

2. előadás

FÜGGVÉNYEK 2.

Valós-valós függvények

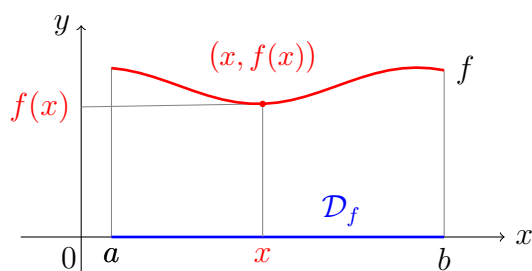
Valós-valós függvényeknek nevezzük az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvényeket, azaz $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$ és $\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}$. Az ilyen függvények sajátossága, hogy hozzárendelési szabálya gyakran képlettel adható meg. Alapvetően három különböző módot fogunk alkalmazni egy valós-valós függvény megadására, amelyeket a másodfokú alapfüggvénnyel illusztrálunk:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^2$,
- $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$,
- $f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

A valós-valós függvényeknek egy másik fontos sajátossága, hogy azokat a síkbeli Descartes-féle koordináta-rendszerben szemléltethetjük. Az

$$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{D}_f\}$$

síkbeli halmaz az **f függvény grafikonja**. Az ábra ezt illusztrálja.



A matematikai analízis egyik alapvető feladata valós-valós függvények *általános* tulajdonságainak a leírása. Ezeket a tulajdonságokat fogjuk fokozatosan bevezetni és tanulmányozni az analízis kurzusok során.

Először néhány olyan *egyszerű* függvénytulajdonságra emlékeztetünk, amelyeket az előző tanulmányaikban már megismertek.

1. definíció. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós-valós függvény

- **felülről korlátos**, ha

$$\exists K \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall x \in \mathcal{D}_f \text{ esetén } f(x) \leq K,$$

az ilyen K számot az f függvény egy **felső korlátjának** nevezzük;

- **alulról korlátos**, ha

$$\exists k \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall x \in \mathcal{D}_f \text{ esetén } f(x) \geq k,$$

az ilyen k számot az f függvény egy **alsó korlátjának** nevezzük;

- **korlátos**, ha felülről is és alulról is korlátos, azaz

$$\exists K \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall x \in \mathcal{D}_f \text{ esetén } |f(x)| \leq K.$$

Egy függvény korlátossága az értékkészletének korlátosságát jelenti. Azok a korlátos függvények, amelyeknek a grafikonja két vízszintes vonal közé esik. Pl. az $f(x) := x^2$ ($x \in [-1, 1]$) függvény korlátos.

2. definíció. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós-valós függvény

- **monoton növekedő** (jele: \nearrow), ha

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f, x < y \text{ esetén } f(x) \leq f(y),$$

- **monoton csökkenő** (jele: \searrow), ha

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f, x < y \text{ esetén } f(x) \geq f(y),$$

- **szigorúan monoton növekedő** (jele: \uparrow), ha

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f, x < y \text{ esetén } f(x) < f(y),$$

- **szigorúan monoton csökkenő** (jele: \downarrow), ha

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f, x < y \text{ esetén } f(x) > f(y),$$

- **(szigorúan) monoton**, ha ott (szigorúan) monoton növekedő vagy csökkenő.

A szigorú monotonitás úgy jelentkezik a függvény grafikonján, hogy a függvényértékek mindig emelkednek, vagy mindig csökkennek ahogy jobbra haladunk. Például az $f(x) := x^2$ ($x \in [0, +\infty)$) függvény szigorúan monoton növekvő.

Egy f valós-valós függvény korlátossága, ill. monotonitása egy adott $C \subset \mathcal{D}_f$ halmazon is értelmezhető. Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *korlátos*, ill. *monoton* a $C \subset \mathcal{D}_f$ halmazon, ha az $f|_C$ függvény korlátos, ill. monoton. Ehhez fontos tudni, hogy milyen értékeket vehet fel a függvény a C halmazon.

