

# Numerikus módszerek 1.

9. előadás: Gauss–Seidel iteráció, relaxációs módszer, Richardson típusú iterációk

Dr. Bozsik József

ELTE IK

- 1 Gauss–Seidel-iteráció
- 2 Relaxált Gauss–Seidel-iteráció
- 3 A Richardson-iteráció
- 4 Matlab példák

Az  $Ax = b$  LER megoldása érdekében alakítsuk azt át  $x = Bx + c$  alakúra, és valamely  $x^{(0)}$  kezdőpontból végezzük az

$$x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + c \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

iterációt. A fixponttétel adja meg a sorozat képletét.

A vektorsorozat bizonyos feltételek mellett konvergál a LER megoldásához (lásd fixponttétel, elégséges feltétel, szükséges és elégséges feltétel a konvergenciára a  $B$  átmenet mátrixszal).

**Volt:** Banach-féle fixponttétel, Jacobi-, csillapított Jacobi-iteráció.

**Megjegyzés:**

- 2–3 változó: felesleges  $\Rightarrow$  célja a megértés
- sok változó (100, 1000): használják

- 1 Gauss–Seidel-iteráció
- 2 Relaxált Gauss–Seidel-iteráció
- 3 A Richardson-iteráció
- 4 Matlab példák

Átalakítás:

$$Ax = b$$

$$(L + D + U)x = b$$

$$(L + D)x = -Ux + b$$

$$x = -(L + D)^{-1}Ux + (L + D)^{-1}b$$

Átalakítás:

$$Ax = b$$

$$(L + D + U)x = b$$

$$(L + D)x = -Ux + b$$

$$x = -(L + D)^{-1}Ux + (L + D)^{-1}b$$

Ezek alapján az iteráció a következő.

**Definíció:** Gauss–Seidel-iteráció

$$x^{(k+1)} = \underbrace{-(L + D)^{-1}U}_{B_S} \cdot x^{(k)} + \underbrace{(L + D)^{-1}b}_{c_S} = B_S \cdot x^{(k)} + c_S$$

Eml.:

$$x^{(k+1)} = -(L + D)^{-1}U \cdot x^{(k)} + (L + D)^{-1}b$$

Írjuk fel koordinátánként! (Kiderül, hogy „helyben” számolható.)

Eml.:

$$x^{(k+1)} = -(L + D)^{-1}U \cdot x^{(k)} + (L + D)^{-1}b$$

Írjuk fel koordinátánként! (Kiderül, hogy „helyben” számolható.)

**Állítás:** a Gauss–Seidel-iteráció komponensenkénti alakja

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} - b_i \right)$$



Eml.:

$$x^{(k+1)} = -(L + D)^{-1}U \cdot x^{(k)} + (L + D)^{-1}b$$

Írjuk fel koordinátánként! (Kiderül, hogy „helyben” számolható.)

**Állítás:** a Gauss–Seidel-iteráció komponensenkénti alakja

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} - b_i \right)$$

**Biz.:** Alakítsunk át, majd gondoljunk bele a mátrixszorzásba.

$$(L + D)x^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b$$

$$Dx^{(k+1)} = -Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)} + b$$

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - b) \quad \square$$

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$\begin{aligned}(L + D) \cdot x^{(k+1)} &= -U \cdot x^{(k)} + b = ((L + D) - A) \cdot x^{(k)} + b = \\ &= (L + D) \cdot x^{(k)} + (-Ax^{(k)} + b) = (L + D) \cdot x^{(k)} + r^{(k)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = x^{(k)} + (L + D)^{-1}r^{(k)}$$

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$\begin{aligned}(L + D) \cdot x^{(k+1)} &= -U \cdot x^{(k)} + b = ((L + D) - A) \cdot x^{(k)} + b = \\ &= (L + D) \cdot x^{(k)} + (-Ax^{(k)} + b) = (L + D) \cdot x^{(k)} + r^{(k)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = x^{(k)} + (L + D)^{-1} r^{(k)}$$

Vezessük be az  $s^{(k)} := (L + D)^{-1} r^{(k)}$  segédvektort, ezzel egy lépésünk alakja:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}.$$

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$\begin{aligned}
 (L + D) \cdot x^{(k+1)} &= -U \cdot x^{(k)} + b = ((L + D) - A) \cdot x^{(k)} + b = \\
 &= (L + D) \cdot x^{(k)} + (-Ax^{(k)} + b) = (L + D) \cdot x^{(k)} + r^{(k)} \\
 \Rightarrow x^{(k+1)} &= x^{(k)} + (L + D)^{-1} r^{(k)}
 \end{aligned}$$

Vezessük be az  $s^{(k)} := (L + D)^{-1} r^{(k)}$  segédvektort, ezzel egy lépésünk alakja:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}.$$

Az új reziduum vektor:

$$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = b - A(x^{(k)} + s^{(k)}) = r^{(k)} - As^{(k)}.$$

**Algoritmus:** Gauss–Seidel-iteráció

$$r^{(0)} := b - Ax^{(0)}$$

$k = 1, \dots$ , leállásig

$$s^{(k)} := (D + L)^{-1} r^{(k)} \text{ helyett}$$

$$(D + L) s^{(k)} = r^{(k)} \text{ LER mo.}$$

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} + s^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} := r^{(k)} - As^{(k)}$$

**Tétel**

Ha  $A$  szig. diag. dom. a soraira, akkor az  $Ax = b$  LER-re felírt Gauss–Seidel-iterációra

$$\|B_S\|_{\infty} \leq \|B_J\|_{\infty} < 1$$

teljesül, tehát az konvergens bármely  $x^{(0)}$  esetén.

