

Programozáselmélet - gyakorlatokra javasolt feladatok - 10. alkalom

1. A feladat informálisan: döntsük el hogy egy 1-nél nagyobb természetes szám prím-e.

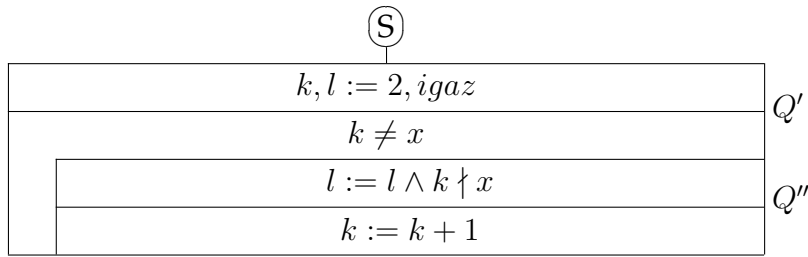
$$A = (x:\mathbb{N}^+, l:\mathbb{L})$$

$$B = (x':\mathbb{N}^+)$$

$$Q = (x = x' \wedge x > 1)$$

$$R = (Q \wedge l = (\forall j \in [2..x-1]: j \nmid x))$$

A program állapottere $(x:\mathbb{N}^+, k:\mathbb{N}^+, l:\mathbb{L})$.



Legyen $Q' = (Q \wedge k = 2 \wedge l = igaz)$ a szekvencia közbülső állítása, $t : x - k$ terminálófüggvény.

$$P = (Q \wedge l = (\forall j \in [2..k-1]: j \nmid x) \wedge k \in [2..x])$$

Legyen a ciklusmagnak mint szekvenciának a közbülső állítása Q'' , ahol $Q'' = (Q \wedge l = (\forall j \in [2..k]: j \nmid x) \wedge k + 1 \in [2..x] \wedge x - k = t_0)$.

Lásd be hogy az S program megoldja a specifikált feladatot.

2. A feladat informálisan: számoljuk ki az n -edik Fibonacci számot.

$$A = (n:\mathbb{N}, s:\mathbb{N})$$

$$B = (n':\mathbb{N})$$

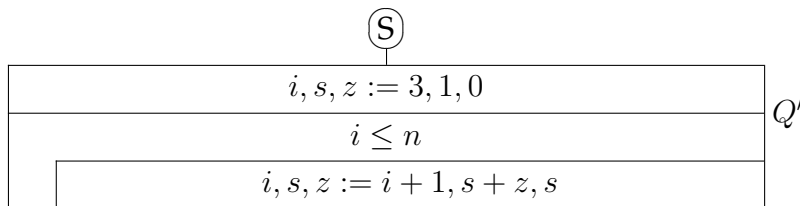
$$Q = (n = n' \wedge n > 2)$$

$$R = (Q \wedge s = Fib(n))$$

ahol

$$Fib(n) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n = 1 \\ 1 & \text{ha } n = 2 \\ Fib(n-1) + Fib(n-2) & \text{ha } n > 2 \end{cases}$$

A program állapottere $(n:\mathbb{N}, s:\mathbb{N}, z:\mathbb{N}, i:\mathbb{N})$.



Legyen $Q' = (Q \wedge i = 3 \wedge s = 1 \wedge z = 0)$ a szekvencia közbülső állítása, $t : n + 1 - i$ terminálófüggvény.

$P = (Q \wedge s = \text{Fib}(i - 1) \wedge z = \text{Fib}(i - 2) \wedge i \in [3..n + 1])$

Lásd be hogy az S program megoldja a specifikált feladatot.

3. A feladat informálisan: adott x egész számokat tartalmazó vektor minden elemét növeljük meg eggyel.

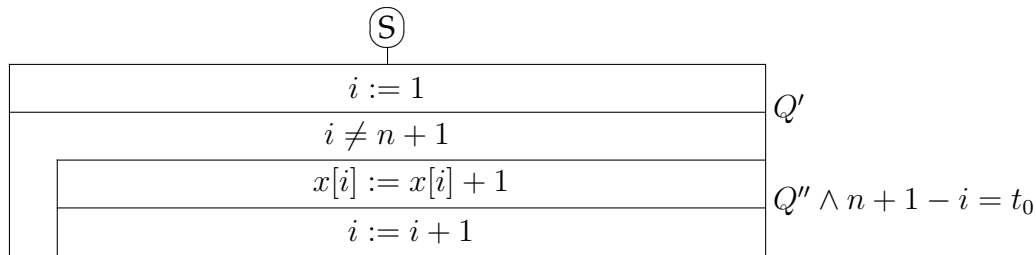
$A = (x:\mathbb{Z}^n)$

$B = (x':\mathbb{Z}^n)$

$Q = (x = x')$

$R = (\forall k \in [1..n]: x[k] = x'[k] + 1)$

A program állapottere $(x:\mathbb{Z}^n, i:\mathbb{N})$.



Legyen $Q' = (Q \wedge i = 1)$ a szekvencia közbülső állítása, $t : n + 1 - i$ terminálófüggvény.

$P = (\forall k \in [1..i - 1]: x[k] = x'[k] + 1 \wedge i \in [1..n + 1] \wedge \forall k \in [i..n]: x[k] = x'[k])$

Legyen a ciklusmagnak mint szekvenciának a közbülső állítása $Q'' \wedge n + 1 - i = t_0$, ahol $Q'' = P^{i \leftarrow i+1}$. Lásd be hogy az S program megoldja a specifikált feladatot.

