Numerikus módszerek 1.

13. előadás: Polinomokról: gyökök becslése, Horner-algoritmus

Dr. Bozsik József

ELTE IK

Tartalomjegyzék

Vizsgáljunk n-edfokú polinomokat, melyek alakja:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$
$$a_i \in \mathbb{R}, \quad a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0.$$

Vizsgáljunk n-edfokú polinomokat, melyek alakja:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$
$$a_i \in \mathbb{R}, \quad a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0.$$

Megjegyzés:

- Akár $a_i \in \mathbb{C}$ is lehet...

Vizsgáljunk n-edfokú polinomokat, melyek alakja:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$
$$a_i \in \mathbb{R}, \quad a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0.$$

Megjegyzés:

- Akár $a_i \in \mathbb{C}$ is lehet...
- Ha $a_0 = 0$, akkor az $x = 0$ gyök, leoszthatunk x-szel $\rightsquigarrow$ egyszerűbb polinomot vizsgálhatunk.

Vizsgáljunk n-edfokú polinomokat, melyek alakja:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$
$$a_i \in \mathbb{R}, \quad a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0.$$

Megjegyzés:

- Akár $a_i \in \mathbb{C}$ is lehet...
- Ha $a_0 = 0$, akkor az $x = 0$ gyök, leoszthatunk x-szel $\rightsquigarrow$ egyszerűbb polinomot vizsgálhatunk.
- Ha $a_n = 0$, akkor nem is n-edfokú...

Példa

Vizsgáljuk meg néhány polinom gyökeinek elhelyezkedését.
Komplex gyökök is szóba jöhetnek.

Tétel: Becslés polinom gyökeinek elhelyezkedésére

A $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ polinom esetén, ha $a_0 \neq 0$ és $a_n \neq 0$, akkor P bármely x_k gyökére:

$$r < |x_k| < R,$$

ahol

$$R = 1 + \frac{\max\limits_{i=0}^{n-1} |a_i|}{|a_n|}, \quad r = \frac{1}{1 + \frac{\max\limits_{i=1}^{n} |a_i|}{|a_0|}}.$$

Tétel: Becslés polinom gyökeinek elhelyezkedésére

A $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ polinom esetén, ha $a_0 \neq 0$ és $a_n \neq 0$, akkor P bármely x_k gyökére:

$$r < |x_k| < R,$$

ahol

$$R = 1 + \frac{\max\limits_{i=0}^{n-1} |a_i|}{|a_n|}, \quad r = \frac{1}{1 + \frac{\max\limits_{i=1}^{n} |a_i|}{|a_0|}}.$$

Megjegyzés: Ezzel a gyökök elhelyezkedésére egy origó középpontú nyílt körgyűrűt adtunk meg a komplex számsíkon.

Biz.:

1. Megmutatjuk, hogy ha $|x| \geq R$ (x a külső körön kívül van), akkor $|P(x)| > 0$ (x nem gyöke P-nek). A becsléshez a kétféle háromszög-egyenlőtlenséget használjuk:

Biz.:

1. Megmutatjuk, hogy ha $|x| \geq R$ (x a külső körön kívül van), akkor $|P(x)| > 0$ (x nem gyöke P-nek). A becsléshez a kétféle háromszög-egyenlőtlenséget használjuk:

$$|P(x)| \geq |a_n x^n| - \left|a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0\right|$$

Biz.:

1. Megmutatjuk, hogy ha $|x| \geq R$ (x a külső körön kívül van), akkor $|P(x)| > 0$ (x nem gyöke P-nek). A becsléshez a kétféle háromszög-egyenlőtlenséget használjuk:

$$|P(x)| \geq |a_n x^n| - \left|a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0\right|$$

A továbbiakban lefelé akarunk becsülni, így a kivonandó összeget növelnünk kell:

$$\left|a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0\right| \leq |a_{n-1}| \cdot |x|^{n-1} + \ldots + |a_0| \leq$$

$$\leq \left(\max_{i=0}^{n-1} |a_i|\right) \cdot \left(|x|^{n-1} + \ldots + 1\right) = \left(\max_{i=0}^{n-1} |a_i|\right) \cdot \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} <$$

$$< \left(\max_{i=0}^{n-1} |a_i|\right) \cdot \frac{|x|^n}{|x| - 1}.$$

Biz. folyt: Folytassuk $|P(x)|$ becslését és vizsgáljuk meg, mikor pozitív.

