

# Numerikus módszerek 1.

5. előadás:  $QR$ -felbontás: Gram–Schmidt ortogonalizáció,  
Householder-transzformációk és alkalmazásaik

Dr. Bozsik József

ELTE IK

- 1 Ortogonális mátrixokról
- 2  $QR$ -felbontás
- 3 Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció
- 4 Householder-féle mátrixok
- 5 Householder-transzformációk alkalmazásai
- 6 Műveletigény

- 1 Ortogonális mátrixokról
- 2  $QR$ -felbontás
- 3 Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció
- 4 Householder-féle mátrixok
- 5 Householder-transzformációk alkalmazásai
- 6 Műveletigény

## **Definíció:** ortogonalis mátrix

Egy  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix *ortogonalis*, ha az inverze a transzponáltja, azaz

$$Q^{\top} Q = I.$$

**Megj.:** Ekkor  $QQ^{\top} = I$  is teljesül. ( $Q^{-1} = Q^{\top}$ )

## Definíció: ortogonalis mátrix

Egy  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix *ortogonalis*, ha az inverze a transzponáltja, azaz

$$Q^T Q = I.$$

**Megj.:** Ekkor  $QQ^T = I$  is teljesül. ( $Q^{-1} = Q^T$ )

## Definíció: skaláris szorzat

Az  $x, y \in \mathbb{R}^n$  vektorok *skaláris szorzata*

$$\langle x, y \rangle := y^T x = \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k.$$

## **Definíció:** ortonormált rendszer

A  $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$  vektorok *ortonormált rendszert* alkotnak, ha

$$\langle q_i, q_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq j, \\ 1 & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

## **Állítás:** ortogonalis mátrixok oszlopvektorairól

A  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonalis mátrix oszlopai, mint vektorok ortonormált rendszert alkotnak.

## **Definíció:** ortonormált rendszer

A  $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$  vektorok *ortonormált rendszert* alkotnak, ha

$$\langle q_i, q_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{ha } i \neq j, \\ 1 & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

## **Állítás:** ortogonalis mátrixok oszlopvektorairól

A  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonalis mátrix oszlopai, mint vektorok ortonormált rendszert alkotnak.

**Biz.:** Gondoljunk bele:  $Q^T Q = I$ .



## **Definíció:** ortogonalis rendszer

A  $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$  vektorok *ortogonalis rendszert* alkotnak, ha

$$\langle q_i, q_j \rangle = 0 \quad (i \neq j).$$



## Definíció: ortogonalis rendszer

A  $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$  vektorok *ortogonalis rendszert* alkotnak, ha

$$\langle q_i, q_j \rangle = 0 \quad (i \neq j).$$

## Állítás: ortogonalis rendszerekből álló mátrixokról

Ha a  $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$  vektorok ortogonalis rendszert alkotnak, akkor a  $Q := (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix esetén a  $Q^\top Q$  szorzatmátrix diagonális. ( $QQ^\top$  általában nem.)

## Definíció: ortogonalis rendszer

A  $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$  vektorok *ortogonalis rendszert* alkotnak, ha

$$\langle q_i, q_j \rangle = 0 \quad (i \neq j).$$

## Állítás: ortogonalis rendszerekből álló mátrixokról

Ha a  $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$  vektorok ortogonalis rendszert alkotnak, akkor a  $Q := (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix esetén a  $Q^\top Q$  szorzatmátrix diagonális. ( $QQ^\top$  általában nem.)

**Biz.:** Gondoljunk bele:  $Q^\top Q = D$  diagonális mátrix.



**Elnevezések:**

- $\langle q_i, q_j \rangle = \delta_{ij}$  (Kronecker-féle delta).
- $q_i \perp q_j \Leftrightarrow \langle q_i, q_j \rangle = 0$  ( $i \neq j$ ): az oszlopok merőlegesek, avagy *ortogonálisak* egymásra
- $\langle q_i, q_i \rangle = 1$ : minden oszlopvektor hossza 1, avagy *normált*  
 $\|q_i\|_2 := \sqrt{\langle q_i, q_i \rangle}$ : „hossz”, avagy „kettes norma”

**Elnevezések:**

- $\langle q_i, q_j \rangle = \delta_{ij}$  (Kronecker-féle delta).
- $q_i \perp q_j \Leftrightarrow \langle q_i, q_j \rangle = 0$  ( $i \neq j$ ): az oszlopok merőlegesek, avagy *ortogonálisak* egymásra
- $\langle q_i, q_i \rangle = 1$ : minden oszlopvektor hossza 1, avagy *normált*  
 $\|q_i\|_2 := \sqrt{\langle q_i, q_i \rangle}$ : „hossz”, avagy „kettes norma”

**Példa: ortogonális mátrixok**

Az alábbi mátrixok ortogonálisak:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

## **Állítás:** ortogonalis mátrixok szorzata

Ha  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonalis mátrixok, akkor a szorzatuk,  $Q_1 Q_2$  is ortogonalis.

## Állítás: ortogonalis mátrixok szorzata

Ha  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonalis mátrixok, akkor a szorzatuk,  $Q_1 Q_2$  is ortogonalis.

**Biz.:** Tudjuk, hogy  $Q_1^\top Q_1 = I$  és  $Q_2^\top Q_2 = I$ .

Kell, hogy  $Q_1 Q_2$  is ortogonalis.

## Állítás: ortogonalis mátrixok szorzata

Ha  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonalis mátrixok, akkor a szorzatuk,  $Q_1 Q_2$  is ortogonalis.

**Biz.:** Tudjuk, hogy  $Q_1^\top Q_1 = I$  és  $Q_2^\top Q_2 = I$ .

Kell, hogy  $Q_1 Q_2$  is ortogonalis.

Vizsgáljuk:

$$(Q_1 Q_2)^\top (Q_1 Q_2) = Q_2^\top \underbrace{Q_1^\top Q_1}_I Q_2 = Q_2^\top Q_2 = I.$$



- 1 Ortogonális mátrixokról
- 2  $QR$ -felbontás**
- 3 Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció
- 4 Householder-féle mátrixok
- 5 Householder-transzformációk alkalmazásai
- 6 Műveletigény



**Definíció:** QR-felbontás

Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix QR-felbontásának nevezzük a  $Q \cdot R$  szorzatot, ha  $A = QR$ , ahol  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonális mátrix,  $R \in \mathcal{U}$  pedig felső háromszögmátrix.

**Definíció:** QR-felbontás

Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix QR-felbontásának nevezzük a  $Q \cdot R$  szorzatot, ha  $A = QR$ , ahol  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonális mátrix,  $R \in \mathcal{U}$  pedig felső háromszögmátrix.

**Tétel:** QR-felbontás létezése és egyértelműsége

Ha  $\det A \neq 0$ , (vagyis az  $A$  oszlopvektorai lineárisan függetlenek), akkor  $A$ -nak létezik QR-felbontása.

Ha még feltesszük, hogy  $r_{ii} > 0 \ \forall i$ -re, akkor egyértelmű is.

**Definíció:** QR-felbontás

Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix QR-felbontásának nevezzük a  $Q \cdot R$  szorzatot, ha  $A = QR$ , ahol  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonális mátrix,  $R \in \mathcal{U}$  pedig felső háromszögmátrix.

