9. előadás

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA 1.

Ebben a fejezetben valós-valós függvények határértékével és folytonosságával foglalkozunk.

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE 1.

A függvényhatárérték motivációja

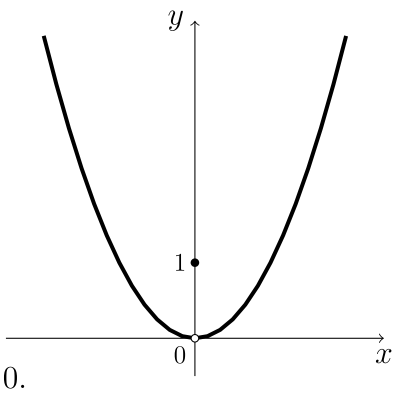
Egy f függvény valamely $a \in \mathbb{R}$ pontbeli határértékével a függvénynek azt a tulajdonságát fogjuk precíz módon megfogalmazni, hogy „ha $x \neq a$ tetszőlegesen közel van a-hoz, akkor az $f(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közel vannak valamely $A \in \mathbb{R}$ értékhez". A szóban forgó tulajdonságot többek között a

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

szimbólummal fogjuk jelölni, és azt mondjuk, hogy „az f függvény határértéke a-ban A-val egyenlő". Az $\boldsymbol{x \neq a}$ feltétel **rendkívül fontos!** A függvényértékeket ti. az a-hoz közeli pontokban fogjuk vizsgálni független attól, hogy a függvény értelmezve van-e az a pontban, és ha igen, akkor mennyi ott a függvény értéke.

Tekintsük például az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} x^2 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$



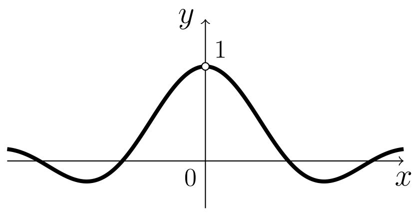
függvényt. A 0-tól különböző x pontokban a függvény az x^2 értéket veszi fel, ezért az $a = 0$ pont közelében a függvényértékek akármilyen közel lehetnek a 0-hoz. Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Azonban $f(0) \neq 0$, azaz a 0 pontban a függvény értéke nem 0.

Nézzük most egy másik példát! Legyen

$$f(x) := \frac{\sin x}{x} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big).$$



A függvény az $a = 0$ pontban ezzel a képlettel nem értelmezhető. A 0 pont közelében nem tudjuk megállapítani a függvényértékek viselkedését, mert két nagyon kicsi szám hányadosáról van szó. Ha a függvényt valamely komputeralgebrai rendszerrel ábrázoljuk, akkor azt látjuk, hogy a szóban forgó függvényértékek 1 közelében vannak. Hamarosan igazolni fogjuk, hogy

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

A függvényértékek viselkedését tetszőlegesen nagy x értékekre is vizsgálhatjuk, és ekkor legyen $a := +\infty$. Az a tulajdonság, hogy „x tetszőlegesen közel van $a = +\infty$-hez" azt jelenti, hogy „x értéke tetszőlegesen nagy lehet". Az $a := -\infty$ is lehet, és ekkor a függvényértékek viselkedését tetszőlegesen nagy abszolút értékű negatív x-ekre vizsgáljuk.

Hasonlóan megengedhetjük azt is, hogy A szintén akár $-\infty$ vagy $+\infty$ is legyen. Például, a

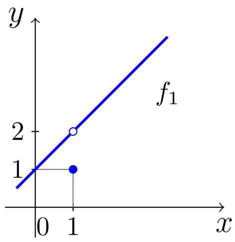
$$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty, \qquad \text{illetve} \qquad \lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$$

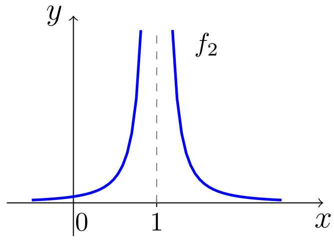
tulajdonság azt jelenti, hogy ha $2 \neq x \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen közel van 2-höz, akkor az $f(x)$ függvényértékek akármilyen nagy értékeket vesznek fel, illetve ha x értéke tetszőlegesen nagy, akkor a $g(x)$ függvényértékek akármilyen nagy abszolút értékű negatív értékeket vesznek fel.

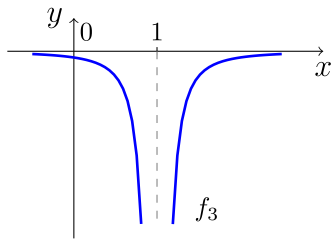
Lássunk néhány konkrét példát!

Legyen $\boxed{a = 1}$ és tekintsük a következő függvényeket:

$$f_1 := \begin{cases} x+1 & (1 \neq x \in \mathbb{R}) \\ 1 & (x = 1) \end{cases} \qquad f_2 := \frac{1}{(x-1)^2} \quad (1 \neq x \in \mathbb{R}) \qquad f_3 := -\frac{1}{(x-1)^2} \quad (1 \neq x \in \mathbb{R})$$



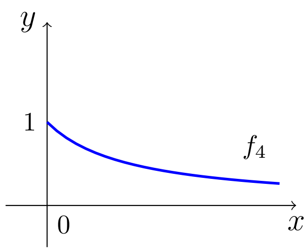


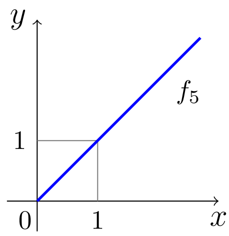


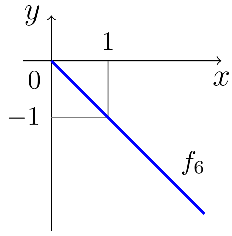
$$\boxed{\lim_{x\to 1} f_1(x) = 2} \qquad \boxed{\lim_{x\to 1} f_2(x) = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to 1} f_3(x) = -\infty}$$