Halmaz függvény által létesített képe, ill. ősképe

A továbbiakban feltesszük, hogy A és B nemüres halmazok.

3. definíció. Legyen $f : A \rightarrow B$ egy adott függvény és $C \subset A$. Ekkor a C halmaz f által létesített képén az

$$f[C] := \{f(x) \mid x \in C\} = \{y \in B \mid \exists x \in C : y = f(x)\} \subset B$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f[\emptyset] = \emptyset$.

Világos, hogy az f függvény értékkészlete az értelmezési tartományának f által létesített képe, azaz

$$\mathcal{R}_f = f[\mathcal{D}_f].$$

Megjegyzés. Szavakkal így is fogalmazhatunk:

- $f[C]$ az a B -beli halmaz, amelyet az $f(x)$ függvényértékek „befutnak”, ha x „befutja” a C halmaz elemeit.
- Az $f[C]$ halmaz B azon y elemeit tartalmazza, amelyekhez létezik olyan $x \in C$, amelyre $y = f(x)$. ■

1. feladat. Határozzuk meg a $C := [1, 2]$ halmaz

$$f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

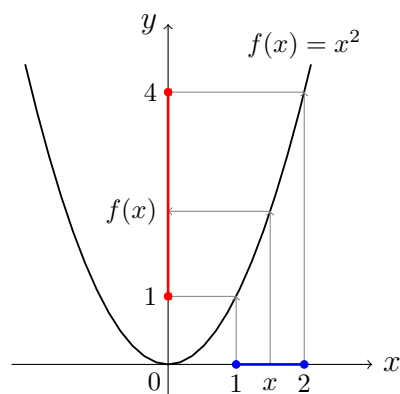
függvény által létesített képét!

Megoldás. Nézzük először a feladat grafikus megoldását! Az ábráról látjuk, hogy

$$f[[1, 2]] = [1, 4].$$

Most megmutatjuk a feladat precíz megoldását. A definíció alapján

$$\begin{aligned} f[[1, 2]] &= \{x^2 \mid 1 \leq x \leq 2\} = \\ &= \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [1, 2] : y = x^2\}. \end{aligned}$$



Azt kell tehát meghatározni, hogy x^2 milyen értékek vesz fel, ha x „befutja” az $[1, 2]$ intervallum pontjait. Mivel

$$1 \leq x \leq 2 \implies 1 \leq x^2 \leq 4, \text{ azaz } x^2 \in [1, 4],$$

ezért

$$(*) \quad f[[1, 2]] \subset [1, 4].$$

A kérdés ezek után az, hogy az x^2 függvényértékek vajon teljesen „befutják-e” az egész $[1, 4]$ intervallumot, ha x „befutja” az $[1, 2]$ intervallum pontjait, vagyis igaz-e a fordított irányú

$$(\#) \quad [1, 4] \subset f[[1, 2]]$$

tartalmazás is. Az előzőek alapján ez azzal ekvivalens, hogy

$$(\#') \quad \forall y \in [1, 4] \text{ számhoz } \exists x \in [1, 2] : y = x^2.$$

Ennek az egyenletnek a megoldása $x_1 = \sqrt{y}$, $x_2 = -\sqrt{y}$. Mivel $1 \leq y \leq 4$, ezért $1 \leq \sqrt{y} \leq 2$, így $x_1 \in [1, 2]$. Ez pedig azt jelenti, hogy a $(\#')$ állítás, tehát a vele ekvivalens $(\#)$ tartalmazás is igaz.

$(*)$ és $(\#)$ alapján a két halmaz egyenlő. Bebizonyítottuk tehát azt, hogy

$$f[[1, 2]] = [1, 4].$$

4. definíció. Legyen $f : A \rightarrow B$ egy adott függvény és $D \subset B$. Ekkor a D halmaz f által létesített ősképe az

$$f^{-1}[D] := \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in D\} \subset A$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.