**Tétel:** QR-felbontás létezése és egyértelműsége

Ha  $\det A \neq 0$ , (vagyis az  $A$  oszlopvektorai lineárisan függetlenek), akkor  $A$ -nak létezik QR-felbontása.

Ha még feltesszük, hogy  $r_{ii} > 0 \ \forall i$ -re, akkor egyértelmű is.

**Biz.: Létezés:** A bizonyítást a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás adja: az  $A$  mátrix oszlopaiból – amelyek a feltétel értelmében lineárisan függetlenek – előállítjuk a  $Q$  oszlopait és  $R$  ismeretlen elemeit.

# QR-felbontás létezés bizonyítás

Tekintsük a  $Q \cdot R = A$  mátrixszorzást, ahol  $A$ -t és  $Q$ -t az oszlopaival adtuk meg:

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & r_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

Tekintsük a  $Q \cdot R = A$  mátrixszorzást, ahol  $A$ -t és  $Q$ -t az oszlopaival adtuk meg:

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & r_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

Tekintsük először  $A$  első oszlopát,  $a_1$ -et. A mátrixszorzásból

$$r_{11} \cdot q_1 = a_1, \Rightarrow q_1 = \frac{1}{r_{11}} \cdot a_1.$$

Mivel  $q_1$ -től azt várjuk el, hogy normált legyen, ezért  $r_{11} := \|a_1\|_2$ .

Tegyük fel, hogy  $A$  első  $k - 1$  oszlopát már felhasználtuk, és így előállítottuk  $Q$  első  $k - 1$  oszlopát, melyek normáltak és egymásra ortogonálisak, valamint  $R$  első  $k - 1$  oszlopának elemeit is ismerjük.

Tegyük fel, hogy  $A$  első  $k - 1$  oszlopát már felhasználtuk, és így előállítottuk  $Q$  első  $k - 1$  oszlopát, melyek normáltak és egymásra ortogonálisak, valamint  $R$  első  $k - 1$  oszlopának elemeit is ismerjük.

Tekintsük most  $a_k$ -t. A mátrixszorzásból felírhatjuk  $a_k$ -t, majd kifejezhetjük  $q_k$ -t:

$$a_k = \sum_{j=1}^k r_{jk} \cdot q_j \quad \implies \quad q_k = \frac{1}{r_{kk}} \left( a_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} \cdot q_j \right)$$

Tegyük fel, hogy  $A$  első  $k - 1$  oszlopát már felhasználtuk, és így előállítottuk  $Q$  első  $k - 1$  oszlopát, melyek normáltak és egymásra ortogonálisak, valamint  $R$  első  $k - 1$  oszlopának elemeit is ismerjük.

Tekintsük most  $a_k$ -t. A mátrixszorzásból felírhatjuk  $a_k$ -t, majd kifejezhetjük  $q_k$ -t:

$$a_k = \sum_{j=1}^k r_{jk} \cdot q_j \implies q_k = \frac{1}{r_{kk}} \left( a_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} \cdot q_j \right)$$

Az  $r_{jk}$  értékek meghatározásához szorozzuk be skalárisan mindkét oldalt  $q_i$ -vel rögzített  $i$  értékre ( $i = 1, 2, \dots, k - 1$ ) és használjuk ki, hogy  $\langle q_i, q_j \rangle = \delta_{ij}$ , valamint  $q_k$ -tól is azt várjuk, hogy merőleges legyen az összes eddigi  $q_i$  vektorra:



$$q_k = \frac{1}{r_{kk}} \left( a_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} \cdot q_j \right) \quad | \cdot q_i \rangle \quad (i = 1, \dots, k-1)$$

$$\begin{aligned} 0 = \langle q_k, q_i \rangle &= \frac{1}{r_{kk}} \left( \langle a_k, q_i \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} \underbrace{\langle q_j, q_i \rangle}_{\delta_{ij}} \right) = \\ &= \frac{1}{r_{kk}} (\langle a_k, q_i \rangle - r_{ik}) \quad \Rightarrow \quad r_{ik} = \langle a_k, q_i \rangle. \end{aligned}$$

$$q_k = \frac{1}{r_{kk}} \left( a_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} \cdot q_j \right) \quad | \cdot q_i \rangle \quad (i = 1, \dots, k-1)$$

$$\begin{aligned} 0 = \langle q_k, q_i \rangle &= \frac{1}{r_{kk}} \left( \langle a_k, q_i \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} \underbrace{\langle q_j, q_i \rangle}_{\delta_{ij}} \right) = \\ &= \frac{1}{r_{kk}} (\langle a_k, q_i \rangle - r_{ik}) \quad \Rightarrow \quad r_{ik} = \langle a_k, q_i \rangle. \end{aligned}$$

Továbbá  $q_k$ -tól még azt várjuk el, hogy normált legyen, ezért

$$r_{kk} = \left\| a_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} \cdot q_j \right\|_2.$$

# $QR$ -felbontás egyértelműség bizonyítás

Így megkaptuk az  $R$  mátrix  $k$ -adik oszlopának ismeretlen értékeit, az előállított  $q_k$  ortogonális az eddigi  $q_i$ -kre, valamint normált.  $\square$

# QR-felbontás egyértelműség bizonyítás

Így megkaptuk az  $R$  mátrix  $k$ -adik oszlopának ismeretlen értékeit, az előállított  $q_k$  ortogonális az eddigi  $q_i$ -kre, valamint normált.  $\square$

**Biz.: Egyértelműség:** Tegyük fel indirekt, hogy legalább két különböző  $QR$ -felbontásunk van

$$A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2,$$

melyekre a  $R_1$  és  $R_2$  diagonális elemi pozitívak.

# QR-felbontás egyértelműség bizonyítás

Így megkaptuk az  $R$  mátrix  $k$ -adik oszlopának ismeretlen értékeit, az előállított  $q_k$  ortogonális az eddigi  $q_i$ -kre, valamint normált.  $\square$

**Biz.: Egyértelműség:** Tegyük fel indirekt, hogy legalább két különböző  $QR$ -felbontásunk van

$$A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2,$$

melyekre a  $R_1$  és  $R_2$  diagonális elemi pozitívak.

$A$ -t szorozzuk balról  $Q_2^{-1} = Q_2^\top$ -tal és jobbról  $R_1^{-1}$ -zel

$$\underbrace{(Q_2^\top Q_1)}_{\text{ortogonális}} = \underbrace{(R_2 R_1^{-1})}_{\in \mathcal{U}}.$$

# QR-felbontás egyértelműség bizonyítás

Így megkaptuk az  $R$  mátrix  $k$ -adik oszlopának ismeretlen értékeit, az előállított  $q_k$  ortogonális az eddigi  $q_i$ -kre, valamint normált.  $\square$

**Biz.: Egyértelműség:** Tegyük fel indirekt, hogy legalább két különböző  $QR$ -felbontásunk van

$$A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2,$$

melyekre a  $R_1$  és  $R_2$  diagonális elemi pozitívak.