## Tétel

Ha  $A$  szig. diag. dom. a soraira, akkor az  $Ax = b$  LER-re felírt Gauss–Seidel-iterációra

$$\|B_S\|_{\infty} \leq \|B_J\|_{\infty} < 1$$

teljesül, tehát az konvergens bármely  $x^{(0)}$  esetén.

**Biz.:** Nélkül.

## Tétel

Ha  $A$  szig. diag. dom. a soraira, akkor az  $Ax = b$  LER-re felírt Gauss–Seidel-iterációra

$$\|B_S\|_{\infty} \leq \|B_J\|_{\infty} < 1$$

teljesül, tehát az konvergens bármely  $x^{(0)}$  esetén.

**Biz.:** Nélkül.

## Tétel

Ha  $A$  szimmetrikus és pozitív definit, akkor a Gauss–Seidel-iteráció konvergens.



## Tétel

Ha  $A$  szig. diag. dom. a soraira, akkor az  $Ax = b$  LER-re felírt Gauss–Seidel-iterációra

$$\|B_S\|_{\infty} \leq \|B_J\|_{\infty} < 1$$

teljesül, tehát az konvergens bármely  $x^{(0)}$  esetén.

**Biz.:** Nélkül.

## Tétel

Ha  $A$  szimmetrikus és pozitív definit, akkor a Gauss–Seidel-iteráció konvergens.

**Biz.:** Nélkül.

- 1 Gauss–Seidel-iteráció
- 2 Relaxált Gauss–Seidel-iteráció**
- 3 A Richardson-iteráció
- 4 Matlab példák

# Relaxált Gauss–Seidel-iteráció

Induljunk a Gauss–Seidel-iteráció következő alakjából:

$$\begin{aligned}(L + D) \cdot x &= -U \cdot x + b & / \cdot \omega \\ D \cdot x &= D \cdot x & / \cdot (1 - \omega)\end{aligned}$$

Induljunk a Gauss–Seidel-iteráció következő alakjából:

$$\begin{aligned}(L + D) \cdot x &= -U \cdot x + b & / \cdot \omega \\ D \cdot x &= D \cdot x & / \cdot (1 - \omega)\end{aligned}$$

A kettő súlyozott összege:

$$\begin{aligned}(D + \omega L) \cdot x &= [(1 - \omega)D - \omega U] \cdot x + \omega b \\ x &= (D + \omega L)^{-1} [(1 - \omega)D - \omega U] \cdot x + (D + \omega L)^{-1} \omega b\end{aligned}$$

# Relaxált Gauss–Seidel-iteráció

Induljunk a Gauss–Seidel-iteráció következő alakjából:

$$\begin{aligned}(L + D) \cdot x &= -U \cdot x + b & / \cdot \omega \\ D \cdot x &= D \cdot x & / \cdot (1 - \omega)\end{aligned}$$

A kettő súlyozott összege:

$$(D + \omega L) \cdot x = [(1 - \omega)D - \omega U] \cdot x + \omega b$$

$$x = (D + \omega L)^{-1} [(1 - \omega)D - \omega U] \cdot x + (D + \omega L)^{-1} \omega b$$

Ezek alapján az iteráció a következő.

**Definíció:** relaxált Gauss–Seidel-iteráció  $\omega$  paraméterrel –  $S(\omega)$

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(D + \omega L)^{-1} [(1 - \omega)D - \omega U] \cdot x^{(k)}}_{B_{S(\omega)}} + \underbrace{\omega (D + \omega L)^{-1} b}_{c_{S(\omega)}}$$

Írjuk fel koordinátánként! (Kiderül, hogy „helyben” számolható.)

Írjuk fel koordinátánként! (Kiderül, hogy „helyben” számolható.)

**Állítás:**  $S(\omega)$  komponensenkénti alakja

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega) \cdot x_i^{(k)} + \omega \cdot x_{i,S}^{(k+1)},$$

ahol  $x_{i,S}^{(k+1)}$  a hagyományos Seidel-módszer ( $S = S(1)$ ) által adott, azaz

$$x_{i,S}^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right).$$

Minden  $k$ . lépés az  $i = 1, 2, \dots, n$  sorrendben számolandó.

**Biz.:** Alakítsunk át, majd gondoljunk bele a mátrixszorzásba.

$$(D + \omega L)x^{(k+1)} = (1 - \omega)Dx^{(k)} - \omega Ux^{(k)} + \omega b$$

$$Dx^{(k+1)} = (1 - \omega)Dx^{(k)} - \omega Lx^{(k+1)} - \omega Ux^{(k)} + \omega b$$

$$x^{(k+1)} = (1 - \omega)x^{(k)} - \omega \underbrace{D^{-1} (Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - b)}_{\text{Lásd } S(1)\text{-nél.}}$$



**Biz.:** Alakítsunk át, majd gondoljunk bele a mátrixszorzásba.

$$(D + \omega L)x^{(k+1)} = (1 - \omega)Dx^{(k)} - \omega Ux^{(k)} + \omega b$$

$$Dx^{(k+1)} = (1 - \omega)Dx^{(k)} - \omega Lx^{(k+1)} - \omega Ux^{(k)} + \omega b$$

$$x^{(k+1)} = (1 - \omega)x^{(k)} - \omega \underbrace{D^{-1} (Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - b)}_{\text{Lásd } S(1)\text{-nél.}}$$

A koordinátánkénti alakja:

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega) \cdot x_i^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} - b_i \right).$$

**Megj.:** Vigyázat!  $x^{(k+1)} = (1 - \omega) \cdot x^{(k)} + \omega \cdot x_S^{(k+1)}$  nem igaz (tehát az egész vektorra); csak komponensenként.

