

8. GYAKORLAT

Mátrix kondíciószáma, a LER érzékenysége

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixokra a $\text{cond}_1(A)$ és $\text{cond}_2(B)$ mennyiségeket!

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Határozzuk meg az A mátrix 1-es és 2-es kondíciószámát!

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg az A mátrix 2-es kondíciószámát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Legyen $\varepsilon > 0$ kicsi pozitív szám, és definiáljuk az A mátrixot a következőképpen:

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Mit mondhatunk az A mátrix 1-es kondíciószámáról?
(b) Állítsuk elő az A mátrix LU -felbontását! Vizsgáljuk meg az L és U mátrixok 1-es kondíciószámát!
5. Igazoljuk, hogy a QR felbontás nem változtatja meg a lineáris egyenletrendszer érzékenységét (kondicionáltságát), azaz az $A = QR$ felbontásra

$$\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(R).$$

6. Igazoljuk, hogy szimmetrikus, pozitív definit A mátrix $A = LL^T$ Cholesky-felbontása nem változtatja meg a lineáris egyenletrendszer érzékenységét (kondicionáltságát), azaz

$$\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(L) \cdot \text{cond}_2(L^T) = (\text{cond}_2(L))^2.$$

7. Igazoljuk, hogy ha A invertálható mátrix, akkor

$$\text{cond}_2(A^T A) = (\text{cond}_2(A))^2.$$

MEGOLDÁS

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixokra a $\text{cond}_1(A)$ és $\text{cond}_2(B)$ mennyiségeket!

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (b) \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Adott $A \in \mathbb{R}^n$ invertálható mátrix és $\|\cdot\|$ mátrixnorma esetén az A kondíciószáma

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

(a) A kondíciós szám definícióját használjuk:

$$\text{cond}_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1$$

Először számítsuk ki az A^{-1} -et:

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1) \cdot 2 - 1 \cdot 0} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

A normák

$$\|A^{-1}\|_1 = \max_{j=1,2} \left\{ \left| -1 \right| + \left| \frac{1}{2} \right|, \quad \left| 0 \right| + \left| \frac{1}{2} \right| \right\} = \frac{3}{2}, \quad \|A\|_1 = 2,$$

Végül

$$\text{cond}_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$$

(b) Most $\text{cond}_2(B) = \|B\|_2 \cdot \|B^{-1}\|_2$ értékét szeretnénk meghatározni. Ehhez elvileg ki kellene számolnunk a B^{-1} mátrixot és $\|B^{-1}\|_2$ -t. Azonban B **szimmetrikus**, ezért a kettes kondíciós szám meghatározására használhatjuk az alábbi összefüggést:

$$\text{cond}_2(B) = \varrho(B) \cdot \varrho(B^{-1}) = \frac{\max_{i=1}^2 (|\lambda_i(B)|)}{\min_{i=1}^2 (|\lambda_i(B)|)}$$

A B mátrix sajátértékei 2 és 6, ezt felhasználva:

$$\text{cond}_2(B) = \frac{\max\{|6|, |2|\}}{\min\{|6|, |2|\}} = \frac{6}{2} = 3.$$

2. Határozzuk meg az A mátrix 1-es és 2-es kondíciós számát!

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Először kiszámítjuk az A mátrix inverzét:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -4 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -1/4 & 5/4 & -2/4 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 2/4 \end{array} \right] \\ \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 2/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & 2/4 \end{array} \right] &\implies A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az A mátrix 1-es kondíciós száma

$$\text{cond}_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 4\right) = 5.$$

A szimmetrikus A mátrix 2-es kondíciós száma

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\max_{i=1}^3 (|\lambda_i(A)|)}{\min_{i=1}^3 (|\lambda_i(A)|)}$$

Ehhez számítsuk ki az A sajátértékeit! A

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

determinánst az első sora szerint kifejtve

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (3-\lambda) \left[(3-\lambda)^2 - 1^2 \right] - (3-\lambda+1) - (1+3-\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) - 2(4-\lambda) = \\ &= (4-\lambda)[6 + \lambda^2 - 5\lambda - 2] = (4-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = (4-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1) = 0, \\ \text{tehát a sajátértékek } \lambda_1 &= 1 \text{ és } \lambda_2 = \lambda_3 = 4. \text{ Végül} \end{aligned}$$

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\max_{i=1}^3 (|\lambda_i(A)|)}{\min_{i=1}^3 (|\lambda_i(A)|)} = \frac{4}{1} = 4.$$

3. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix 2-es kondíciós számát!