$A$ -t szorozzuk balról  $Q_2^{-1} = Q_2^\top$ -tal és jobbról  $R_1^{-1}$ -zel

$$\underbrace{(Q_2^\top Q_1)}_{\text{ortogonális}} = \underbrace{(R_2 R_1^{-1})}_{\in \mathcal{U}}.$$

Legyen  $R := R_2 R_1^{-1}$ , mivel  $Q := Q_2^\top Q_1$  ortogonális mátrix ( $R = Q$ ),

$$Q^\top Q = I = R^\top R.$$

# $QR$ -felbontás egyértelműség bizonyítás

Az  $R^\top R = I$  szorzatot felírva:

# QR-felbontás egyértelműség bizonyítás

Az  $R^T R = I$  szorzatot felírva:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & 0 & \dots & r_{1n} \\ r_{12} & r_{22} & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_{1n} & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$



# QR-felbontás egyértelműség bizonyítás

Az  $R^T R = I$  szorzatot felírva:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & \dots \\ r_{12} & r_{22} & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_{1n} & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$r_{11} \cdot r_{11} = 1$ , amiből  $r_{11} > 0$  miatt  $r_{11} = 1$ .

# QR-felbontás egyértelműség bizonyítás

Az  $R^T R = I$  szorzatot felírva:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & \dots \\ r_{12} & r_{22} & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_{1n} & 0 & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$r_{11} \cdot r_{11} = 1$ , amiből  $r_{11} > 0$  miatt  $r_{11} = 1$ .

$j \neq 1$ -re

$$r_{11} \cdot r_{1j} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{1j} = 0.$$

$R$  második sorára:  $r_{22} \cdot r_{22} = 1$ , amiből  $r_{22} > 0$  miatt  $r_{22} = 1$ .

$R$  második sorára:  $r_{22} \cdot r_{22} = 1$ , amiből  $r_{22} > 0$  miatt  $r_{22} = 1$ .

A szorzat mátrix  $(2,j)$ -edik elemére  $j \neq 2$ -re

$$r_{22} \cdot r_{2j} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{2j} = 0.$$

$R$  második sorára:  $r_{22} \cdot r_{22} = 1$ , amiből  $r_{22} > 0$  miatt  $r_{22} = 1$ .

A szorzat mátrix  $(2,j)$ -edik elemére  $j \neq 2$ -re

$$r_{22} \cdot r_{2j} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{2j} = 0.$$

A többi sorra ehhez hasonlóan ellenőrizhetjük, hogy

$$R = I \Leftrightarrow R_1 = R_2, \quad Q_1 = Q_2.$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk.



$R$  második sorára:  $r_{22} \cdot r_{22} = 1$ , amiből  $r_{22} > 0$  miatt  $r_{22} = 1$ .

A szorzat mátrix  $(2, j)$ -edik elemére  $j \neq 2$ -re

$$r_{22} \cdot r_{2j} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{2j} = 0.$$

A többi sorra ehhez hasonlóan ellenőrizhetjük, hogy

$$R = I \Leftrightarrow R_1 = R_2, \quad Q_1 = Q_2.$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk. □

**Megj.:** Két különböző  $QR$ -felbontás esetén létezik olyan

$D := \text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$  mátrix, melyre  $A = \overbrace{Q \cdot D} \cdot \overbrace{D \cdot R} = \tilde{Q} \cdot \tilde{R}$ .

Tegyük fel, hogy

- az  $Ax = b$  LER megoldható, és
- rendelkezésünkre áll az  $A = QR$  felbontás.

Ekkor  $Ax = Q \cdot \underbrace{R \cdot x}_y = b$  helyett

- 1 a  $Qy = b$  LER megoldása:  $y = Q^\top b$ ,
- 2 az  $Rx = y$  LER-t oldjuk meg.

Együtt is írható: oldjuk meg az  $Rx = Q^\top b$  LER-t.

Tegyük fel, hogy

- az  $Ax = b$  LER megoldható, és
- rendelkezésünkre áll az  $A = QR$  felbontás.

Ekkor  $Ax = Q \cdot \underbrace{R \cdot x}_y = b$  helyett  $(\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$

- 1 a  $Qy = b$  LER megoldása:  $y = Q^\top b$ ,  $(2n^2 + \mathcal{O}(n))$
- 2 az  $Rx = y$  LER-t oldjuk meg.  $(n^2 + \mathcal{O}(n))$

Együtt is írható: oldjuk meg az  $Rx = Q^\top b$  LER-t.



Tegyük fel, hogy

- az  $Ax = b$  LER megoldható, és
- rendelkezésünkre áll az  $A = QR$  felbontás.

Ekkor  $Ax = Q \cdot \underbrace{R \cdot x}_y = b$  helyett  $(\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$

- 1 a  $Qy = b$  LER megoldása:  $y = Q^\top b$ ,  $(2n^2 + \mathcal{O}(n))$
- 2 az  $Rx = y$  LER-t oldjuk meg.  $(n^2 + \mathcal{O}(n))$

Együtt is írható: oldjuk meg az  $Rx = Q^\top b$  LER-t.

Persze valamikor elő kell állítani a  $QR$ -felbontást.  $(2n^3 + \mathcal{O}(n^2))$   
Előnyös, ha sokszor ugyanaz  $A$ , lásd  $QR$ -algorithmus (Num. mód. 2A). Így numerikusan stabilabb a LER megoldása.

- 1 Ortogonális mátrixokról
- 2  $QR$ -felbontás
- 3 Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció**
- 4 Householder-féle mátrixok
- 5 Householder-transzformációk alkalmazásai
- 6 Műveletigény

**Feladat:** adott  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  lineárisan független vektorrendszer, készítsünk belőlük egy  $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$  ortonormált vektorrendszert úgy, hogy  $q_k$  csak  $a_1, \dots, a_k$ -től függ ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

**Feladat:** adott  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  lineárisan független vektorrendszer, készítsünk belőlük egy  $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$  ortonormált vektorrendszert úgy, hogy  $q_k$  csak  $a_1, \dots, a_k$ -től függ ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Másképp, mátrixszorzás alakban:  $QR = A$ , avagy

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Adott:  $A$ , keressük:  $Q, R$ .

**Feladat:** adott  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  lineárisan független vektorrendszer, készítsünk belőlük egy  $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$  ortonormált vektorrendszert úgy, hogy  $q_k$  csak  $a_1, \dots, a_k$ -tól függ ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Másképp, mátrixszorzás alakban:  $QR = A$ , avagy

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Adott:  $A$ , keressük:  $Q, R$ .

**Levezetés:** lásd a  $QR$ -felbontás létezés bizonyítását (illetve Linalg).

## Definíció: Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció

Adott az  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  lineárisan független vektorrendszer.

❶  $r_{11} := \|a_1\|_2,$

❷  $q_1 := \frac{1}{r_{11}} a_1$  („lenormáljuk”).

A  $k$ -adik lépésben ( $k = 2, \dots, n$ ):

❸  $r_{jk} := \langle a_k, q_j \rangle \quad (j = 1, \dots, k-1),$

❹  $s_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} \cdot q_j,$

❺  $r_{kk} := \|s_k\|_2$  ( $s_k$  segédvektor hossza),

❻  $q_k := \frac{1}{r_{kk}} s_k$  („lenormáljuk”).

Az így nyert  $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$  vektorrendszer ortonormált.

