6. gyakorlat

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS 2.

Kapcsolat a tanult fogalmak között

Emlékeztető. ***Tétel.*** *Ha $f \in D\{a\}$, akkor $f \in C\{a\}$.*

Ez az állítás nem fordítható meg, azaz van olyan folytonos függvény, ami nem differenciálható egy adott pontban. Ha egy függvény parciálisan differenciálható, vagy létezik minden iránymenti deriváltja egy adott pontban, akkor még nem biztos, hogy a függvény folytonos a pontban.

Tétel. *Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ha $f \in D\{a\}$, akkor $\forall v \in \mathbb{R}^n$ egységvektor esetén az f függvénynek van v irányú iránymenti deriváltja az a pontban, és*

$$\partial_v f(a) = f'(a) \cdot v$$

A fenti állítás nem fordítható meg, azaz van olyan függvény, amelynek létezik minden iránymenti deriváltja egy adott pontban, de ott nem totálisan differenciálható.

1. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy az*

$$f(x,y) := \sqrt{|xy|} \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big)$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban, ott léteznek a parciális deriváltak, de f nem differenciálható a $(0,0)$ pontban!

Megoldás. A folytonosság igazolása. A definíció szerint $f \in C\Big\{(0,0)\Big\}$ azt jelenti, hogy

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in \mathcal{D}_f,\ \Big\|(x,y) - (0,0)\Big\| < \delta\colon\ \Big|f(x,y) - f(0,0)\Big| < \varepsilon.$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ számot és legyen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Ekkor

$$\Big|f(x,y) - f(0,0)\Big| = \Big|f(x,y)\Big| = \sqrt{|xy|} \le \Big(|xy| \le \tfrac{x^2+y^2}{2} \text{miatt}\Big) \le$$
$$\le \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Big\|(x,y)\Big\| < \varepsilon}_{\|(x,y)\| < \sqrt{2}\varepsilon}.$$

Így, ha $\delta := \sqrt{2}\varepsilon$, akkor $(*)$ teljesül, ami azt jelenti, hogy $f \in C\Big\{(0,0)\Big\}$.

$\exists \partial_1 f(0,0)$ és $\exists \partial_2 f(0,0)$ igazolása.

$$\partial_1 f(0,0) = \Big(f(x,0)\Big)'_{x=0} = (x \mapsto 0)'_{x=0} = 0,$$
$$\partial_2 f(0,0) = \Big(f(0,y)\Big)'_{y=0} = (y \mapsto 0)'_{y=0} = 0$$

Az $f \notin D\{(0,0)\}$ állítás igazolása. Indirekt módon tegyük fel, hogy $f \in D\{(0,0)\}$. Ekkor a deriváltmátrix előállítására vonatkozó tétel alapján

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(0,0) & \partial_2 f(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Így a totális derivált definíciója szerint

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|f(a+h)-f(a)-\Big(\partial_1 f(0,0) \quad \partial_2 f(0,0)\Big)\cdot\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|h_1h_2|}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

Könnyű észrevenni, hogy ez az állítás nem igaz. A határértékre vonatkozó átviteli elv alapján elég egy olyan origóhoz tartó pontsorozatot találni, amely mentén a függvényértékek sorozata nem tart 0-hoz. Tekintsük például az $y = x$ egyenletű egyenes mentén az

$$(x_n, y_n) := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

sorozatot. Ekkor $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n, y_n) = (0, 0)$, és ezekben a pontokban a függvényértékek

$$\frac{\sqrt{|x_n\, y_n|}}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}} = \frac{\sqrt{\left|\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right|}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

sorozata nem tart 0-hoz. Az indirekt feltételből kiindulva tehát ellentmondásra jutottunk, és ez azt jelenti, hogy az f függvény nem differenciálható a $(0, 0)$ pontban.

2. Feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \Big((x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\Big)\\ 0 & \Big((x,y)=(0,0)\Big).\end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az f függvény a $(0, 0)$ pontban

a) *folytonos,*

b) *minden irány mentén deriválható,*

c) *totálisan nem deriválható!*

Megoldás.

a) A pontbeli folytonosság definíciója alapján azt kell megmutatni, hogy

$$(**) \qquad \forall\varepsilon>0\text{-hoz } \exists\delta>0,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \Big\|(x,y)-(0,0)\Big\|<\delta\colon \Big|f(x,y)-f(0,0)\Big|<\varepsilon.$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ valós számot. Ha $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, akkor

$$\Big|f(x,y)-f(0,0)\Big| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}-0\right| = \frac{|x|\cdot y^2}{x^2+y^2} \le \frac{|x|\cdot(x^2+y^2)}{x^2+y^2} =$$
$$= |x| \le \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\| < \varepsilon.$$

Így, ha $\delta := \varepsilon$, akkor $(**)$ teljesül, ami azt jelenti, hogy $f \in C\Big\{(0, 0)\Big\}$.

b) A $0 = (0,0)$ origóból kiinduló irányokat az

$$v := (\cos\alpha, \sin\alpha) \qquad \big(\alpha \in [0, 2\pi)\big)$$

egységvektorokkal adjuk meg. Tekintsünk egy rögzített $\alpha \in [0, 2\pi)$ paraméterrel megadott v vektort. Az iránymenti deriválhatósághoz a definíció szerint azt kell megmutatni, hogy a

$$F(t) := f(0 + tv) = f(tv) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \frac{t\cos\alpha \cdot (t\sin\alpha)^2}{(t\cos\alpha)^2 + (t\sin\alpha)^2} =$$

$$= (\cos\alpha)(\sin\alpha)^2 \cdot t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

valós-valós függvény deriválható a $t = 0$ pontban. Ez viszont nyilván igaz, illetve $F'(0) = (\cos\alpha)(\sin\alpha)^2$. Ezért az f függvénynek létezik a v irányban vett iránymenti deriváltja. Az iránymenti derivált értéke $F'(0)$. Így

$$\partial_v f(0,0) = (\cos\alpha)(\sin\alpha)^2.$$

c) Indirekt módon tegyük fel, hogy $f \in D\{(0,0)\}$. A parciális deriváltak az

$$e_1 = (1,0) = (\cos 0, \sin 0) \qquad \text{és} \qquad e_2 = (0,1) = (\cos\pi/2, \sin\pi/2)$$

vektorok irányában vett iránymenti deriváltak. Ezért az előző pont szerint

$$\partial_1 f(0,0) = \partial_{e_1} f(0,0) = (\cos 0)(\sin 0)^2 = 0,$$
$$\partial_2 f(0,0) = \partial_{e_2} f(0,0) = (\cos\pi/2)(\sin\pi/2)^2 = 0.$$

Ekkor a deriváltmátrix előállítására vonatkozó tételünk alapján

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix}\partial_1 f(0,0) & \partial_2 f(0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$$

és a totális derivált definíciója szerint

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left| f(h_1,h_2) - f(0,0) - \begin{pmatrix}\partial_1 f(0,0) & \partial_2 f(0,0)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left| \dfrac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} - 0 \right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_1| h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}} = 0.$$

Ez most sem lehetséges, mert az előző feladat megoldásában alkalmazott gondolatmenettel, ha

$$(x_n, y_n) := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

akkor $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$, és ezekben a pontokban az értékek

$$\frac{|x_n| y_n^2}{(x_n^2 + y_n^2)^{3/2}} = \frac{\left|\frac{1}{n}\right| \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{\left(\frac{2}{n^2}\right)^3}} = \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{\sqrt{2^3}}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

sorozata nem tart 0-hoz. Az indirekt feltételből kiindulva tehát ellentmondásra jutottunk, és ez azt jelenti, hogy az f függvény nem differenciálható a $(0,0)$ pontban.

Felület érintősíkja

Emlékeztető. Az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ pontban *van érintősíkja*, ha $f \in D\big\{(x_0, y_0)\big\}$. ***Az érintősík egyenlete***:

$$z - f(x_0, y_0) = \partial_1 f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0) \cdot (y - y_0),$$

amelynek egyik ***normálvektora***: $\vec{n}\big(\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0), -1\big)$.