Megoldás:

Először meghatározzuk az A mátrix 2-es normáját.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

sajátértékei a

$$\det(A^T A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 10 - \lambda & 6 \\ 6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (10 - \lambda)(4 - \lambda) - 36 = \lambda^2 - 14\lambda + 4$$

gyökei

$$\lambda_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 16}}{2} = 7 \pm \sqrt{45},$$

és innen kapjuk, hogy

$$\|A\|_2 = \sqrt{7 + \sqrt{45}}.$$

A második lépésben az A^{-1} mátrix 2-es normáját határozzuk meg.

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^T A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

sajátértékei a

$$\det((A^{-1})^T A^{-1} - \lambda I) = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 13 - 4\lambda & -3 \\ -3 & 1 - 4\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(4\lambda^2 - 14\lambda + 1)$$

gyökei

$$\lambda_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 16}}{8} = \frac{7 \pm \sqrt{45}}{4},$$

és innen kapjuk, hogy

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{2} \sqrt{7 + \sqrt{45}}.$$

Végül

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{2} (7 + \sqrt{45})$$

Megjegyzés. Az $(A^{-1})^T A^{-1}$ sajátértékei az $A^T A$ mátrix sajátértékeinek a reciprokai, ugyanis az

$$A [A^{-1}(A^{-1})^T] A^{-1} = (A^{-1})^T A^{-1}$$

hasonlósági transzformáció miatt az $(A^{-1})^T A^{-1}$ és $A^{-1}(A^{-1})^T$ sajátértékei megegyeznek, továbbá

$$A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}(A^T)^{-1} = (A^T A)^{-1}$$

és mátrix inverzének sajátértékei a mátrix sajátértékeinek reciprokai, ezzel az állításunkat igazoltuk.

Nézzük meg, hogy ez mit jelent a feladatunk esetén! Az $A^T A$ sajátértékeinek reciprokai

$$\frac{1}{7 \pm \sqrt{45}} = \frac{7 \mp \sqrt{45}}{49 - 45} = \frac{1}{4} (7 \mp \sqrt{45}),$$

ami megegyezik a korábbi számításainkkal.

4. Legyen $\varepsilon > 0$ kicsi pozitív szám, és definiáljuk az A mátrixot a következőképpen:

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Mit mondhatunk az A mátrix 1-es kondíciós számáról?

Megoldás:

Számítsuk ki az A^{-1} mátrixot!

$$\det(A) = \varepsilon \cdot 1 - 1 \cdot 1 = \varepsilon - 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\varepsilon - 1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Feltételezéseink szerint $\varepsilon > 0$ kicsi pozitív szám (azaz sokkal kisebb, mint 1), ezért

$$\|A\|_1 = \max \left\{ |\varepsilon| + |1|, |1| + |1| \right\} = 2,$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \frac{1}{|\varepsilon - 1|} \max \left\{ |1| + |-1|, |-1| + \varepsilon \right\} = \frac{2}{1 - \varepsilon} \approx 2.$$

Így tehát

$$\text{cond}_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 \approx 2 \cdot 2 = 4.$$

- (b) Állítsuk elő az A mátrix LU -felbontását! Vizsgáljuk meg az L és U mátrixok 1-es kondíciós számát!