## **Definíció:** Gram–Schmidt-ortogonalizáció (normálás nélkül)

Adott az  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  lineárisan független vektorrendszer.

❶  $\widetilde{q}_1 := a_1,$

❷  $\widetilde{r}_{11} := 1$

A  $k$ -adik lépésben ( $k = 2, \dots, n$ ):

❸  $\widetilde{r}_{jk} := \frac{\langle a_k, \widetilde{q}_j \rangle}{\langle \widetilde{q}_j, \widetilde{q}_j \rangle} \quad (j = 1, \dots, k-1),$

❹  $\widetilde{q}_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \widetilde{r}_{jk} \cdot \widetilde{q}_j,$

❺  $\widetilde{r}_{kk} := 1$  (nem normálunk),

Az így nyert  $\widetilde{q}_1, \dots, \widetilde{q}_n \in \mathbb{R}^n$  vektorrendszer ortogonális.

## Definíció: Gram–Schmidt-ortogonalizáció (normálás nélkül)

Adott az  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  lineárisan független vektorrendszer.

1  $\widetilde{q}_1 := a_1,$

2  $\widetilde{r}_{11} := 1$

A  $k$ -adik lépésben ( $k = 2, \dots, n$ ):

3  $\widetilde{r}_{jk} := \frac{\langle a_k, \widetilde{q}_j \rangle}{\langle \widetilde{q}_j, \widetilde{q}_j \rangle} \quad (j = 1, \dots, k-1),$

4  $\widetilde{q}_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \widetilde{r}_{jk} \cdot \widetilde{q}_j,$

5  $\widetilde{r}_{kk} := 1$  (nem normálunk),

Az így nyert  $\widetilde{q}_1, \dots, \widetilde{q}_n \in \mathbb{R}^n$  vektorrendszer ortogonális.

**Megj.:** Levezetése teljesen hasonló. Kézi számolásra alkalmasabb.  
Ne felejtsünk el normálni...



## Normálás utólag:

- $A = \tilde{Q}\tilde{R}$ ,
- $D := \tilde{Q}^\top \tilde{Q}$ , azaz  $D = \text{diag}(\langle \tilde{q}_1, \tilde{q}_1 \rangle, \dots, \langle \tilde{q}_n, \tilde{q}_n \rangle)$ ,
- $A = \underbrace{\tilde{Q} \cdot \sqrt{D}^{-1}}_Q \cdot \underbrace{\sqrt{D} \cdot \tilde{R}}_R = Q \cdot R$ ,

azaz  $\tilde{Q}$  oszlopait, mint vektorokat leosztjuk azok hosszával (normáljuk őket),  $\tilde{R}$  sorait pedig szorozzuk ugyanezekkel az értékekkel.

- Közvetlenül a  $\sqrt{D} = \text{diag}(\|\tilde{q}_1\|_2, \dots, \|\tilde{q}_n\|_2)$  alakkal is dolgozhatunk.

**Tétel:** A Gram–Schmidt-ortogonalizáció műveletigénye

A szorzások és osztások száma

$$2n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

valamint  $n$  darab négyzetgyökvonás is szükséges.

## **Tétel:** A Gram–Schmidt-ortogonalizáció műveletigénye

A szorzások és osztások száma

$$2n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

valamint  $n$  darab négyzetgyökvonás is szükséges.

**Biz.:** A  $k$ -adik lépésben:

skaláris szorzatok ( $r_{jk}$ )	$(k-1)(2n-1)$
ortogonális vektor ( $s_k$ )	$(k-1)n + (k-1)n = (k-1)2n$
hossz ( $r_{kk}$ )	$2n-1$
osztás ( $q_k$ )	$n$

## **Tétel:** A Gram–Schmidt-ortogonalizáció műveletigénye

A szorzások és osztások száma

$$2n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

valamint  $n$  darab négyzetgyökvonás is szükséges.

**Biz.:** A  $k$ -adik lépésben:

skaláris szorzatok ( $r_{jk}$ )	$(k-1)(2n-1)$
ortogonális vektor ( $s_k$ )	$(k-1)n + (k-1)n = (k-1)2n$
hossz ( $r_{kk}$ )	$2n-1$
osztás ( $q_k$ )	$n$

Összesen:

$$(k-1)(4n-1) + 3n-1 = 4kn - 4n - k + 1 + 3n - 1 = 4kn - n - k,$$

# Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (4kn - n - k) &= 4n \sum_{k=1}^n k - n^2 - \sum_{k=1}^n k = \\ &= 4n \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = 2n^3 + \mathcal{O}(n^2).\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (4kn - n - k) &= 4n \sum_{k=1}^n k - n^2 - \sum_{k=1}^n k = \\ &= 4n \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = 2n^3 + \mathcal{O}(n^2).\end{aligned}$$



## Példa: QR, Gram–Schmidt

Készítsük el a következő mátrix  $QR$ -felbontását Gram–Schmidt-ortogonalizációval.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Gram–Schmidt ortogonalizációval normálással:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} = Q \cdot R.$$

Gram–Schmidt ortogonalizációval normálással:

$$A = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{a}_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & 2 \\ \textcolor{red}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{q}_1 & q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \textcolor{red}{r}_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} = Q \cdot R.$$

**1. lépés:**  $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ -ből meghatározzuk  $r_{11}, q_1$ -et:

$$r_{11} = \|a_1\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$q_1 = \frac{1}{r_{11}} a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$



## 2. lépés:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} = Q \cdot R$$

## 2. lépés:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} = Q \cdot R$$

$a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ -ből meghatározzuk  $r_{12}, r_{22}, q_2$ -t:

$$r_{12} = \langle a_2, q_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

## 2. lépés:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} = Q \cdot R$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{-ből meghatározzuk } r_{12}, r_{22}, q_2\text{-t:}$$

$$r_{12} = \langle a_2, q_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} s_2 = a_2 - r_{12}q_1 &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 - 4 \\ 5 - 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$r_{22} = \|s_2\|_2 = \left\| \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\|_2 = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$r_{22} = \|s_2\|_2 = \left\| \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\|_2 = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$q_2 = \frac{1}{r_{22}} s_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$



$$r_{22} = \|s_2\|_2 = \left\| \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\|_2 = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$q_2 = \frac{1}{r_{22}} s_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Tehát a  $Q$  és  $R$  mátrixok a következők:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- 1 Ortogonális mátrixokról
- 2  $QR$ -felbontás
- 3 Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció
- 4 Householder-féle mátrixok**
- 5 Householder-transzformációk alkalmazásai
- 6 Műveletigény

## **Definíció:** vektorok „hossza”

Az  $\mathbb{R}^n$ -beli  $v$  vektorok hagyományos értelemben vett hosszát, avagy „kettes normáját” jelölje  $\|\cdot\|_2$ .

A következőképpen számolható:

$$\|v\|_2 := \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v^T v} = \left( \sum_{i=1}^n v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$



## **Definíció:** Householder-mátrix

A  $H = H(v) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixot *Householder-mátrixnak* nevezzük, ha

$$H(v) = I - 2vv^T,$$

ahol  $v \in \mathbb{R}^n$  és  $\|v\|_2 = 1$ .