$$|P(x)| > |a_n| \cdot |x|^n - \left(\max_{i=0}^{n-1} |a_i|\right) \cdot \frac{|x|^n}{|x|-1} \geq 0$$

Biz. folyt: Folytassuk $|P(x)|$ becslését és vizsgáljuk meg, mikor pozitív.

$$|P(x)| > |a_n| \cdot |x|^n - \left(\max_{i=0}^{n-1} |a_i|\right) \cdot \frac{|x|^n}{|x|-1} \geq 0$$

Rendezzük át az egyenlőtlenséget, szorozzunk be $|x| - 1 > 0$-val és osszunk le $|a_n| \cdot |x|^n$-vel

$$|P(x)| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a_n| \cdot |x|^n \geq \left(\max_{i=0}^{n-1} |a_i|\right) \cdot \frac{|x|^n}{|x|-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$|x| - 1 \geq \left(\max_{i=0}^{n-1} |a_i|\right) \cdot \frac{|x|^n}{|a_n| \cdot |x|^n} \quad \Leftrightarrow$$

$$|x| \geq 1 + \frac{\max_{i=0}^{n-1} |a_i|}{|a_n|} =: R.$$

Biz. folyt: Azt kaptuk, hogy ha $|x| \geq R$, akkor $|P(x)| > 0$, vagyis x nem gyök. Ezzel beláttuk a tétel első felét.

Biz. folyt: Azt kaptuk, hogy ha $|x| \geq R$, akkor $|P(x)| > 0$, vagyis x nem gyök. Ezzel beláttuk a tétel első felét.

2. Az alsó becslést úgy nyerjük, hogy az imént belátott becslést alkalmazzuk $P(x)$ reciprok-polinomjára.
   Vezessük be az $y := \frac{1}{x}$ új változót ($x \neq 0$):

$$P(x) = P\left(\frac{1}{y}\right) = a_n\left(\frac{1}{y}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{1}{y}\right) + a_0 =$$

$$= \left(\frac{1}{y}\right)^n \cdot \underbrace{\left(a_n + a_{n-1}y + \ldots + a_1 y^{n-1} + a_0 y^n\right)}_{Q(y)} = x^n \cdot Q\left(\frac{1}{x}\right).$$

Biz. folyt: Azt kaptuk, hogy ha $|x| \geq R$, akkor $|P(x)| > 0$, vagyis x nem gyök. Ezzel beláttuk a tétel első felét.

2. Az alsó becslést úgy nyerjük, hogy az imént belátott becslést alkalmazzuk $P(x)$ reciprok-polinomjára.
   Vezessük be az $y := \frac{1}{x}$ új változót ($x \neq 0$):

$$P(x) = P\left(\frac{1}{y}\right) = a_n\left(\frac{1}{y}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{1}{y}\right) + a_0 =$$

$$= \left(\frac{1}{y}\right)^n \cdot \underbrace{(a_n + a_{n-1}y + \ldots + a_1 y^{n-1} + a_0 y^n)}_{Q(y)} = x^n \cdot Q\left(\frac{1}{x}\right).$$

A Q polinomot a P *reciprok-polinomjának* nevezzük. Ekkor

$$P(x_k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q\left(\frac{1}{x_k}\right) = 0,$$

vagyis Q gyökei P gyökeinek reciprokai.

Biz. folyt: Alkalmazzuk a már belátott becslésünket Q-ra:

$$\frac{1}{|x_k|} < 1 + \frac{\max\limits_{i=1}^{n} |a_i|}{|a_0|} = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad |x_k| > r\,.$$

$\square$

Biz. folyt: Alkalmazzuk a már belátott becslésünket Q-ra:

$$\frac{1}{|x_k|} < 1 + \frac{\max\limits_{i=1}^{n} |a_i|}{|a_0|} = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad |x_k| > r.$$

$\square$

Megjegyzés: Akár komplex együtthatós polinomokat is megengedhetünk a tételben, a bizonyítás menetén nem változtat.

