**Többváltozós függvénytan, 1. zárthelyi dolgozat, 2023.04.13.**

**Megoldások** (vázlatosan)

**1.** Oldja meg a következő kezdetiérték-feladatot! (7 pont)

$$y' = \frac{x}{y + yx^2}, \quad y(0) = -1 \qquad (x \in \mathbb{R},\, y < 0).$$

*Megoldás.*

- Átalakítás és integrálás:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x}{y + yx^2} = \frac{1}{y} \cdot \frac{x}{x^2+1} \qquad \to \qquad \int y\, dy = \int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$$

  Tehát

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 = \ln(x^2+1) + c$$

- Kezdeti érték:

$$y(0) = -1 \quad \Longrightarrow \quad (-1)^2 = \ln(0^2+1) + c \quad \Longrightarrow \quad c = 1 \quad \Longrightarrow \quad y^2 = \ln(x^2+1) + 1$$

- A megoldás:

$$y < 0, \quad \ln(x^2+1) \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = -\sqrt{\ln(x^2+1)+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

**2.** Keresse meg a következő differenciálegyenlet összes megoldását! (7 pont)

$$y' - 2y = e^{2x} + 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

*Megoldás.*

- A homogén összes megoldása:

$$y' - 2y = 0 \quad \to \quad \frac{dy}{dx} = 2y \quad \to \quad \int \frac{1}{y}\, dy = \int 2\, dx \quad \to \quad \ln y = 2x + c_1 \quad \to \quad y = ce^{2x},$$

  ahol $x \in \mathbb{R}$ és $c \in \mathbb{R}$ konstans.

- Az inhomogén partikuláris megoldása: $y_p(x) = c(x)e^{2x}$ $(x \in \mathbb{R})$, ahol $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$y_p' = c'e^{2x} + 2ce^{2x} \qquad \Longrightarrow \qquad \underbrace{(c'e^{2x} + 2ce^{2x})}_{y_p'} - 2\underbrace{(ce^{2x})}_{y_p} = e^{2x} + 1$$

  Így

$$c'e^{2x} = e^{2x} + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad c \in \int \left(1 + e^{-2x}\right) dx = x + \frac{e^{-2x}}{-2} + C$$

  Tehát

$$c(x) := x - \frac{e^{-2x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \Longrightarrow \qquad y_p(x) = xe^{2x} - \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

- A differenciálegyenlet összes megoldása: $y(x) = (x+c)e^{2x} - \dfrac{1}{2} \qquad (x \in \mathbb{R},\, c \in \mathbb{R}).$

**3.** a) A definíció alapján igazolja, hogy az alábbi $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $(0,0)$ pontban! (6 pont)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+2y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b) Igazolja, hogy az alábbi határérték nem létezik! (4 pont)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y+3y^2}{x^4+y^2}$$

*Megoldás.*

a)

- A definíció:

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left\|(x,y)-(0,0)\right\| < \delta\colon |f(x,y)-0| < \varepsilon$$

- Becslés:

$$\left|\frac{x^3y^3}{x^2+2y^2} - 0\right| \leq \frac{|xy|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^3}{x^2+y^2} = \frac{1}{8}\,(x^2+y^2)^2 \leq \left\|(x,y)\right\|^4 < \varepsilon$$

- $\delta := \sqrt[4]{\varepsilon}$.

b)

- Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y+3y^2}{x^4+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

  Az átviteli elv szerint elegendő két $(x_n,y_n) \to (0,0)$ és $(u_n,v_n) \to (0,0)$ sorozatot találni, amire

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(u_n,v_n).$$

- A sorozatok megkeresése:

$$y = mx^2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x,mx^2) = \frac{2x^2mx^2+3(mx^2)^2}{x^4+(mx^2)^2} = \frac{2m+3m^2}{1+m^2}$$

  - $(m=0)$ $\qquad (x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n},0\right) \to (0,0) \quad$ és $\quad f(x_n,y_n) = 0.$
  - $(m=1)$ $\qquad (u_n,v_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right) \to (0,0) \quad$ és $\quad f(u_n,v_n) = \frac{5}{2}.$

  De enélkül egyszerű behelyettesítéssel rá lehet jönni, hogy az $\left(\frac{1}{n},0\right)$ és $\left(0,\frac{1}{n}\right)$ sorozatok megválasztása is jó.

