1. előadás

AZ $\mathbb{R}^n$ TÉR TOPOLÓGIÁJA

Eddigi az ***egyváltozós analízissel***, vagyis $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú (vagy másképpen fogalmazva valós-valós) függvényekkel foglalkoztunk. Láttuk, hogy az alapvető fogalmak a szóban forgó függvényeknek a *határértéke, folytonossága, deriváltja és integrálja.* A továbbiakban a ***többváltozós analízis*** alapjaival fogunk megismerkedni. Az egyváltozós analízis alapvető fogalmainak és eredményeinek az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(1 \leq n, m \in \mathbb{N})$ típusú (az ún. vektor-vektor) függvényekre való kiterjesztéséről lesz szó.

De mi az alapja ennek a kiterjesztésnek? Idézzük fel a *függvény végesben vett véges határértékének* fogalmát! Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f'$, ahol $a \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban vett határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ 0 < |x - a| < \delta \colon \Big| f(x) - A \Big| < \varepsilon.$$

Ugyanez *környezetekkel* kifejezve:

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \Big(K_\delta(a) \setminus \{a\} \Big) \cap \mathcal{D}_f \colon f(x) \in K_\varepsilon(A),$$

ahol

$$K_r(x) := \Big\{ y \in \mathbb{R} \ \Big| \ |x - y| < r \Big\} = (x - r, x + r)$$

az x valós szám $r > 0$ sugarú környezetét jelenti. Látható, hogy a fenti fogalom (még az $a \in \mathcal{D}_f'$ torlódási pont fogalma is) teljesen leírható környezetekkel. Ez azt jelenti, hogy ha bevezetnénk a környezet fogalmát $\mathbb{R}^n$-ben, akkor változtatás nélkül általánosítani tudnánk a függvény végesben vett véges határértékének fogalmát.

Metrikus és normált terek

A környezeteket nem lehet akármilyen módon értelmezni, mert akkor határértéktől „elvárt” tulajdonságok nem maradnak érvényben. A valós számok halmazán a $K_r(x)$ környezet nem más, mint azon pontok halmaza, amelyeknek távolsága az x ponttól kisebb, mint r. Ha ezen az úton maradunk, akkor csak egy *távolságfüggvényre* vagy más néven *metrikára* lesz szükségünk a környezetek értelmezéséhez $\mathbb{R}^n$-ben.

Mit jelent az, hogy metrika? Gondolhatunk arra, hogy a valós térben, ahol élünk, két pont távolsága mindig a két pontot összekötő egyenes szakasz hossza. Sajnos nem mindig tudunk egyenes úton eljutni az egyik ponttól a másikig, ezért sokszor szükséges egy ettől eltérő metrikát értelmezni. A matematikai analízis különböző metrikákat enged alkalmazni, azonban vannak olyan tulajdonságok, amiket minden metrikának teljesíteni kell.

Legyen $M \neq \emptyset$ egy adott halmaz és $d : M \times M \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre minden $x, y, z \in M$ esetén az teljesül, hogy

i. $\quad d(x, y) \geq 0, \quad$ és $\quad d(x, y) = 0 \iff x = y \quad$ (pozitív definitség),

ii. $\quad d(x, y) = d(y, x) \quad$ (szimmetria),

iii. $\quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad$ (háromszög egyenlőtlenség).

Ekkor az (M, d) együttest ***metrikus térnek*** nevezzük. Ugyanakkor azt mondjuk, hogy d ***metrika*** vagy ***távolságfüggvény*** M-en, a $d(x, y)$ szám pedig az x és az y elemek távolsága.

Az egyváltozós analízisben eddig a $d(x,y) := |x-y|$ metrikát alkalmaztunk, amely ***természetes távolságnak*** szokás nevezni, de értelmeztetők ettől lényegesen eltérő metrikákat is $\mathbb{R}$-en. Pl. igazolható, hogy a

$$d_1(x,y) := \begin{cases} 0 & (x=y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases}$$

leképezés metrika (ún. ***diszkrét metrika***) $\mathbb{R}$-en, illetve a

$$d_2(x,y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \qquad \text{és} \qquad d_3(x,y) := |e^x - e^y|$$

függvények szintén metrikák $\mathbb{R}$-en. Metrikát nem csak $\mathbb{R}$-en értelmezhető. Sokszor „váratlan” területeken is találkozunk metrikával. Erre példa a kódelméletben fontos szerepet játszó ***Hamming-távolság***.