Világos, hogy az f függvény értelmezési tartománya az értékkészletének f által létesített ősképe, azaz

$$\mathcal{D}_f = f^{-1}[\mathcal{R}_f].$$

2. feladat. Számítsuk ki a $D := [1, 4]$ halmaz

$$f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített ősképét!

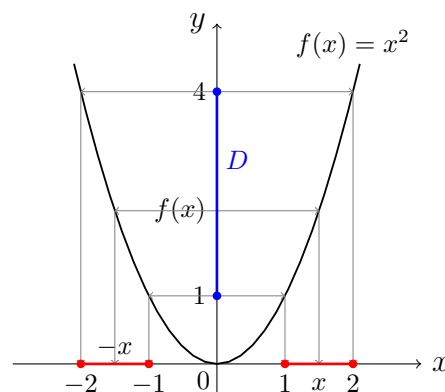
Megoldás. Most is a grafikus megoldással kezdjük.

Az ábráról látjuk, hogy

$$f^{-1}[[1, 4]] = [-2, -1] \cup [1, 2].$$

A feladat precíz megoldása a következő. A definíció alapján

$$\begin{aligned} f^{-1}[[1, 4]] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [1, 4]\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 4\}. \end{aligned}$$



Így $f^{-1}[[1, 4]]$ az $1 \leq x^2 \leq 4$ egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza. Mivel

$$\begin{aligned} 1 \leq x^2 \leq 4 &\iff 1 \leq |x| \leq 2 \iff 1 \leq x \leq 2 \text{ vagy } -2 \leq x \leq -1 \iff \\ &\iff x \in [-2, -1] \cup [1, 2], \end{aligned}$$

ezért bebizonyítottuk azt, hogy

$$f^{-1}[[1, 4]] = [-2, -1] \cup [1, 2].$$

Műveletek függvényekkel

Függvények inverze: Az előző előadáson már megismertedtünk az invertálható függvény fogalmával. Akkor mondtuk azt, hogy egy $f : A \rightarrow B$ függvény invertálható, ha az $A = \mathcal{D}_f$ halmaz bármely két különböző pontjának a képe különböző. Ezt pedig három különböző módon is le lehet írni:

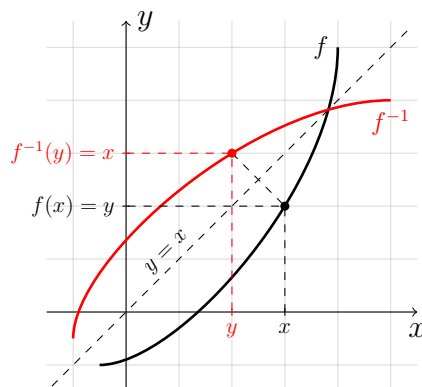
- f invertálható $\iff \forall x, t \in \mathcal{D}_f$ esetén $x \neq t \implies f(x) \neq f(t)$,
- f invertálható $\iff \forall x, t \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(x) = f(t) \implies x = t$,
- f invertálható $\iff \forall y \in \mathcal{R}_f$ -hez $\exists! x \in \mathcal{D}_f : f(x) = y$.

Ekkor az f inverz függvényét (vagy röviden inverzét) így értelmeztük:

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \text{ amelyre } f(x) = y.$$

Tegyük fel, hogy az f valós-valós függvény invertálható, és ábrázoljuk f és f^{-1} grafikonját egy olyan koordináta-rendszerben, amelynek tengelyein az egységek egyenlő hosszúak. Vegyük f grafikonjának egy (x, y) pontját, azaz legyen $y = f(x)$. Ekkor $f^{-1}(y) = x$, vagyis az (y, x) pont rajta van az f^{-1} függvény grafikonján. Ha egy pont két koordinátáját felcseréljük, akkor a pont tükörképét kapjuk meg a két tengely szögfelező egyenesére (vagyis az $y = x$ egyenletű egyenesre) vonatkozóan. Ez azt jelenti, hogy **az f és az f^{-1} függvények grafikonjai – geometriailag – egymás tükörképei a szóban forgó szögfelezőre vonatkozóan.**