Legyen most $\boxed{a = +\infty}$ és tekintsük a következő függvényeket:

$$f_4(x) = \frac{1}{x+1} \quad (x \geq 0) \qquad f_5(x) = x \quad (x \geq 0) \qquad f_6(x) = -x \quad (x \geq 0)$$



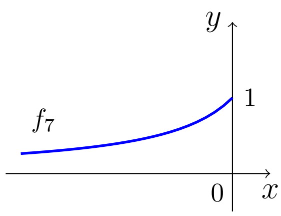


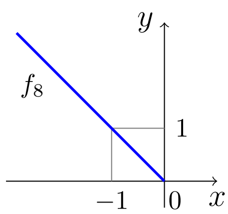


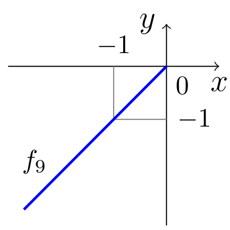
$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f_4(x) = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to +\infty} f_5(x) = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to +\infty} f_6(x) = -\infty}$$

Végül $\boxed{a = -\infty}$ esetén tekintsük a következő függvényeket:

$$f_7(x) = \frac{1}{1-x} \quad (x \leq 0) \qquad f_8(x) = -x \quad (x \leq 0) \qquad f_9(x) = x \quad (x \leq 0)$$







$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} f_7(x) = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to -\infty} f_8(x) = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to -\infty} f_9(x) = -\infty}$$

Összefoglalva: függvény határértékét az alábbi $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pontokban vizsgálhatjuk:

$$a \in \mathbb{R} \quad \text{(végesben)} \qquad \text{vagy} \qquad \left.\begin{array}{l} a = +\infty \\ a = -\infty \end{array}\right\} \quad \text{(végtelenben)},$$

és ekkor az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ határérték lehet:

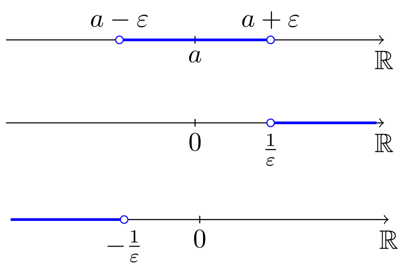
$$A \in \mathbb{R} \quad \text{(véges)} \qquad \text{vagy} \qquad \left.\begin{array}{l} A = +\infty \\ A = -\infty \end{array}\right\} \quad \text{(végtelen)}.$$

Ez összesen 9-féle lehetőséget jelent. Azonban mindegyik mögött ugyanaz az alapgondolat áll. Ezért a sorozatok határértékéhez hasonlóan, környezetek segítségével egy egységes definíciót tudunk megadni. Mivel az a pontbeli határértéknél az a-hoz tetszőlegesen közeli pontokban felvett függvényértékek viselkedését vizsgáljuk, ezért fel fogjuk tenni azt, hogy a függvény az a pont tetszőleges környezetében végtelen sok helyen van értelmezve. Ezzel kapcsolatos a **torlódási pont** fogalma.

Számhalmaz torlódási pontja

Emlékeztetünk arra, hogy az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ elem $\varepsilon > 0$ sugarú **környezetét** így értelmeztük:

$$K_\varepsilon(a) := \begin{cases} (a-\varepsilon, a+\varepsilon), & \text{ha } a \in \mathbb{R} \\ \left(\dfrac{1}{\varepsilon}, +\infty\right), & \text{ha } a = +\infty \\ \left(-\infty, -\dfrac{1}{\varepsilon}\right), & \text{ha } a = -\infty. \end{cases}$$



Célszerű még a

$$\dot{K}_\varepsilon(a) := K_\varepsilon(a) \setminus \{a\} \qquad (a \in \overline{\mathbb{R}})$$

ún. **pontozott környezet** fogalmát is bevezetni. Ez csak akkor különbözik a **környezet** fogalmától, ha $a \in \mathbb{R}$, és ekkor

$$\dot{K}_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\} = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon).$$

A fogalom bevezetése azért célszerű, mert az a pontbeli függvényhatárérték értelmezéséhez nem szükséges, hogy a függvény értelmezve legyen az a pontban. Ezzel szemben nélkülözhetetlen, hogy a függvény értelmezve legyen az a minden pontozott környezetének legalább az egyik pontjában, mivel az a-hoz tetszőlegesen közeli pontokban felvett függvényértékek viselkedését vizsgáljuk. Ezzel kapcsolatos a következő fogalom.

1. definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaznak $a \in \overline{\mathbb{R}}$* ***torlódási pontja****, ha az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ minden környezete végtelen sok H-beli elemet tartalmaz, azaz*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \textit{esetén} \quad K_\varepsilon(a) \cap H \quad \textit{végtelen halmaz.}$$

A H halmaz torlódási pontjainak a halmazát a $\boxed{H'}$ szimbólummal jelöljük.

1. tétel. *Az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ elem akkor és csak akkor torlódási pontja a $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaznak, ha a-nak minden környezete tartalmaz a-tól különböző H-beli elemet, azaz*

$$a \in H' \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \colon \dot{K}_\varepsilon(a) \cap H \neq \emptyset.$$

Bizonyítás.

