5. előadás

MAGASABB RENDŰ DERIVÁLTAK

A gradiens vektor

Az iránymenti deriváltnál olyan tételt mondtunk ki, amely szerint bizonyos feltételek mellett a $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ egységvektor irányú iránymenti derivált az a pontban kiszámolható a parciális deriváltak segítségével a következő módon:

$$(\star) \qquad \partial_v f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a)\, v_i.$$

Ehhez az is elegendő, hogy $f \in D\{a\}$, amit már szintén igazoltuk, amikor megmutattuk, hogy a totális deriválhatóságból már következik minden irányban vett iránymenti derivált létezése.

Ez az állítás igazolható az összetett függvény deriválhatóságáról szóló tétel alapján is. Valóban, a definíció szerint $\partial_v f(a)$ nem más, mint az $F_v(t) = f(a + tv)$ függvény deriváltja a $t = 0$ pontban. De $F_v = f \circ g$, ahol

$$g : \mathbb{R} \supset K(0) \ni t \mapsto a + tv \in \mathbb{R}^n.$$

Látható, hogy $g(0) = a$, illetve nem nehéz igazolni, hogy $g'(0) = v$ (g konstans + lineáris függvény). Ezért

$$\partial_v f(a) = F_v'(0) = \big(f \circ g\big)'(0) = f'\big(g(0)\big) \cdot g'(0) = f'(a)v.$$

De ha $f \in D\{a\}$, akkor az a pontban vett deriváltmátrix:

$$f'(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) & \partial_2 f(a) & \dots & \partial_n f(a) \end{pmatrix},$$

és így $(\star)$ adódik a fenti sormátrix és v koordinátáiból álló oszlopmátrix szorzatából, ami ugyanaz, mint ha sormátrixból vektort készítünk, és ezt skalárisan megszorozzuk a v vektorral.

1. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és $f \in D\{a\}$. Ekkor a*

$$\operatorname{grad} f(a) := \big(\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), \dots, \partial_n f(a)\big)$$

vektort **gradiens vektornak** *nevezzük.*

Így $(\star)$ alapján azt kapjuk, hogy $\partial_v f(a) = \langle \operatorname{grad} f(a), v \rangle$.

Ebből következik, hogy az összes v egységvektor közül az, amelynek iránya megegyezik $\operatorname{grad} f(a)$ irányával, azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy az ebbe az irányba mutató iránymenti derivált a legnagyobb.

Megjegyzés. A gradiens irányában a leggyorsabb a függvény növekedése, ellentétes irányban a leggyorsabb a csökkenése. A gradiensre merőleges irányban az iránymenti derivált nulla.

Magasabb rendű deriváltak

Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények körében „nem okozott gondot” a 2-szer, 3-szor, … való differenciálhatóság teljes indukcióval történő értelmezése. Először a kétszer deriválhatóság fogalmát definiáltuk. Azt mondtuk, hogy a szóban forgó függvény *kétszer differenciálható az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontban* (röviden $f \in D^2\{a\}$), ha f az a pont egy $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezetében deriválható (f' értelmezve van a $K(a)$ halmazon) és f' differenciálható az a pontban, azaz $f' \in D\{a\}$. Ekkor az $f''(a) := \big(f'\big)'(a)$ számot az f függvény *a pontbeli második deriváltjának neveztük.* Teljes indukcióval hasonlóan értelmeztük a 2-nél magasabb rendű deriválhatóság fogalmát.

A kétszeri differenciálhatóságnak ez az értelmezése átvihető az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényekre akkor is, ha $n > 1$. Ti., ha $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és $\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f \colon f \in D\big(K(a)\big)$, akkor az

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) & \partial_2 f(x) & \dots & \partial_n f(x) \end{pmatrix} \qquad \big(x \in K(a)\big),$$

deriváltmátrixok és a $\operatorname{grad} f(x) = \big(\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), \dots, \partial_n f(x)\big)$ gradiens vektorok segítségével értelmezhető az

$$f' : \mathbb{R}^n \supset K(a) \ni x \mapsto \operatorname{grad} f(x) \in \mathbb{R}^n$$

deriváltfüggvény. Továbbá az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vektor-vektor függvények körében értelmeztük a deriválhatóságot. Tehát az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényre minden további nélkül előírhatjuk, hogy $f' = \operatorname{grad} f \in D\{a\}$ teljesüljön. Ekkor

$$f''(a) := \big(f'\big)'(a) = \big(\operatorname{grad} f\big)'(a)$$

az f függvény második deriváltja az a pontban. Világos, hogy egy $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény esetén $f''(a)$ egy $(n \times n)$-es mátrix. Az is nyilvánvaló azonban, hogy ezen az úton nem tudunk eljutni a 2-nél magasabb rendű deriválhatósághoz, hiszen pl. az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$ típusú függvények differenciálhatóságát nem értelmeztük.