**4.** A definíció alapján igazoljuk, hogy az

$$f(x,y) := x^2y - xy^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény differenciálható a $P(1,0)$ pontban, és határozzuk meg az $f'(1,0)$ deriváltmátrixot! A kapott eredményt ellenőrizzük a Jacobi-mátrix kiszámításával! (8 pont)

*Megoldás.*

- A definíció:

$$\exists A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}, \text{ hogy } \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left| f(a+h) - f(a) - \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0,$$

  ahol $a = (1,0)$ és $h = (h_1, h_2)$.

- A számlálóban:

$$f(a+h) - f(a) = f(1+h_1, 0+h_2) - f(1,0) = (1+h_1)^2 h_2 - (1+h_1)h_2^2 - 0 =$$
$$= h_2 + 2h_1h_2 + h_1^2 h_2 - h_1h_2^2 - h_2^2$$

$$!A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad f(a+h) - f(a) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2h_1h_2 + h_1^2h_2 - h_1h_2^2 - h_2^2$$

- A határérték nulla a közrefogási elv alapján: Ha $h_1 \to 0$ és $h_2 \to 0$, akkor

$$0 \le \frac{|2h_1h_2 + h_1^2h_2 - h_1h_2^2 - h_2^2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \frac{|h_1h_2| \cdot |2 + h_1 - h_2| + h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$\le \frac{\left(\frac{h_1^2+h_2^2}{2}\right) \cdot |2 + h_1 - h_2| + h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \sqrt{h_1^2+h_2^2}\left(\frac{1}{2}|2+h_1-h_2| + 1\right) \to$$

$$\to 0 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + 1\right) = 0$$

  Ezért $f'(1,0) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- A Jacobi-mátrix:
  - $\partial_1 f(x,y) = 2xy - y^2 \quad \Longrightarrow \quad \partial_1 f(1,0) = 0.$
  - $\partial_2 f(x,y) = x^2 - 2xy \quad \Longrightarrow \quad \partial_2 f(1,0) = 1.$

  Ezért $f'(1,0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(1,0) & \partial_2 f(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$

**5.** Legyen

$$f(x,y) := \frac{x+3y}{e^{xy}} \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

a) Határozza meg az $f$ függvény iránymenti deriváltját a $P(1,0)$ pontban a $v = (6,8)$ vektor által meghatározott irány mentén!

b) Írja fel a $z = f(x,y)$ egyenletű felület $P(1,0)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát!

(8 pont)

*Megoldás.*

- A parciális deriváltak:
  - $\partial_1 f(x,y) = 1 \cdot e^{-xy} + (x+3y)e^{-xy} \cdot (-y) = \dfrac{1 - xy - 3y^2}{e^{xy}}.$
  - $\partial_2 f(x,y) = 3 \cdot e^{-xy} + (x+3y)e^{-xy} \cdot (-x) = \dfrac{3 - 3xy - x^2}{e^{xy}}.$

- Mivel a parciális deriváltak folytonosak, ezért $f \in D\{P\}$. Másrészt

$$\partial_1 f(1,0) = 1, \qquad \partial_2 f(1,0) = 2.$$

- Az egységvektor:

$$v = (v_1, v_2) = \frac{u}{\|u\|} = \frac{(6,8)}{\sqrt{6^2+8^2}} = \left(\frac{6}{10}, \frac{8}{10}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

- Az iránymenti derivált:

$$\partial_v f(1,0) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{11}{5}.$$

- Az érintősík egyenlete:

$$z - f(1,0) = \partial_1 f(1,0)(x-1) + \partial_2 f(1,0)(y-0)$$

  Így

$$f(1,0) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad z - 1 = 1(x-1) + 2(y-0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x + 2y - z = 0$$

- A sík normálvektora:

$$\vec{n} = (1, 2, -1).$$