Ha az (M,d) metrikus tér egyben lineáris tér (vektortér), akkor minden x elem (vektor) nagyságát (hosszát) úgy értelmezzük, mint az elem nullától való távolsága. Erre a $\|x\|$ jelölést alkalmazzuk, azaz $\|x\| := d(x,0)$. Tudjuk, hogy $\mathbb{R}$ egy 1 dimenziós vektortérnek tekinthető, így ha d a természetes metrika, akkor $\|x\| = |x-0| = |x|$. Tudjuk, hogy az abszolút értéknek a következő tulajdonságai vannak:

a) $|x| \geq 0, \qquad \text{és} \qquad |x| = 0 \iff x = 0,$

b) $|xy| = |x|\,|y|,$

c) $|x+y| \leq |x| + |y|$

minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén. Ezeket az Analízis I. kurzuson igazoltuk, és számos állítás bizonyításában alkalmaztuk. Nem okoz meglepetést tehát a következő fogalom bevezetése.

Legyen $X \neq \emptyset$ egy lineáris tér $\mathbb{R}$-felett és $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ olyan függvény (ún. ***norma***), amelyre minden $x, y \in X$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén igaz, hogy

i) $\|x\| \geq 0 \qquad \text{és} \qquad \|x\| = 0 \iff x = 0,$

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \qquad$ (abszolút homogén),

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad$ (szubadditív).

Ekkor az $(X, \|.\|)$ együttest ***normált térnek*** nevezzük. Ugyanakkor azt mondjuk, hogy $\|\boldsymbol{x}\|$ ***az*** $\boldsymbol{x \in X}$ ***elem normája***.

Könnyen igazolható, hogy ha $(X, \|.\|)$ egy normált tér, akkor a

$$d(x,y) := \|x-y\| \qquad (x \in X).$$

függvény metrika az X halmazon, azaz (X,d) metrikus tér. Minden normált tér tehát egyúttal metrikus tér is. Ezt a d metrikát a $\|.\|$ ***norma által indukált metrikának*** nevezzük.

Bebizonyítható az is, hogy egy normából származó metrika abszolút homogén és eltolás invariáns, azaz

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y) \qquad \text{és} \qquad d(x+z, y+z) = d(x,y)$$

minden $x, y, z \in X$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén. Az abszolút homogenitás nem érvényes a fenti példákban szereplő d_1, d_2 és d_3 metrikákra, de nyilván érvényes a természetes metrikára. A normákra még igazolható az

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x-y\| \qquad (x, y \in X)$$

egyenlőtlenség is a valós számokra igazolt $\Big| |x| - |y| \Big| \leq |x-y|$ egyenlőtlenséghez hasonlóan.

Az R^n lineáris téren több norma is értelmezhető. A legfontosabbak a következők:

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \qquad (\textit{\textbf{euklideszi norma}}),$$

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$$

$$\|x\|_\infty := \max\Big\{|x_k| \;\Big|\; k = 1, 2, \ldots, n\Big\} = \max\Big\{|x_1|,\, |x_2|,\, \ldots,\, |x_n|\Big\},$$

ahol $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Mindhárom norma jó abban az értelemben, hogy visszaadják a szám abszolút értékét $n = 1$ esetén. Tehát mindhárom az abszolút érték általánosításának tekinthető. Akkor melyiket kellene használni?

A kérdés megválásólasához figyelembe kell venni a következő fogalmat: azt mondjuk, hogy két $\|.\|_a$ és $\|.\|_b$ norma ***egymással ekvivalens***, ha $\exists c, d > 0$ valós számok, hogy

$$\|x\|_a \le c\|x\|_b \quad \text{és} \quad \|x\|_b \le d\|x\|_a \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Igazolható, hogy ekvivalens normák esetén nincs „lényeges” különbség abban, hogy melyiküket alkalmazunk az alapvető fogalmak megalkotásában (lásd pl. a sorozatok konvergenciájáról szóló részben lévő megjegyzés).

