8. gyakorlat

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 4.

Az inverzfüggvény-tétel

Emlékeztető. ***Tétel.*** **(Inverzfüggvény-tétel)** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Tegyük fel, hogy,*

a) *f folytonosan deriválható Ω-n,*

b) *az $a \in \Omega$ pontban* $\det f'(a) \neq 0$.

Ekkor

1. *f lokálisan invertálható az a pontban, azaz vannak olyan $a \in U$ és $f(a) \in V$ nyílt halmazok, hogy az $f|_U : U \to V$ függvény bijekció (következésképpen invertálható),*
2. *az f^{-1} inverz függvény folytonosan deriválható V-n és*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left[f'(f^{-1}(y))\right]^{-1} \qquad (y \in V).$$

1. Feladat. *Legyen*

$$f(x, y) := \left(e^x \cos y, e^x \sin y\right) \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

a) *Mi az f értékkészlete?*

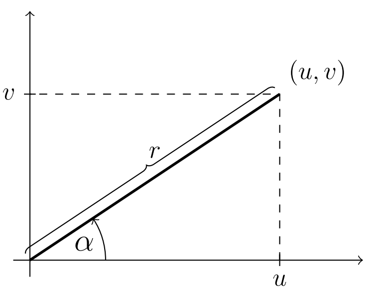
b) *Mutassuk meg, hogy f globálisan nem invertálható, de $\mathbb{R}^2$ minden pontjában lokálisan invertálható!*

c) *Legyen $a := (0, \pi/3)$ és $b := f(a)$. Keressünk explicit képletet f-nek a b pontot tartalmazó valamely nyílt halmazon értelmezett f^{-1} lokális inverzére, és azt deriválva határozzuk meg $\left(f^{-1}\right)'(b)$-t. Számítsuk ki a deriváltat a tanult képlettel is.*

Megoldás.

a) Nem nehéz igazolni, hogy $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Valóban $(0,0) \notin \mathcal{R}_f$, hiszen a sin és a cos függvény zérushelyei különbözőek. Másrészt, minden $\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \neq (0, 0)$ pont egyértelműen felírható

$$(u, v) = (r \cos\alpha, r \sin\alpha) \qquad \big(r > 0,\ \alpha \in [0, 2\pi)\big)$$



alakban, az ún. ***polárkoordinátákkal***, az ábrán szereplő jelölésekkel. Ezért, ha $x = \ln r$, azaz $e^x = r$, és $y = \alpha$, akkor $f(x, y) = (u, v)$.

b) A sin és a cos függvény periodicitása miatt f *globálisan* nem invertálható. Például

$$f\left(0, \tfrac{\pi}{2}\right) = (0, 1) = f\left(0, \tfrac{5\pi}{2}\right).$$

Azonban f *lokálisan* invertálható az $\mathbb{R}^2$ minden pontjában. Ez utóbbi állítást az inverzfüggvény-tétellel tudjuk a legegyszerűbben igazolni. Világos, hogy $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény Jacobi-mátrixa egy tetszőleges $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$(\#) \qquad f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}.$$

Mivel

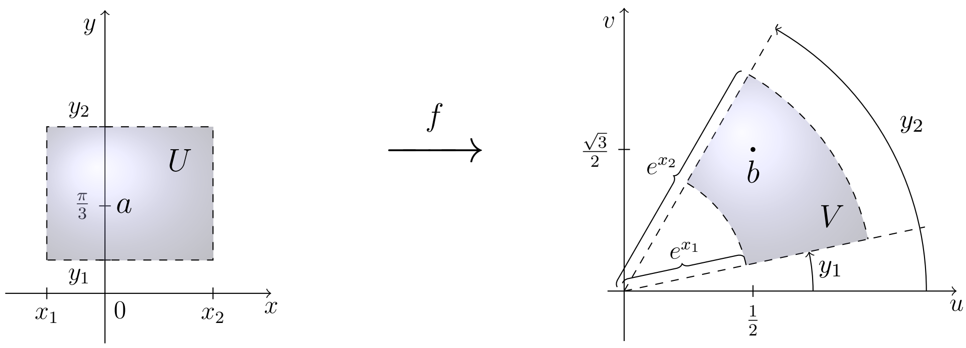
$$\det f'(x,y) = e^{2x} \cdot \cos^2 y + e^{2x} \cdot \sin^2 y = e^{2x} \neq 0 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

ezért az inverzfüggvény-tétel feltételei teljesülnek minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban. Tehát f lokálisan invertálható.

