12. gyakorlat

GÖRBÉK

Emlékeztető. Akkor mondjuk, hogy $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ halmaz ***egyszerű sima görbe*** az $\mathbb{R}^n$ térben, ha létezik olyan I intervallumon értelmezett $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ függvény, amire

- $\gamma : I \to \Gamma$ bijekció,
- $\gamma \in C^1(I)$ és $\forall t \in I : \gamma'(t) \neq 0$ (nullmátrix).

teljesül. A γ leképezést a $\boldsymbol{\Gamma}$ ***görbe paraméterezésének*** nevezzük.

Akkor mondjuk, hogy $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ halmaz ***egyszerű zárt görbe*** az $\mathbb{R}^n$ térben, ha létezik olyan $[a, b]$ véges zárt intervallumon értelmezett $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ függvény, amire:

- $\gamma(a) = \gamma(b)$,
- γ leszűkítése az $[a, b[$ intervallumra $(\gamma|_{[a,b)})$ paraméterezése a Γ görbének.

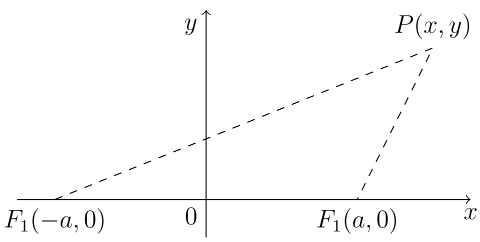
A $\gamma(t) := \big(x(t), y(t)\big) \in \mathbb{R}^2 \qquad (t \in I)$ paraméterezés síkgörbe megadásának módjai:

- ***Paraméteres alakban:***
$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \qquad (t \in I).$$
- ***Függvénygrafikon alakjában:*** $\gamma(t) := \big(t, f(t)\big) \in \mathbb{R}^2 \qquad (t \in I).$
- ***Implicit alakban:*** $F(x, y) = 0.$
- ***Polárkoordinátás alakban:*** $r = r(\varphi) \qquad (\varphi \in I).$

1. Feladat. *A síkbeli Descartes-féle koordináta-rendszerben vegyük az $F_1(-a, 0)$ és az $F_2(a, 0)$ pontokat, ahol $a > 0$. Adjuk meg azon síkbeli pontok halmazát, amelyek a megadott F_1 és F_2 pontoktól lévő távolságának szorzata állandó, és a^2-tel egyenlő!*

Megoldás. Készítsük ábrát!

A feladatban megadott feltétel szerint
$$PF_1 \cdot PF_2 = a^2.$$
Ezért
$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a^2.$$



Négyzetre emelés és további ekvivalens átalakítások után megkapjuk az implicit alakot:
$$\Big((x+a)^2 + y^2\Big)\Big((x-a)^2 + y^2\Big) = a^4$$
$$\Big((x^2 + y^2 + a^2) + 2ax\Big)\Big((x^2 + y^2 + a^2) - 2ax\Big) = a^4$$
$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4$$
$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(x^2 + y^2) + a^4 - 4a^2x^2 = a^4$$
$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

A görbe jobb szemléltetése érdekében írjuk fel polárkoordinátás alakban!

Legyen
$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad \Longrightarrow \qquad r^2 = x^2 + y^2.$$

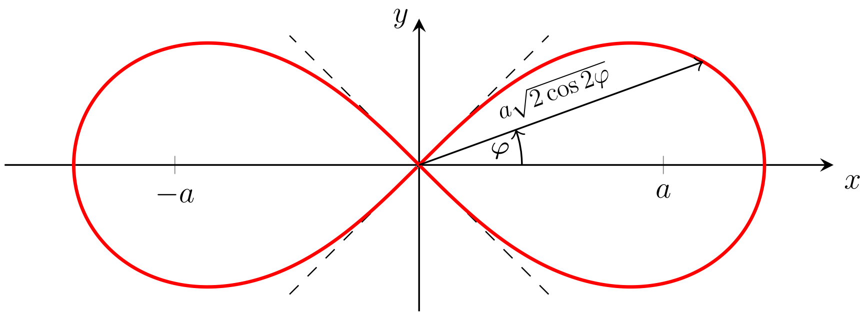
Így
$$(r^2)^2 = 2a^2\Big((r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2\Big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad r^4 = 2a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Ezért $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$, és mivel $r \geq 0$, így a keresett polárkoordinátás alak:
$$r = a\sqrt{2\cos 2\varphi},$$