Emlékeztetünk ugyanakkor arra, hogy egy függvény akkor és csak akkor differenciálható egy pontban, ha a koordinátafüggvényei differenciálhatók ebben a pontban. Mivel a $\operatorname{grad} f$ függvény koordinátafüggvényei az f függvény parciális deriváltjai, így

$$f' = \operatorname{grad} f = \big(\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f\big) \in D\{a\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \partial_i f \in D\{a\} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ez az észrevétel lehetőséget ad arra, hogy értelmezzük egy $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény magasabb rendű deriválhatóságát. Az értelmezés teljes indukcióval történik, első lépésként a kétszer deriválhatóságot definiálva.

2. Definíció. *Az* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ *függvény* **kétszer deriválható** (*vagy* **differenciálható**) *az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontban* (*jelben:* $f \in D^2\{a\}$), *ha*

a) $\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f$, *hogy* $f \in D\{x\}$ *minden* $x \in K(a)$ *pontban, és*

b) $\forall i = 1, 2, \dots, n$ *indexre* $\partial_i f \in D\{a\}$.

Az a) feltételt röviden úgy is írhatjuk, hogy a $\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f$, hogy $f \in D(K(a))$. Ebből következik, hogy $K(a)$ környezetben létezik az

$$f' = \big(\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f\big) = \operatorname{grad} f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

deriváltfüggvény, ami tehát már egy vektor-vektor függvény.

A b) feltétel pedig azzal ekvivalens, hogy $f' \in D\{a\}$. Így minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén a $\partial_i f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ parciális deriváltfüggvényeknek léteznek az a pontban mindegyik változó szerinti parciális deriváltjai:

$$\partial_j\Big(\partial_i f\Big)(a) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Ezeket a számokat ***az f függvény a pontbeli, i-edik és j-edik változó szerinti másodrendű*** (vagy ***második***) ***parciális deriváltjának*** nevezzük.

Az f függvény a pontbeli második deriváltját így értelmezzük:

$$f''(a) := \Big(\operatorname{grad} f\Big)'(a).$$

Világos, hogy egy $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény esetén $f''(a)$ egy $(n \times n)$-es mátrix.

3. Definíció. *Ha az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ függvény kétszer deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban, akkor*

$$f''(a) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a) & \ldots & \partial_{1n} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a) & \ldots & \partial_{2n} f(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{n1} f(a) & \partial_{n2} f(a) & \ldots & \partial_{nn} f(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

az f függvény a pontbeli Hesse-féle mátrixa, *ahol*

$$\partial_{ij} f(a) = \partial_j\Big(\partial_i f\Big)(a) \qquad \Big(i = 1, 2, \ldots, n,\ \ j = 1, 2, \ldots, n\Big).$$

A 2-nél magasabb rendű deriválhatóságot teljes indukcióval így értelmezzük: az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(2 \le n \in \mathbb{N})$ függvény ***s-szer*** $(2 \le s \in \mathbb{N})$ ***deriválható*** az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelben $\boldsymbol{f \in D^s\{a\}}$), ha

a) $\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, hogy $f \in D^{s-1}\Big(K(a)\Big)$, és

b) minden $(s-1)$-edrendű $\partial_{i_1}\partial_{i_2} \ldots \partial_{i_{s-1}} f$ $\Big(1 \le i_1, i_2, \ldots, i_{s-1} \le n\Big)$ parciális deriváltfüggvény deriválható az a pontban.