A fent értelmezett normák egymással ekvivalensek, hiszen nem nehéz igazolni, hogy

$$\frac{1}{n}\,\|x\|_1 \le \|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

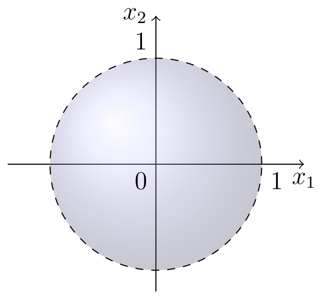
Az is igaz azonban, hogy véges dimenziós térben bármely két norma egymással ekvivalens. A továbbiakban mi az $\|x\|_2$ euklideszi normát fogjuk preferálni.

A normák ekvivalenciája nem azt jelenti, hogy a környezetek hasonlóak. A következő ábra szemlélteti $\mathbb{R}^2$-ben az origó középpontú egységsugarú környezetet, vagyis a

$$K_1(0) = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; \|x - 0\| < 1\Big\} \qquad \big(0 = (0, 0)\big)$$

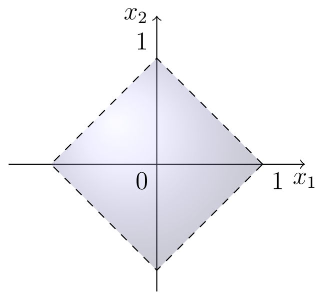
halmazt különböző normák esetén.

$\|.\|_2$ norma



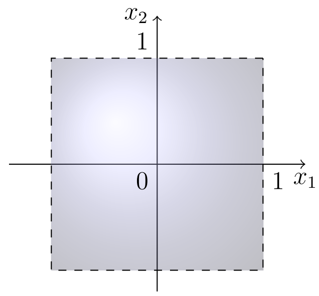
$\Big\{(x_1, x_2) \;\Big|\; \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\Big\}$

$\|.\|_1$ norma



$\Big\{(x_1, x_2) \;\Big|\; |x_1| + |x_2| < 1\Big\}$

$\|.\|_\infty$ norma



$\Big\{(x_1, x_2) \;\Big|\; \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\Big\}$

Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér

A `Matematikai alapok` tantárgyban az $\mathbb{R}^n$ tér számos tulajdonságáról eset szó. Most összefoglaljuk a legfontosabbakat.

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ egy adott pozitív természetes szám. Az $\mathbb{R}^n$ szimbólummal jelöljük a rendezett valós szám n-esek halmazát:

$$\mathbb{R}^n := \Big\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\Big|\; x_k \in \mathbb{R},\;\; k = 1, 2, \ldots, n\Big\}.$$

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számokat az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pont (vektor) ***koordinátáinak*** vagy ***komponenseinek*** nevezzük.

$\mathbb{R}^1$-et azonosítjuk $\mathbb{R}$-rel. A sík pontjai rendezett valós számpárokkal (vagyis az $\mathbb{R}^2$ halmaz elemeivel), a tér pontjai pedig rendezett valós számhármasokkal (vagyis $\mathbb{R}^3$ elemeivel) azonosíthatók. Az $\mathbb{R}^n$ halmaz tehát ezek „természetes" általánosításaként fogható fel. Az $n > 3$ esetben $\mathbb{R}^n$-nek nincs szemléletes jelentése, de a fogalom mégis nélkülönözhetetlen mind az elmélet, mind pedig az alkalmazások szempontjából.

A középiskolában a sík és a tér vektoraival több műveletet is értelmeztünk. Vektorok ***összeadásának***, valamint **vektor** (valós) ***számmal való szorzásának*** a mintájára vezetjük be az $\mathbb{R}^n$ halmazon az alábbi komponensenkénti műveleteket: ha $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \qquad \lambda \cdot x := (\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, \dots, \lambda\, x_n).$$

Ezek az $\mathbb{R}^n$-beli műveletek rendelkeznek a sík és a tér vektorainak megismert alapvető tulajdonságaival. Röviden ezt úgy fejezzük ki, hogy $\mathbb{R}^n$ ezekkel a műveletekkel ***lineáris tér*** (vagy ***vektortér az*** $\mathbb{R}$ ***skalár tartomány felett***). Ennek a vektortérnek a dimenziója pontosan n, azaz rendelkezik egy n darab tagból álló bázissal.