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$\begin{aligned}(D + \omega L) x^{(k+1)} &= ((1 - \omega)D - \omega U) \cdot x^{(k)} + \omega b = \\&= D x^{(k)} + \omega \underbrace{((-D - U))}_{L-A} \cdot x^{(k)} + \omega b = \\&= D x^{(k)} + \omega L x^{(k)} + \omega \underbrace{(-A x^{(k)} + b)}_{r^{(k)}} = (D + \omega L) x^{(k)} + \omega r^{(k)} \\ \Rightarrow x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \omega (D + \omega L)^{-1} r^{(k)}\end{aligned}$$

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$\begin{aligned}(D + \omega L) x^{(k+1)} &= ((1 - \omega)D - \omega U) \cdot x^{(k)} + \omega b = \\&= D x^{(k)} + \omega \underbrace{((-D - U))}_{L-A} \cdot x^{(k)} + \omega b = \\&= D x^{(k)} + \omega L x^{(k)} + \omega \underbrace{(-A x^{(k)} + b)}_{r^{(k)}} = (D + \omega L) x^{(k)} + \omega r^{(k)} \\ \Rightarrow x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \omega (D + \omega L)^{-1} r^{(k)}\end{aligned}$$

Vezessük be az  $s^{(k)} := \omega (D + \omega L)^{-1} r^{(k)}$  segédvektort, ezzel egy lépésünk alakja:  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$ .

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$\begin{aligned}(D + \omega L)x^{(k+1)} &= ((1 - \omega)D - \omega U) \cdot x^{(k)} + \omega b = \\&= Dx^{(k)} + \omega \underbrace{((-D - U))}_{L-A} \cdot x^{(k)} + \omega b = \\&= Dx^{(k)} + \omega Lx^{(k)} + \omega \underbrace{(-Ax^{(k)} + b)}_{r^{(k)}} = (D + \omega L)x^{(k)} + \omega r^{(k)} \\ \Rightarrow x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \omega(D + \omega L)^{-1}r^{(k)}\end{aligned}$$

Vezessük be az  $s^{(k)} := \omega(D + \omega L)^{-1}r^{(k)}$  segédvektort, ezzel egy lépésünk alakja:  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$ .

Az új reziduum vektor:

$$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = b - A(x^{(k)} + s^{(k)}) = r^{(k)} - As^{(k)}.$$

## Algoritmus: relaxált Gauss–Seidel-iteráció $S(\omega)$

$$r^{(0)} := b - Ax^{(0)}$$

$k = 1, \dots$ , leállásig

$$s^{(k)} := \omega(D + \omega L)^{-1} r^{(k)} \text{ helyett}$$

$$(D + \omega L) s^{(k)} = \omega r^{(k)} \text{ LER mo.}$$

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} + s^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} := r^{(k)} - As^{(k)}$$

**Tétel:** a relaxált Gauss–Seidel-módszer  $S(\omega)$  konvergenciájáról

Ha egy mátrixra az  $S(\omega)$  módszer konvergens, akkor  $0 < \omega < 2$ .

**Tétel:** a relaxált Gauss–Seidel-módszer  $S(\omega)$  konvergenciájáról

Ha egy mátrixra az  $S(\omega)$  módszer konvergens, akkor  $0 < \omega < 2$ .

**Megjegyzés:**

- Ha  $\omega \notin (0, 2)$ , akkor általában nem konvergál.
- A relaxált Seidel-módszert gyakran alkalmazzák. . .

**Tétel:** a relaxált Gauss–Seidel-módszer  $S(\omega)$  konvergenciájáról

Ha egy mátrixra az  $S(\omega)$  módszer konvergens, akkor  $0 < \omega < 2$ .

**Megjegyzés:**

- Ha  $\omega \notin (0, 2)$ , akkor általában nem konvergál.
- A relaxált Seidel-módszert gyakran alkalmazzák...

**Lemma**

$$\det(B) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(B)$$



**Biz. lemma:** Írjuk fel a  $B$  mátrix karakterisztikus polinomját, amelyről tudjuk, hogy gyökei a mátrix sajátértékei; majd rendezzük  $\lambda$  hatványai szerint:

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda) = (-1)^n \cdot \lambda^n + \dots + \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

**Biz. lemma:** Írjuk fel a  $B$  mátrix karakterisztikus polinomját, amelyről tudjuk, hogy gyökei a mátrix sajátértékei; majd rendezzük  $\lambda$  hatványai szerint:

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda) = (-1)^n \cdot \lambda^n + \dots + \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

A  $\lambda = 0$  értéket behelyettesítve a konstans tagot kapjuk, amire:

$$p(0) = \det(B) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$



**Biz. tétel:** A konvergencia ekvivalens feltételéből, azaz a

$$\varrho(B_{S(\omega)}) < 1$$

állításból kell  $\omega$  kívánt becslését előállítanunk. Egyrészt

$$\begin{aligned}\varrho(B_{S(\omega)}) < 1 &\Rightarrow \left| \lambda_i(B_{S(\omega)}) \right| < 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \prod_{i=1}^n \lambda_i(B_{S(\omega)}) \right| < 1 \Rightarrow \left| \det(B_{S(\omega)}) \right| < 1.\end{aligned}$$

**Biz. tétel:** A konvergencia ekvivalens feltételéből, azaz a

$$\varrho(B_{S(\omega)}) < 1$$

állításból kell  $\omega$  kívánt becslését előállítanunk. Egyrészt

$$\begin{aligned}\varrho(B_{S(\omega)}) < 1 &\Rightarrow \left| \lambda_i(B_{S(\omega)}) \right| < 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \prod_{i=1}^n \lambda_i(B_{S(\omega)}) \right| < 1 \Rightarrow \left| \det(B_{S(\omega)}) \right| < 1.\end{aligned}$$

Az iteráció mátrixa

$$B_{S(\omega)} = (D + \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D - \omega U].$$

Kihasználjuk, hogy háromszögmátrixok determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata (tehát nem függ a diagonálison kívüli elemektől).