Az előbbihez kapcsolódik egy fontos fogalom: azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény ***s-szer*** $(s \in \mathbb{N}^+)$ ***folytonosan deriválható*** az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (jelben $\boldsymbol{f \in C^s\{a\}}$), ha

a) $\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, hogy $f \in D^s\Big(K(a)\Big)$ és

b) minden s-edrendű $\partial_{i_1}\partial_{i_2} \ldots \partial_{i_s} f$ $\Big(1 \le i_1, i_2, \ldots, i_s \le n\Big)$ parciális deriváltfüggvény folytonos az a pontban.

Megjegyzés. A totális deriválhatóságra vonatkozó elégséges feltétel azt jelenti, hogy f (egyszer) folytonosan deriválható az a pontban.

A magasabb rendű parciális deriváltakkal kapcsolatban joggal merül fel a *kérdés*, hogy azok kiszámításakor van-e szerepe a változók sorrendjének? A következő tétel azt állítja, hogy ha az f függvény a szóban forgó a helyen „elég sokszor” deriválható, akkor a sorrend elveszti a jelentőségét. A tételt nem bizonyítjuk.

1. Tétel (Young-tétel). *Ha $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(2 \le n \in \mathbb{N})$ és $f \in D^2\{a\}$, akkor*

$$\partial_{ij} f(a) = \partial_{ji} f(a) \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n \quad \textit{indexre.}$$

Példa. Az $f \in D^2\{a\}$ feltétel hiánya esetén a parciális deriváltak képzésének a sorrendje általában nem cserélhető fel. Ha például

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}\Big) \\ 0 & \big((x,y) = (0,0)\big), \end{cases}$$

akkor

$$\partial_{12} f(0,0) = -1, \qquad \partial_{21} f(0,0) = 1.$$

Megjegyzések.

1. A Young-tételből következik, hogy ha $f \in D^2\{a\}$, akkor az f függvény a pontbeli Hesse-féle mátrixa *szimmetrikus* mátrix.

2. Teljes indukcióval igazolható a Young-tétel következő általánosítása: *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ függvény s-szer $(s \in \mathbb{N})$ differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban. Legyen $i_k \in \mathbb{N}$, $1 \le i_k \le n$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ és $j_1, j_2, \ldots, j_s$ az $i_1, i_2, \ldots, i_s$ indexek egy tetszőleges permutációja. Ekkor*
$$\partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_s} f(a) = \partial_{j_1} \partial_{j_2} \cdots \partial_{j_s} f(a).$$

Taylor-polinomok

Induljunk ki az egyváltozós ismereteinkből. A valós-valós esetben beláttuk, hogy egy függvény akkor és csak akkor differenciálható egy pontban, ha annak a pontnak egy környezetében a függvény lokálisan jól közelíthető elsőfokú polinommal. Ennek általánosításaként jutottunk el ahhoz a fontos eredményhez, hogy ha egy függvény m-szer deriválható a szóban forgó pont egy környezetében, akkor ebben a környezetben a függvény jól közelíthető egy alkalmasan megválasztott $(m-1)$-edfokú polinommal, nevezetesen a függvény adott ponthoz tartozó Taylor-polinomjával. Ezzel kapcsolatos alapvető eredményünk volt a ***Taylor-formulára*** vonatkozó alábbi állítás:

Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^+$ és egy $K(a) \subseteq \mathcal{D}_f$ környezetben $f \in D^m\big(K(a)\big)$, akkor minden $x \in K(a)$ számhoz létezik olyan ξ szám a és x között, amire az

(T)
$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x-a)^m$$

egyenlőség teljesül.

Vegyük észre, hogy a $h = x - a$ változó bevezetésével ξ felírható $\xi = a + \nu h$ alakban, ahol $\nu \in (0,1)$. Ekkor a fenti feltételek mellet minden h számhoz, amire $a + h \in K(a)$ teljesül, létezik olyan $\nu \in (0,1)$ szám, amire az

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(m)}(a+\nu h)}{m!} h^m$$

egyenlőség teljesül. Az egyenlőség jobb oldalán álló összeg utolsó tagja a ***Taylor-formula Lagrange-féle maradéktagja***.

Figyeljük meg, hogy a fenti egyváltozós eredmény $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényekre vonatkozó általánosításához egyrészt értelmezni kellene $h \in \mathbb{R}^n$ esetén a h^k hatványokat, másrészt az $f^{(k)}(a)$ deriváltakat, ha $k = 1, 2, \ldots, m$. A továbbiakban ennek a kiterjesztésnek egy másik alakját fogjuk megmutatni, de csak az $m = 2$ speciális esetben.