Kiemeljük azt fontos tényt is, hogy rögzített $n, m \in \mathbb{N}^+$ esetén az $n \times m$-es valós elemű mátrixok $\mathbb{R}^{n\times m}$ szimbólummal jelölt halmazában is értelmezzük az összeadás és a számmal való szorzás műveleteket, és $\mathbb{R}^{n\times m}$ ezekkel a műveletekkel $\mathbb{R}$ feletti lineáris tér.

A középiskolában a sík és tér vektorainak az összeadásán és a számmal való szorzásán kívül megismerkedtünk még egy fontos művelettel, vektorok *skaláris szorzatával.* Ezt a fogalmat is fogjuk az $\mathbb{R}^n$ lineáris térre is kiterjeszteni: Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektorok ***skaláris szorzatát*** az

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

valós számmal definiáljuk. A skaláris szorzat olyan $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ típusú függvény, amely szimmetrikus, mindkét változójában lineáris, és a belőle számozó $\langle x, x\rangle$ kvadratikus kifejezés pozitív definit. Ez azt jelenti, hogy az $(\mathbb{R}^n, \langle .,.\rangle)$ együttes egy ***n-dimenziós euklideszi téret alkot az*** $\mathbb{R}$ ***skalár tartomány felett***. Fontos megemlíteni, hogy érvényes az ún. ***Cauchy—Schwarz-egyenlőtlenség***:

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \le \|x\| \cdot \|y\| \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

A skaláris szorzat segítségével értelmezhetjük $\mathbb{R}^n$-beli vektorok szögét, merőlegességét, illetve a hosszát (normát) és a távolságot. Ezekre a geometriában megszokott tulajdonságok jelentős része megmarad. Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor ***normáját*** (***hosszát*** vagy ***abszolút értékét***) az

$$\|x\| := \|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdot + x_n^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

képlettel definiáljuk. Az $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorok ***távolságán*** az $\|x - y\|$ számot értjük. Ha a továbbiakban az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térről beszélünk, akkor mindig az $\mathbb{R}^n$ lineáris térre és az azon értelmezett, a fenti skaláris szorzatból származó euklideszi normára gondolunk.

Egy $a \in \mathbb{R}^n$ pont r (> 0) sugarú ***környezetén*** a

$$K_r(a) := \Big\{x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \|x - a\| < r\Big\}$$

halmazt értjük. $n = 1$ esetén $K_r(a)$ az a pontra szimmetrikus $(a - r, a + r)$ nyílt intervallum. Ha $n = 2$, akkor $K_r(a)$ az a pont körüli r sugarú nyílt körlap, $n = 3$ esetén pedig az a pont körüli r sugarú nyílt gömb. A „nyílt gömb" elnevezést használjuk akkor is, ha $n > 3$.

A $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ halmazt ***korlátosnak*** nevezzük, ha $\exists r > 0\colon A \subset K_r(0)$, vagyis A benne van egy $0 = (0, 0, \dots, 0)$ középpontú, alkalmas sugarú nyílt gömbben.

Környezetek segítségével (hasonlóan mint $\mathbb{R}$-ben) értelmezhetjük $\mathbb{R}^n$-ben is a következő „topológiai” fogalmakat.

Tegyük fel, hogy A az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térnek egy nem üres részhalmaza. Ekkor

- $a \in \mathbb{R}^n$ az A halmaz ***torlódási pontja*** (jelekkel $a \in A'$), ha $\forall K(a)\colon K(a) \cap A$ végtelen halmaz, azaz az a pont minden környezete végtelen sok A-beli pontot tartalmaz,
- $a \in A$ az A halmaz ***belső pontja*** (jelekkel $a \in \operatorname{int} A$), ha $\exists K(a)\colon K(a) \subset A$,
- az A halmaz ***nyílt halmaz***, ha minden pontja belső pont,
- az A halmaz ***zárt halmaz***, ha $\mathbb{R}^n \setminus A$ nyílt halmaz.

Látható, hogy a környezettel kapcsolatos fogalmak és jelölés módja nem változtak a már ismert $\mathbb{R}$-beli fogalmakhoz és jelöléhez képes, de tulajdonságai különbözhetnek. A nyílt és zárt halmazok struktúrája jóval gazdagabb. Pl. $\mathbb{R}$-ben egy nyílt halmaz mindig előáll megszámlálhatóan sok nyílt intervallum uniójaként.