**Biz. tétel folyt.:**

$$\begin{aligned} \left| \det(B_{S(\omega)}) \right| &= \underbrace{\left| \det \left( (D + \omega L)^{-1} \right) \right|}_{1/|\det(D)|} \cdot \underbrace{\left| \det \left( (1 - \omega)D - \omega U \right) \right|}_{|1 - \omega|^n \cdot |\det(D)|} = \\ &= \frac{1}{|\det(D)|} \cdot |1 - \omega|^n \cdot |\det(D)| = |1 - \omega|^n < 1 \end{aligned}$$

Ebből pedig  $|1 - \omega| < 1$  következik, ami ekvivalens a  $0 < \omega < 2$  becsléssel. □

**Tétel:** a relaxált Gauss–Seidel-módszer  $S(\omega)$  konvergenciájáról

Ha az egyenletrendszer mátrixa szimmetrikus, pozitív definit és  $\omega \in (0, 2)$ , akkor az  $S(\omega)$  módszer konvergens.

**Biz.:** nélkül.

**Tétel:** a relaxált Gauss–Seidel-módszer  $S(\omega)$  konvergenciájáról

Ha az egyenletrendszer mátrixa szimmetrikus, pozitív definit és  $\omega \in (0, 2)$ , akkor az  $S(\omega)$  módszer konvergens.

**Biz.:** nélkül.

**Tétel:**  $S(\omega)$  tridiagonális mátrixokra

Ha a LER mátrixa tridiagonális, akkor a Jacobi- és Gauss–Seidel-iteráció egyszerre konvergens vagy divergens

$$\text{azaz } \varrho(B_S) = \varrho(B_J)^2.$$

Ez azt jelenti, hogy konvergencia esetén a Gauss–Seidel-iteráció kétszer gyorsabb,

**Biz.:** nélkül.

**Tétel:**  $S(\omega)$  szimmetrikus, pozitív definit és tridiagonális mátrixokra

Ha a LER mátrixa tridiagonális, szimmetrikus és pozitív definit, akkor a Jacobi-, Gauss–Seidel- és relaxált Gauss–Seidel-iteráció is konvergens. Megadható  $S(\omega)$ -ra optimális paraméter

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho(B_J)^2}}.$$

Továbbá,

- ha  $\varrho(B_J) = 0$ , akkor  $\omega_0 = 1$  és  $\varrho(B_S) = \varrho(B_{S(\omega_0)}) = 0$ ,
- $\varrho(B_J) \neq 0$ , akkor  $\varrho(B_{S(\omega_0)}) = \omega_0 - 1 < \varrho(B_S) = \varrho(B_J)^2$ .

**Biz.:** nélkül.



## Megj.:

- Az utóbbi két tétel blokktridiagonális mátrixokra is igaz, a megfelelő blokkiterációkra.
- Az iterációs módszer konvergencia sebessége a  $q$  kontrakciós együtthatótól függ. Minél közelebb van 0-hoz, annál gyorsabb a módszer, míg, ha 1-hez van közel, akkor nagyon lassú. A kontrakciós együtthatót  $q = \|B\|$ -ként kapjuk.
- Mivel bármely normára  $\inf\{\|B\| : B \text{ indukált norma}\} = \varrho(B)$ , ezért a spektrálsugár határozza meg a konvergencia sebességét.

**Példa**

Mit állíthatunk a következő mátrixra felírt Jacobi- és Gauss–Seidel-iterációk konvergenciájáról?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

## Példa

Mit állíthatunk a következő mátrixra felírt Jacobi- és Gauss–Seidel-iterációk konvergenciájáról?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A szimmetrikus, pozitív definit és tridiagonális, alkalmazhatók rá a tanult tételek:

- A  $J(1)$  iteráció konvergens minden kezdővektorra.
- Ha  $\omega \in (0; 1)$ -re, akkor  $J(\omega)$  iteráció konvergens minden kezdővektorra.
- Az  $S(1)$  iteráció konvergens minden kezdővektorra.
- Az  $S(\omega)$  iteráció konvergens minden kezdővektorra pontosan az  $\omega \in (0; 2)$  értékekre.

$$B_J = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_S = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_J = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_S = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$B_J$  sajátértékei:  $0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ , így  $\varrho(B_J) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$$B_J = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_S = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$B_J$  sajátértékei:  $0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ , így  $\varrho(B_J) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$B_S$  sajátértékei:  $0, 0, \frac{1}{2}$ , így  $\varrho(B_S) = \frac{1}{2}$ .

$$B_J = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_S = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$B_J$  sajátértékei:  $0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ , így  $\varrho(B_J) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$B_S$  sajátértékei:  $0, 0, \frac{1}{2}$ , így  $\varrho(B_S) = \frac{1}{2}$ .

$S(\omega)$ -ra az optimális paraméter:

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1,1716...$$

$$\varrho(B_{S(\omega_0)}) = \omega_0 - 1 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,1716...$$

$$B_J = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_S = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$B_J$  sajátértékei:  $0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ , így  $\varrho(B_J) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$B_S$  sajátértékei:  $0, 0, \frac{1}{2}$ , így  $\varrho(B_S) = \frac{1}{2}$ .