ahol $\cos 2\varphi \geq 0$. Így
$$-\frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} \qquad \text{vagy} \qquad 2\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq 2\pi + \frac{\pi}{2},$$

azaz
$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

Ez azt jelenti, hogy ez nem egy egyszerű sima görbe, hanem két egyszerű zárt görbe uniója.



Ezt hívjuk ***Bernoulli-féle lemniszkátának***.

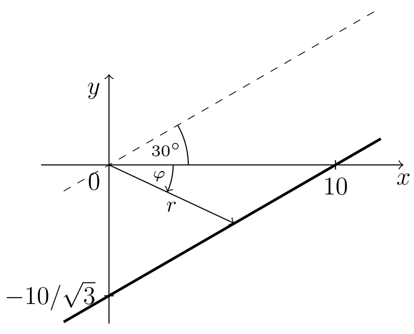
2. Feladat. *Írjuk fel az alábbi görbéket különböző alakjaiban!*

a) $\left.\begin{array}{l} x = \sqrt{3}t + 10 \\ y = t \end{array}\right\} \ (t \in \mathbb{R})$, *b)* $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, *c)* $r = \dfrac{2\sin\varphi}{1 + \cos 2\varphi} \quad \big(\varphi \in (0, \pi/2)\big)$.

Megoldás.

a) Az implicit alakja:
$$x = \sqrt{3}y + 10 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{10}{\sqrt{3}}$$

A görbe egy egyenes, amelynek függvénygrafikon alakja:
$$\gamma(t) := \left(t, \frac{1}{\sqrt{3}}t - \frac{10}{\sqrt{3}}\right) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$



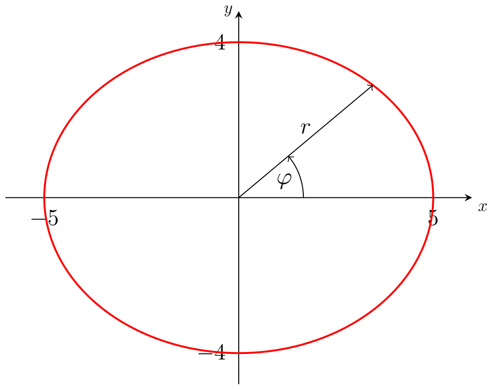
A polárkoordinátás alakja:

$$x = \sqrt{3}y + 10 \quad\Longleftrightarrow\quad r\cos\varphi = \sqrt{3}r\sin\varphi + 10 \quad\Longleftrightarrow\quad r\left(\frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right) = 5$$

$$\Longleftrightarrow\quad r\cos\!\left(\varphi + \tfrac{\pi}{3}\right) = 5 \quad\Longleftrightarrow\quad r = \frac{5}{\cos\!\left(\varphi + \tfrac{\pi}{3}\right)},$$

ahol $\cos\!\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) > 0$. Ebből $-\frac{\pi}{2} < \varphi + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, azaz $\varphi \in \left(-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$.

b) A megadott implicit egyenletből tudjuk, hogy a görbe egy ellipszis. Ekvivalens átalakításokkal:



$$16x^2 + 25y^2 = 400$$

$$25(x^2 + y^2) - 9x^2 = 400.$$

Ebből

$$25r^2 - 9r^2\cos^2\varphi = 400$$

$$r^2(25 - 9\cos^2\varphi) = 400.$$

A polárkoordinátás alakja:

$$r = \frac{20}{\sqrt{25 - 9\cos^2\varphi}} \qquad \big(\varphi \in [0, 2\pi]\big).$$

A polárkoordinátás alakjából könnyen felírhatunk egy paraméteres alakot:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\varphi)\cos\varphi = \frac{20\cos\varphi}{\sqrt{25 - 9\cos^2\varphi}} \\ y &= r(\varphi)\sin\varphi = \frac{20\sin\varphi}{\sqrt{25 - 9\cos^2\varphi}} \end{aligned}\right\} \qquad \big(\varphi \in [0, 2\pi]\big).$$