$\boxed{\Rightarrow}$ Az állítás nyilvánvaló, mert ha $a \in H'$, akkor $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén

$$K_\varepsilon(a) \cap H \text{ végtelen halmaz} \qquad \Longrightarrow \qquad \big(K_\varepsilon(a) \cap H\big) \setminus \{a\} \text{ végtelen halmaz,}$$

és így $\dot{K}_\varepsilon(a) \cap H$ nem üres.

$\boxed{\Leftarrow}$ Indirekt módon tegyük fel, hogy $a \notin H'$. Ekkor $\exists\, \varepsilon > 0 \colon K_\varepsilon(a) \cap H$ véges halmaz. Ha $K_\varepsilon(a) \cap H = \{a\}$ vagy $K_\varepsilon(a) \cap H = \emptyset$, akkor nyilván $\dot{K}_\varepsilon(a) \cap H = \emptyset$. Ellenkező esetben a $\dot{K}_\varepsilon(a) \cap H$ halmaz tartalmaz legalább egy a-tól különböző elemet, és így

$$K_\varepsilon(a) \cap H =: \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \qquad \Longrightarrow \qquad r := \min\Big\{|a_k - a| \;\Big|\; a_k \neq a,\ k = 1, \ldots, n\Big\} > 0$$

Ekkor $\dot{K}_r(a) \cap H = \emptyset$, ami ellentmond annak, hogy $\forall\, \varepsilon > 0 \colon \dot{K}_\varepsilon(a) \cap H \neq \emptyset$.

Példák:

- $\mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{Q}' = \overline{\mathbb{R}}$ és $\big(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\big)' = \overline{\mathbb{R}}$,
- $(0,1)' = [0,1]$ és $[0,1]' = [0,1]$,
- $\left\{\frac{1}{n} \;\Big|\; n \in \mathbb{N}^+\right\}' = \{0\}, \quad \mathbb{N}' = \{+\infty\}$,
- ha H véges halmaz, akkor $H' = \emptyset$.

Megjegyzés. Fontos megjegyezni, hogy ha $a \in \mathbb{R}$ és $a \in H'$, akkor

lehet, hogy $\boxed{a \in H}$ és az is előfordulhat, hogy $\boxed{a \notin H}$.

Például, ha $H = (-1, 1)$ és $a = 0$, akkor $0 \in H'$ és $0 \in H$, de $1 \in H'$ esetén $1 \notin H$. ■

A következő tétel azt állítja, hogy a torlódási pontokat halmazbeli sorozatok határértékével lehet jellemezni.

2. tétel. *Az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ elem akkor és csak akkor torlódási pontja a $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ halmaznak, ha van olyan $(x_n) : \mathbb{N} \to H \setminus \{a\}$ sorozat, amelynek létezik $\overline{\mathbb{R}}$-beli határértéke, és $\lim(x_n) = a$.*

Bizonyítás.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ha $a \in H'$, akkor $\forall\, \varepsilon > 0 \colon \dot{K}_\varepsilon(a) \cap H \neq \emptyset$, és így

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \colon \dot{K}_{\frac{1}{n}}(a) \cap H \neq \emptyset.$$

Legyen $x_0 \in H \setminus \{a\}$ tetszőleges, és jelölje x_n a fenti nem üres halmaznak egy tetszőleges elemét. Így $(x_n) : \mathbb{N} \to H \setminus \{a\}$, és $x_n \in K_{\frac{1}{n}}(a)$ $(n \in \mathbb{N}^+)$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és $n_0 := [1/\varepsilon]$. Ekkor $\forall\, n > n_0 \geq 0$ index esetén $n > 1/\varepsilon$, és így $1/n < \varepsilon$. Ezért

$$x_n \in K_{\frac{1}{n}}(a) \subset K_\varepsilon(a),$$

ami a sorozatok határértékének az egységes definíciója szerint azt jelenti, hogy $\lim(x_n) = a$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy valamilyen $(x_n) : \mathbb{N} \to H \setminus \{a\}$ sorozatra $\lim(x_n) = a$ teljesül. Ekkor bármely $K_\varepsilon(a)$ környezetet véve találunk olyan x_n sorozatbeli tagot, amire $x_n \in K_\varepsilon(a)$. Azonban $x_n \in H \setminus \{a\}$, ezért

$$\forall\, \varepsilon > 0\colon \dot{K}_\varepsilon(a) \cap H \neq \emptyset. \qquad \Longrightarrow \qquad a \in H'.$$

A függvényhatárérték fogalma

Most **környezetek** segítségével adjuk meg a függvényhatárérték egységes definícióját.

2. definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f'$ pontban **van határértéke**, ha*

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in \Big(K_\delta(a) \setminus \{a\}\Big) \cap \mathcal{D}_f\colon f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

*Ekkor A-t a függvény a-beli **határértékének** nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim_a f = A, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad f(x) \to A, \quad \text{ha} \quad x \to a.$$

Megjegyzések.

1º A $\lim\limits_a f = A$ egyenlőség valóban azt fejezi ki, hogy „az a-hoz közeli x pontokban felvett függvényértékek közel vannak A-hoz".

2º Függvény határértékét csak a függvény értelmezési tartományának a torlódási pontjaiban, vagyis az $\boxed{a \in \mathcal{D}_f'}$ pontokban értelmezzük. Ekkor $a \in \mathcal{D}_f$ és $a \notin \mathcal{D}_f$ is lehetséges. Ezért a határérték szempontjából érdektelen, hogy a függvény értelmezve van-e az a pontban, és ha igen, akkor ott mi a függvény helyettesítési értéke.