Polinomok és deriváltjaik helyettesítési értékeinek kiszámítására.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \ldots$$

Polinomok és deriváltjaik helyettesítési értékeinek kiszámítására.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \dots$$

Átzárójelezzük:

$$P(x) = \underbrace{(a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1)}_{a_1^{(1)}} \cdot x + a_0 =$$

Polinomok és deriváltjaik helyettesítési értékeinek kiszámítására.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \ldots$$

Átzárójelezzük:

$$P(x) = \underbrace{\left(a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1\right)}_{a_1^{(1)}} \cdot x + a_0 =$$

$$= (\underbrace{\left(a_n x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + a_2\right)}_{a_2^{(1)}} \cdot x + a_1) \cdot x + a_0 =$$

Polinomok és deriváltjaik helyettesítési értékeinek kiszámítására.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \dots$$

Átzárójelezzük:

$$\begin{aligned} P(x) &= \underbrace{\left(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1\right)}_{a_1^{(1)}} \cdot x + a_0 = \\ &= \Big(\underbrace{\left(a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \dots + a_2\right)}_{a_2^{(1)}} \cdot x + a_1\Big) \cdot x + a_0 = \\ &= \dots = \Big(\dots \underbrace{\left(a_n x + a_{n-1}\right)}_{a_{n-1}^{(1)}} \cdot x + \dots\Big) \cdot x + a_0. \end{aligned}$$

Polinomok és deriváltjaik helyettesítési értékeinek kiszámítására.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \dots$$

Átzárójelezzük:

$$P(x) = \underbrace{\left(a_n x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1\right)}_{a_1^{(1)}} \cdot x + a_0 =$$

$$= \big(\underbrace{\left(a_n x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3} + \dots + a_2\right)}_{a_2^{(1)}} \cdot x + a_1\big) \cdot x + a_0 =$$

$$= \dots = \big(\dots \underbrace{\left(a_n x + a_{n-1}\right)}_{a_{n-1}^{(1)}} \cdot x + \dots\big) \cdot x + a_0.$$

Megj.: Más elnevezés: Horner-módszer, Horner-elrendezés.

Definíció: Horner-algoritmus

A $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinom adott ξ helyen vett helyettesítési értéke számolható a következő módon:

1. $a_n^{(1)} := a_n,$
2. $a_k^{(1)} := a_k + \xi \cdot a_{k+1}^{(1)} \quad (k = n-1, \ldots, 1, 0),$

ekkor $P(\xi) = a_0^{(1)}$.

Definíció: Horner-algoritmus

A $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinom adott ξ helyen vett helyettesítési értéke számolható a következő módon:

1. $a_n^{(1)} := a_n$,
2. $a_k^{(1)} := a_k + \xi \cdot a_{k+1}^{(1)} \quad (k = n-1, \ldots, 1, 0)$,

ekkor $P(\xi) = a_0^{(1)}$.

Állítás: A Horner-algoritmus műveletigénye

Egy n-edfokú polinom adott helyen felvett értéke kiszámítható n szorzás és n összeadás által, azaz $\mathcal{O}(n)$ művelettel.

Definíció: Horner-algoritmus

A $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polinom adott ξ helyen vett helyettesítési értéke számolható a következő módon:

1. $a_n^{(1)} := a_n$,
2. $a_k^{(1)} := a_k + \xi \cdot a_{k+1}^{(1)} \quad (k = n-1, \ldots, 1, 0)$,

ekkor $P(\xi) = a_0^{(1)}$.

Állítás: A Horner-algoritmus műveletigénye

Egy n-edfokú polinom adott helyen felvett értéke kiszámítható n szorzás és n összeadás által, azaz $\mathcal{O}(n)$ művelettel.

Biz.: ✓ $\square$

Táblázat $P(\xi)$ kézi számolásához:

Táblázat $P(\xi)$ kézi számolásához:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_k	$\dots$	a_1	a_0
$\boxed{\xi}$	$\xi \cdot a_n^{(1)}$	$\xi \cdot a_{n-1}^{(1)}$	$\dots$	$\xi \cdot a_{k+1}^{(1)}$	$\dots$	$\xi \cdot a_2^{(1)}$	$\xi \cdot a_1^{(1)}$
$a_n^{(1)}$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$	$\dots$	$a_k^{(1)}$	$\dots$	$a_1^{(1)}$	$\boxed{a_0^{(1)}}$

Példa

Számítsuk ki a $P(x) = x^5 + 6x^4 - x^3 + 3x^2 - 15x - 7$ polinom helyettesítési értékét a $\xi = 2$ helyen.

Példa

Számítsuk ki a $P(x) = x^5 + 6x^4 - x^3 + 3x^2 - 15x - 7$ polinom helyettesítési értékét a $\xi = 2$ helyen.