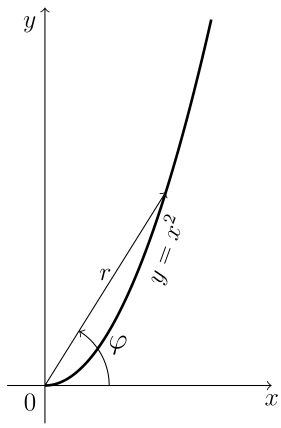
c) Az $1 + \cos 2\varphi = 2\cos^2 x$ azonossággal

$$r = \frac{2\sin\varphi}{1 + \cos 2\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos^2 x} \quad\Longleftrightarrow\quad r^2\cos^2 x = r\sin\varphi,$$

illetve $x = r\cos\varphi$ és $y = r\sin\varphi$ helyettesítéssel

$$y = x^2, \quad \text{ahol} \quad x > 0, \quad \text{hiszen} \quad \varphi \in (0, \pi/2).$$

Ez az implicit alak azt mutatja, hogy a görbe egy félparabola. A függvénygrafikon alakja:



$$\gamma(t) := (t,\, t^2) \qquad (t > 0).$$

Paraméteres alakja:

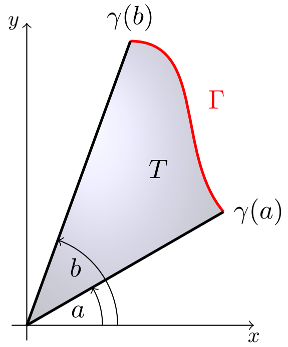
$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 \end{aligned}\right\} \qquad (t > 0).$$

Emlékeztető. A
$$\gamma(t) := \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n \qquad (t \in I),$$
paraméterezésű görbe ***érintővektora***:
$$\gamma'(t) := \big(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t)\big) \in \mathbb{R}^n \qquad (t \in I).$$
Akkor mondjuk, hogy a Γ görbe ***rektifikálható***, ha a Γ görbébe írt poligonok hosszának halmaza korlátos. Ekkor az
$$L = L_\Gamma := \sup_\tau \ell_\tau$$
számot a Γ ***görbe ívhosszának*** nevezzük.

Tétel. *Minden egyszerű sima Γ görbe rektifikálható, és ívhossza*
$$L_\Gamma = \int_a^b \big\|\gamma'(t)\big\|\, dt,$$
ahol γ a Γ görbének egy paraméterezése.

Polárkoordinátás alakban megadott síkbeli görbe ívhossza
$$L = \int_a^b \sqrt{\big(r(\varphi)\big)^2 + \big(r'(\varphi)\big)^2}\, d\varphi.$$

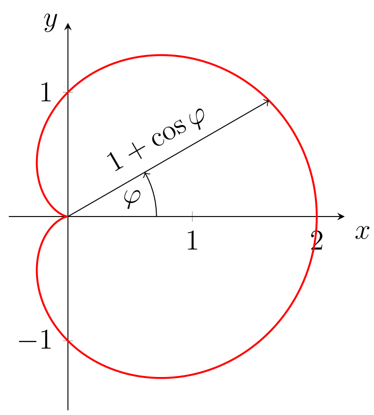
Az ábrán látható T síkidomot határoló Γ görbe polárkoordinátás alakja:
$$r = r(\varphi) \qquad \big(\varphi \in [a, b]\big)$$
Ekkor a síkidom területe:
$$t(T) = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi)\, d\varphi.$$
Az előző formulával ki tudunk számolni egyszerű zárt görbék által közrezárt területeket.



3. Feladat. *Számoljuk ki az*
$$r = 1 + \cos\varphi \qquad \big(\varphi \in [0, 2\pi]\big)$$
kardioid ívhosszát és közrezárt területét!

Megoldás.