3º Az $a \in \mathcal{D}_f'$ lehet véges (vagyis $a \in \mathbb{R}$), de lehet $\pm\infty$ is. A függvény határértéke is lehet véges (ha $A \in \mathbb{R}$), de ez is lehet $\pm\infty$ is.

4º Pontozott környezetekkel a fenti definíció így is írható

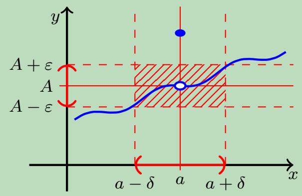
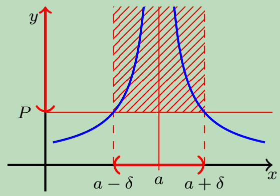
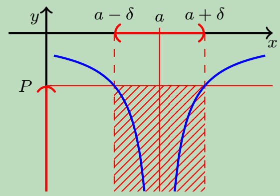
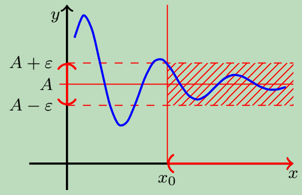
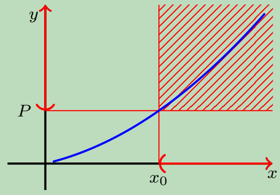
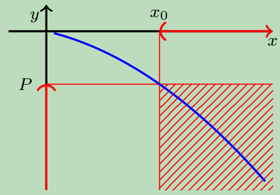
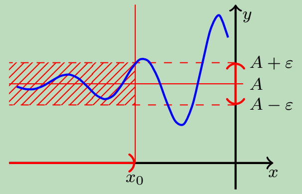
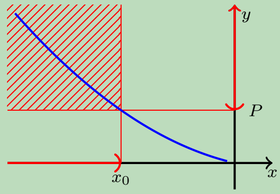
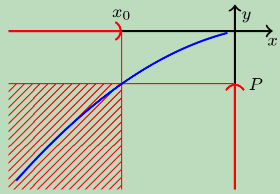
$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f\colon f(x) \in K_\varepsilon(A). \blacksquare$$

A határérték definíciójának speciális esetei

A $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ egyenlőségre a-tól, illetve A-tól függően a következő szóhasználatokat vezetjük be.

- **Végesben vett véges határérték**, ha $a \in \mathbb{R}$ és $A \in \mathbb{R}$.
- **Végesben vett végtelen határérték**, ha $a \in \mathbb{R}$ és $A = \pm\infty$.
- **Végtelenben vett véges határérték**, ha $a = \pm\infty$ és $A \in \mathbb{R}$.
- **Végtelenben vett végtelen határérték**, ha $a = \pm\infty$ és $A = \pm\infty$.

Fontos megjegyezni, hogy a $\lim\limits_a f = A$-ra a **környezetekkel** megadott egységes definíciót a speciális esetekben **egyenlőtlenségekkel** is megfogalmazhatjuk.

$\boldsymbol{A = \lim\limits_a f}$	$A \in \mathbb{R}$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$a \in \mathbb{R}$	 $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < \lvert x - a\rvert < \delta \colon \lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$	 $\forall P > 0$-hoz $\exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < \lvert x - a\rvert < \delta \colon f(x) > P$	 $\forall P < 0$-hoz $\exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < \lvert x - a\rvert < \delta \colon f(x) < P$
$a = +\infty$	 $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 \colon \lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$	 $\forall P > 0$-hoz $\exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 \colon f(x) > P$	 $\forall P < 0$-hoz $\exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 \colon f(x) < P$
$a = -\infty$	 $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists x_0 < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0 \colon \lvert f(x) - A\rvert < \varepsilon$	 $\forall P > 0$-hoz $\exists x_0 < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0 \colon f(x) > P$	 $\forall P < 0$-hoz $\exists x_0 < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0 \colon f(x) < P$

Megjegyzés. Ha $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy sorozat, és így $\mathcal{D}'_f = \mathbb{N}' = \{+\infty\}$, akkor a táblázat $a = +\infty$ sorából látható, hogy

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n \to +\infty} f(n) = A,$$

tehát ebben a speciális esetben a függvényhatárérték megegyezik a sorozatok határértékének korábbi definíciójával. ■

A függvényhatárérték alaptételei

3. tétel (A határérték egyértelműsége). *Ha az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}'_f$ pontban van határértéke, akkor a definícióban szereplő $A \in \overline{\mathbb{R}}$ egyértelműen létezik.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy két különböző $A_1, A_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ elem is eleget tesz a definíció feltételeinek. Mivel két különböző $\overline{\mathbb{R}}$-beli elem diszjunkt környezetekkel szétválasztható, ezért

$$\exists\, \varepsilon > 0 \colon K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset.$$

A határérték definíciója szerint egy ilyen ε-hoz

$$\exists\, \delta_1 > 0,\ \forall\, x \in \dot{K}_{\delta_1}(a) \cap \mathcal{D}_f \colon f(x) \in K_\varepsilon(A_1),$$

$$\exists\, \delta_2 > 0,\ \forall\, x \in \dot{K}_{\delta_2}(a) \cap \mathcal{D}_f \colon f(x) \in K_\varepsilon(A_2).$$

Legyen $\delta := \min\{\delta_1,\, \delta_2\}$. Ekkor

$$\forall\, x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f\colon\, f(x) \in K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset, \quad \text{de } \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset, \text{ mert } a \in \mathcal{D}_f'.$$

Ellentmondásra jutottunk, és ezzel a határérték egyértelműségét igazoltuk.

A következő tétel azt állítja, hogy a függvényhatárérték sorozatok határértékével jellemezhető.