$S(\omega)$ -ra az optimális paraméter:

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1,1716...$$

$$\varrho(B_{S(\omega_0)}) = \omega_0 - 1 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,1716...$$

Nézzük meg a LER-re a csillapított Jacobi- és a relaxált Gauss–Seidel-iteráció vizsgálatát Maple-ben.



- 1 Gauss–Seidel-iteráció
- 2 Relaxált Gauss–Seidel-iteráció
- 3 A Richardson-iteráció**
- 4 Matlab példák

Tekintsük az  $Ax = b$  LER-t, ahol  $A$  szimmetrikus, pozitív definit mátrix és  $p \in \mathbb{R}$ .

$$Ax = b$$

$$p \cdot Ax = p \cdot b$$

$$0 = -pAx + pb$$

$$x = x - pAx + pb = (I - pA)x + pb$$

Tekintsük az  $Ax = b$  LER-t, ahol  $A$  szimmetrikus, pozitív definit mátrix és  $p \in \mathbb{R}$ .

$$Ax = b$$

$$p \cdot Ax = p \cdot b$$

$$0 = -pAx + pb$$

$$x = x - pAx + pb = (I - pA)x + pb$$

Ezek alapján az iteráció a következő.

**Definíció:** Richardson-iteráció  $p$  paraméterrel –  $R(p)$

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(I - pA)}_{B_{R(p)}} \cdot x^{(k)} + \underbrace{pb}_{c_{R(p)}} = B_{R(p)} \cdot x^{(k)} + c_{R(p)}$$

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$\begin{aligned}x^{(k+1)} &= x^{(k)} - pAx^{(k)} + pb = x^{(k)} + p \cdot (-Ax^{(k)} + b) = \\&= x^{(k)} + pr^{(k)}\end{aligned}$$

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$\begin{aligned}x^{(k+1)} &= x^{(k)} - pAx^{(k)} + pb = x^{(k)} + p \cdot (-Ax^{(k)} + b) = \\&= x^{(k)} + pr^{(k)}\end{aligned}$$

Vezessük be az  $s^{(k)} := pr^{(k)}$  segédvektort, ezzel egy lépésünk alakja:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}.$$

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$\begin{aligned}x^{(k+1)} &= x^{(k)} - pAx^{(k)} + pb = x^{(k)} + p \cdot (-Ax^{(k)} + b) = \\&= x^{(k)} + pr^{(k)}\end{aligned}$$

Vezessük be az  $s^{(k)} := pr^{(k)}$  segédvektort, ezzel egy lépésünk alakja:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}.$$

Az új reziduum vektor:

$$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = b - A(x^{(k)} + s^{(k)}) = r^{(k)} - As^{(k)}.$$

**Algoritmus:** Richardson-iteráció

$$r^{(0)} := b - Ax^{(0)}$$

$k = 1, \dots$ , leállásig

$$s^{(k)} := \rho r^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} + s^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} := r^{(k)} - As^{(k)}$$

**Algoritmus:** Richardson-iteráció

$$r^{(0)} := b - Ax^{(0)}$$

$k = 1, \dots$ , leállásig

$$s^{(k)} := \rho r^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} + s^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} := r^{(k)} - As^{(k)}$$

**Megjegyzés:** Érdemes meggondolni, hogy ha az  $Ax = b$  helyett a  $D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$  diagonális mátrix-szal a  $D^{-1}Ax = D^{-1}b$  LER-re alkalmazzuk az  $R(\rho)$  iterációt, akkor az eredeti LER-re felírt  $J(\rho)$  csillapított Jacobi-iterációt kapjuk.



**Tétel:** A Richardson-iteráció konvergenciája

Ha az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix szimmetrikus, pozitív definit és sajátértékeire  $m = \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n = M$  teljesül, akkor  $R(p)$  (azaz az  $Ax = b$  LER-re felírt  $p \in \mathbb{R}$  paraméterű Richardson-iteráció) pontosan a

$$p \in \left(0, \frac{2}{M}\right),$$

paraméter értékekre konvergens minden kezdővektor esetén. Az optimális paraméter  $p_0 = \frac{2}{M+m}$ , a hozzá kapcsolódó kontrakciós együttható pedig:

$$\varrho(B_{R(p_0)}) := \frac{M - m}{M + m} = \|B_{R(p_0)}\|_2 = q.$$

**Bizonyítás:**

①  $B_{R(p)}$  sajátértékei:  $\lambda_i(p) = 1 - p \cdot \lambda_i$ , hiszen

$$Av = \lambda_i v \quad \Rightarrow \quad (I - pA)v = v - pAv = v - p\lambda_i v = (1 - p\lambda_i)v.$$

**Bizonyítás:**

①  $B_{R(p)}$  sajátértékei:  $\lambda_i(p) = 1 - p \cdot \lambda_i$ , hiszen

$$Av = \lambda_i v \quad \Rightarrow \quad (I - pA)v = v - pAv = v - p\lambda_i v = (1 - p\lambda_i)v.$$

Vagyis:

$$\lambda_1(p) = 1 - p \cdot \lambda_1 = 1 - pm,$$

$$\lambda_2(p) = 1 - p \cdot \lambda_2,$$

$$\vdots$$

$$\lambda_n(p) = 1 - p \cdot \lambda_n = 1 - pM.$$

**Bizonyítás:**

- ①  $B_{R(p)}$  sajátértékei:  $\lambda_i(p) = 1 - p \cdot \lambda_i$ , hiszen

$$Av = \lambda_i v \quad \Rightarrow \quad (I - pA)v = v - pAv = v - p\lambda_i v = (1 - p\lambda_i)v.$$