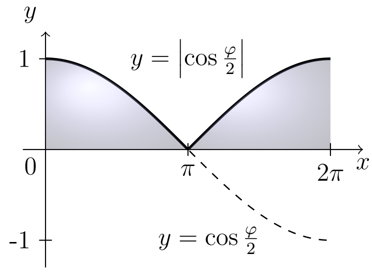
A tanult formula alapján az ívhossza:
$$L = \int_a^b \sqrt{\big(r(\varphi)\big)^2 + \big(r'(\varphi)\big)^2}\, d\varphi,$$
ahol
$$\left.\begin{aligned} r(\varphi) &= 1 + \cos\varphi \\ r'(\varphi) &= -\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad \big(\varphi \in [0, 2\pi]\big),$$



amiből
$$\big(r(\varphi)\big)^2 + \big(r'(\varphi)\big)^2 = (1 + \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 2 + 2\cos\varphi = 4\,\frac{1 + \cos\varphi}{2} = 4\cos^2\tfrac{\varphi}{2}.$$

Ezért

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2\tfrac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2\int\limits_0^{2\pi} \left|\cos\tfrac{\varphi}{2}\right| d\varphi$$



Vegyük észre, hogy a $\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$ függvény görbealatti területe a $[0, 2\pi]$ intervallumon kétszer akkora, mint a $\cos\frac{\varphi}{2}$ függvény görbealatti területe a $[0, \pi]$ intervallumon. Így

$$L = 2\int\limits_0^{2\pi} \left|\cos\tfrac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 2\cdot 2\int\limits_0^{\pi} \cos\tfrac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4\left[\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi} = 8\sin\tfrac{\pi}{2} = 8.$$

A kardioid közrezárt területe:

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_a^b r^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \cos\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{4}\right) d\varphi =$$

$$= \left[\frac{3}{4}\varphi + \sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{8}\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}.$$

4. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi paraméterezéssel megadott térgörbék ívhosszát a megadott intervallum mellett!*

a) $\gamma(t) := \left(t,\, t^2,\, \tfrac{2}{3}t^3\right) \qquad \left(t \in [1,2]\right),$

b) $\gamma(t) := \left(e^{2t}\cos t,\, e^{2t}\sin t,\, e^{2t}\right) \qquad \left(t \in [0,1]\right),$

c) $\gamma(t) := \left(\sin\tfrac{t}{3},\, \cos\tfrac{t}{3},\, \tfrac{\sqrt{8}}{3}t\right) \qquad \left(t \in [0,2]\right).$

Megoldás.

a) Az érintővektor normája:

$$\gamma'(t) = \left(1,\, 2t,\, 2t^2\right) \implies \left\|\gamma'(t)\right\| = \sqrt{1+4t^2+4t^4} = \sqrt{(2t^2+1)^2} = 2t^2+1 \quad \left(t \in [1,2]\right).$$

Így a tanult formula alapján:

$$L = \int\limits_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| dt = \int\limits_1^2 (2t^2+1)\, dt = \left[2\,\frac{t^3}{3} + t\right]_1^2 = \left(2\,\frac{8}{3} + 2\right) - \left(2\,\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{17}{3}.$$

b) Az érintővektor:

$$\gamma'(t) = \left(2e^{2t}\cos t - e^{2t}\sin t,\ 2e^{2t}\sin t + e^{2t}\cos t,\ 2e^{2t}\right) =$$
$$= e^{2t}(2\cos t - \sin t,\ 2\sin t + \cos t,\ 2) \qquad \left(t \in [0,1]\right).$$

Ennek normája:

$$\|\gamma'(t)\| = e^{2t}\sqrt{(2\cos t - \sin t)^2 + (2\sin t + \cos t)^2 + 2^2} =$$
$$= e^{2t}\sqrt{5\cos^2 t + 5\sin^2 t + 4} = e^{2t}\sqrt{5(\cos^2 t + \sin^2 t) + 4} = 3e^{2t}.$$

Így a tanult formula alapján:

$$L = \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| dt = \int_0^1 3e^{2t}\, dt = 3\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}(e^2 - e^0) = \frac{3(e^2-1)}{2}.$$

c) Az érintővektor normája:

$$\gamma'(t) = \left(\tfrac{1}{3}\cos\tfrac{t}{3},\ -\tfrac{1}{3}\sin\tfrac{t}{3},\ \tfrac{\sqrt{8}}{3}\right) \implies \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\tfrac{1}{9}\cos^2\tfrac{t}{3} + \tfrac{1}{9}\sin^2\tfrac{t}{3} + \tfrac{8}{9}} = 1 \quad \left(t \in [0,2]\right).$$

Így a tanult formula alapján:

$$L = \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| dt = \int_0^2 1\, dt = 2.$$

A fenti eredmény azt mutatja, hogy a görbe természetes paraméterezéssel van megadva, azaz az ívhossz a paraméter.