4. tétel (Függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv). *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ és $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor*

$$\lim_a f = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\,(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \ \textit{ esetén } \ \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A.$$

Bizonyítás.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\quad \lim_a f = A \quad \Longrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f\colon\, f(x) \in K_\varepsilon(A).$

Legyen (x_n) egy, a tételben szereplő sorozat, és $\varepsilon > 0$ egy tetszőleges rögzített érték.

$$\lim\,(x_n) = a \quad \Longrightarrow \quad \delta\text{-hoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n > n_0\colon\, x_n \in K_\delta(a).$$

Mivel $x_n \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, így $x_n \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f$, ezért $f(x_n) \in K_\varepsilon(A)$ teljesül minden $n > n_0$ indexre. Ez azt jelenti, hogy az $\big(f(x_n)\big)$ sorozatnak van határértéke, és $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy

$$\forall\,(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\},\ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \ \text{ esetén } \ \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A.$$

Megmutatjuk, hogy $\lim_a f = A$. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy a $\lim_a f = A$ egyenlőség nem igaz. Ez pontosan azt jelenti, hogy

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \delta > 0\text{-hoz } \exists\, x_\delta \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f\colon\, f(x_\delta) \notin K_\varepsilon(A).$$

A $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ választással azt kapjuk, hogy

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+\text{-hoz } \exists\, x_n \in \dot{K}_{1/n}(a) \cap \mathcal{D}_f\colon\, f(x_n) \notin K_\varepsilon(A).$$

Legyen $x_0 \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ tetszőleges. Az $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ sorozat nyilván a-hoz tart $\big(\text{hiszen } x_n \in K_{1/n}(a)\big)$, de a függvényértékek $\big(f(x_n)\big)$ sorozata nem tart A-hoz $\big(\text{hiszen } f(x_n) \notin K_\varepsilon(A)\big)$, ami ellentmond a feltételünknek.

A függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó közrefogási elv közvetlen következménye az alábbi állítás.

5. tétel (Függvényhatárértékre vonatkozó közrefogási elv). *Legyen* $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : H \to \mathbb{R}$, $a \in H'$, *és tegyük fel, hogy*

$$\exists\, K(a),\ \forall\, x \in \Big(K(a) \setminus \{a\}\Big) \cap H\colon\ f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Ha

$$\exists \lim_a f, \quad \exists \lim_a g \quad \text{és} \quad \lim_a f = \lim_a g = A \in \overline{\mathbb{R}},$$

akkor

$$\exists \lim_a h \quad \text{és} \quad \lim_a h = A.$$

A sorozatoknál láttuk, hogy a három algebrai művelet és a határérték képzés sorrendje a „legtöbb esetben” felcserélhető. A következő tétel azt állítja, hogy ez igaz függvényhatárértékre is.

6. tétel (A függvényhatárérték és a műveletek kapcsolata). *Tegyük fel, hogy* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \Big(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\Big)'$ *és léteznek az* $A := \lim_a f \in \overline{\mathbb{R}}$, $B := \lim_a g \in \overline{\mathbb{R}}$ *határértékek. Ekkor*

1º *az* $f + g$ *összegfüggvénynek is van határértéke* a*-ban és*

$$\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g = A + B,$$

feltéve, hogy az $A + B \in \overline{\mathbb{R}}$ *összeg értelmezve van,*

2º *az* $f \cdot g$ *szorzatfüggvénynek is van határértéke* a*-ban és*

$$\lim_a (f \cdot g) = \lim_a f \cdot \lim_a g = A \cdot B,$$

feltéve, hogy az $A \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$ *szorzat értelmezve van,*

3º *az* f/g *hányadosfüggvénynek is van határértéke* a*-ban és*

$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g} = \frac{A}{B},$$

feltéve, hogy az $\dfrac{A}{B} \in \overline{\mathbb{R}}$ *hányados értelmezve van.*

Bizonyítás. A függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv és a sorozatokra vonatkozó analóg állítás közvetlen következménye.

Kritikus határértékekről beszélünk akkor, ha az előbbi tétel nem alkalmazható. A sorozatokhoz hasonlóan ilyenek például a

$$(+\infty) + (-\infty) \ \Big(\text{vagy } (+\infty) - (+\infty)\Big), \qquad 0 \cdot (\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}, \quad \frac{c}{0}\ (c \in \mathbb{R})$$

típusú kritikus határértékek.

Egyoldali határértékek

Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor a

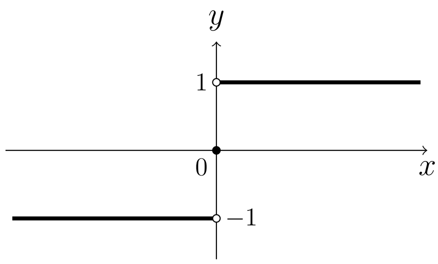
$$\dot{K}_\varepsilon(a) := (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$$

pontozott környezetnek van egy $(a-\varepsilon, a)$ bal oldali és egy $(a, a+\varepsilon)$ jobb oldali része. Előfordulhat, hogy az f függvénynek nincs határértéke az a pontban, de ha leszűkítjük a függvényt a pont egy bal- vagy jobb oldali környezetére, akkor az így kapott függvénynek már van határértéke az a pontban.