4. A feladat informálisan: adott az x egész számokat tartalmazó vektor, amiről tudjuk hogy van legalább egy negatív eleme. Adjuk meg a vektor első negatív elemének indexét.

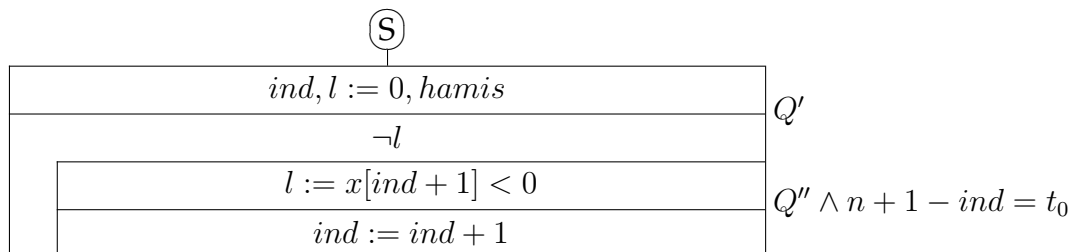
$A = (x:\mathbb{Z}^n, ind:\mathbb{N})$

$B = (x':\mathbb{Z}^n)$

$Q = (x = x' \wedge \exists j \in [1..n]: x[j] < 0)$

$R = (Q \wedge ind \in [1..n] \wedge x[ind] < 0 \wedge \forall k \in [1..ind - 1]: x[k] \geq 0)$

A program állapottere $(x:\mathbb{Z}^n, ind:\mathbb{N}, l:\mathbb{L})$.



Legyen $Q' = (Q \wedge ind = 0 \wedge l = hamis)$ a szekvencia közbülső állítása, $t : n + 1 - ind$ terminálófüggvény.

$$P = (Q \wedge ind \in [0..n] \wedge \forall j \in [1..ind - 1]: x[j] \geq 0 \wedge l = (\exists j \in [1..ind]: x[j] < 0))$$

Legyen a ciklusmagnak mint szekvenciának a közbülső állítása $Q'' \wedge n + 1 - ind = t_0$, ahol $Q'' = P^{ind \leftarrow ind+1}$. Lásd be hogy az S program megoldja a specifikált feladatot.

5. A feladat informálisan: határozzuk meg két pozitív egész legnagyobb közös osztóját.

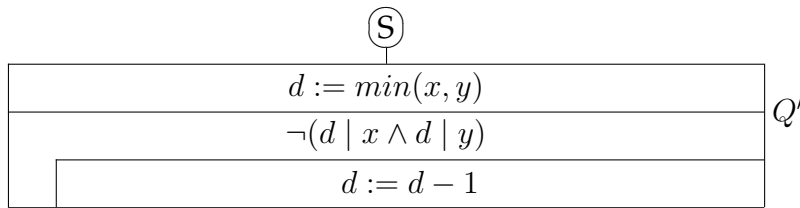
$$A = (x:\mathbb{N}^+, y:\mathbb{N}^+, d:\mathbb{N}^+)$$

$$B = (x':\mathbb{N}^+, y:\mathbb{N}^+)$$

$$Q = (x = x' \wedge y = y')$$

$$R = (Q \wedge d \mid x \wedge d \mid y \wedge \forall k \in [d + 1..min(x, y)]: \neg(k \mid x \wedge k \mid y))$$

A program állapottere $(x:\mathbb{N}^+, y:\mathbb{N}^+, d:\mathbb{N}^+)$.



Legyen $Q' = (Q \wedge d = min(x, y))$ a szekvencia közbülső állítása, $t : d$ terminálófüggvény.

$$P = (Q \wedge \forall k \in [d + 1..min(x, y)]: \neg(k \mid x \wedge k \mid y))$$

Lásd be hogy az S program megoldja a specifikált feladatot.

6. A feladat informálisan: határozzuk meg a legnagyobb olyan számot melynek négyzete nem nagyobb egy adott számnál.

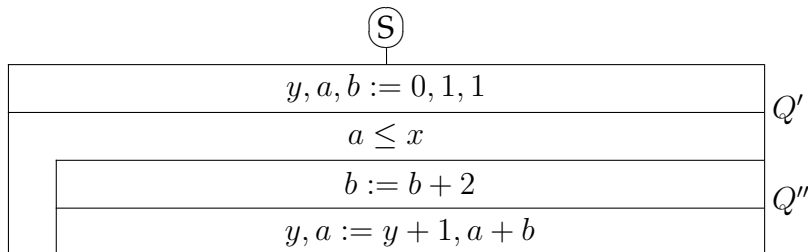
$$A = (x:\mathbb{N}, y:\mathbb{N})$$

$$B = (x':\mathbb{N})$$

$$Q = (x = x')$$

$$R = (Q \wedge y^2 \leq x < (y + 1)^2)$$

A program állapottere $(x:\mathbb{N}, y:\mathbb{N}, a:\mathbb{N}, b:\mathbb{N})$.



Legyen $Q' = (Q \wedge y = 0 \wedge a = 1 \wedge b = 1)$ a szekvencia közbülső állítása, $t : x - a + 8$ terminálófüggvény.

$P = (Pre \wedge y^2 \leq x \wedge a = (y + 1)^2 \wedge b = 2y + 1)$ ciklusinvariáns.

Legyen a ciklusmagnak mint szekvenciának a közbülső állítása Q'' , ahol $Q'' = (Q \wedge (y + 1)^2 \leq x \wedge a + b = (y + 2)^2 \wedge b = 2y + 3 \wedge x - a + 8 = t_0)$.

Lásd be hogy az S program megoldja a specifikált feladatot.