Többdimenziós térben nem fogunk rendezést értelmezni, így nem beszélünk alsó, felső korlátokról, maximum, minimumról, ill. szuprémum-, infimumról. A teret nem fogjuk bővíteni olyan ideális elemekkel, mint a $+\infty$ és a $-\infty$ szimbólumokkal tettük a valós számok halmazán.

Konvergencia az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben

1. Definíció. *Az* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ *függvényt* $\mathbb{R}^n$**-beli sorozatnak** *nevezzük. Az*

$$x(k) =: x_k \qquad (k \in \mathbb{N})$$

helyettesítési érték a sorozat k**-adik** *vagy* k**-indexű tagja**, *a tag sorszámát jelző szám a tag* **indexe**. *Lehetséges jelölései:*

$$x, \quad (x_k) \quad \textit{vagy} \quad (x_0, x_1, x_2, \dots).$$

Mivel egy $\mathbb{R}^n$-beli pont koordinátainak jelölésére szintén alsó indexet használunk, így a félreértések elkerülésére az (x_k) sorozat k-adik tagjának i-edik koordinátájára az $x_k^{(i)}$ jelölést alkalmazzuk. Adott $\mathbb{R}^n$-beli (x_k) sorozat és rögzített $i = 1, 2, \dots, n$ esetén beszélhetünk az $(x_k^{(i)})$ koordinátasorozatról, ami már valós sorozat. A koordinátasorozatok fontos szerepet játszanak az $\mathbb{R}^n$-beli sorozatok vizsgálatánál.

Azt mondjuk, hogy az $\mathbb{R}^n$-beli (x_k) sorozat ***korlátos***, ha a sorozat értékkészlete korlátos, azaz ha az

$$\mathcal{R}_x = \{x_k \in \mathbb{R}^n \mid k \in \mathbb{N}\}$$

halmaz korlátos. Rendezés híján ***egy*** $\mathbb{R}^n$***-beli sorozat monotonitása nem értelmezhető***, de a koordinátasorozatok esetében van értelme a monotonitásnak.

Emlékeztetünk arra, hogy az $(x_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ valós sorozatot akkor neveztük *konvergensnek*, ha

$$\exists A \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k > k_0\colon |x_k - A| < \varepsilon.$$

Látható, hogy a fogalom lényegében az $\mathbb{R}$-en értelmezett $d(x, y) = |x-y|$ természetes távolságon múlik. Ha abszolút érték helyett az $\mathbb{R}^n$-n értelmezett $\|.\|$ euklideszi normát használjuk, akkor általánosíthatjuk a sorozatok konvergenciájának fogalmát $\mathbb{R}^n$-re.

2. Definíció. *Legyen* $1 \leq n \in \mathbb{N}$. *Azt mondjuk, hogy az* $\mathbb{R}^n$ *euklideszi tér* $(x_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ *sorozata* **konvergens**, *ha*

$$\exists A \in \mathbb{R}^n, \ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists k_0 \in \mathbb{N}, \ \forall k > k_0 \colon \|x_k - A\| < \varepsilon.$$

Ha A *létezik, akkor az egyértelmű, és* A*-t az* (x_k) *sorozat* **határértékének** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim(x_k) = A, \qquad \lim_{k\to+\infty} x_k = A, \qquad x_k \to A, \ \text{ha } k \to +\infty.$$

Az (x_k) *sorozat* **divergens**, *ha nem konvergens.*

Megjegyzés. A fenti definíció megalkotásában nincs jelentősége annak, hogy melyik normát választunk, hiszen $\mathbb{R}^n$-ben minden norma ekvivalens. Ha ui. az egyik norma mellett egy sorozat konvergens, akkor egy másik norma mellett is konvergens azonos határértékkel. Ennek igazolásához vegyük két ekvivalens $\|.\|_a$ és $\|.\|_b$ normát, azaz $\exists c, d > 0$ valós számok, hogy

$$\|x\|_a \leq c\|x\|_b \quad \text{és} \quad \|x\|_b \leq d\|x\|_a \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Ha $\lim(x_k) = A$ a $\|.\|_a$ norma mellett, akkor

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists k_0 \in \mathbb{N}, \ \forall k > k_0 \colon \|x_k - A\|_a < \frac{\varepsilon}{d}.$$

Ekkor

$$\|x_k - A\|_b \leq d\|x_k - A\|_a < \varepsilon,$$

amiből következik, hogy $\lim(x_k) = A$ a $\|.\|_b$ norma mellett is.

