyílt halmaz, hogy minden $x \in U$ ponthoz létezik egyetlen $\varphi(x) \in V$, amelyre $f\big(x, \varphi(x)\big) = 0 \in \mathbb{R}^{n_2}$,*
2. *az így definiált $\varphi : U \to V$ függvény folytonosan deriválható U-n és*

$$\varphi'(x) = -\Big[\partial_2 f\big(x, \varphi(x)\big)\Big]^{-1} \cdot \partial_1 f\big(x, \varphi(x)\big) \qquad (x \in U).$$

Megjegyzés. A tételben $\partial_2 f(a,b)$ jelöli az f függvény *második változócsoport szerinti parciális deriváltját* az (a,b) pontban. Ez az alábbi módon definiált $n_2 \times n_2$-típusú mátrix:

$$\partial_2 f(a,b) := \Big(\mathbb{R}^{n_2} \supset \Omega_2 \ni y \mapsto f(a,y) \in \mathbb{R}^{n_2}\Big)'_{y=b} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}.$$

A $\partial_1 f(a,b)$ derivált definíciója hasonló.

A tételnek egyenletrendszerek *megoldhatóságával* kapcsolatos értelmezés is adható.

Tegyük fel, hogy $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}$, illetve $f = (f_1, f_2, \ldots, f_{n_2}) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{n_2}$.

Tekintsük az $f(x, y) = 0$ egyenletrendszert, amelyet komponensekre bontott alakban így írhatunk fel:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) &= 0, \\ &\vdots \\ f_{n_2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}; y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}) &= 0. \end{aligned}$$

Itt az $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ számok az ismeretlenek és $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ a paraméterek. Feltesszük, hogy *ismerjük* ennek egy megoldását, azaz tudjuk, hogy az $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n_1})$ paraméter esetén $b = (b_1, b_2, \ldots, b_{n_2})$ egy megoldás, vagyis $f(a, b) = 0$. A fenti egyenletrendszerből szeretnénk kifejezni az $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ ismeretleneket az $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ paraméterek függvényében. A 2. Tétel szerint ez minden a-hoz közeli x esetén megtehető, ha f folytonosan deriválható és $\partial_2 f(a, b) \neq 0$; a megoldások egyértelműek és x-nek folytonosan deriválható függvényei.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ TÍPUSÚ FÜGGVÉNYEK FELTÉTELES SZÉLSŐÉRTÉKEI

Vannak olyan problémák, ahol egy $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény szélsőértékét kell keresni, de csak bizonyos egyenletet kielégítő pontok jöhetnek számításba.

1. Példa: Keressük meg az $x+2y-4 = 0$ egyenletű egyenesnek azt a pontját, amely legközelebb van az origótól!

A probléma a következő módon modellezhető:

Keressük meg az

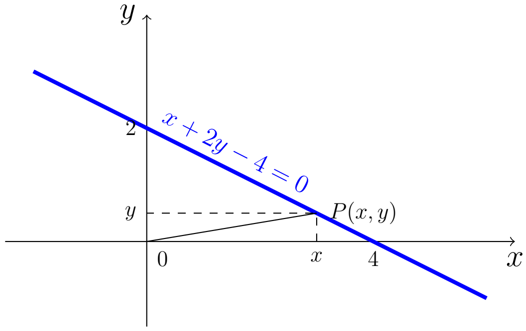
$$f(x, y) := x^2 + y^2 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény minimumát a

$$H_g := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; g(x, y) = 0\Big\}$$

halmazon, ahol

$$g(x, y) := x + 2y - 4 \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$



2. Példa: Határozzuk meg az egységsugarú körbe írt téglalapok között a maximális területű téglalapot!

A probléma a következő módon modellezhető:

Legyen $U := (0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Keressük meg az

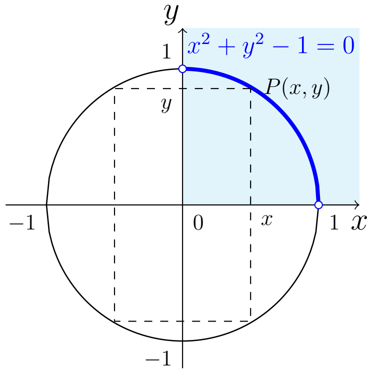
$$f(x, y) := 4xy \qquad \big((x, y) \in U\big)$$

függvény maximumát a

$$H_g := \Big\{(x, y) \in U \;\Big|\; g(x, y) = 0\Big\}$$

halmazon, ahol

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 \qquad \big((x, y) \in U\big).$$