2. Tétel (A Taylor-formula a Peano-féle maradéktaggal). *Legyen* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ *és tegyük fel, hogy* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *és* $f \in C^2\{a\}$. *Ekkor van olyan* $\varepsilon \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *a* $\lim_0 \varepsilon = 0$ *feltételnek eleget tevő függvény, hogy*

$$f(a+h) = f(a) + \Big\langle f'(a), h \Big\rangle + \tfrac{1}{2}\Big\langle f''(a) \cdot h, h \Big\rangle + \varepsilon(h)\, \|h\|^2 \qquad \Big(h \in \mathbb{R}^n,\ a+h \in \mathcal{D}_f\Big).$$

Bizonyítás. Az egyszerűsség kedvéért az állítást csak $n = 2$ esetén fogjuk igazolni. Több változó esetében az állítás hasonlóan belátható hasonló gondolatmenetet követve.

Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy $f \in C^2\{a\}$, azaz van olyan $K(a) \subset \mathcal{D}_f$ környezet, ahol $f \in D^2(K(a))$, illetve a másodrendű parciális deriváltak folytonosak az a pontban. Legyen $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ olyan pont, amire $a + h \in K(a)$ teljesül, és vegyük a síkon az a és az $a+h \in K(a)$ pontokat összekötő egyenes $a+th$ $(t \in \mathbb{R})$ pontjait. Mivel $a + h \in K(a)$, így $\exists r > 1$, hogy a

$$F(t) := f(a + th) \qquad (-r < t < r)$$

valós-valós függvény értelmezhető.

Mivel $f \in D^2(K(a))$, ezért az összetett függvény deriválására vonatkozó tételből következik, hogy $F \in D^2(-r, r)$. Alkalmazzuk a F függvényre a (**T**) alatti Taylor-formulát $m = 2$-re, ha $a = 0$ és $x = 1$! Létezik tehát olyan $\nu \in (0, 1)$, hogy

$$(\star) \qquad F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(\nu).$$

Most kiszámítjuk az $F(1)$, az $F(0)$, az $F'(0)$ és az $F''(\nu)$ értékeket. Világos, hogy

$$F(1) = f(a + 1 \cdot h) = f(a + h) \qquad \text{és} \qquad F(0) = f(a + 0 \cdot h) = f(a).$$

Az összetett függvény deriválására vonatkozó tétel alapján

$$F'(t) = f'(a + th) \cdot h = \partial_1 f(a + th)h_1 + \partial_2 f(a + th)h_2 = \Big\langle f'(a + th), h \Big\rangle,$$

következésképpen

$$F'(0) = \Big\langle f'(a), h \Big\rangle.$$

A F függvény második deriváltja:

$$\begin{aligned}
F''(t) &= \Big(\partial_1 f(a + th)h_1 + \partial_2 f(a + th)h_2\Big)' = \\
&= \Big[(\partial_1 f)'(a + th) \cdot h\Big]h_1 + \Big[(\partial_2 f)'(a + th) \cdot h\Big]h_2 = \\
&= \Big(\partial_{11} f(a + th)h_1 + \partial_{12} f(a + th)h_2\Big)h_1 + \Big(\partial_{21} f(a + th)h_1 + \partial_{22} f(a + th)h_2\Big)h_2 = \\
&= \Big\langle f''(a + th) \cdot h, h \Big\rangle.
\end{aligned}$$

(Az utolsó egyenlőséget gondoljuk végig a mátrixszorzás és a skaláris szorzat definícióinak birtokában. Itt $f''(a+th) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(a + th) & \partial_{12} f(a + th) \\ \partial_{21} f(a + th) & \partial_{22} f(a + th) \end{pmatrix}$ egy (2×2)-es mátrix, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ oszlopvektor, tehát $f''(a + th) \cdot h \in \mathbb{R}^{2\times 1} \approx \mathbb{R}^2$ egy oszlopvektor.)

Így $F''(\nu) = \Big\langle f''(a+\nu h)\cdot h, h\Big\rangle$.