## **Definíció:** Householder-mátrix

A  $H = H(v) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixot *Householder-mátrixnak* nevezzük, ha

$$H(v) = I - 2vv^T,$$

ahol  $v \in \mathbb{R}^n$  és  $\|v\|_2 = 1$ .

## **Megjegyzés:**

- A  $H(v)$  transzformációs mátrixot nem kell előállítani, enélkül alkalmazzuk vektorokra, ez a Householder-transzformáció:

## Definíció: Householder-mátrix

A  $H = H(v) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixot *Householder-mátrixnak* nevezzük, ha

$$H(v) = I - 2vv^T,$$

ahol  $v \in \mathbb{R}^n$  és  $\|v\|_2 = 1$ .

## Megjegyzés:

- A  $H(v)$  transzformációs mátrixot nem kell előállítani, enélkül alkalmazzuk vektorokra, ez a Householder-transzformáció:
- $x \in \mathbb{R}^n$ -re  $H(v)x = (I - 2vv^T)x = x - 2v \underbrace{(v^T x)}_{\in \mathbb{R}}$ .

**Definíció:** Householder-mátrix

A  $H = H(v) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixot *Householder-mátrixnak* nevezzük, ha

$$H(v) = I - 2vv^T,$$

ahol  $v \in \mathbb{R}^n$  és  $\|v\|_2 = 1$ .

**Megjegyzés:**

- A  $H(v)$  transzformációs mátrixot nem kell előállítani, enélkül alkalmazzuk vektorokra, ez a Householder-transzformáció:
- $x \in \mathbb{R}^n$ -re  $H(v)x = (I - 2vv^T)x = x - 2v \underbrace{(v^T x)}_{\in \mathbb{R}}$ .
- $y \in \mathbb{R}^n$ -re  $y^T H(v) = y^T (I - 2vv^T) = y^T - 2 \underbrace{(y^T v)}_{\in \mathbb{R}} v^T$ .

**Definíció:** Householder-mátrix

A  $H = H(v) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixot *Householder-mátrixnak* nevezzük, ha

$$H(v) = I - 2vv^T,$$

ahol  $v \in \mathbb{R}^n$  és  $\|v\|_2 = 1$ .

**Megjegyzés:**

- A  $H(v)$  transzformációs mátrixot nem kell előállítani, enélkül alkalmazzuk vektorokra, ez a Householder-transzformáció:
- $x \in \mathbb{R}^n$ -re  $H(v)x = (I - 2vv^T)x = x - 2v \underbrace{(v^T x)}_{\in \mathbb{R}}$ .
- $y \in \mathbb{R}^n$ -re  $y^T H(v) = y^T (I - 2vv^T) = y^T - 2 \underbrace{(y^T v)}_{\in \mathbb{R}} v^T$ .
- Mindkét esetben  $4n$  művelet kell a mátrixszal való szorzás  $2n^2 + \mathcal{O}(n)$ -es műveletigénye helyett.

## Állítás: Householder-mátrixok tulajdonságai

①  $H^T = H$  (szimmetrikus),

## Állítás: Householder-mátrixok tulajdonságai

- 1  $H^T = H$  (szimmetrikus),
- 2  $H^2 = I$ , azaz  $H^{-1} = H$  (ortogonális),

## Állítás: Householder-mátrixok tulajdonságai

- 1  $H^T = H$  (szimmetrikus),
- 2  $H^2 = I$ , azaz  $H^{-1} = H$  (ortogonális),
- 3  $H(v) \cdot v = -v$ ,



## Állítás: Householder-mátrixok tulajdonságai

- 1  $H^T = H$  (szimmetrikus),
- 2  $H^2 = I$ , azaz  $H^{-1} = H$  (ortogonális),
- 3  $H(v) \cdot v = -v$ ,
- 4  $\forall y \perp v : H(v) \cdot y = y$ .

## Állítás: Householder-mátrixok tulajdonságai

- 1  $H^T = H$  (szimmetrikus),
- 2  $H^2 = I$ , azaz  $H^{-1} = H$  (ortogonális),
- 3  $H(v) \cdot v = -v$ ,
- 4  $\forall y \perp v : H(v) \cdot y = y$ .

**Biz.:** Használjuk ki, hogy  $v^T v = 1$  és  $v^T y = 0$ .

1  $(I - 2vv^T)^T = I^T - 2(v^T)^T v^T = I - 2vv^T,$

## Állítás: Householder-mátrixok tulajdonságai

- 1  $H^T = H$  (szimmetrikus),
- 2  $H^2 = I$ , azaz  $H^{-1} = H$  (ortogonális),
- 3  $H(v) \cdot v = -v$ ,
- 4  $\forall y \perp v : H(v) \cdot y = y$ .

**Biz.:** Használjuk ki, hogy  $v^T v = 1$  és  $v^T y = 0$ .

- 1  $(I - 2vv^T)^T = I^T - 2(v^T)^T v^T = I - 2vv^T$ ,
- 2  $(I - 2vv^T)(I - 2vv^T) = I - 2vv^T - 2vv^T + 4v \underbrace{v^T v}_{=1} v^T = I$ ,

**Állítás:** Householder-mátrixok tulajdonságai

- 1  $H^T = H$  (szimmetrikus),
- 2  $H^2 = I$ , azaz  $H^{-1} = H$  (ortogonális),
- 3  $H(v) \cdot v = -v$ ,
- 4  $\forall y \perp v : H(v) \cdot y = y$ .

**Biz.:** Használjuk ki, hogy  $v^T v = 1$  és  $v^T y = 0$ .

- 1  $(I - 2vv^T)^T = I^T - 2(v^T)^T v^T = I - 2vv^T$ ,
- 2  $(I - 2vv^T)(I - 2vv^T) = I - 2vv^T - 2vv^T + 4v \underbrace{v^T v}_{=1} v^T = I$ ,
- 3  $(I - 2vv^T)v = v - 2v \underbrace{v^T v}_{=1} = v - 2v = -v$ ,

**Állítás:** Householder-mátrixok tulajdonságai

- 1  $H^T = H$  (szimmetrikus),
- 2  $H^2 = I$ , azaz  $H^{-1} = H$  (ortogonális),
- 3  $H(v) \cdot v = -v$ ,
- 4  $\forall y \perp v : H(v) \cdot y = y$ .

**Biz.:** Használjuk ki, hogy  $v^T v = 1$  és  $v^T y = 0$ .

- 1  $(I - 2vv^T)^T = I^T - 2(v^T)^T v^T = I - 2vv^T$ ,
- 2  $(I - 2vv^T)(I - 2vv^T) = I - 2vv^T - 2vv^T + 4v \underbrace{v^T v}_{=1} v^T = I$ ,
- 3  $(I - 2vv^T)v = v - 2v \underbrace{v^T v}_{=1} = v - 2v = -v$ ,
- 4  $(I - 2vv^T)y = y - 2v \underbrace{v^T y}_{=0} = y$ .



## Megjegyzés:

- $H(v)$  tükröző mátrix, a  $v$ -re merőleges (azaz  $v$  normálvektorú)  $n - 1$  dimenziós altérre (0-n átmenő egyenesre, síkra stb.) tükröz.