Általános feladat: Adott

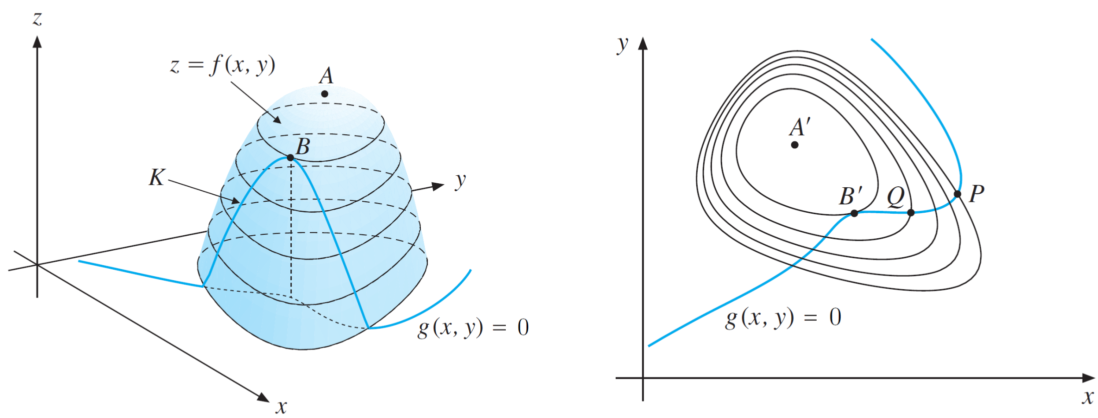
- $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz,
- $f : U \to \mathbb{R}$ (célfüggvény) és
- $g : U \to \mathbb{R}$ (feltételfüggvény).

Keressük az f függvény szélsőértékeit a

$$H_g := \Big\{(x, y) \in U \;\Big|\; g(x, y) = 0\Big\}$$

halmazon, azaz határozzuk meg az $f|_{H_g}$ függvény szélsőértékeit!

A problémát az alábbi ábrákon szemléltetjük:



1. Definíció. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz. Tegyük fel, hogy $f, g : U \to \mathbb{R}$ adott függvények és*

$$a \in H_g := \Big\{(x, y) \in U \;\Big|\; g(x, y) = 0\Big\} \neq \emptyset.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g = 0$ feltétel mellett az a pontban

- **feltételes abszolút maximuma van**, *ha*
$$\forall x \in H_g \colon f(x) \leq f(a),$$
- **feltételes lokális maximuma van**, *ha*
$$\exists K(a) \subset U,\ \forall x \in K(a) \cap H_g \colon f(x) \leq f(a).$$

A ***minimummal*** kapcsolatban hasonló fogalmakat kapunk, ha a fentiekben a $\leq$ egyenlőtlenség helyett $\geq$-t írunk. A korábbiakkal összhangban használjuk $f(a)$-ra a ***feltételes abszolút (lokális) maximum (minimum)***, illetve ***szélsőérték***, továbbá a-ra a ***feltételes abszolút (lokális) maximumhely (minimumhely)***, illetve ***szélsőértékhely*** elnevezést is.

Megjegyzés. Az $f|_{H_g} \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény lokális szélsőértékeire *nem alkalmazhatók* az előző előadáson megfogalmazott tételek, hiszen a $H_g \subset \mathbb{R}^2$ halmaznak nincsenek belső pontjai. Másrészt, mivel U nyílt halmaz és $H_g \subset U$, így minden feltételes abszolút szélsőértékhely egyben feltételes lokális szélsőértékhely is.

4. Tétel (Szükséges feltétel a feltételes lokális szélsőértékre). *Tegyük fel, hogy*

a) *$U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és az $f, g : U \to \mathbb{R}$ függvényeknek léteznek a parciális deriváltjaik, és ezek folytonosak az U halmazon $\big(f, g \in C^1(U)\big)$,*

b) *az $(x_0, y_0) \in U$ pontban az f függvénynek a $g = 0$ feltételre vonatkozóan feltételes lokális szélsőértéke van,*

c) *$g'(x_0, y_0) = \big(\partial_1 g(x_0, y_0) \quad \partial_2 g(x_0, y_0)\big) \neq \big(0 \quad 0\big)$.*

*Ekkor van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ valós szám (ezt **Lagrange-szorzónak** szokás nevezni), hogy az*

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y) \qquad \big((x, y) \in U\big)$$

***Lagrange-függvénynek** (x_0, y_0) stacionárius pontja, azaz*

$$\mathcal{L}'(x_0, y_0) = \big(\partial_x \mathcal{L}(x_0, y_0) \quad \partial_y \mathcal{L}(x_0, y_0)\big) = \big(0 \quad 0\big).$$

$\mathcal{L}'(x_0, y_0) = \big(0 \quad 0\big)$ csak *szükséges*, de *nem elégséges* feltétel a feltételes lokális szélsőértékre.