Mivel a másodrendű parciális deriváltak folytonos az a pontban, így

$$f''(a+\nu h) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(a+\nu h) & \partial_{12} f(a+\nu h) \\ \partial_{21} f(a+\nu h) & \partial_{22} f(a+\nu h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(a)+\eta_{11}(h) & \partial_{12} f(a)+\eta_{12}(h) \\ \partial_{21} f(a)+\eta_{21}(h) & \partial_{22} f(a)+\eta_{22}(h) \end{pmatrix} =$$

$$= f''(a) + \eta(h),$$

ahol $\eta = [\eta_{ij}] \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ egy olyan függvény, amelyre $\lim\limits_0 \eta = \mathbf{0}$ (nullmátrix).

A fentiek alapján a ($\star$) egyenlőséget felírhatjuk az alábbi módon:

$$f(a+h) = f(a) + \Big\langle f'(a), h\Big\rangle + \tfrac{1}{2!}\Big\langle f''(a)\cdot h, h\Big\rangle + \tfrac{1}{2!}\Big\langle \eta(h)\cdot h, h\Big\rangle.$$

Az utolsó tagot még tovább alakítjuk:

$$\langle \eta(h)\cdot h, h\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij}(h) h_i h_j = \|h\|^2 \cdot \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij}(h)\,\frac{h_i h_j}{\|h\|^2}.$$

Mivel $\dfrac{|h_i h_j|}{\|h\|^2} \le 1$ $(i,j=1,2)$ és $\lim\limits_0 \eta_{ij} = 0$, ezért

$$\varepsilon(h) := \sum_{i,j=1}^{2} \eta_{ij}(h)\,\frac{h_i h_j}{\|h\|^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{1}{2!}\Big\langle \eta(h)\cdot h, h\Big\rangle = \varepsilon(h)\,\|h\|^2,$$

ahol $\varepsilon \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre $\lim\limits_0 \varepsilon = 0$ teljesül. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A formula jobb oldalának első három tagjának az összege egy n-változós legfeljebb másodfokú polinom, amit az ***f* függvény *a* ponthoz tartozó második Taylor-polinomjának** nevezünk:

$$T_{2,a} f(h) := f(a) + \Big\langle f'(a), h\Big\rangle + \tfrac{1}{2}\Big\langle f''(a)h, h\Big\rangle = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{ij} f(a) h_i h_j.$$

A formulában szereplő $\varepsilon(h)\,\|h\|^2$ tagot a ***Taylor-formula Peano-féle maradéktagjának*** nevezzük.

Megjegyzések.

1. A 2. Tétel jelentősége egyrészt abban van, hogy a felhasználásával „bonyolult” n-változós valós értékű függvények helyettesítési értékeire lehet „jó” közelítő értékeket adni. Másrészt, azt a következő órán látni fogjuk, hogy a 2. Tétel fontos szerepet játszik $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvények szélsőérték-problémáinak a vizsgálatánál.

2. A 2. Tétel általánosítható magasabb rendű Taylor-polinomokra is.

Példa. Számítsuk ki az

$$f(x,y) = e^x \cos y \qquad \Big((x,y)\in\mathbb{R}^2\Big)$$

függvény $a=(0,0)$ pont körüli második Taylor polinomját! A

$$T_{2,a} f(h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{ij} f(a) h_i h_j$$

képletben legyen $a = (0,0)$ és $(x,y) = a + h = (h_1, h_2)$, azaz $h_1 = x$ és $h_2 = y$. Mivel

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = e^x \cos y \qquad \to \qquad f(0,0) = 1, \\
&\partial_1 f(x,y) = e^x \cos y, \quad \partial_2 f(x,y) = -e^x \sin y \qquad \to \qquad \partial_1 f(0,0) = 1, \quad \partial_2 f(0,0) = 0, \\
&\partial_{11} f(x,y) = e^x \cos y, \quad \partial_{12} f(x,y) = -e^x \sin y \qquad \to \qquad \partial_{11} f(0,0) = 1, \quad \partial_{22} f(0,0) = 0, \\
&\partial_{21} f(x,y) = -e^x \sin y, \quad \partial_{22} f(x,y) = -e^x \cos y \qquad \to \qquad \partial_{21} f(0,0) = 0, \quad \partial_{22} f(0,0) = -1,
\end{aligned}
$$

így a keresett Taylor polinom:

$$T_{2,a} f(x,y) = 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \left(1 \cdot x^2 + 2 \cdot 0 \cdot xy - 1 \cdot y^2\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + x + 1.$$