Például, a szignumfüggvény esetében a

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$$

határérték nem létezik. Ennek az az oka, hogy tetszőleges pozitív tagokból álló 0-hoz tartó (x_n) sorozat esetén $\operatorname{sgn}(x_n) = 1$; ugyanakkor minden negatív tagokból álló 0-hoz tartó (x_n) sorozat esetén $\operatorname{sgn}(x_n) = -1$. Megadható tehát két 0-hoz tartó sorozat, amelyek képsorozatainak a határértéke nem egyenlő, és így az átviteli elv szerint a határérték nem létezik a 0 pontban. Azonban más a helyzet, ha a szignum függvény 0 pont köröli viselkedését csak a pont bal- vagy jobb oldali környezetében vizsgálnánk. Világos, hogy



$f(x) = \operatorname{sgn} x$

$$f_1 := \operatorname{sgn}|_{(-\infty,0)} \equiv -1 \qquad \text{és} \qquad f_2 := \operatorname{sgn}|_{(0,+\infty)} \equiv 1.$$

Ebből nem nehéz igazolni, hogy

$$\exists \lim_{x\to 0} f_1(x) = -1 \qquad \text{és} \qquad \exists \lim_{x\to 0} f_2(x) = 1.$$

Az előző gondolatmenet alkalmazható bármilyen halmazon értelmezett f függvényre. Ha $a \in \mathcal{D}_f'$, akkor a torlódási pontja a $\mathcal{D}_f \cap (-\infty, a)$ vagy a $\mathcal{D}_f \cap (a, \infty)$ halmaznak (vagy mindkettőnek). Ekkor azt mondjuk, hogy a **jobb-** vagy **bal oldali torlódási pontja** $\mathcal{D}_f$-nek. Most is vizsgálhatjuk az

$$f_1 := f|_{\mathcal{D}_f \cap (-\infty,a)} \qquad \text{vagy az} \qquad f_2 := f|_{\mathcal{D}_f \cap (a,+\infty)}$$

függvények határértékeit az a pontban, de célszerűbb ehhez egy külön jelölést bevezetni.

3. definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}$ és $a \in \big(\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)\big)'$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen (vagy a-ban)* ***van jobb oldali határértéke,*** *ha*

$$\exists\, A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ a < x < a+\delta\colon\ f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Ekkor A egyértelmű, és ezt az f függvény a-ban vett ***jobb oldali határértékének*** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim_{a+0} f = A, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x) = A, \qquad f(a+0) = A.$$

4. definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}$ és $a \in \big(\mathcal{D}_f \cap (-\infty, a)\big)'$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen (vagy a-ban)* ***van bal oldali határértéke****, ha*

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ a - \delta < x < a\colon f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Ekkor A egyértelmű, és ezt az f függvény a-ban vett ***bal oldali határértékének*** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim_{a-0} f = A, \qquad \lim_{x \to a-0} f(x) = A, \qquad f(a-0) = A.$$

Megjegyzés. A definíciókból könnyen látható, hogy

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a} f_1(x) \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a} f_2(x),$$

ahol

$$f_1 := f|_{\mathcal{D}_f \cap (-\infty, a)} \qquad \text{és} \qquad f_2 := f|_{\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)}.$$

Ez azt jelenti, hogy egy függvény pontbeli bal-, ill. jobb oldali határértéke speciális függvények pontbeli határértékei. Ezért az új határértékekre is alkalmazhatók a tanult alaptételek a megfelelő módosításokkal. Például az átviteli elv alapján

$$\lim_{a+0} f = A \quad \iff \quad \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \cap (a, +\infty),\ \lim_{n \to +\infty} x_n = a \ \text{ esetén } \ \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = A. \ \blacksquare$$

Természetesen előfordulhat, hogy egy függvénynek valamely pontban egyszerre létezik a bal- és a jobb oldali határértéke. A definíciókból könnyen igazolható a következő állítás.

7. tétel. *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és az a pont egyszerre jobb- és bal oldali torlódási pontja $\mathcal{D}_f$-nek. Ekkor*

$$\exists \lim_{a} f \qquad \iff \qquad \exists \lim_{a-0} f,\ \exists \lim_{a+0} f \quad \textit{és} \quad \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f \ \ (= \lim_{a} f).$$

Példák:

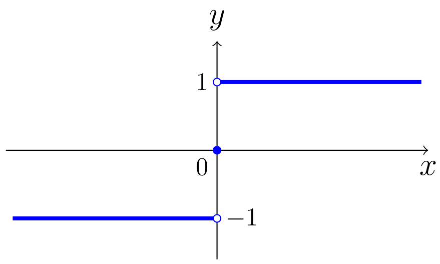
- $\displaystyle \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$ és $\displaystyle \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \Longrightarrow \quad \nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}.$
- $\displaystyle \lim_{x \to 1-0} f(x) = 0$ és $\displaystyle \lim_{x \to 1+0} f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim_{x \to 1} f(x) = 0,$ ahol

$$f(x) := \begin{cases} x - 1 & (x < 1) \\ x^2 - x & (x \ge 1). \end{cases}$$

Nevezetes határértékek 1.

$\boxed{\mathbf{1.}}$ Az **előjelfüggvény** (vagy **szignumfüggvény**) határértéke a 0 pontban.

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \big(x \in (0, +\infty)\big) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & \big(x \in (-\infty, 0)\big). \end{cases}$$



szignumfüggvény

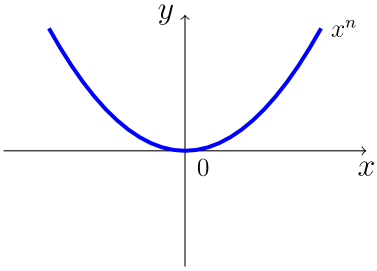
Már igazoltuk, hogy

$$\lim_{0-0} \operatorname{sgn} = -1, \ \lim_{0+0} \operatorname{sgn} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \nexists \lim_{0} \operatorname{sgn}.$$

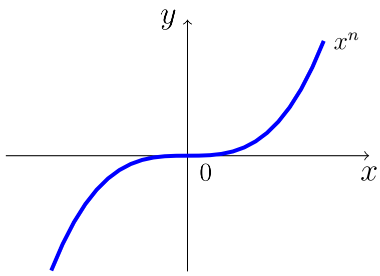
$\boxed{\mathbf{2.}}$ **Hatványfüggvények** határértéke.

$$f(x) := x^n \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

n páros



n páratlan



Mivel $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \implies \mathcal{D}'_f = \mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}$, ezért a határérték minden $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen vizsgálható.

A függvényhatárérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételből következnek az alábbi állítások:

2. (a) $$\boxed{\lim_{x \to a} x^n = a^n, \qquad \forall a \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots}$$

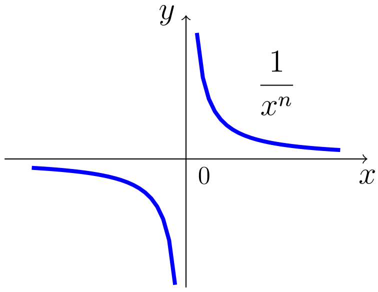
2. (b) $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty, \qquad \forall n = 1, 2, 3, \ldots}$$

2. (c) $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & (n = 2, 4, 6, \ldots) \\ -\infty & (n = 1, 3, 5, \ldots) \end{cases}}$$

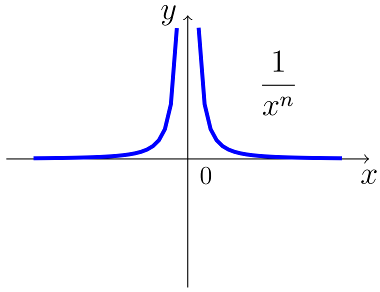
3. **Reciprokfüggvények** határértéke.

$$f(x) := \frac{1}{x^n} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

n páratlan



n páros



Mivel $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{D}'_f = \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big)' = \overline{\mathbb{R}}$, ezért a határérték minden $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen vizsgálható.

A függvényhatárérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tételből következnek az alábbi állítások:

3. (a)
$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{a^n}, \qquad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{és} \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots}$$

3. (b)
$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \forall n = 1, 2, 3, \ldots}$$

Az átviteli elvvel igazolható, hogy

3. (c)
$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} \begin{cases} = +\infty & (n = 2, 4, 6, \ldots) \\ \nexists & (n = 1, 3, 5, \ldots) \end{cases}}$$

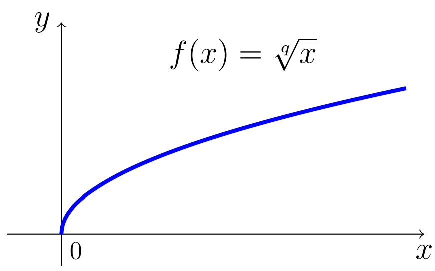
Ha n páratlan, akkor

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x^n} = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x^n} = +\infty.$$

4. **Gyökfüggvények** határértéke.

$f(x) := \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}} \quad \big(x \in [0, +\infty)\big), \qquad q = 2, 3, \ldots$

Mivel $\mathcal{D}_f = [0, +\infty)$, ezért $\mathcal{D}'_f = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$.



Az átviteli elvből következnek az alábbi állítások:

4. (a)
$$\boxed{\lim_{x \to a} \sqrt[q]{x} = \sqrt[q]{a} \qquad \forall a \in [0, +\infty) \quad \text{és} \quad \forall q = 2, 3, \ldots}$$

4. (b)
$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \sqrt[q]{x} = +\infty \qquad \forall q = 2, 3, \ldots}$$

$\boxed{5.}$ **Polinomfüggvények** határértéke. Legyen

$$P(x) := \alpha_r x^r + \alpha_{r-1}x^{r-1} + \cdots \alpha_1 x + \alpha_0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$
$$\Big(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R},\ 1 \leq r \in \mathbb{N}\Big)$$

egy pontosan r-edfokú polinom (azaz $\alpha_r \neq 0$). Mivel $\mathcal{D}_P = \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{D}'_P = \mathbb{R}' = \overline{\mathbb{R}}$, ezért a határértéket minden $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen vizsgálhatjuk.

A függvényhatárérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel, továbbá a hatványfüggvények határértékére vonatkozó állítások alapján

4. (a) $$\boxed{\lim_{x\to a} P(x) = P(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}},$$

4. (b) $$\boxed{\lim_{x\to +\infty} P(x) = \operatorname{sgn}(\alpha_r)\cdot(+\infty)},$$

4. (c) $$\boxed{\lim_{x\to -\infty} P(x) = (-1)^r\cdot\operatorname{sgn}(\alpha_r)\cdot(+\infty)}.$$

Az utolsó két állítás igazolásához tekintsük az alábbi átalakítást:

$$P(x) = x^r\left(\alpha_r + \frac{\alpha_{r-1}}{x} + \frac{\alpha_{r-2}}{x^2} + \cdots + \frac{\alpha_0}{x^r}\right).$$

$\boxed{6.}$ **Racionális törtfüggvények**

Racionális törtfüggvénynek nevezzük az $R := P/Q$ alakú függvényeket, ahol P, Q polinomok. Feltesszük, hogy Q legalább elsőfokú.

Az R függvény ott van értelmezve, ahol a nevező nem nulla, tehát véges sok pont kivételével mindenütt. Ezért $\mathcal{D}'_R = \overline{\mathbb{R}}$, tehát R határértékét minden $a \in \overline{\mathbb{R}}$ helyen vizsgálhatjuk.