Megjegyzés. Ha van egy „átlátszó” papírunk, akkor nincs szükség tükrözésre. Az f grafikonjának a megrajzolása után megkapjuk az inverzének a grafikonját, ha először elforgatjuk a papírt 90 fokkal az óra járásával megegyező irányban, és utána függőlegesen megforgatjuk a papírt. Az az ábra, ami a papíron át látható, az f^{-1} függvény grafikonja. ■



3. feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) := \frac{3x-7}{x-2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2\})$$

függvény invertálható, és számítsuk ki az inverzét!

Megoldás. A számítások egyszerűsítése érdekében alakítsuk át a függvény képletét:

$$\frac{3x-7}{x-2} = \frac{3(x-2)-1}{x-2} = 3 - \frac{1}{x-2}.$$

Az invertálhatóság igazolása: Ha $x, t \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, azaz $x, t \neq 2$, akkor

$$f(x) = f(t) \implies 3 - \frac{1}{x-2} = 3 - \frac{1}{t-2} \implies x-2 = t-2 \implies x = t,$$

ami azt jelenti, hogy f invertálható.

Az inverz előállítás: A definíció értelmében

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \text{ amelyre } f(x) = y.$$

Ehhez meg kell határoznunk a függvény értékkészletét:

$$\mathcal{R}_f = f[\mathcal{D}_f] = \left\{ 3 - \frac{1}{x-2} \mid 2 \neq x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mivel

$$\mathbb{R} \ni x \neq 2 \iff x-2 \neq 0 \iff \frac{1}{x-2} \neq 0 \iff 3 - \frac{1}{x-2} \neq 3,$$

így $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Ha $y \in \mathcal{R}_f$, akkor

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff 3 - \frac{1}{x-2} = y \iff \frac{1}{x-2} = 3 - y \iff \\ &\iff x - 2 = \frac{1}{3-y} \iff x = 2 + \frac{1}{3-y} = \frac{2y-7}{y-3}. \end{aligned}$$

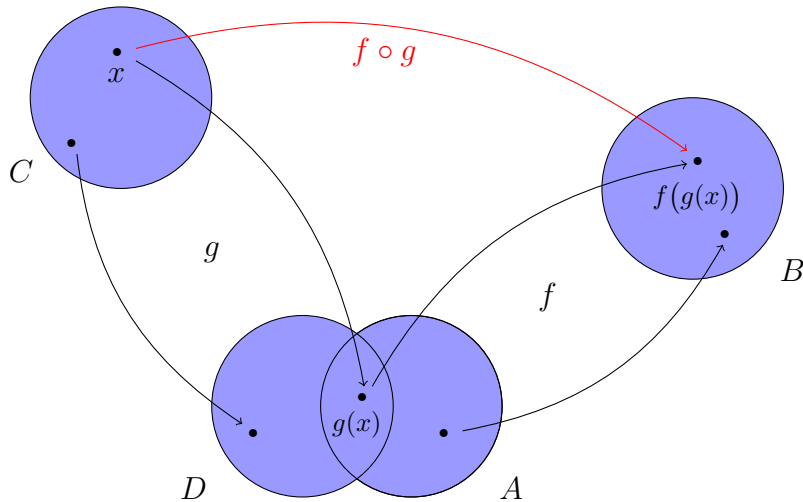
Tehát

$$f^{-1}(y) = \frac{2y-7}{y-3} \quad (y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}).$$

Függvények kompozíciója: Legyenek A , B , C és D tetszőlegesen rögzített nemüres halmazok, illetve $f : A \rightarrow B$ és $g : C \rightarrow D$ adott függvények. Az $f \circ g$ kompozíció akkor képezhető, ha a $C = \mathcal{D}_g$ halmaznak van olyan x eleme, amelynek a $g(x)$ képe benne van az $A = \mathcal{D}_f$ halmazban, azaz

$$\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \neq \emptyset.$$

Ekkor a $g(x)$ elem f szerinti képe, azaz $f(g(x))$ lesz az x elemnek a kompozíció által meghatározott képe, azaz $(f \circ g)(x)$.