## Megjegyzés:

- $H(v)$  tükröző mátrix, a  $v$ -re merőleges (azaz  $v$  normálvektorú)  $n - 1$  dimenziós altérre (0-n átmenő egyenesre, síkra stb.) tükröz.
- Legyen  $v \in \mathbb{R}^n$  és  $\|v\|_2 = 1$ , tetszőleges  $x \in \mathbb{R}^n$  vektort bontsunk  $v$ -re merőleges és  $v$ -vel párhuzamos komponensekre:  $x = a + b$ , ahol  $a \perp v$  és  $b \parallel v$ . Ekkor az előző tétel utolsó két állítása alapján

$$H(v)x = H(v)a + H(v)b = a - b.$$

## Megjegyzés:

- $H(v)$  tükröző mátrix, a  $v$ -re merőleges (azaz  $v$  normálvektorú)  $n - 1$  dimenziós altérre (0-n átmenő egyenesre, síkra stb.) tükröz.
- Legyen  $v \in \mathbb{R}^n$  és  $\|v\|_2 = 1$ , tetszőleges  $x \in \mathbb{R}^n$  vektort bontsunk  $v$ -re merőleges és  $v$ -vel párhuzamos komponensekre:  $x = a + b$ , ahol  $a \perp v$  és  $b \parallel v$ . Ekkor az előző tétel utolsó két állítása alapján

$$H(v)x = H(v)a + H(v)b = a - b.$$

- Mivel  $H(v)$  ortogonális mátrix,  $\|H(v)x\|_2 = \|x\|_2$ , vagyis a transzformáció a vektor hosszát nem változtatja meg.



## **Tétel:** tetszőleges tükrözés Householder-mátrixszal

Legyen  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \neq b$  és  $\|a\|_2 = \|b\|_2 \neq 0$ . Ekkor a

$$v = \pm \frac{a - b}{\|a - b\|_2} \text{ választással } H(v) \cdot a = b.$$

## **Tétel:** tetszőleges tükrözés Householder-mátrixszal

Legyen  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \neq b$  és  $\|a\|_2 = \|b\|_2 \neq 0$ . Ekkor a

$$v = \pm \frac{a - b}{\|a - b\|_2} \text{ választással } H(v) \cdot a = b.$$

**Biz.:** Ismerve, hogy  $H(v) = I - 2vv^\top$ , számoljuk végig a  $H(v) \cdot a$  szorzatot. Közben használjuk ki, hogy  $\|a\|_2 = \|b\|_2$ , azaz  $a^\top a = b^\top b$ , valamint a skaláris szorzás kommutatív, azaz  $a^\top b = b^\top a$ .

$$\begin{aligned} & \left( I - 2 \frac{(a-b)(a-b)^\top}{\|a-b\|_2^2} \right) \cdot a = a - \frac{2(a-b)(a^\top a - b^\top a)}{(a-b)^\top (a-b)} = \\ &= a - \frac{2(a-b)(a^\top a - b^\top a)}{a^\top a - a^\top b - b^\top a + b^\top b} = a - \frac{2(a-b)(a^\top a - b^\top a)}{2(a^\top a - b^\top a)} = \\ &= a - (a-b) = b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( I - 2 \frac{(a-b)(a-b)^\top}{\|a-b\|_2^2} \right) \cdot a = a - \frac{2(a-b)(a^\top a - b^\top a)}{(a-b)^\top (a-b)} = \\
 & = a - \frac{2(a-b)(a^\top a - b^\top a)}{a^\top a - a^\top b - b^\top a + b^\top b} = a - \frac{2(a-b)(a^\top a - b^\top a)}{2(a^\top a - b^\top a)} = \\
 & = a - (a-b) = b.
 \end{aligned}$$

Tehát valóban, két különböző, de azonos hosszúságú vektor átvihető egymásba egy Householder-transzformáció által. □

$$\begin{aligned}
 & \left( I - 2 \frac{(a-b)(a-b)^\top}{\|a-b\|_2^2} \right) \cdot a = a - \frac{2(a-b)(a^\top a - b^\top a)}{(a-b)^\top (a-b)} = \\
 & = a - \frac{2(a-b)(a^\top a - b^\top a)}{a^\top a - a^\top b - b^\top a + b^\top b} = a - \frac{2(a-b)(a^\top a - b^\top a)}{2(a^\top a - b^\top a)} = \\
 & = a - (a-b) = b.
 \end{aligned}$$

Tehát valóban, két különböző, de azonos hosszúságú vektor átvihető egymásba egy Householder-transzformáció által. □

**Megjegyzés:** Egyébként  $H(v) \cdot b = a$  is teljesül.

### Példa: Householder-féle tükrözés

Határozzuk meg azt a Householder-féle transzformációt, amely az azonos hosszúságú  $a, b$  vektorhoz előállítja azt a  $v$  vektort, melyre  $H(v) \cdot a = b$ . Ellenőrzésképpen végezzük is el a transzformációt.

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$a - b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a - b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|a - b\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$



$$a - b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|a - b\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Tehát } v = \frac{a-b}{\|a-b\|_2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ jó választás.}$$

$$a - b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|a - b\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Tehát } v = \frac{a-b}{\|a-b\|_2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ jó választás.}$$

**Ellenőrizzük** végezzük el a transzformációt  $a$ -n:

$$H(v) \cdot a = a - 2 \underbrace{v^T a}_{\in \mathbb{R}} v = a - 2(v^T a)v.$$

$$H(v) \cdot a = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned} H(v) \cdot a &= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{6}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = b \quad \checkmark \end{aligned}$$



### Példa: Householder-féle tükrözés

Határozzuk meg azt a Householder-féle transzformációt, amely a következő  $a$  vektort  $b = k \cdot e_1$  alakúra hozza. Ellenőrzésképpen végezzük is el a transzformációt.

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A jó előjel választás  $\sigma$ -nak  $-1$ , mert  $a$  első eleme pozitív.

$$\sigma = -\|a\|_2 = -\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = -3$$

Ezzel az előjel választással stabilabb lesz az osztásunk  $v$  előállításban.

A jó előjel választás  $\sigma$ -nak  $-1$ , mert  $a$  első eleme pozitív.

$$\sigma = -\|a\|_2 = -\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = -3$$

Ezzel az előjel választással stabilabb lesz az osztásunk  $v$  előállításban.

$$a - \sigma e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - (-3) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Látjuk, hogy valójában egyetlen műveletet kellett elvégeznünk a vektor első elemén. Ezzel a  $\sigma$  előjelválasztással elérjük, hogy  $\|a - \sigma e_1\|_2 \geq \|a\|_2$ .