Az alábbi eseteket fogjuk megkülönböztetni.

1. eset. $\underline{a \in \mathbb{R} \text{ és } Q(a) \neq 0.}$ Ekkor a polinomok határértékből tanultak és a műveleti tételek alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_a R = \lim_a \frac{P}{Q} = \frac{\lim_a P}{\lim_a Q} = \frac{P(a)}{Q(a)} = R(a).$$

2. eset. $\underline{a \in \mathbb{R},\ Q(a) = 0 \text{ és } P(a) \neq 0.}$ Ekkor a Q polinomot felírhatjuk

$$Q(x) = (x-a)^m \cdot q(x)$$

alakban, ahol $m = 1, 2, 3\ldots$ és q olyan polinom, amelyre $q(a) \neq 0$ teljesül. Így

$$(*)\ \lim_a R = \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to a}\left(\frac{P(x)}{q(x)}\cdot\frac{1}{(x-a)^m}\right) = \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{q(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^m} = A\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^m},$$

ahol

$$A := \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{q(x)} = \lim_{x\to \pm a}\frac{P(x)}{q(x)} = \frac{P(a)}{q(a)} \neq 0.$$

- Ha $\underline{m = 2k \text{ páros}}$, akkor
$$\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^{2k}} = +\infty,$$
ezért $(*)$ alapján
$$\lim_{a} R = A \cdot \lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)^{2k}} = \operatorname{sgn}(A)\cdot(+\infty).$$
- Ha $\underline{m = 2k+1 \text{ páratlan}}$, akkor
$$\lim_{x\to a-0} \frac{1}{(x-a)^{2k+1}} = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to a+0} \frac{1}{(x-a)^{2k+1}} = +\infty.$$
Ezért $(*)$ megfelelő oldali határértéke:
$$\lim_{a-0} R = A \cdot \lim_{x\to a-0} \frac{1}{(x-a)^{2k+1}} = \operatorname{sgn}(A)\cdot(-\infty) \quad \text{és}$$
$$\lim_{a+0} R = A \cdot \lim_{x\to a+0} \frac{1}{(x+a)^{2k+1}} = \operatorname{sgn}(A)\cdot(+\infty). \quad \text{ezért}$$
$$\nexists \lim_{a} R.$$

3. eset. $\underline{a\in\mathbb{R},\ Q(a)=0 \text{ és } P(a)=0.}$ Ekkor a P és Q polinomokat felírhatjuk
$$P(x) = (x-a)^s \cdot p(x) \qquad \text{és} \qquad Q(x) = (x-a)^m \cdot q(x)$$
alakban, ahol $s, m = 1,2,3\ldots$ és p, q olyan polinomok, amelyekre $p(a)\neq 0$ és $q(a)\neq 0$ teljesül. Így
$$(\#)\ \lim_{a} R = \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to a}\left(\frac{p(x)}{q(x)}\cdot\frac{(x-a)^s}{(x-a)^m}\right) = \lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)^{s-m} = A\cdot\lim_{x\to a}(x-a)^{s-m},$$
ahol
$$A := \lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm a}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} \neq 0.$$

Így $(\#)$-ből az előző esethez hasonlóan a következő eseteket kapjuk:
- ha $\underline{s>m}$, akkor $\lim_{a} R = A\cdot 0 = 0$.
- ha $\underline{s=m}$, akkor $\lim_{a} R = A\cdot 1 = A$.
- ha $\underline{s<m \text{ és } m-s=2k \text{ páros}}$, akkor $\lim_{a} R = \operatorname{sgn}(A)\cdot(+\infty)$.
- ha $\underline{s<m \text{ és } m-s=2k+1 \text{ páratlan}}$, akkor $\lim_{a\pm 0} R = \operatorname{sgn}(A)\cdot(\pm\infty)$.

4. eset. $\underline{a=\pm\infty.}$ Ekkor a polinomok határértéke szerint $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú kritikus határértékről van szó, amelyet a sorozatoknál megismert technikák segítségével vissza lehet vezetni nem kritikus határértékre. Valóban, ha
$$P(x) = \alpha_s x^s + \alpha_{s-1}x^{s-1} + \cdots + \alpha_0 \qquad \text{és} \qquad Q(x) = \beta_r x^r + \beta_{r-1}x^{r-1} + \cdots + \beta_0,$$
ahol $\alpha_s, \beta_r \neq 0$, akkor
$$R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)} = x^{s-r}\cdot\frac{\alpha_s + \overbrace{\frac{\alpha_{s-1}}{x} + \cdots + \frac{\alpha_0}{x^s}}^{\to 0}}{\beta_r + \underbrace{\frac{\beta_{r-1}}{x} + \cdots + \frac{\beta_0}{x^r}}_{\to 0}}\ ,$$
így ha $A := \dfrac{\alpha_s}{\beta_r} \neq 0$, akkor

- ha $\underline{s < r}$, akkor $\lim\limits_{\pm\infty} R = 0 \cdot A = 0$.
- ha $\underline{s = r}$, akkor $\lim\limits_{\pm\infty} R = 1 \cdot A = A$.
- ha $\underline{s > r \text{ és } s - r = 2k \text{ páros}}$, akkor $\lim\limits_{\pm\infty} R = \operatorname{sgn}(A) \cdot (+\infty)$.
- ha $\underline{s > r \text{ és } s - r = 2k + 1 \text{ páratlan}}$, akkor $\lim\limits_{\pm\infty} R = \operatorname{sgn}(A) \cdot (\pm\infty)$.