Megoldás:

Az A mátrix LU felbontását GE segítségével állítjuk elő:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_2 - \frac{1}{\varepsilon} S_1} \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\varepsilon} \end{bmatrix},$$

tehát

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

A kondíciós szám meghatározásához számítsuk ki az L és U mátrixok inverzét:

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{bmatrix} \quad U^{-1} = \frac{1}{\varepsilon - 1} \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\varepsilon} & -1 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Ezután számítsuk ki (és becsüljük meg) az L, L^{-1}, U, U^{-1} mátrixok 1-es normáját:

$$\|L\|_1 = \max \left\{ |1| + \left| \frac{1}{\varepsilon} \right|, |0| + |1| \right\} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \approx \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\|L^{-1}\|_1 = \max \left\{ |1| + \left| -\frac{1}{\varepsilon} \right|, |0| + |1| \right\} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \approx \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\|U\|_1 = \max \left\{ |\varepsilon| + |0|, |1| + \left| 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right| \right\} = 1 + \frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\begin{aligned} \|U^{-1}\|_1 &= \frac{1}{|\varepsilon - 1|} \max \left\{ |0| + \left| 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right|, |-1| + |\varepsilon| \right\} = \\ &= \frac{1}{1 - \varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) = 1 \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Végül a kondíciós számok:

$$\text{cond}_1(L) = \|L\|_1 \cdot \|L^{-1}\|_1 \approx \frac{1}{\varepsilon^2},$$

$$\text{cond}_1(U) = \|U\|_1 \cdot \|U^{-1}\|_1 = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Tudjuk, hogy a lineáris egyenletrendszerek perturbációs tételei szerint a LER numerikus megoldásának hibája a LER mátrixának kondíciós számával közelítőleg egyenesen arányos. Az $Ax = b$ LER „jól kondicionált”, hiszen $\text{cond}_1(A) = 4$ meglehetősen kicsi. Viszont, ha az LU felbontáson keresztül számítjuk a megoldást, akkor az $Ly = b$ és $Ux = y$ egyenletrendszerek mindegyike rosszul kondicionált, hiszen ha ε kicsi pozitív szám, akkor $\frac{1}{\varepsilon^2}$ nagyon nagy pozitív szám, és az imént láttuk, hogy $\text{cond}_1(L) \approx \text{cond}_1(U) = \frac{1}{\varepsilon^2}$.

5. Igazoljuk, hogy a QR felbontás nem változtatja meg a lineáris egyenletrendszer érzékenységét, azaz az $A = QR$ felbontásra

$$\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(R).$$

Megoldás:

Mivel $A = QR$, az inverze $A^{-1} = R^{-1}Q^{-1}$.

A Q mátrix ortogonalitása miatt Q^{-1} is ortogonális mátrix, amiből

$$\|A\|_2 = \|QR\|_2 = \|R\|_2, \quad \text{és} \quad \|A^{-1}\|_2 = \|R^{-1}Q^{-1}\|_2 = \|R^{-1}\|_2,$$

végül

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \|R\|_2 \cdot \|R^{-1}\|_2 = \text{cond}_2(R).$$

6. Igazoljuk, hogy szimmetrikus, pozitív definit A mátrix $A = LL^T$ Cholesky-felbontása nem változtatja meg a lineáris egyenletrendszer érzékenységét (kondícionáltságát), azaz

$$\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(L) \cdot \text{cond}_2(L^T) = (\text{cond}_2(L))^2.$$

Megoldás:

A szimmetrikus, pozitív definit A mátrixnak egyértelműen létezik az $A = LL^T$ Cholesky-felbontása.

$$A = LL^T \implies L^{-1}A = L^T \implies L^{-1}AL = L^TL$$

miatt az $A = LL^T$ és az L^TL mátrixok hasonló mátrixok. Ez azt jelenti, hogy a sajátértékeik megegyeznek, és ezáltal a spektrálsugaraik is azonosak:

$$\varrho(A) = \varrho(L^TL) = \varrho(LL^T). \quad (*)$$

Ekkor

$$\|L\|_2^2 = \varrho(L^TL) \underset{\text{def}}{=} \varrho(LL^T) \underset{\text{hasonlóság}}{=} \varrho((L^T)^TL^T) \underset{\text{def}}{=} \|L^T\|_2^2 \implies \|L\|_2 = \|L^T\|_2.$$

Most megismételjük a fenti gondolatmenetet az A mátrix inverzére.