Emlékeztető. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ egy $\gamma \in I \to \Gamma$ paraméterezéssel rendelkező egyszerű sima görbe és $t_0 \in I$ az intervallum egyik pontja. A $\gamma_0 := \gamma(t_0)$ ponton áthaladó, $\gamma'(t_0)$ irányvektorral rendelkező

$$\Gamma_{\gamma_0} := \left\{\gamma(t_0) + t\gamma'(t_0) \mid t \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}^n$$

egyenest a $\boldsymbol{\Gamma}$ ***görbe*** $\boldsymbol{\gamma_0}$ ***pontbeli érintőjének*** nevezzük.

Tegyük fel, hogy a

$$\gamma(t) := \left(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t)\right) \in \mathbb{R}^n \qquad (t \in I),$$

paraméterezés kétszer folytonosan differenciálható, azaz $\gamma \in C^2(I)$. Ekkor a

$$\gamma''(t) := \left(\gamma_1''(t), \gamma_2''(t), \ldots, \gamma_n''(t)\right) \in \mathbb{R}^n \qquad (t \in I),$$

második deriváltját úgy értelmezzük, mint egy $I \to \mathbb{R}^n$ típusú függvény.

Tegyük fel még, hogy van olyan $t_0 \in I$ pont, ahol $\gamma''(t_0) \neq 0$, sőt a $\gamma'(t_0)$ és a $\gamma''(t_0)$ vektorok nem párhuzamosak egymással. Ekkor a $\gamma'(t_0)$ és $\gamma''(t_0)$ vektorok által kifeszített síkot a Γ görbe $\gamma_0 := \gamma(t_0)$ pontjához tartozó ***simulósíkjának*** nevezzük. Ennek

$$b(t_0) := \frac{\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)}{\left\|\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)\right\|}$$

normálvektorát ***binormális egységvektornak*** nevezzük.

A simulósík elnevezés onnan ered, hogy a görbe γ_0 pontján átmenő érintőegyenesre illeszkedő síkok közül a görbe ehhez simul a legjobban. Síkgörbe simulósíkja minden pontban a görbe síkja. Az egyenesnek nincsen simulósíkja.

5. Feladat. *Adjuk meg az alábbi paraméterezésű térgörbék megadott $\gamma(t_0)$ ponthoz tartozó érintőjét és simulósíkjának egyenletét!*

a) $\gamma(t) := (t^3 - 2t^2,\ 3t+2,\ t^2-5) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad (t_0 = 1),$

b) $\gamma(t) := (\cos^2 t,\ \cos t \sin t,\ \sin^2 t) \quad \left(t \in [0, 2\pi]\right), \qquad \left(t_0 = \frac{\pi}{6}\right),$

c) $\gamma(t) := (a\cos t,\ b\sin t,\ e^t) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad (t_0 = 0),$ *ahol* $ab \neq 0.$

Megoldás.

a) Ha $\gamma(t) := (t^3 - 2t^2,\ 3t+2,\ t^2-5)$ $(t \in \mathbb{R})$, akkor $\gamma(1) = (-1,\ 5,\ -4)$, illetve

$$\gamma'(t) = (3t^2 - 4t,\ 3,\ 2t) \quad \text{és} \quad \gamma''(t) = (6t-4,\ 0,\ 2),$$

és így

$$\gamma'(1) := (-1,\ 3,\ 2) \qquad \text{és} \qquad \gamma''(1) := (2,\ 0,\ 2).$$

Ezért

$$\gamma(1) + t\gamma'(1) = (-1,\ 5,\ -4) + t(-1,\ 3,\ 2) = (-1-t,\ 3t+5,\ 2t-4) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