c) Legyen $a := (0, \pi/3)$ és $b := f(a) = f(0, \pi/3) = (1/2, \sqrt{3}/2)$. Tetszőleges $x_1 < 0 < x_2$ és $0 < y_1 < \pi/3 < y_2 < \pi/2$ valós számok esetén

$$U := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x_1 < x < x_2,\ y_1 < y < y_2\Big\} \ni a$$

nyílt halmaz, és $V := f[U] \ni b$ olyan nyílt halmaz, amelynek minden pontja pozitív koordinátákkal rendelkezik.



Ezért, ha $(x, y) \in U$, akkor

$$\begin{cases} e^x \cos y = u > 0 \\ e^x \sin y = v > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} e^{2x} = u^2 + v^2 \\ \operatorname{tg} y = \dfrac{v}{u} \end{cases} \implies \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\ln(u^2+v^2) \\ y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{v}{u} \end{cases}.$$

Ekkor minden $(u, v) \in V$ esetén

$$f^{-1}(u,v) = \left(\frac{1}{2}\ln\big(u^2+v^2\big),\ \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}\right) \implies \left(f^{-1}\right)'(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{u}{u^2+v^2} & \dfrac{v}{u^2+v^2} \\ -\dfrac{v}{u^2+v^2} & \dfrac{u}{u^2+v^2} \end{pmatrix}.$$

Így

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \left(f^{-1}\right)'\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Az előző eredmény az inverzfüggvény-tételben szereplő

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \Big[f'\left(f^{-1}(b)\right)\Big]^{-1} = [f'(a)]^{-1}$$

összefüggéssel is megkaphatjuk. Valóban (#)-ból

$$f'(a) = f'(0, \tfrac{\pi}{3}) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \implies \left(f^{-1}\right)'(b) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Megjegyzés. Érdemes megjegyezni a (2×2)-es mátrixok inverzére vonatkozó alábbi képletet: ha $ad - bc \neq 0$, akkor

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az*

$$f(x,y) := \left(-x + \sqrt{x^2+y^2},\ -x - \sqrt{x^2+y^2}\right) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokálisan invertálható az $a := (4,3)$ pontban, és határozzuk meg a lokális inverz deriváltját a $b := f(a)$ pontban!

Megoldás. Az inverzfüggvény-tételt alkalmazzuk.

<u>Az inverz függvény létezése.</u> Legyen $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Az f függvény az Ω nyílt halmazra való leszűkítése folytonosan deriválható Ω-n, hiszen a

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} -1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \qquad \big((x,y) \in \Omega\big),$$

mátrixban szereplő parciális deriváltak folytonosak minden $(x,y) \in \Omega$ pontban. Ezért

$$\det f'(4,3) = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{9}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{6}{5} \neq 0.$$

így az f függvény valóban lokálisan invertálható az a pont egy környezetében.