3. Feladat. *Legyen*

$$f(x, y) := \sqrt{x^2 - 2y^2} \qquad \Big((x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 > 2y^2\Big).$$

a) *Számítsa ki az f függvény elsőrendű parciális deriváltjait!*

b) *Írja fel a $z = \sqrt{x^2 - 2y^2}$ egyenletű felület $P_0(3, 2)$ pontjához tartozó érintősíkjának az egyenletét, és adja meg a sík egy normálvektorát.*

Megoldás.

a) Ha $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ és $x^2 > 2y^2$, akkor a parciális deriváltak léteznek, és

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2y^2}},$$

$$\partial_2 f(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2y^2}} \cdot (-4y) = \frac{-2y}{\sqrt{x^2 - 2y^2}}.$$

b) Legyen $(x_0, y_0) = (3, 2)$. Az f függvény parciális deriváltjai léteznek az (x_0, y_0) pont egy környezetében és folytonosak az (x_0, y_0) pontban, ezért f totálisan deriválható az (x_0, y_0) pontban. A felület

$$(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

pontjához tehát érintősík húzható. Ennek egyenlete a

$$z - f(x_0, y_0) = \partial_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)$$

képlettel adható meg. Mivel

$$f(x_0, y_0) = \sqrt{x_0^2 - 2y_0^2} = \sqrt{3^2 - 2 \cdot 2^2} = 1,$$

$$\partial_1 f(x_0, y_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 2y_0^2}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 - 2 \cdot 2^2}} = 3,$$

$$\partial_2 f(x_0, y_0) = \frac{-2y_0}{\sqrt{x_0^2 - 2y_0^2}} = \frac{-4}{\sqrt{3^2 - 2 \cdot 2^2}} = -4,$$

ezért az érintősík egyenlete:

$$z - 1 = 3(x - 3) - 4(y - 2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3x - 4y - z = 0.$$

Ennek egy normálvektora:

$$\vec{n} = \Big(\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0), -1\Big) = (3, -4, -1).$$

Young-tétel

Emlékeztető. ***Tétel.*** *Ha* $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *és* $f \in D^2\{a\}$, *akkor* $\partial_{12} f(a) = \partial_{21} f(a)$.

4. Feladat. *Legyen*

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big) \\ 0 & \big((x,y) = (0,0)\big). \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy a $\partial_{12} f(0,0)$ *és a* $\partial_{21} f(0,0)$ *parciális deriváltak léteznek, de ezek nem egyenlők:*

$$\partial_{12} f(0,0) \neq \partial_{21} f(0,0).$$

Mutassuk meg azt is, hogy f *nem differenciálható kétszer a* $(0,0)$ *pontban!*

Megoldás. Először az elsőrendű parciális deriváltfüggvényeket határozzuk meg. A $(0,0)$ pontban az x változó szerinti parciális derivált a definíció alapján:

$$\partial_1 f(0,0) = \partial_x f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = \underset{\sim}{0},$$

az y változó szerinti parciális derivált pedig

$$\partial_2 f(0,0) = \partial_y f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = \underset{\sim}{0}.$$

Ha $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (vagyis $x^2+y^2 \neq 0$), akkor

$$\partial_1 f(x,y) = \partial_x f(x,y) = y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{2x\cdot(x^2+y^2) - (x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{és}$$

$$\partial_2 f(x,y) = \partial_y f(x,y) = x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy \cdot \frac{-2y\cdot(x^2+y^2) - (x^2-y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

A másodrendű parciális deriváltakat az origóban a parciális derivált definíciója alapján számítjuk ki:

$$\underset{\sim\sim\sim}{\partial_{12} f(0,0)} = \partial_2\big(\partial_1 f\big)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_1 f(0,t) - \partial_1 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-t-0}{t} = \underset{\sim}{-1},$$

$$\underset{\sim\sim\sim}{\partial_{21} f(0,0)} = \partial_1\big(\partial_2 f\big)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\partial_2 f(t,0) - \partial_2 f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t-0}{t} = \underset{\sim}{1}.$$

A $\partial_{12} f(0,0) = \partial_{21} f(0,0)$ egyenlőség tehát valóban nem teljesül. (A parciális deriváltak sorrendjének a képzése nem cserélhető fel.)