5. definíció. Tegyük fel, hogy $f : A \rightarrow B$ és $g : C \rightarrow D$ olyan függvények, amelyekre

$$\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \neq \emptyset.$$

Ebben az esetben az f (**külső**) és a g (**belső**) függvény **összetett függvényét** (vagy más szóval f és g **kompozícióját**) az $f \circ g$ szimbólummal jelöljük, és így értelmezzük:

$$f \circ g : \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \rightarrow B, \quad (f \circ g)(x) := f(g(x)).$$

Az $f \circ g$ függvény értelmezési tartománya tehát a

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\}$$

halmaz. A korábban bevezetett fogalmakat felhasználva egyszerűen belátható, hogy

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = g^{-1}[\mathcal{R}_f \cap \mathcal{D}_g].$$

Ha még a $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ tartalmazás is fennáll, akkor

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathcal{D}_g.$$

Ha $\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \emptyset$, akkor f és g kompozícióját nem értelmezzük.

Megjegyzés. Az $f \circ g$ függvény $\mathcal{D}_{f \circ g}$ értelmezési tartományát szavakkal így fogalmazhatjuk meg: „ $\mathcal{D}_{f \circ g}$ a belső függvény értelmezési tartományának azon pontjait tartalmazza, amelyekben felvett függvényértékek benne vannak a külső függvény értelmezési tartományában.” ■

4. feladat. Legyen

$$f(x) := \sqrt{1-x} \quad (x \in (-\infty, 1]) \quad \text{és} \quad g(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Határozzuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket!

Megoldás. $\boxed{f \circ g}$. Mivel

$$\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\} = [-1, 1] \neq \emptyset,$$

ezért az $f \circ g$ kompozíció képezhető, és $\mathcal{D}_{f \circ g} = [-1, 1]$. Így

$$f \circ g : [-1, 1] \ni x \mapsto f(g(x)) = \sqrt{1-g(x)} = \sqrt{1-x^2},$$

azaz

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

$\boxed{g \circ f}$. Mivel

$$\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \{x \in (-\infty, 1] \mid \sqrt{1-x} \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 1] \neq \emptyset,$$

ezért a $g \circ f$ kompozíció is képezhető, és $\mathcal{D}_{g \circ f} = (-\infty, 1]$. Így

$$g \circ f : (-\infty, 1] \ni x \mapsto g(f(x)) = g(\sqrt{1-x}) = (\sqrt{1-x})^2 = 1-x,$$

azaz

$$(g \circ f)(x) = 1-x \quad (x \leq 1).$$

Megjegyzés. Az előbbi példánál látható, hogy

$$\boxed{f \circ g \neq g \circ f},$$

ezért a kompozíció művelete **nem kommutatív** művelet. ■

Algebrai műveletek valós-valós függvényekkel

Az f és a g valós-valós függvények összegét, szorzatát és hányadosát a $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset$ feltétel teljesülése esetén a következőképpen értelmezzük:

- $(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad (x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g),$

- $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad (x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g),$
- ha még az is teljesül, hogy $A := \{x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \mid g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$, akkor

$$\left(\frac{f}{g}\right) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad (x \in A).$$

VALÓS SOROZATOK 1.

Valós-valós függvények tulajdonságainak vizsgálatát az $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ típusú függvényekkel, vagyis a sorozatokkal kezdjük.

A sorozat fogalma, megadása és szemléltetése

A korábbi tanulmányaikban már megismerkedtek a sorozatokkal.