Hasonlóan igazolható, hogy ha $\lim(x_k) = A$ a $\|.\|_b$ norma mellett, akkor $\lim(x_k) = A$ a $\|.\|_a$ norma mellett is.

A konvergencia definíciójában rögtön megfigyelhető, hogy az (x_k) vektorsorozat pontosan akkor tart az A vektorhoz, ha az

$$y_k := \|x_k - A\| \qquad (k \in \mathbb{N})$$

$\mathbb{R}$-beli sorozat tart nullához, azaz

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{k\to+\infty} \|x_k - A\| = 0.$$

A fenti megállapítás már mutatja, hogy a vektorsorozatok konvergenciája visszavezethető valós sorozatok konvergenciájára. Sőt, igazolni fogjuk, hogy egy vektorsorozat konvergenciája ekvivalens a koordináták sorozatainak a konvergenciájával.

1. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$. *Egy* $\mathbb{R}^n$*-beli sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha a sorozat minden koordinátasorozata konvergens, és a határértéke a határvektor megfelelő koordinátája, azaz*

$$\mathbb{R}^n \ni x_k = \left(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(n)}\right) \to A = \left(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\right), \quad \text{ha} \quad k \to +\infty$$

pontosan akkor igaz, ha minden $i = 1, 2, \ldots, n$ *koordinátára*

$$x_k^{(i)} \to A^{(i)}, \quad \text{ha} \quad k \to +\infty.$$

Bizonyítás. $\boxed{\Rightarrow}$ Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = A$, azaz $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_k - A\| = 0$. Rögzítsük az $i = 1, 2, \ldots, n$ indexet. Mivel

$$0 \le \left|x_k^{(i)} - A^{(i)}\right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x_k^{(j)} - A^{(j)}\right)^2} = \|x_k - A\| \to 0, \quad \text{ha} \quad k \to +\infty,$$

ezért a közrefogási elv szerint $\lim\limits_{k\to+\infty}\left|x_k^{(i)} - A^{(i)}\right| = 0$, azaz $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k^{(i)} = A^{(i)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy minden $i = 1, 2, \ldots, n$ indexre $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k^{(i)} = A^{(i)}$, azaz $\lim\limits_{k\to+\infty} |x_k^{(i)} - A^{(i)}| = 0$. Ekkor az

$$0 \le \|x_k - A\| = \|x_k - A\|_2 \le \|x_k - A\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\left|x_k^{(i)} - A^{(i)}\right| \to 0, \text{ ha } k \to +\infty,$$

egyenlőtlenség és ismét a közrefogási elv alkalmazásával azt kapjuk, hogy $\|x_k - A\| \to 0$, ha $k \to +\infty$, azaz $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = A$.

Példák:

- $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\frac{1}{k}, \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right) = (0, e)$, hiszen $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0$ és $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$.
- Az $x_k := \left(\frac{1}{k^2}, \frac{\sin k}{k}, k\right)$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ sorozat divergens, mert $\lim\limits_{k\to+\infty} k = +\infty$.

A tétel segítségével a legtöbb számsorozatra vonatkozó állítást általánosíthatjuk $\mathbb{R}^n$-beli sorozatokra. A bizonyítás többnyire abból áll, hogy a koordináták sorozataira alkalmazzuk a megfelelő számsorozatokra vonatkozó tételt. Ezért $\mathbb{R}^n$-beli sorozatokra is igaz a határérték egyértelműségére vonatkozó tétel, az összegsorozat és a számszoros sorozat határértékére vonatkozó tétel, illetve a konvergens sorozat részsorozataira vonatkozó tétel.

A következő két állításban azt fogalmazzuk meg, hogy az $\mathbb{R}$-beli sorozatok konvergenciájára vonatkozó alapvető jelentőségű tételek az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben is érvényesek.

2. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium). *Legyen $n \in \mathbb{N}^+$. Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér (x_k) sorozata akkor és csak akkor konvergens, ha (x_k) Cauchy-sorozat, azaz*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k, l > k_0\colon \|x_k - x_l\| < \varepsilon.$$

3. Tétel (Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel). *Az $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ euklideszi térben minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*