$$A^{-1} = (LL^T)^{-1} = (L^T)^{-1}L^{-1} \implies A^{-1}L = (L^{-1})^T \implies L^{-1}A^{-1}L = L^{-1}(L^{-1})^T$$

miatt az $A^{-1} = (L^{-1})^TL^{-1}$ és az $L^{-1}(L^{-1})^T$ mátrixok hasonló mátrixok. Ez azt jelenti, hogy a sajátértékeik megegyeznek, és ezáltal a spektrálsugaraik is azonosak:

$$\varrho(A^{-1}) = \varrho((L^{-1})^TL^{-1}) = \varrho(L^{-1}(L^{-1})^T). \quad (**)$$

Ekkor

$$\|L^{-1}\|_2^2 \stackrel{\text{def}}{=} \varrho((L^{-1})^T L^{-1}) \stackrel{\text{hasonlóság}}{=} \varrho(L^{-1}(L^{-1})^T) = \varrho\left(\left((L^{-1})^T\right)^T (L^{-1})^T\right) \stackrel{\text{def}}{=} \|(L^{-1})^T\|_2^2,$$

azaz

$$\|L^{-1}\|_2 = \|(L^{-1})^T\|_2 = \|(L^T)^{-1}\|_2.$$

A fentiek alapján

$$\text{cond}_2(L) = \|L\|_2 \cdot \|L^{-1}\|_2 = \|L^T\|_2 \cdot \|(L^T)^{-1}\|_2 = \text{cond}_2(L^T).$$

Mivel az A mátrix és inverze is szimmetrikus, a spektrálnormájuk a spektrálsugarukkal egyenlő:

$$\|A\|_2 = \varrho(A) \stackrel{(*)}{=} \varrho(L^T L) \stackrel{\text{def.}}{=} \|L\|_2^2, \quad \text{és} \quad \|A^{-1}\|_2 = \varrho(A^{-1}) \stackrel{(**)}{=} \varrho\left((L^{-1})^T L^{-1}\right) \stackrel{\text{def.}}{=} \|L^{-1}\|_2^2,$$

és végül

$$\begin{aligned} \text{cond}_2(A) &= \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \|L\|_2^2 \cdot \|L^{-1}\|_2^2 = \|L\|_2 \cdot \|L^T\|_2 \cdot \|L^{-1}\|_2 \cdot \|(L^{-1})^T\|_2 = \\ &= \left(\|L\|_2 \cdot \|L^{-1}\|_2\right) \left(\|L^T\|_2 \cdot \|(L^T)^{-1}\|_2\right) = \text{cond}_2(L) \cdot \text{cond}_2(L^T), \end{aligned}$$

illetve

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \|L\|_2^2 \cdot \|L^{-1}\|_2^2 = (\text{cond}_2(L))^2.$$

7. Igazoljuk, hogy ha A invertálható mátrix, akkor

$$\text{cond}_2(A^T A) = (\text{cond}_2(A))^2.$$

Megoldás:

$$\text{cond}_2(A^T A) = \|A^T A\|_2 \cdot \|(A^T A)^{-1}\|_2$$

Mivel $A^T A$ szimmetrikus,

$$\|A^T A\|_2 \stackrel{A^T A \text{ szim.}}{=} \varrho(A^T A) \stackrel{\text{def}}{=} \|A\|_2^2.$$

Most kiszámítjuk az $(A^T A)^{-1}$ mátrix 2-es (spektrál) normáját.

$$A \left(A^{-1} (A^{-1})^T \right) A^{-1} = (A^{-1})^T A^{-1} \implies \varrho(A^{-1} (A^{-1})^T) = \varrho((A^{-1})^T A^{-1})$$

miatt

$$\|(A^T A)^{-1}\|_2 = \varrho\left((A^T A)^{-1}\right) = \varrho(A^{-1} (A^T)^{-1}) = \varrho(A^{-1} (A^{-1})^T) \stackrel{\text{hason.}}{=} \varrho((A^{-1})^T A^{-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \|A^{-1}\|_2^2.$$

Végül

$$\text{cond}_2(A^T A) = \|A^T A\|_2 \cdot \|(A^T A)^{-1}\|_2 = \|A\|_2^2 \cdot \|A^{-1}\|_2^2 = \left(\|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2\right)^2 = (\text{cond}_2(A))^2.$$