6. definíció. Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt (*valós*) **sorozatnak** vagy **számsorozatnak** nevezzük. Az

$$a(n) =: a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

helyettesítési érték a sorozat ***n*-edik** (vagy ***n*-indexű**) **tagja**, a tag sorszámát jelző szám a tag **indexe**.

A számsorozatok tehát a természetes számok halmazán értelmezett valós értékű függvények, így öröklök a valós-valós függvényeknél alkalmazott megadást, jelölésmódot és néhány elemi tulajdonságot is. Azonban \mathbb{N} sajátos induktív értelmezése miatt érdemes ettől eltérő jelölésmódot is alkalmazni. Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozatra az

$$a, \quad (a_n), \quad (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

jelölések bármelyikével fogunk hivatkozni. Így például

$$(n^2) \quad \text{vagy} \quad (0, 1, 4, 9, \dots)$$

azt a sorozatot jelöli, amelynek n -edik tagja n^2 , azaz $a_n := n^2$ ($n \in \mathbb{N}$).

Egy sorozat megadásához egyértelműen meg kell adni azt, hogy az $n \in \mathbb{N}$ számhoz melyik valós szám van hozzárendelve. Ezt többféleképpen is megtehetjük:

a) **explicit módon**, a valós-valós függvények megadásához hasonlóan, pl.

- $a_n := 3n^2 + 2 \quad (n \in \mathbb{N}),$
- $a_n := \sqrt{n^2 - 100} \quad (n = 10, 11, 12, \dots),$
- $a_n := \begin{cases} 2n^2 & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ n & (n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases}$

b) **rekurzív módon**, az \mathbb{N} sajátos induktív értelmezése alapján; pl.

- $a_1 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + 2 \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (\text{egylépéses rekurzió}),$
 - $a_0 := 1, \quad a_1 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad (\text{kétlépéses rekurzió}),$
- ez a **Fibonacci-sorozat**.

Rekurzív sorozatról akkor beszélünk, ha megadjuk a sorozat első m tagját, és megmondjuk azt, hogy egy tagját hogyan képezzük az előtte lévő m tag segítségével. Ekkor **m -lépéses** rekurzióról beszélünk.

Megjegyzés. A rekurzív sorozatokról. Felvetődik az a kérdés, hogy rekurzióval vajon „jól definiáltunk-e” egy sorozatot, vagyis a megadott feltételek egyértelműen meghatározzák-e a sorozat tagjait. Erre a kérdésre válaszol az ún. **rekurzió tétel**. ■

Az előző példák is sugallják azt, hogy tetszőlegesen rögzített $M \in \mathbb{Z}$ esetén az

$$a : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq M\} \rightarrow \mathbb{R}$$

függvényt is célszerű sorozatnak tekinteni, vagyis egy sorozatot bármely egész számtól is el lehet indítani.

A függvények egyenlőségével kapcsolatban tett megállapodásunkból az következik, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ és a $(b_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat **egyenlő**, ha bármely index esetén az azonos indexű tagok egyenlők, azaz $a_n = b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül.

Néhány nevezetes példa:

1. **A harmonikus sorozat:** $a_n := \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$

2. **A számtani sorozat:** Adott $\alpha, d \in \mathbb{R}$ esetén

$$a_n := \alpha + nd \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezt a sorozatot rekurzív módon is megadhatjuk:

$$a_0 := \alpha, \quad a_{n+1} := a_n + d \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

3. **A mértani (vagy geometriai) sorozat:** Adott $\alpha, q \in \mathbb{R}$ esetén

$$a_n := \alpha q^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezt a sorozatot rekurzív módon így adjuk meg:

$$a_0 := \alpha, \quad a_{n+1} := q \cdot a_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

A számsorozatok kétféle módon is tudjuk szemléltetni. Mivel speciális valós-valós függvények, így a különálló pontokból álló grafikonjukat ábrázolhatjuk a koordináta-rendszerben. Másrészt a sorozat tagjait – értékei szerint – elhelyezhetjük egy számegyenesen. Mindkét szemléltetési módot megmutatjuk az

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat esetében:

Koordináta-rendszerben

Elemi tulajdonságok, műveletek

Valós-valós függvények esetében bevezettük a monoton és a korlátos függvény fogalmát. Nem nehéz meggondolni, hogy sorozatok esetében ezek a fogalmak az alábbi módon leegyszerűsödnek.

7. definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) valós sorozat

- **monoton növekedő** (jele: \nearrow), ha

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén,}$$

- **szigorúan monoton növekedő** (jele: \uparrow), ha

$$a_n < a_{n+1} \quad \text{minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén,}$$

- **monoton csökkenő** (jele: \searrow), ha

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén,}$$

- **szigorúan monoton csökkenő** (jele: \downarrow), ha

$$a_{n+1} < a_n \quad \text{minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

Az (a_n) sorozatot **monoton** sorozatnak nevezzük, ha a fenti esetek valamelyike áll fenn.

Megjegyzés. A sorozatok monotonitását sokszor a teljes indukció elvével igazolhatjuk. Gyakran hasznos lehet, ha a monotonitás definíciójában szereplő egyenlőtlenség helyett egy vele ekvivalens egyenlőtlenséget igazolunk:

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+1} - a_n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ha $a_n > 0$ minden n -re, akkor

$$a_{n+1} \geq a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Például az

$$a_n := \frac{2n-1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat szigorúan monoton növekvő, mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{2n-1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1} = \\ &= \frac{(2n+1)(n+1) - (2n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{3}{(n+2)(n+1)} > 0. \end{aligned}$$

Ugyanígy az

$$a_n := \frac{1}{2^n} > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat szigorúan monoton csökkenő, mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2^{n+1}} : \frac{1}{2^n} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

egyenlőtlenség teljesül. ■

8. definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat

- **alulról korlátos**, ha

$$\exists k \in \mathbb{R}, \text{ hogy } k \leq a_n \quad (n \in \mathbb{N});$$

- **felülről korlátos**, ha

$$\exists K \in \mathbb{R}, \text{ hogy } a_n \leq K \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha a sorozat alulról és felülről is korlátos, akkor **korlátos** sorozatnak mondjuk. Ekkor

$$\exists K > 0, \text{ hogy } |a_n| \leq K \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Például az

$$a_n := \frac{2n-1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat felülről korlátos, mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\frac{2n-1}{n+1} < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2n-1 < 2n+2 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < 2,$$

ami igaz. Ez egyébként a

$$\frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

átalakításból is azonnal látható. De a sorozat alulról is korlátos, hiszen már igazoltuk, hogy monoton növekvő, ezért

$$a_n \geq a_0 = -1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Így igazoltuk azt, hogy az

$$a_n := \frac{2n-1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat korlátos.

Megjegyzések.

1° Sorozat korlátosságát, például egy „megsejtett” felső korlátot sok esetben célszerű a teljes indukció módszerével igazolni.

2° Egy sorozat felülről, ill. alulról korlátossága megegyezik az értékkészletének felülről, ill. alulról korlátosságával. Hasonlóan értelmezhetjük a sorozatok alsó és felső korlátjait, illetve a sorozatok infimumát, ill. szuprémumát. ■

Valós-valós függvények mintájára adott sorozatokból kiindulva **algebrai műveletekkel** új sorozatokat képezhetünk. Az (a_n) és a (b_n) sorozat

- **összegén** az

$$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n),$$

- **szorzatán** az

$$(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n),$$

- $b_n \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) esetén a **hányadosán** az

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\frac{a_n}{b_n} \right)$$

sorozatot értjük.