Vagyis:

$$\lambda_1(p) = 1 - p \cdot \lambda_1 = 1 - pm,$$

$$\lambda_2(p) = 1 - p \cdot \lambda_2,$$

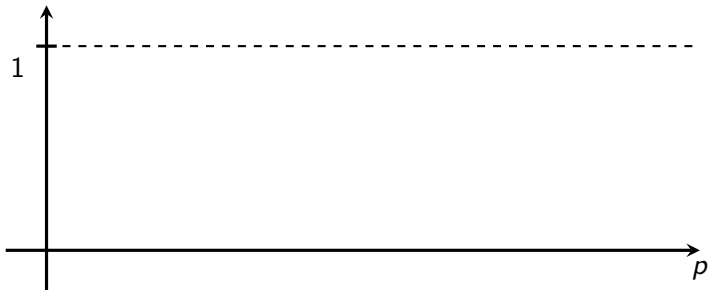
$$\vdots$$

$$\lambda_n(p) = 1 - p \cdot \lambda_n = 1 - pM.$$

- ②  $B_{R(p)}$  spektrálsugara rögzített  $p$ -re

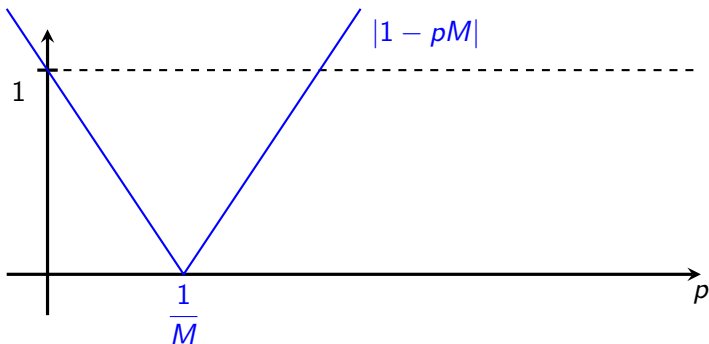
$$\varrho(B_{R(p)}) = \max_{i=1}^n |1 - p \cdot \lambda_i|.$$

- ③ Ábrázoljuk az  $|1 - p \cdot \lambda_i|$  függvényeket ( $i = 1, 2, \dots, n$ )!  
(Ezek  $p$ -től függenek.)



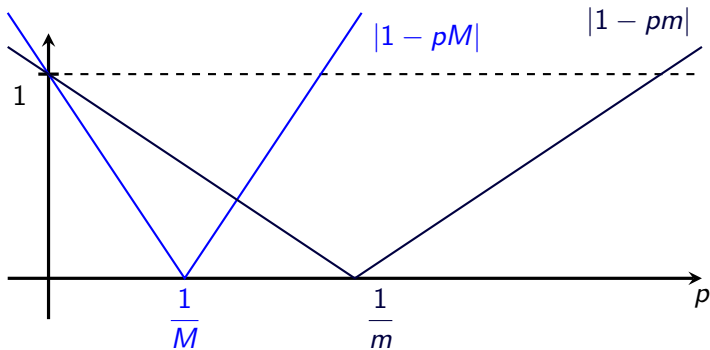
- ③ Ábrázoljuk az  $|1 - p \cdot \lambda_i|$  függvényeket ( $i = 1, 2, \dots, n$ )!  
(Ezek  $p$ -től függenek.)

$$1 - p \cdot \lambda_i = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{1}{\lambda_i}$$



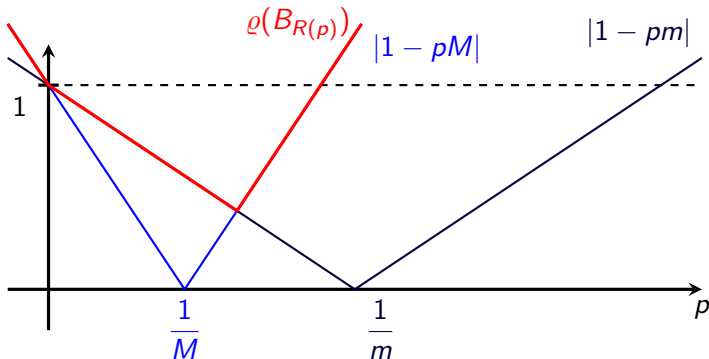
- ③ Ábrázoljuk az  $|1 - p \cdot \lambda_i|$  függvényeket ( $i = 1, 2, \dots, n$ )!  
(Ezek  $p$ -től függenek.)

$$1 - p \cdot \lambda_i = 0 \iff p = \frac{1}{\lambda_i}$$



- ③ Ábrázoljuk az  $|1 - p \cdot \lambda_i|$  függvényeket ( $i = 1, 2, \dots, n$ )!  
(Ezek  $p$ -től függenek.)