A jó előjel választás  $\sigma$ -nak  $-1$ , mert  $a$  első eleme pozitív.

$$\sigma = -\|a\|_2 = -\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = -3$$

Ezzel az előjel választással stabilabb lesz az osztásunk  $v$  előállításban.

$$a - \sigma e_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - (-3) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Látjuk, hogy valójában egyetlen műveletet kellett elvégeznünk a vektor első elemén. Ezzel a  $\sigma$  előjelválasztással elérjük, hogy  $\|a - \sigma e_1\|_2 \geq \|a\|_2$ .

$$\|a - \sigma e_1\|_2 = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{30}$$

$$v = \frac{a - \sigma e_1}{\|a - \sigma e_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{jó választás.}$$



**Ellenőrizzük** végezzük el a transzformációt  $a$ -n:

$$H(v) \cdot a = a - 2v \underbrace{(v^\top a)}_{\in \mathbb{R}} = a - 2(v^\top a)v.$$

**Ellenőrizzük** végezzük el a transzformációt  $a$ -n:

$$H(v) \cdot a = a - 2v \underbrace{(v^T a)}_{\in \mathbb{R}} = a - 2(v^T a)v.$$

$$H(v) \cdot a = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{15} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

**Ellenőrizzük** végezzük el a transzformációt  $a$ -n:

$$H(v) \cdot a = a - 2v \underbrace{(v^T a)}_{\in \mathbb{R}} = a - 2(v^T a)v.$$

$$H(v) \cdot a = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{15} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma \cdot e_1 \quad \checkmark$$



- 1 Ortogonális mátrixokról
- 2  $QR$ -felbontás
- 3 Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció
- 4 Householder-féle mátrixok
- 5 Householder-transzformációk alkalmazásai**
- 6 Műveletigény

## Módszer:

- Legyen adott az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertálható mátrix, első oszlopát jelölje  $a_1$ .
- Egy lépésben egy oszlopot kinullázunk a főátló alatt. ( $\sim$  GE)
- Így  $n - 1$  lépésben felső háromszög alakot nyerünk.

## Módszer:

- Legyen adott az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertálható mátrix, első oszlopát jelölje  $a_1$ .
- Egy lépésben egy oszlopot kinullázunk a főátló alatt. ( $\sim$  GE)
- Így  $n - 1$  lépésben felső háromszög alakot nyerünk.

## Definíció: előjel függvény

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \\ -1 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

## Módszer:

- Legyen adott az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertálható mátrix, első oszlopát jelölje  $a_1$ .
- Egy lépésben egy oszlopot kinullázunk a főátló alatt. ( $\sim$  GE)
- Így  $n - 1$  lépésben felső háromszög alakot nyerünk.

## Definíció: előjel függvény

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \\ -1 & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

**Megjegyzés:** most, a Householder-transzformációknál nem engedhetjük meg a 0 értéket, helyette akár  $+1$ -et, akár  $-1$ -et választhatunk.

## 1. lépés:

$a_1 \Rightarrow \sigma_1 \cdot e_1$ , ahol  $\sigma_1 := -\operatorname{sgn}(a_{11}) \cdot \|a_1\|_2$  (tehát  $|\sigma_1| = \|a_1\|_2$ ),

$$v_1 := \frac{a_1 - \sigma_1 e_1}{\|a_1 - \sigma_1 e_1\|_2}, \quad H_1 := H(v_1).$$



## 1. lépés:

$a_1 \Rightarrow \sigma_1 \cdot e_1$ , ahol  $\sigma_1 := -\operatorname{sgn}(a_{11}) \cdot \|a_1\|_2$  (tehát  $|\sigma_1| = \|a_1\|_2$ ),

$$v_1 := \frac{a_1 - \sigma_1 e_1}{\|a_1 - \sigma_1 e_1\|_2}, \quad H_1 := H(v_1).$$

Ekkor

$$H_1 \cdot A = H(v_1) \cdot A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

## 1. lépés:

$a_1 \Rightarrow \sigma_1 \cdot e_1$ , ahol  $\sigma_1 := -\operatorname{sgn}(a_{11}) \cdot \|a_1\|_2$  (tehát  $|\sigma_1| = \|a_1\|_2$ ),

$$v_1 := \frac{a_1 - \sigma_1 e_1}{\|a_1 - \sigma_1 e_1\|_2}, \quad H_1 := H(v_1).$$

Ekkor

$$H_1 \cdot A = H(v_1) \cdot A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

**Megjegyzés:**  $\sigma_1$  megválasztásáról... így stabilabb.

**2. lépés:**

$b_1 \Rightarrow \sigma_2 \cdot e_1$ , ahol  $\sigma_2 := -\operatorname{sgn}(b_{11}) \cdot \|b_1\|_2$  (tehát  $|\sigma_2| = \|b_1\|_2$ ),

$$\tilde{v}_2 := \frac{b_1 - \sigma_2 e_1}{\|b_1 - \sigma_2 e_1\|_2} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

Ekkor

$$H(\tilde{v}_2) \cdot B = \begin{pmatrix} \sigma_2 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

**2. lépés** (teljes méretben  $(n \times n)$  felírva):

$$v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix}, \quad H_2 := H(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & H(\tilde{v}_2) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

**2. lépés** (teljes méretben  $(n \times n)$  felírva):

$$v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix}, \quad H_2 := H(v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & H(\tilde{v}_2) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$H_2 \cdot H_1 \cdot A = \begin{pmatrix} \sigma_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \sigma_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & C & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

## Általában, $k$ . lépés:

kinullázzuk az elemeket a főátló alatt a  $k$ . oszlopban.

Az ezt megvalósító transzformáció:

$$v_k := \begin{pmatrix} 0_{(1.)} \\ \vdots \\ 0_{(k-1).} \\ \widetilde{v_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad H_k := H(v_k) = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & H(\widetilde{v_k}) \end{pmatrix}.$$

A gyakorlatban csak az  $(n - k + 1) \times (n - k + 1)$ -s mátrix részen dolgozunk a  $k$ . lépésben, mint a GE-nál. Az  $(n - 1)$ -edik lépés után felső háromszög alakot kapunk.

# A Householder-transzformáció alkalmazásai

Egyetlen LER megoldása:

$$Ax = b$$

$$H_1 \cdot A \cdot x = H_1 \cdot b$$

$$\vdots$$

$$\underbrace{H_{n-1} \cdots H_1 \cdot A \cdot x}_R = \underbrace{H_{n-1} \cdots H_1 \cdot b}_d$$

$$R \cdot x = d \rightarrow x \text{ (visszahelyettesítés)}$$

# A Householder-transzformáció alkalmazásai

Egyetlen LER megoldása:

$$\begin{aligned}Ax &= b \\H_1 \cdot A \cdot x &= H_1 \cdot b \\&\vdots \\ \underbrace{H_{n-1} \cdots H_1 \cdot A \cdot x}_R &= \underbrace{H_{n-1} \cdots H_1 \cdot b}_d \\ R \cdot x &= d \rightarrow x \text{ (visszahelyettesítés)}\end{aligned}$$

Ugyanúgy dolgozunk, mint a GE-nál. Végrehajtjuk a transzformációt az oszlopokon:

$$[A|b] \rightarrow n-1 \text{ db H-trf.} \rightarrow [R|d] \rightarrow \text{visszahely.}$$

Mindig egyre kisebb méretű mátrixon dolgozunk a transzformációk során.