Az f függvény nem deriválható kétszer az origóban. Valóban, ha ez igaz lenne, akkor Young tétele szerint a különböző sorrendben vett másodrendű deriváltak megegyeznének, és ez a fentiek alapján *nem igaz*.

Láncszabály

Emlékeztető. **Tétel.** *Legyen $n, m, s \in \mathbb{N}^+$. Ha $g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és $g \in D\{a\}$, továbbá $f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ és $f \in D\{g(a)\}$, akkor $f \circ g \in D\{a\}$ és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a),$$

ahol $\cdot$ a mátrixok közötti szorzás műveletét jelöli.

5. Feladat. *Legyen*

$$g(x) := \left(e^{3x},\ 1 + e^{-3x}\right) \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \text{és} \qquad f(x, y) := x^4 + 2xy^2 + y^3 \quad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2\right).$$

Számítsuk ki az $F := f \circ g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény deriváltját!

Megoldás. Világos, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ pontban a

$$g := (g_1, g_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \text{ahol} \qquad g_1(x) := e^{3x} \quad \text{és} \quad g_2(x) := 1 + e^{-3x},$$

függvény differenciálható, hiszen g_1 és g_2 koordinátafüggvényei differenciálhatók, illetve

$$g_1'(x) = 3e^{3x} \qquad \text{és} \qquad g_2'(x) = -3e^{-3x}.$$

Ekkor $g'(x)$ egy oszlopmátrix:

$$g'(x) = \begin{pmatrix} g_1'(x) \\ g_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{3x} \\ -3e^{-3x} \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Minden $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ pontban az

$$f := \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \text{ahol} \qquad f(y) := y_1^4 + 2y_1y_2^2 + y_2^3,$$

függvény differenciálható, hiszen egy kétváltozós polinom, és ekkor a

$$\partial_1 f(y) = 4y_1^3 + 2y_2^2 \qquad \text{és} \qquad \partial_2 f(y) = 4y_1y_2 + 3y_2^2$$

parciális deriváltjai folytonos függvények. Ekkor $f'(y)$ egy sormátrix:

$$f'(y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(y) & \partial_2 f(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y_1^3 + 2y_2^2 & 4y_1y_2 + 3y_2^2 \end{pmatrix} \qquad (y \in \mathbb{R}^2)$$

Ezért a láncszabály feltételei teljesülnek, és

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(g(x)) & \partial_2 f(g(x)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_1'(x) \\ g_2'(x) \end{pmatrix} = \\
&= \partial_1 f(g(x)) \cdot g_1'(x) + \partial_2 f(g(x)) \cdot g_2'(x) = \\
&= \partial_1 f(e^{3x}, 1 + e^{-3x}) \cdot 3e^{3x} + \partial_2 f(e^{3x}, 1 + e^{-3x}) \cdot (-3e^{-3x}) = \\
&= (4(e^{3x})^3 + 2(1 + e^{-3x})^2) \cdot 3e^{3x} + (4(e^{3x})(1 + e^{-3x}) + 3(1 + e^{-3x})^2) \cdot (-3e^{-3x}) = \\
&= 12e^{12x} + 6e^{3x} - 15e^{-3x} - 18e^{-6x} - 9e^{-9x}
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Ebben az esetben a láncszabály könnyebben megjegyezhető a következő alakban:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x}, \qquad \text{ahol} \qquad y_1 = g_1 \quad \text{és} \quad y_2 = g_2.$$

6. Feladat. *Legyen*

$$g(x,y) := \big(xy^2,\, x+y^2\big) \quad \text{és} \quad f(x,y) := ye^{x^2} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big).$$

Számítsuk ki az $F := f \circ g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény deriváltját!