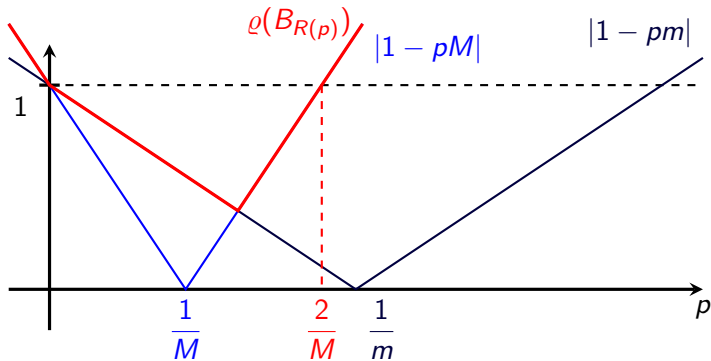
$$1 - p \cdot \lambda_i = 0 \iff p = \frac{1}{\lambda_i}$$





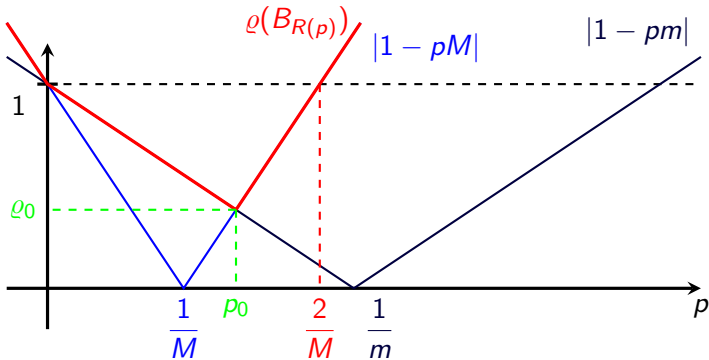
- ③ Ábrázoljuk az  $|1 - p \cdot \lambda_i|$  függvényeket ( $i = 1, 2, \dots, n$ )!  
(Ezek  $p$ -től függenek.)

$$1 - p \cdot \lambda_i = 0 \iff p = \frac{1}{\lambda_i}$$



- ③ Ábrázoljuk az  $|1 - p \cdot \lambda_i|$  függvényeket ( $i = 1, 2, \dots, n$ )!  
(Ezek  $p$ -től függenek.)

$$1 - p \cdot \lambda_i = 0 \iff p = \frac{1}{\lambda_i}$$



- ④  $R(p)$  konvergens, ha  $\varrho(B_{R(p)}) < 1$ , azaz ha  $p \in \left(0, \frac{2}{M}\right)$ .

Ezek az  $|1 - pM| = 1$  egyenlet megoldásai.

- ④  $R(p)$  konvergens, ha  $\varrho(B_{R(p)}) < 1$ , azaz ha  $p \in \left(0, \frac{2}{M}\right)$ .

Ezek az  $|1 - pM| = 1$  egyenlet megoldásai.

- ⑤ Továbbá az optimális paramétert az

$$|1 - pM| = |1 - pm|$$

egyenlet megoldása adja. (Nem a 0, hanem a másik.)

- ④  $R(p)$  konvergens, ha  $\varrho(B_{R(p)}) < 1$ , azaz ha  $p \in \left(0, \frac{2}{M}\right)$ .

Ezek az  $|1 - pM| = 1$  egyenlet megoldásai.

- ⑤ Továbbá az optimális paramétert az

$$|1 - pM| = |1 - pm|$$

egyenlet megoldása adja. (Nem a 0, hanem a másik.)

$$-1 + pM = 1 - pm$$

$$pM + pm = 2$$

$$p(M + m) = 2 \quad \implies \quad p_0 = \frac{2}{M + m}$$

6

$$\varrho(B_{R(p_0)}) = 1 - p_0 \cdot m = \frac{M+m}{M+m} - \frac{2m}{M+m} = \frac{M-m}{M+m}.$$

6

$$\varrho(B_{R(p_0)}) = 1 - p_0 \cdot m = \frac{M+m}{M+m} - \frac{2m}{M+m} = \frac{M-m}{M+m}.$$

- 7 Mivel  $A$  szimmetrikus, így  $B_{R(p)}$  is, ezért a spektrálsugara és kettes normája megegyezik. Az eredményül kapott spektrálsugár egyben kettes normabeli kontrakciós együttható:

$$q = \frac{M-m}{M+m}.$$



## Példa

Adjuk meg, hogy a Richardson-iteráció mely  $p \in \mathbb{R}$  paraméterek mellett konvergens a következő egyenletrendszer esetén – mely ugyanaz, mint az imént. Mi az optimális paraméter és a hozzá tartozó „átmenetmátrix” spektrálsugara?

$$Ax = b, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

A mátrix sajátértékei 2 és 4.



$M = 4$ ,  $m = 2$ , így a  $p \in (0, \frac{2}{M}) = (0; \frac{1}{2})$  értékekre a Richardson-iteráció konvergens bármely kezdővektor esetén. Az optimális paraméter

$$p_0 = \frac{2}{M + m} = \frac{2}{4 + 2} = \frac{1}{3}$$

és a hozzá tartozó átmenetmátrix spektrálsugara

$$\varrho(B_{R(p_0)}) = \frac{4 - 2}{4 + 2} = \frac{1}{3}.$$

$M = 4$ ,  $m = 2$ , így a  $p \in (0, \frac{2}{M}) = (0; \frac{1}{2})$  értékekre a Richardson-iteráció konvergens bármely kezdővektor esetén. Az optimális paraméter

$$p_0 = \frac{2}{M+m} = \frac{2}{4+2} = \frac{1}{3}$$

és a hozzá tartozó átmenetmátrix spektrálsugara

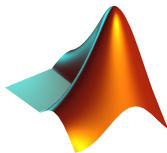
$$\varrho(B_{R(p_0)}) = \frac{4-2}{4+2} = \frac{1}{3}.$$

Mivel  $A$  szimmetriája öröklődik  $B_{R(p)}$ -re, így az átmenetmátrix is szimmetrikus, így

$$\|B_{R(p_0)}\|_2 = \varrho(B_{R(p_0)}) = \frac{1}{3} = q$$

a kontrakciós együttható a kettes normában.