<u>Az inverz függvény deriváltja.</u> A szóban forgó tétel szerint az f^{-1} lokális inverz függvény folytonosan deriválható a

$$b := f(a) = f(4,3) = (1,-9)$$

pontban (tehát $f^{-1}(b) = a = (4,3)$), és a deriváltja

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \left[f'\left(f^{-1}(b)\right)\right]^{-1} = \left[f'(a)\right]^{-1} = \left[f'(4,3)\right]^{-1} = \frac{5}{6} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

3. Feladat. *Tekintsük az*

$$e^{x-1} + x\sin y = u,$$
$$e^{x-1} - x\cos y = v$$

egyenletrendszert, ahol $u, v \in \mathbb{R}$ adott paraméterek és x, y az ismeretlenek. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy ha $(u_0, v_0) = \Big(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$, akkor $(x_0, y_0) = \Big(1, \frac{\pi}{4}\Big)$ megoldása az egyenletrendszernek.

a) *Mutassuk meg, hogy egy, az (u_0, v_0) pontot tartalmazó paramétertartományban az egyenletrendszernek az (x_0, y_0) pont egy alkalmas környezetében a megoldás egyértelmű és az (u, v) változó folytonosan deriválható függvénye!*

b) *Számítsuk ki a szóban forgó függvény deriváltját az (u_0, v_0) pontban!*

Megoldás. Az inverzfüggvény-tételt alkalmazzuk az

$$f(x,y) := (e^{x-1} + x\sin y,\ e^{x-1} - x\cos y) \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big),$$

$$a := \Big(1, \tfrac{\pi}{4}\Big) = (x_0, y_0) \quad \text{és} \quad b := f(a) = f\Big(1, \tfrac{\pi}{4}\Big) = \Big(1 + \tfrac{\sqrt{2}}{2},\ 1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\Big) = (u_0, v_0)$$

szereposztással.

a) Mivel $f \in C^1\Big(\mathbb{R}^2\Big)$ és

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-1} + \sin y & x\cos y \\ e^{x-1} - \cos y & x\sin y \end{pmatrix} \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big)$$

miatt

$$\det f'(a) = \det f'\Big(1, \pi/4\Big) = \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

ezért az inverzfüggvény-tételből következik, hogy az f függvény lokálisan invertálható az a pontban. Ez azt jelenti, hogy létezik két olyan $a \in U \subset \mathbb{R}^2$ és $b \in V \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, hogy az $f|_U : U \to V$ függvény bijekció, következésképpen invertálható; továbbá az $F := (f|_U)^{-1}$ lokális inverz függvény folytonosan deriválható V-n.

Az előző állítás érvényes marad, ha tovább szűkítjük az $f|_U$ függvényt egy $K(a) \subset U$ környezetre. Ezért feltételezhetjük, hogy U az a pont egyik környezete, és $V := f[U]$ a b pontot tartalmazó nyílt halmaz (paramétertartomány), ami nem feltétlenül környezete lesz a b-nek.

Ennek az egyenletrendszer megoldásával kapcsolatos értelmezése a következő. Tetszőleges $(u, v) \in V$ esetén az egyenletrendszernek az $(1, \pi/4)$ pont U környezetében pontosan egy megoldása van. A megoldások a lokális inverz helyettesítési értékei:

$$f^{-1}(u,v) = F(u,v) = \Big(F_1(u,v),\ F_2(u,v)\Big) = (x,y) \in U \qquad \Big((u,v) \in V\Big).$$

Az $x = F_1(u,v)$ és az $y = F_2(u,v)$ $\Big((u,v) \in V\Big)$ megoldások u és v folytonosan deriválható függvényei.

b) Az inverzfüggvény-tétel azt is állítja, hogy az f^{-1} inverz függvény folytonosan deriválható V-n és

$$\left(f^{-1}\right)'(u,v)=\Big[f'\Big(f^{-1}(u,v)\Big)\Big]^{-1}\qquad\Big((u,v)\in V\Big).$$

A lokális inverz deriváltja az

$$(u_0,v_0)=b=f(a)=f(x_0,y_0)=f(1,\pi/4)$$

pontban (most $f^{-1}(b)=a$)

$$\left(f^{-1}\right)'(u_0,v_0)=\left(f^{-1}\right)'(b)=\Big[f'\Big(f^{-1}(b)\Big)\Big]^{-1}=\Big[f'(a)\Big]^{-1}=\Big[f'\Big(1,\pi/4\Big)\Big]^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -1+\frac{\sqrt{2}}{2} & 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