Környezetek

Az analízisben fontos szerepet játszik az \mathbb{R} -beli **távolság** és a **környezet** fogalma. Ezek definiálásához induljuk ki az abszolút érték értelmezéséből:

$$|x| := \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0). \end{cases}$$

Az alábbi állítások igazak minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén:

- a) $|x| \geq 0$, és $|x| = 0 \iff x = 0$,
- b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$,
- c) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Valóban, az első két állítás bizonyítását nem nehéz meggondolni, a c)-t pedig a gyakorlaton igazoltuk. A fenti állításokból azonnal következik, hogy

- i) $|x - y| \geq 0$ és $|x - y| = 0 \iff (x - y = 0) \iff x = y$ (pozitív definit),
- ii) $|x - y| = \left(|(-1)(y - x)| = |(-1)| \cdot |y - x| \right) = |y - x|$ (szimmetrikus),
- iii) $|x - y| \left(= |(x - z) + (z - y)| \right) \leq |x - z| + |z - y|$ (háromszög egyenlőtlenség).

Két valós szám **távolságát**, tekintettel a számegyenesen való természetes elhelyezkedésükkel úgy értelmezzük, hogy a nagyobbikból kivonjuk a kisebbiket. Más szavakkal vesszük a két szám különbségének abszolút értékét:

$$d(x, y) := |x - y| \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

A valós számok távolságára vonatkozó i), ii) és iii) tulajdonságokat a továbbiakban gyakran fogjuk alkalmazni.

Valós szám **környezetének** fogalmát így értelmezzük:

9. definíció. Valamilyen $a \in \mathbb{R}$ és $r > 0$ esetén a

$$K_r(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\}$$

halmazt az **a középpontú r sugarú környezetének** nevezzük.

A környezetek tehát olyan halmazok, amelyek elemeinek távolsága a szóban forgó középponttól kisebb, mint a megadott sugár. Mivel

$$|x - a| < r \iff -r < x - a < r \iff a - r < x < a + r,$$

ezért

$$K_r(a) = (a - r, a + r).$$

A környezetekre a következő tulajdonságok érvényesek:

a) Minden valós szám saját környezetének eleme:

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ és } \forall r > 0 \text{ esetén } a \in K_r(a).$$

b) Minden környezet része az azonos középpontú, de nála nagyobb sugarú környezeteknek:

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ és } \forall 0 < r_1 < r_2 \text{ esetén } K_{r_1}(a) \subset K_{r_2}(a).$$

c) Minden környezet tartalmazza tetszőleges elemének egy környezetét:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall r > 0 \text{ és } \forall b \in K_r(a)\text{-hez } \exists r_1 > 0, \text{ hogy } K_{r_1}(b) \subset K_r(a).$$

d) Bármely két különböző valós szám szétválasztható diszjunkt környezetekkel:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq b\text{-hez } \exists r_1, r_2 > 0, \text{ hogy } K_{r_1}(a) \cap K_{r_2}(b) = \emptyset.$$

A környezet fogalmát célszerű kiterjeszteni a kibővített valós számok halmazára, azaz célszerű értelmezni a $+\infty$ és a $-\infty$ elemek környezeteit.

10. definíció. Legyen $r > 0$ valós szám. Ekkor $a + \infty$, ill. $a - \infty$ elemek r sugarú környezetét így értelmezzük:

$$K_r(+\infty) := \left(\frac{1}{r}, +\infty\right), \quad \text{ill.} \quad K_r(-\infty) := \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right).$$

Nem nehéz meggondolni, hogy az így kiterjesztett környezetfogalom is rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden környezet része az azonos középpontú, de nála nagyobb sugarú környezeteknek:

$$\forall a \in \overline{\mathbb{R}} \text{ és } \forall 0 < r_1 < r_2 \text{ esetén } K_{r_1}(a) \subset K_{r_2}(a),$$

illetve bármely két különböző $\overline{\mathbb{R}}$ -beli elem szétválasztható diszjunkt környezetekkel:

$$\forall a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a \neq b\text{-hez } \exists r_1, r_2 > 0, \text{ hogy } K_{r_1}(a) \cap K_{r_2}(b) = \emptyset.$$