- 1 Gauss–Seidel-iteráció
- 2 Relaxált Gauss–Seidel-iteráció
- 3 A Richardson-iteráció
- 4 Matlab példák**



- 1 A tapasztalati kontrakciós együtthatók szemléltetése a relaxációs módszer esetén.
- 2 A Richardson-iteráció viselkedésének vizsgálata különböző paraméterek mellett.

## 1. Példa:

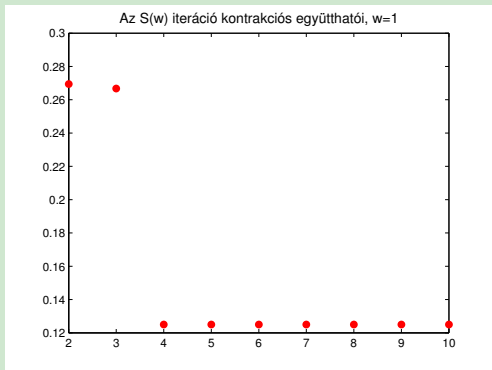
A LER alakja  $Ax = b$ , ahol

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vizsgáljuk a relaxációs módszer tapasztalati kontrakciós együtthatóit  $\omega = 1, 0.8, 0.6, 1.033, -0.1, 2, 2.5$  esetén!

# Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

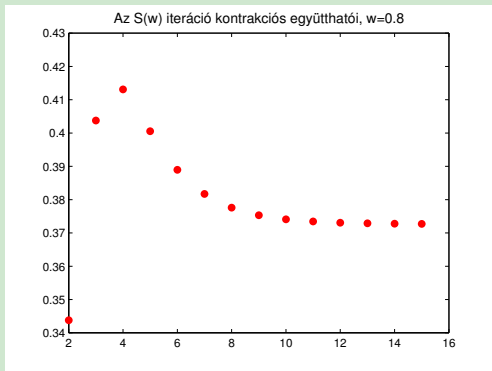
## 1. Példa:



$$q \approx 0.1250$$

# Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

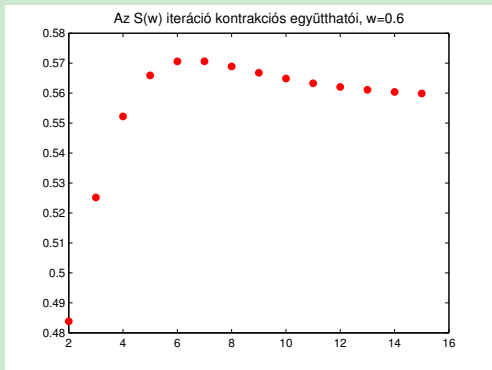
## 1. Példa:



$$q \approx 0.3750$$

# Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

## 1. Példa:

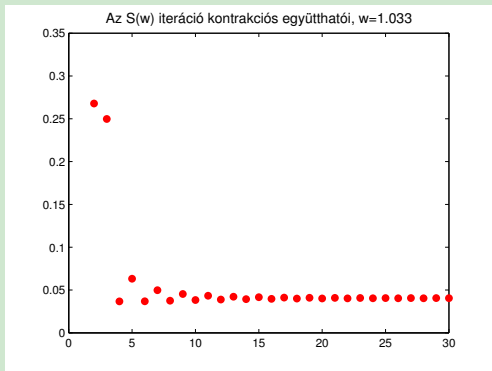


$$q \approx 0.5650$$



# Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

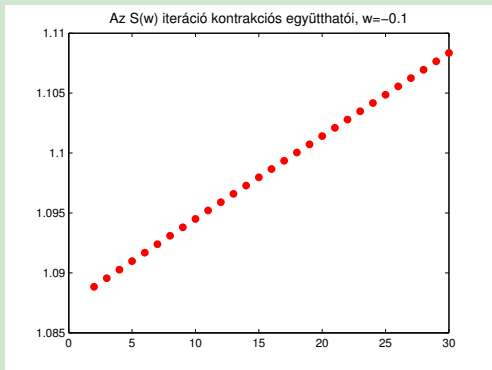
## 1. Példa:



$$q \approx 0.0404$$

# Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

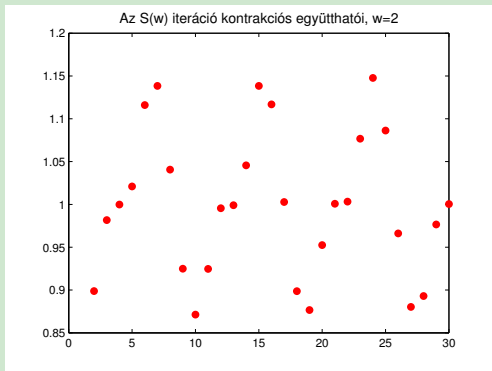
## 1. Példa:



$q > 1$ , divergens iteráció

# Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

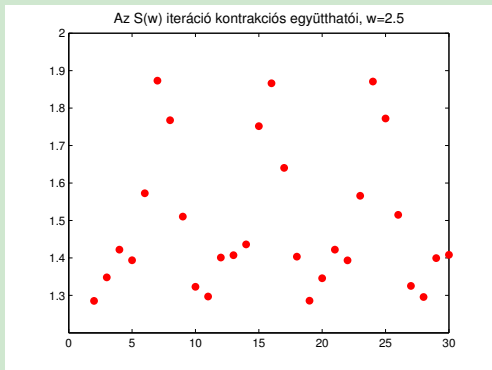
## 1. Példa:



$q > 1$ , divergens iteráció

# Tapasztalati kontrakciós együttható vizsgálata

## 1. Példa:



$q > 1$ , divergens iteráció