1	6	-1	3	-15	-7
$\boxed{2}$	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 8$	$2 \cdot 15$	$2 \cdot 33$	$2 \cdot 51$
1	8	15	33	51	$\boxed{95}$

Példa

Számítsuk ki a $P(x) = x^5 + 6x^4 - x^3 + 3x^2 - 15x - 7$ polinom helyettesítési értékét a $\xi = 2$ helyen.

1	6	-1	3	-15	-7
$\boxed{2}$	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 8$	$2 \cdot 15$	$2 \cdot 33$	$2 \cdot 51$
1	8	15	33	51	$\boxed{95}$

Tehát $P(2) = 95$, amihez összesen 10 műveletet végeztünk.

Állítás: Horner-algoritmus és a derivált

A P polinom felírható a következő alakban:

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x - \xi) \cdot \overbrace{(a_1^{(1)} + \cdots + a_n^{(1)} x^{n-1})}^{P_1(x)},$$

ahol az $a_i^{(1)}$ $(i = 0, \ldots, n)$ értékeket a Horner-algoritmus adja.
Továbbá

$$P'(\xi) = P_1(\xi) = a_1^{(2)}.$$

Állítás: Horner-algoritmus és a derivált

A P polinom felírható a következő alakban:

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x - \xi) \cdot \overbrace{(a_1^{(1)} + \cdots + a_n^{(1)} x^{n-1})}^{P_1(x)},$$

ahol az $a_i^{(1)}$ $(i = 0, \ldots, n)$ értékeket a Horner-algoritmus adja. Továbbá

$$P'(\xi) = P_1(\xi) = a_1^{(2)}.$$

Megj.: ~Taylor-polinom ξ körül.

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x - \xi) \cdot \underbrace{(a_1^{(1)} + \cdots + a_k^{(1)} x^{k-1} + a_{k+1}^{(1)} x^k \cdots + a_n^{(1)} x^{n-1})}_{P_1(x)}$$

Biz.:

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x - \xi) \cdot \underbrace{(a_1^{(1)} + \cdots + a_k^{(1)} x^{k-1} + a_{k+1}^{(1)} x^k \cdots + a_n^{(1)} x^{n-1})}_{P_1(x)}$$

Biz.:

1. P-ben x^k $(k = 0, \ldots, n-1)$ együtthatója

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x - \xi) \cdot \underbrace{(a_1^{(1)} + \cdots + a_k^{(1)} x^{k-1} + a_{k+1}^{(1)} x^k \cdots + a_n^{(1)} x^{n-1})}_{P_1(x)}$$

Biz.:

1. P-ben x^k $(k = 0, \ldots, n-1)$ együtthatója
   - külön: x^n együtthatói a két oldalon: $a_n = a_n^{(1)}$, ✓

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x-\xi)\cdot\underbrace{(a_1^{(1)} + \dots + a_k^{(1)}x^{k-1} + a_{k+1}^{(1)}x^k \dots + a_n^{(1)}x^{n-1})}_{P_1(x)}$$

Biz.:

1. P-ben x^k $(k = 0, \dots, n-1)$ együtthatója
   - külön: x^n együtthatói a két oldalon: $a_n = a_n^{(1)}$, ✓
   - bal oldalon definícó szerint: a_k,

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x-\xi)\cdot\underbrace{(a_1^{(1)} + \cdots + a_k^{(1)}x^{k-1} + a_{k+1}^{(1)}x^k \cdots + a_n^{(1)}x^{n-1})}_{P_1(x)}$$

Biz.:

1. P-ben x^k $(k = 0, \ldots, n-1)$ együtthatója
   - külön: x^n együtthatói a két oldalon: $a_n = a_n^{(1)}$, ✓
   - bal oldalon definícó szerint: a_k,
   - a fenti alak szerint a jobb oldalon: $a_k^{(1)} - \xi \cdot a_{k+1}^{(1)}$.