A keresett görbe érintője a $\gamma_0 = \gamma(1)$ pontban:

$$\Gamma_{\gamma_0} = \left\{(-1-t, 3t+5, 2t-4) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}.$$

A simulósík egyik normálvektora:

$$\gamma'(1) \times \gamma''(1) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\,e_1 + 6e_2 - 6e_3 = 6\,(1,\ 1,\ -1)$$

Mivel $\gamma(1) := (-1,\ 5,\ -4)$, ezért a simulósík egyenlete:

$$x + y - z = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 - 1 \cdot (-4) \qquad \Longrightarrow \qquad x + y - z = 8.$$

b) Ha $\gamma(t) := \left(\cos^2 t,\ \frac{\sin 2t}{2},\ \sin^2 t\right)$ $\left(t \in [0, 2\pi]\right)$, akkor $\gamma\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{3}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{1}{4}\right)$, illetve

$$\gamma'(t) = (2\cos t(-\sin t),\ \cos 2t,\ 2\sin t\cos t) = (-\sin 2t,\ \cos 2t,\ \sin 2t)$$

és

$$\gamma''(t) = (-2\cos 2t,\ -2\sin 2t,\ 2\cos 2t).$$

Így

$$\gamma'\left(\frac{\pi}{6}\right) := \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{és} \qquad \gamma''\left(\frac{\pi}{6}\right) := (-1,\ -\sqrt{3},\ 1).$$

Ezért

$$\gamma\left(\frac{\pi}{6}\right) + t\gamma'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{3}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{1}{4}\right) + t\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3-2\sqrt{3}t}{4},\ \frac{\sqrt{3}+2t}{4},\ \frac{1+2\sqrt{3}t}{4}\right) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

A keresett görbe érintője a $\gamma_0 = \gamma\left(\frac{\pi}{6}\right)$ pontban:

$$\Gamma_{\gamma_0} = \left\{\left(\frac{3-2\sqrt{3}t}{4},\ \frac{\sqrt{3}+2t}{4},\ \frac{1+2\sqrt{3}t}{4}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t \in \mathbb{R}\right\}.$$

A simulósík egyik normálvektora:

$$\gamma'(1)\times\gamma''(1)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1 & -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}=2e_1-2e_3=(2,\,0,\,2)$$

Mivel $\gamma\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{3}{4},\,\frac{\sqrt{3}}{4},\,\frac{1}{4}\right)$, ezért a simulósík egyenlete:

$$2x+2z=2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\qquad\Longrightarrow\qquad 2x+2z=1.$$

c) Ha $\gamma(t):=(a\cos t,\,b\sin t,\,e^t)$ $(t\in\mathbb{R})$, akkor $\gamma(0)=(a,\,0,\,1)$, illetve

$$\gamma'(t)=(-a\sin t,\,b\cos t,\,e^t)\quad\text{és}\quad\gamma''(t)=(-a\cos t,\,-b\sin t,\,e^t)$$

és így

$$\gamma'(0):=(0,\,b,\,1)\qquad\text{és}\qquad\gamma''(0):=(-a,\,0,\,1)$$

Ezért

$$\gamma(0)+t\gamma'(0)=(a,\,0,\,1)+t(0,\,b,\,1)=(a,\,bt,\,t+1)\qquad(t\in\mathbb{R}).$$

A keresett görbe érintője a $\gamma_0=\gamma(0)$ pontban:

$$\Gamma_{\gamma_0}=\left\{(a,\,bt,\,t+1)\in\mathbb{R}^3\;\middle|\;t\in\mathbb{R}\right\}.$$

A simulósík egyik normálvektora:

$$\gamma'(0)\times\gamma''(0)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & b & 1 \\ -a & 0 & 1 \end{vmatrix}=b\,e_1-ae_2+abe_3=(b,\,-a,\,ab)$$

Mivel $\gamma(0)=(a,\,0,\,1)$, ezért a simulósík egyenlete:

$$bx-ay+abz=b\cdot a-a\cdot 0+ab\cdot 1\qquad\Longrightarrow\qquad bx-ay+abz=2ab.$$