5. Tétel (A feltételes lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel). *Tegyük fel, hogy*

a) *$U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és az $f, g : U \to \mathbb{R}$ függvényeknek léteznek a másodrendű parciális deriváltjaik és ezek folytonosak az U halmazon $\big(f, g \in C^2(U)\big)$,*

b) *az $(x_0, y_0) \in U$ pontban a $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ számmal teljesül a szükséges feltétel.*

Tekintsük ezzel a λ_0 számmal az

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda_0 g(x, y) \qquad \big((x, y) \in U\big)$$

Lagrange-függvényt. Legyen

$$D(x_0, y_0; \lambda_0) := \det \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_2 g(x_0, y_0) \\ \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_{11} \mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{12} \mathcal{L}(x_0, y_0) \\ \partial_2 g(x_0, y_0) & \partial_{21} \mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{22} \mathcal{L}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Ekkor,

- $D(x_0, y_0; \lambda_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_0, y_0)$ *feltételes lokális* **maximumhely**,
- $D(x_0, y_0; \lambda_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_0, y_0)$ *feltételes lokális* **minimumhely**.

Megjegyzés. A feltételes szélsőértékek vizsgálatára alkalmazható módszer kitalálója *Joseph Louis Lagrange* (1736–1813) francia matematikus. Ezért a szóban forgó módszert ***Lagrange-szorzók*** (vagy ***Lagrange-féle multiplikátorok***) ***módszerének*** nevezzük.

A módszer alkalmazása:

1. Ellenőrizzük az $f, g \in C^1(U)$ feltételt, és nézzük meg melyik $(x, y) \in H_g$ pontok esetén teljesül a $g'(x, y) = 0$ egyenlőség! Ezekre a pontokra a módszer nem alkalmazható.

2. Képezzük az
$$\mathcal{L}(x,y) := f(x,y) + \lambda g(x,y) \qquad \Big((x,y)\in U\Big)$$
Lagrange függvényt!

3. Az x, y, λ ismeretlenekre megoldjuk az alábbi egyenletrendszert:
$$\begin{aligned}\partial_x\mathcal{L}(x,y) &= \partial_x f(x,y) + \lambda\partial_x g(x,y) = 0,\\ \partial_y\mathcal{L}(x,y) &= \partial_y f(x,y) + \lambda\partial_y g(x,y) = 0,\\ g(x,y) &= 0.\end{aligned}$$
Csak az így kapott (x_0, y_0) stacionárius pontok lehetnek feltételes lokális szélsőértékhelyek.

4. Ha $f, g \in C^2(U)$, akkor minden lehetséges (x_0, y_0) stacionárius pontban a hozzájuk tartozó λ_0-val képezzük a $D(x_0, y_0; \lambda_0)$ determinánst, és az így kapott érték előjele alapján (ha nem nulla) eldöntjük, hogy az (x_0, y_0) pont feltételes lokális maximum- vagy minimumhely.

Megjegyzések.

1. A fentiekben két változó és egy egyenlőségi feltétel mellett vizsgáltuk a feltételes szélsőérték-problémát. Az eredmények kiterjeszthetők arra az esetre is, amikor az f célfüggvény n-változós ($2 < n \in \mathbb{N}$), és ekkor az egyetlen $g = 0$ feltétel helyett akár több $g_1 = 0$, $g_2 = 0, \ldots, g_m = 0$ egyenlőségi feltételt is előírhatunk, ahol $1 \le m < n$. Ekkor a Lagrange-függvény
$$\mathcal{L}(x,y) := f(x,y) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x,y) \qquad \Big((x,y)\in U\Big).$$
Ha $m > 1$, akkor több λ szorzó szerepel a Lagrange-függvényben, ami igazolja a „Lagrange-szorzók” elnevezésben szereplő többes számot.

2. A gyakorlat felvet számos olyan szélsőérték-problémát, amelyekben a változókra tett korlátozó feltételek nem egyenlőségekkel, hanem egyenlőtlenségekkel adottak. Az ilyen típusú problémákat ***(lineáris) programozási*** feladatoknak hívják. Vizsgálatukhoz nem csak az analízis, hanem a lineáris algebra eszköztárát is fel kell használni.

3. Ha a szükséges feltétel bizonyításában szereplő $\varphi : U^* \to \mathbb{R}$ implicit függvényt meg tudjuk határozni, és a teljes H_g halmaz pontjaiban az f függvény értékei kifejezhetők a
$$h(x) := f\Big(x, \varphi(x)\Big) \qquad (x \in U^*)$$
valós-valós függvénnyel, akkor a kétváltozós függvényekre vonatkozó feltételes szélsőérték-probléma visszavezethető a h egyváltozós függvény (feltétel nélküli) szélsőérték-problémájára.

4. A ***feltételes abszolút szélsőértékhelyek*** megkeresése egy „egyszerűbb” feladathoz vezethet, ha a
$$H_g := \Big\{(x,y)\in U \;\Big|\; g(x,y) = 0\Big\}$$
halmaz korlátos és zárt. Ebben az esetben a Weierstrass-tétel garantálja a feltételes abszolút szélsőértékhelyek létezését, amelyek a Lagrange-függvény stacionárius pontjai lesznek. Így „kevés számú” stacionárius pont esetében elegendő a függvényértékük összehasonlításával eldönteni, hogy közülük melyik a feltételes abszolút maximum és minimum.