Megjegyzés. Mivel $F\in C^1(V)$, azért az F függvény (u_0,v_0) ponthoz közeli

$$(u,v)=(u+h_1,v+h_2)$$

pontjaiban a helyettesítési értékeire (vagyis az egyenletrendszer megoldásaira) az alábbi közelítő képlet érvényes:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+\left(f^{-1}\right)'(u_0,v_0)\cdot\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}.$$

Az egyváltozós implicitfüggvény-tétel

Emlékeztető. ***Tétel.*** **(Egyváltozós implicitfüggvény-tétel)** *Legyen $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és $f:\Omega\to\mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

a) *f folytonosan deriválható Ω-n,*

b) *az $(a,b)\in\Omega$ pontban $f(a,b)=0$ és $\partial_2 f(a,b)\neq 0$.*

Ekkor

1. *van olyan $U:=K(a)$ környezet és $b\in V$ nyílt halmaz $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $x\in U$ ponthoz létezik egyetlen $\varphi(x)\in V$, amelyre $f(x,\varphi(x))=0$ teljesül,*
2. *az így definiált $\varphi:U\to V$ függvény folytonosan deriválható U-n és*

$$\varphi'(x)=-\frac{\partial_1 f(x,\varphi(x))}{\partial_2 f(x,\varphi(x))}\qquad(x\in U).$$

4. Feladat. *Legyen*

$$f(x,y):=\ln x+y\,e^{y^2}+1\qquad\Big((x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x>0\Big).$$

Mutassuk meg, hogy az $a=1/e$ pontnak van olyan $U=K(a)$ környezete és létezik olyan $\varphi:U\to\mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény, amelyre az

$$f\Big(x,\varphi(x)\Big)=0\qquad(x\in U)$$

egyenlőség teljesül! Számítsuk ki $\varphi'(1/e)$-t!

Megoldás. Az egyváltozós implicitfüggvény-tételt alkalmazzuk.

Először a feltételeket ellenőrizzük. Világos, hogy $f \in C^1\big((0,+\infty)\times\mathbb{R}\big)$. Mivel

$$f(a,y) = f\Big(\tfrac{1}{e}, y\Big) = \ln\tfrac{1}{e} + ye^{y^2} + 1 = ye^{y^2} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = 0,$$

ezért a $b := 0$ választással $f(a,b) = 0$. A $\partial_2 f(a,b) \neq 0$ is igaz, mert

$$\partial_2 f(x,y) = e^{y^2} + y\cdot 2ye^{y^2} = (2y^2+1)e^{y^2} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

miatt $\partial_2 f(a,b) = \partial_2 f(1/e, 0) = 1 \neq 0$. Így a szóban forgó tétel mindegyik feltétele teljesül.

Következésképpen $\exists U := K(1/e)$ környezet és $\exists \varphi : U \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény, amelyre az

$$f\big(x,\varphi(x)\big) = 0 \qquad (x\in U)$$

egyenlőség teljesül. A φ függvény folytonosan deriválható és

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 f\big(x,\varphi(x)\big)}{\partial_2 f\big(x,\varphi(x)\big)} = -\frac{\frac{1}{x}}{\big(2\varphi^2(x)+1\big)e^{\varphi^2(x)}} \qquad (x\in U).$$

Így $\varphi(1/e) = b = 0$ miatt

$$\varphi'\Big(\frac{1}{e}\Big) = -e.$$

Megjegyzés. A φ' deriváltat könnyen megkaphatjuk az összetett függvény deriválási szabályából. Ui. az $U \ni x \mapsto f\big(x,\varphi(x)\big)$ függvény azonosan 0, ezért a deriváltja is nulla. Így

$$\partial_1 f\big(x,\varphi(x)\big)\cdot 1 + \partial_2 f\big(x,\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x) = 0 \qquad (x\in U),$$

amiből

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 f\big(x,\varphi(x)\big)}{\partial_2 f\big(x,\varphi(x)\big)} \qquad (x\in U).$$

(Mivel az $f' = \big(\partial_1 f, \partial_2 f\big)$ függvény folytonos és $\partial_2 f(a,b)\neq 0$, ezért a nevező nem nulla.)

5. Feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\neq 0\big).$$

Mutassuk meg, hogy az $(a,b) = (1,0)$ *pont egy környezetében az* $f(x,y) = 0$ *egyenlettel megadott síkbeli halmaz egy folytonosan deriválható* $\varphi : K(a) \to \mathbb{R}$ *függvény grafikonja! Számítsuk ki* $\varphi'(1)$*-et, és írjuk fel a szóban forgó görbe* $(1,0)$ *pontbeli érintő egyenesének az egyenletét!*

Megoldás. Az egyváltozós implicitfüggvény-tételt alkalmazzuk. Jelölje

$$H := \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\Big|\; f(x,y) = 0\Big\}$$

az $f(x,y) = 0$ egyenlettel megadott síkbeli halmazt.

Először a feltételeket ellenőrizzük. A $P(1,0)$ pont valóban eleme H-nak, mert

$$f(1,0) = \ln\sqrt{1^2+0^2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{0}{1} = \ln 1 - \operatorname{arc\,tg} 0 = 0.$$

Világos, hogy $f \in C^1(\mathcal{D}_f)$. Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0$ pontban

$$\partial_2 f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y-x}{x^2+y^2},$$

ezért $\partial_2 f(1,0) = -1 \neq 0$ is igaz. Így a szóban forgó tétel mindegyik feltétele teljesül.

Következésképpen $\exists U := K(1)$ és $\exists \varphi : U \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény, amelyre az

$$f\big(x, \varphi(x)\big) = 0 \qquad (x \in U)$$

egyenlőség teljesül. A H halmaz tehát a $P(1,0)$ pont egy környezetében a φ függvény grafikonja. A tétel állítása szerint a φ függvény folytonosan deriválható. Mivel minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq 0$ pontban

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$

ezért

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 f\big(x,\varphi(x)\big)}{\partial_2 f\big(x,\varphi(x)\big)} = -\frac{x+\varphi(x)}{\varphi(x)-x} \qquad (x \in U).$$

Így $\varphi(1) = b = 0$ miatt $\varphi'(1) = 1$. Az (x_0, y_0) ponton átmenő, m meredekségű egyenes egyenlete

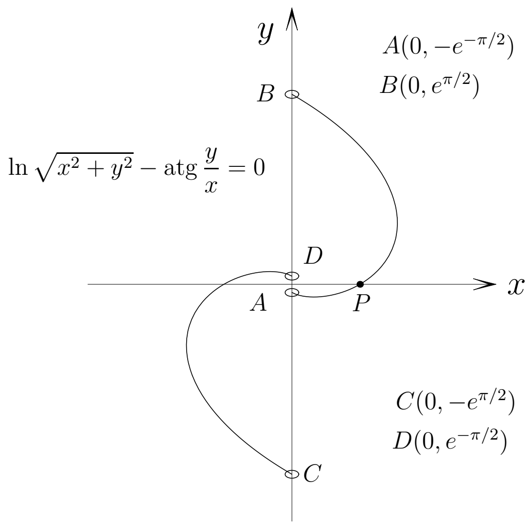
$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Mivel $(x_0, y_0) = (1,0)$ és $m = \varphi'(1) = 1$, ezért a kérdezett érintő egyenes egyenlete

$$y = x - 1.$$

Megjegyzés. Az alábbi ábra szemlélteti az alábbi halmazt:

$$H := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x,y) := \ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = 0\right\}.$$



Ha $(x,y) \in H$, akkor $(-x,-y)$, is eleme H-nak, ezért H az origóra szimmetrikus.

Az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ felhasználásával kapjuk pl. azt, hogy az A pont koordinátái $\big(0, -e^{-\pi/2}\big)$.