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x - \xi) \cdot \underbrace{(a_1^{(1)} + \cdots + a_k^{(1)} x^{k-1} + a_{k+1}^{(1)} x^k \cdots + a_n^{(1)} x^{n-1})}_{P_1(x)}$$

Biz.:

1. P-ben x^k $(k = 0, \ldots, n-1)$ együtthatója
   - külön: x^n együtthatói a két oldalon: $a_n = a_n^{(1)}$, ✓
   - bal oldalon definícó szerint: a_k,
   - a fenti alak szerint a jobb oldalon: $a_k^{(1)} - \xi \cdot a_{k+1}^{(1)}$.
   - A Horner-algoritmus szerint: $a_k^{(1)} = a_k + \xi \cdot a_{k+1}^{(1)}$. ✓

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x-\xi)\cdot \underbrace{(a_1^{(1)} + \dots + a_k^{(1)} x^{k-1} + a_{k+1}^{(1)} x^k \dots + a_n^{(1)} x^{n-1})}_{P_1(x)}$$

Biz.:

1. P-ben x^k $(k = 0, \dots, n-1)$ együtthatója
   - külön: x^n együtthatói a két oldalon: $a_n = a_n^{(1)}$, ✓
   - bal oldalon definícó szerint: a_k,
   - a fenti alak szerint a jobb oldalon: $a_k^{(1)} - \xi \cdot a_{k+1}^{(1)}$.
   - A Horner-algoritmus szerint: $a_k^{(1)} = a_k + \xi \cdot a_{k+1}^{(1)}$. ✓
2. P deriváltja a fenti alakból (összeg, szorzat):

$$P'(x) = 1 \cdot P_1(x) + (x-\xi) \cdot P_1'(x)$$

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x-\xi)\cdot\underbrace{(a_1^{(1)} + \cdots + a_k^{(1)}x^{k-1} + a_{k+1}^{(1)}x^k \cdots + a_n^{(1)}x^{n-1})}_{P_1(x)}$$

Biz.:

1. P-ben x^k $(k = 0, \ldots, n-1)$ együtthatója
   - külön: x^n együtthatói a két oldalon: $a_n = a_n^{(1)}$, ✓
   - bal oldalon definícó szerint: a_k,
   - a fenti alak szerint a jobb oldalon: $a_k^{(1)} - \xi \cdot a_{k+1}^{(1)}$.
   - A Horner-algoritmus szerint: $a_k^{(1)} = a_k + \xi \cdot a_{k+1}^{(1)}$. ✓
2. P deriváltja a fenti alakból (összeg, szorzat):

$$P'(x) = 1 \cdot P_1(x) + (x-\xi) \cdot P_1'(x) \quad \Rightarrow \quad P'(\xi) = P_1(\xi).$$

Biz. folyt: $P_1(\xi)$ kiszámítása ugyanúgy, Horner-algoritmussal, P_1 együtthatói: $a_n^{(1)}, \ldots, a_1^{(1)}$.

Biz. folyt: $P_1(\xi)$ kiszámítása ugyanúgy, Horner-algoritmussal, P_1 együtthatói: $a_n^{(1)}, \ldots, a_1^{(1)}$.

1. $a_n^{(2)} := a_n^{(1)}$,
2. $a_k^{(2)} := a_k^{(1)} + \xi \cdot a_{k+1}^{(2)} \quad (k = n-1, \ldots, 1)$,

ekkor $P_1(\xi) = P'(\xi) = a_1^{(2)}$. $\square$

Biz. folyt: $P_1(\xi)$ kiszámítása ugyanúgy, Horner-algoritmussal, P_1 együtthatói: $a_n^{(1)}, \dots, a_1^{(1)}$.

1. $a_n^{(2)} := a_n^{(1)}$,
2. $a_k^{(2)} := a_k^{(1)} + \xi \cdot a_{k+1}^{(2)} \quad (k = n-1, \dots, 1)$,

ekkor $P_1(\xi) = P'(\xi) = a_1^{(2)}$. $\square$

Folytatjuk a táblázatot:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
$\boxed{\xi}$	$\xi \cdot a_n^{(1)}$	$\xi \cdot a_{n-1}^{(1)}$	$\dots$	$\xi \cdot a_2^{(1)}$	$\xi \cdot a_1^{(1)}$
$a_n^{(1)}$	$a_{n-1}^{(1)}$	$a_{n-2}^{(1)}$	$\dots$	$a_1^{(1)}$	$\boxed{a_0^{(1)} = P(\xi)}$
$\boxed{\xi}$	$\xi \cdot a_n^{(1)}$	$\xi \cdot a_{n-1}^{(1)}$	$\dots$	$\xi \cdot a_2^{(1)}$	
$a_n^{(2)}$	$a_{n-1}^{(2)}$	$a_{n-2}^{(2)}$	$\dots$	$\boxed{a_1^{(2)} = P_1(\xi)}$	

Tovább is folytathatjuk. . .