Megoldás. Világos, hogy minden $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ pontban a

$$g := (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \text{ahol} \qquad g_1(x) := x_1x_2^2 \quad \text{és} \quad g_2(x) := x_1 + x_2^2$$

függvény differenciálható, hiszen a deriválási szabályok szerint a g_1 és a g_2 kétváltozós koordinátafüggvényei differenciálhatók, illetve

$$\partial_1 g_1(x) = x_2^2, \quad \partial_2 g_1(x) = 2x_1x_2, \quad \partial_1 g_2(x) = 1, \quad \partial_2 g_2(x) = 2x_2.$$

Ekkor $g'(x)$ egy (2×2)-es mátrix:

$$g'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x) & \partial_2 g_1(x) \\ \partial_1 g_2(x) & \partial_2 g_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^2 & 2x_1x_2 \\ 1 & 2x_2 \end{pmatrix} \qquad (x \in \mathbb{R}^2).$$

A deriválási szabályok szerint minden $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ pontban az

$$f := \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \text{ahol} \qquad f(y) := y_2 e^{y_1^2},$$

függvény differenciálható, és ekkor a

$$\partial_1 f(y) = 2y_1y_2e^{y_1^2} \qquad \text{és} \qquad \partial_2 f(y) = e^{y_1^2}.$$

Ekkor $f'(y)$ egy sormátrix:

$$f'(y) = \big(\partial_1 f(y) \quad \partial_2 f(y)\big) = \big(2y_1y_2e^{y_1^2} \quad e^{y_1^2}\big) \qquad (y \in \mathbb{R}^2).$$

Ezért a láncszabály feltételei teljesülnek, és

$$F'(x) = (f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x) = \big(\partial_1 f(g(x)) \quad \partial_2 f(g(x))\big) \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(x) & \partial_2 g_1(x) \\ \partial_1 g_2(x) & \partial_2 g_2(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \big(\partial_1 f(g(x))\cdot\partial_1 g_1(x) + \partial_2 f(g(x))\cdot \partial_1 g_2(x) \quad \partial_1 f(g(x))\cdot \partial_2 g_1(x) + \partial_2 f(g(x))\cdot\partial_2 g_2(x)\big) =$$

$$= \big(\partial_1 F(x) \quad \partial_2 F(x)\big) \qquad (x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2).$$

Mivel

$$\begin{aligned}
\partial_1 F(x) &= \partial_1 f(g(x))\cdot \partial_1 g_1(x) + \partial_2 f(g(x))\cdot\partial_1 g_2(x) = \\
&= \partial_1 f(x_1x_2^2,\, x_1+x_2^2)\cdot x_2^2 + \partial_2 f(x_1x_2^2,\, x_1+x_2^2)\cdot 1 = \\
&= 2(x_1x_2^2)(x_1+x_2^2)e^{(x_1x_2^2)^2}\cdot x_2^2 + e^{(x_1x_2^2)^2}\cdot 1 = (2x_1x_2^6 + 2x_1^2x_2^4 + 1)e^{x_1^2x_2^4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2 F(x) &= \partial_1 f(g(x))\cdot \partial_2 g_1(x) + \partial_2 f(g(x))\cdot\partial_2 g_2(x) = \\
&= \partial_1 f(x_1x_2^2,\, x_1+x_2^2)\cdot 2x_1x_2 + \partial_2 f(x_1x_2^2,\, x_1+x_2^2)\cdot 2x_2 = \\
&= 2(x_1x_2^2)(x_1+x_2^2)e^{(x_1x_2^2)^2}\cdot 2x_1x_2 + e^{(x_1x_2^2)^2}\cdot 2x_2 = 2x_2(2x_1^2x_2^4 + 2x_1^3x_2^2 + 1)e^{x_1^2x_2^4},
\end{aligned}$$

ezért

$$F'(x) = \Big((2x_1x_2^6 + 2x_1^2x_2^4 + 1)e^{x_1^2x_2^4} \quad 2x_2(2x_1^2x_2^4 + 2x_1^3x_2^2 + 1)e^{x_1^2x_2^4} \Big) \qquad \Big(x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \Big).$$

Megjegyzés. Ebben az esetben az F függvény parciális deriváltjai könnyebben megjegyezhetők a következő alakban:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2) \qquad \text{ahol} \qquad y_1 = g_1 \quad \text{és} \quad y_2 = g_2.$$