# A Householder-transzformáció alkalmazásai

$QR$ -felbontás készítése:

$$\underbrace{H_{n-1} \cdots H_2 \cdot H_1}_{Q^{-1}=Q^T} \cdot A = R$$

# A Householder-transzformáció alkalmazásai

$QR$ -felbontás készítése:

$$\underbrace{H_{n-1} \cdots H_2 \cdot H_1}_{Q^{-1}=Q^T} \cdot A = R$$

$$A = \underbrace{H_1 \cdot H_2 \cdots H_{n-1}}_Q \cdot R = Q \cdot R$$

QR-felbontás készítése:

$$\underbrace{H_{n-1} \cdots H_2 \cdot H_1}_{Q^{-1}=Q^T} \cdot A = R$$

$$A = \underbrace{H_1 \cdot H_2 \cdots H_{n-1}}_Q \cdot R = Q \cdot R$$

Megfigyelhetjük, hogy  $Q$  előállításakor mindig a jobb oldalról végezzük a transzformációt, ekkor sorokra alkalmazzuk.

**Az algoritmus:**  $Q$  előállítására

$$Q_0 = I$$

$$k = 1, \dots, n-1 : Q_k := Q_{k-1} H_k$$

$$Q := Q_{n-1}$$

## **Tétel:** $QR$ -felbontás Householder-módszerrel

Invertálható mátrixok  $QR$ -felbontása elkészíthető  $n - 1$  db Householder-transzformáció segítségével.

## **Tétel:** $QR$ -felbontás Householder-módszerrel

Invertálható mátrixok  $QR$ -felbontása elkészíthető  $n - 1$  db Householder-transzformáció segítségével.

**Biz.:** Láttuk.



## **Tétel:** *QR*-felbontás Householder-módszerrel

Invertálható mátrixok *QR*-felbontása elkészíthető  $n - 1$  db Householder-transzformáció segítségével.

**Biz.:** Láttuk. □

**Összefoglalva:** A  $k$ . lépésben kinullázzuk a  $k$ . oszlop főátló alatti elemeit egy  $H_k$  ortogonális transzformáció segítségével, melyet a mátrix oszlopaira alkalmazunk a jobb alsó  $(n - k + 1) \times (n - k + 1)$ -s mátrix részen.

A  $Q$  mátrixot úgy kapjuk, hogy egy egységmátrixból indulva a  $k$ . lépésben a  $H_k$  transzformációt jobbról alkalmazzuk a sorokra csak a jobb alsó  $(n - k + 1) \times (n - k + 1)$ -s mátrix részen.  
 $n - 1$  lépés után megkapjuk felső háromszög alakot ( $R$ ) és  $Q$ -t.

- 1 Ortogonális mátrixokról
- 2  $QR$ -felbontás
- 3 Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció
- 4 Householder-féle mátrixok
- 5 Householder-transzformációk alkalmazásai
- 6 Műveletigény**

**Tétel:** A Householder-trf. műveletigénye LER-re

A LER megoldásának műveletigénye  
Householder-transzformációkkal:

$$\frac{4}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

valamint  $2(n - 1)$  darab négyzetgyökvonásra is szükség van.



**Biz.:**

A  $k$ -adik lépésben ( $n - k + 1 =: h_k$  hosszú vektorokkal dolgozunk):

**Biz.:**

A  $k$ -adik lépésben ( $n - k + 1 =: h_k$  hosszú vektorokkal dolgozunk):

hossz ( $\sigma$ )	$2h_k - 1,$
normálvektor ( $a - \sigma e_1, \ \cdot\ _2, v$ )	$1 + (2h_k - 1) + h_k = 3h_k,$
transzformáció ( $(h_k - 1) + 1$ vektorra)	$h_k \cdot 4h_k.$

**Biz.:**

A  $k$ -adik lépésben ( $n - k + 1 =: h_k$  hosszú vektorokkal dolgozunk):

hossz ( $\sigma$ )	$2h_k - 1,$
normálvektor ( $a - \sigma e_1, \ \cdot\ _2, v$ )	$1 + (2h_k - 1) + h_k = 3h_k,$
transzformáció ( $(h_k - 1) + 1$ vektorra)	$h_k \cdot 4h_k.$

Összesen:  $4h_k^2 + 5h_k - 1, (n - k =: s)$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (4h_k^2 + 5h_k - 1) = \sum_{s=2}^n 4s^2 + \sum_{s=2}^n s + (n-1) = \frac{4}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2).$$

A visszahelyettesítés műveletigénye  $n^2 + \mathcal{O}(n)$ , belefér az előző alakba. □

**Tétel:** A Householder-trf. műveletigénye  $QR$ -felbontásra

A  $QR$ -felbontás előállításának műveletigénye  
Householder-transzformációkkal:

$$\frac{8}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

valamint  $2(n - 1)$  darab négyzetgyökvonásra is szükség van.

**Biz.:**

A  $k$ -adik lépésben ( $n - k + 1 =: h_k$  hosszú vektorokkal dolgozunk):

**Biz.:**

A  $k$ -adik lépésben ( $n - k + 1 =: h_k$  hosszú vektorokkal dolgozunk):

hossz ( $\sigma$ )	$2h_k - 1,$
normálvektor ( $a - \sigma e_1, \ \cdot\ _2, v$ )	$1 + (2h_k - 1) + h_k = 3h_k,$
transzformáció ( $(h_k - 1) + h_k$ vektorra)	$(2h_k - 1) \cdot 4h_k.$

**Biz.:**

A  $k$ -adik lépésben ( $n - k + 1 =: h_k$  hosszú vektorokkal dolgozunk):

hossz ( $\sigma$ )	$2h_k - 1,$
normálvektor ( $a - \sigma e_1, \ \cdot\ _2, v$ )	$1 + (2h_k - 1) + h_k = 3h_k,$
transzformáció ( $(h_k - 1) + h_k$ vektorra)	$(2h_k - 1) \cdot 4h_k.$

Összesen:  $(8h_k^2 - 4h_k) + (5h_k - 1) = 8h_k^2 + h_k - 1, (n - k =: s)$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (8h_k^2 + h_k - 1) = \sum_{s=2}^n 8s^2 + \sum_{s=2}^n s - (n - 1) = \frac{8}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2).$$



**Biz.:**

A  $k$ -adik lépésben ( $n - k + 1 =: h_k$  hosszú vektorokkal dolgozunk):

$$\begin{array}{ll} \text{hossz } (\sigma) & 2h_k - 1, \\ \text{normálvektor } (a - \sigma e_1, \|\cdot\|_2, v) & 1 + (2h_k - 1) + h_k = 3h_k, \\ \text{transzformáció } ((h_k - 1) + h_k \text{ vektorra}) & (2h_k - 1) \cdot 4h_k. \end{array}$$

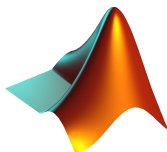
$$\text{Összesen: } (8h_k^2 - 4h_k) + (5h_k - 1) = 8h_k^2 + h_k - 1, \quad (n - k =: s)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (8h_k^2 + h_k - 1) = \sum_{s=2}^n 8s^2 + \sum_{s=2}^n s - (n - 1) = \frac{8}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2).$$



**Megjegyzés:** Ez kicsit több, mint a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációnál, viszont ez a módszer numerikusan stabilabb.





- 1 A Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás működésének szemléltetése  $\mathbb{R}^3$ -beli vektorrendszer esetén.
- 2 Példák Householder-mátrixokra ( $n \approx 3, 10, 20, 50$ ).
- 3 Példák Householder-transzformációra.
- 4  $QR$ -felbontás készítése Householder módszerével ( $n \approx 3, 7, 50, 100$ ).