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x - \xi) \cdot P_1(x)$$

Tovább is folytathatjuk...

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x-\xi)\cdot P_1(x)$$

Állítás: Horner-algoritmus és a magasabbrendű deriváltak

A P polinom felírható a következő alakban:

$$P(x) = a_0^{(1)} + a_1^{(2)}(x-\xi) + a_2^{(3)}(x-\xi)^2 + \cdots + a_n^{(n+1)}(x-\xi)^n,$$

ahol az $a_i^{(j+1)}$ $(j = 0, \ldots, n;\ i = j, \ldots, n)$ értékeket a Horner-módszer adja. Továbbá:

$$\frac{P^{(j)}(\xi)}{j!} = P_j(\xi) = a_j^{(j+1)},$$

ahol $P_j(x) = a_j^{(j)} + \cdots + a_n^{(j)} x^{n-j}$.

Tovább is folytathatjuk. . .

$$P(x) = a_0^{(1)} + (x-\xi)\cdot P_1(x)$$

Állítás: Horner-algoritmus és a magasabbrendű deriváltak

A P polinom felírható a következő alakban:

$$P(x) = a_0^{(1)} + a_1^{(2)}(x-\xi) + a_2^{(3)}(x-\xi)^2 + \cdots + a_n^{(n+1)}(x-\xi)^n,$$

ahol az $a_i^{(j+1)}$ $(j = 0,\ldots,n;\ i = j,\ldots,n)$ értékeket a Horner-módszer adja. Továbbá:

$$\frac{P^{(j)}(\xi)}{j!} = P_j(\xi) = a_j^{(j+1)},$$

ahol $P_j(x) = a_j^{(j)} + \cdots + a_n^{(j)}x^{n-j}$.

Biz.: indukcióval, nem kell.

Megjegyzés: Ha a táblázatot addig folytatjuk, míg csak 1 elemet kapunk, akkor az átlóban találjuk a P polinom ξ körüli Taylor-polinomjának együtthatóit.

Megjegyzés: Ha a táblázatot addig folytatjuk, míg csak 1 elemet kapunk, akkor az átlóban találjuk a P polinom ξ körüli Taylor-polinomjának együtthatóit.

Példa

Határozzuk meg a $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ polinom $\xi = 1$ körüli Taylor-polinomját a Horner-módszer segítségével!

Példa

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1 =$$

1	-2	3	-1	1
$\boxed{1}$	$1 \cdot 1$	$1 \cdot (-1)$	$1 \cdot 2$	$1 \cdot 1$
1	-1	2	1	$\boxed{2 = P(1)}$
$\boxed{1}$	$1 \cdot 1$	$1 \cdot 0$	$1 \cdot 2$	
1	0	2	$\boxed{3 = P'(1)}$	
$\boxed{1}$	$1 \cdot 1$	$1 \cdot 1$		
1	1	$\boxed{3 = \frac{P''(1)}{2}}$		
$\boxed{1}$	$1 \cdot 1$			
1	$\boxed{2 = \frac{P'''(1)}{3!}}$			

Példa

$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1 =$

$= 1 \cdot (x-1)^4 + 2 \cdot (x-1)^3 + 3 \cdot (x-1)^2 + 3 \cdot (x-1) + 2$

az 1 körüli Taylor-polinomot kaptuk.

1	-2	3	-1	1
$\boxed{1}$	$1 \cdot 1$	$1 \cdot (-1)$	$1 \cdot 2$	$1 \cdot 1$
1	-1	2	1	$\boxed{2 = P(1)}$
$\boxed{1}$	$1 \cdot 1$	$1 \cdot 0$	$1 \cdot 2$	
1	0	2	$\boxed{3 = P'(1)}$	
$\boxed{1}$	$1 \cdot 1$	$1 \cdot 1$		
1	1	$\boxed{3 = \frac{P''(1)}{2}}$		
$\boxed{1}$	$1 \cdot 1$			
1	$\boxed{2 = \frac{P'''(1)}{3!}}$			

Példák Matlab-ban

1. Véletlen (valós és komplex) együtthatós magasabbfokú ($n = 5, 10, 50, 100$) polinomok gyökeinek és a rájuk adott korlátoknak szemléltetése.