RELÁCIÓTULAJDONSÁGOK (A alaphalmaz, R reláció)

· DICHOTOM: $\forall a,b \in A$ $(a,b) \in R \vee (b,a) \in R$

pl. $\le$, $\mathbb{R}$-en

2 elem mindig összehasonlítható

$a \le b$

· TRICHOTOM: $\forall a,b \in A$:
- $a = b$
- $(a,b) \in R$
- $(b,a) \in R$

közül pontosan 1 teljesül

ha $a \ne b$: $(a,b) \in R$ XOR $(b,a) \in R$

ha $a = b$ IRREFLEXÍV

TILOS

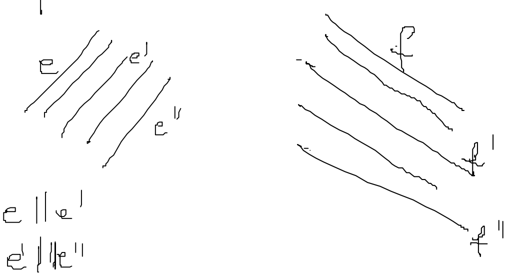
Megj. 1. R szimm $\not\Rightarrow$ R nemantiszimm
$\not\Leftarrow$

GYAKORLATON!

Megj. 2. R refl. $\Rightarrow$ R nem irreflexív
R irrefl. $\Rightarrow$ R nem refl.

EKVIVALENCIARELÁCIÓK

Pl. $e \parallel f$



$f \parallel f'$

$f \parallel f''$

mi a közös sok párhuzamos egyenesben?

→ meredekség

→ irányuk

$e \parallel e'$

$e \parallel e''$

Pl. 2. „egyidősek" = azonos évben születtek → Születési év

„közös jellemző"

Def. EKVIVALENCIARELÁCIÓ (EKV. REL.)

Egy A alaphalmazon R reláció ekv. rel., ha
- reflexív
- szimmetrikus
- tranzitív.

Pl. $\mathbb{Z}$, „="

Pl. $\mathbb{Z}$, $\{(x,y) \mid x-y \text{ osztható } 10\text{-zel}\} =: R$

pl. $(7,17) \in R$ $\quad (143, 13) \in R$

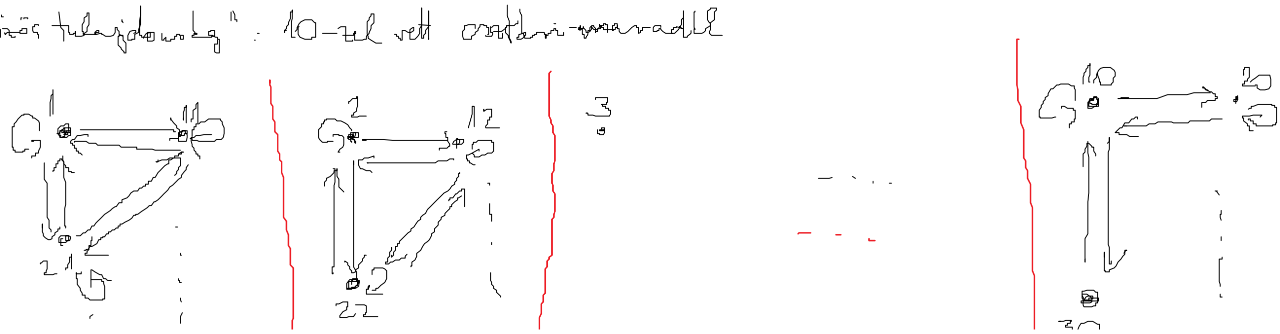
$(12, -8) \in R$ $\quad (13, 17) \notin R$

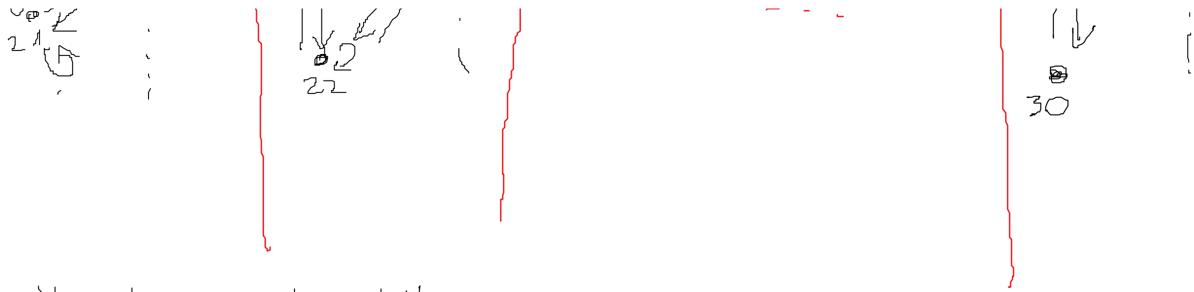
Refl.: $\forall x \in \mathbb{Z}$: $x - x = 0$ osztható 10-zel ✓

Szimm.: ha $x, y \in \mathbb{Z}$: $x-y$ osztható 10-zel: $y - x = -(x-y) \Rightarrow (y,x) \in R$ ✓
$(x,y) \in R$

Tranz.: Ha $x,y,z \in \mathbb{Z}$: $\left.\begin{array}{l} x-y \text{ osztható } 10\text{-zel} \\ y-z \quad \text{—}\|\text{—} \end{array}\right\}$ $x - z = x - y + y - z = \underbrace{(x-y) + (y-z)}_{\text{osztható } 10\text{-zel}}$ ✓

„Közös tulajdonság": 10-zel vett osztási maradék





Def. Osztályozás v. particionálás

Egy H alaphalmaz osztályozása egy $\mathcal{O}$ halmazrendszer, melyre:
/kotta $\mathcal{O}$/

- elemei páronként diszjunkt nemüres halmazok
- $\bigcup \mathcal{O} = H$

Megj.: Minden ekvivalenciareláció osztályozza az alaphalmazt.

$$\mathcal{O} = \{ \{1, 11, 21, \dots\}, \{2, 12, 22, \dots\}, \dots, \{10, 20, \dots\} \}$$ előbbi példa

Áll.: H tetsz. alaphalmaz, R ekv. rel. H-n. Ekkor R meghatároz egy osztályfelbontást.
Az azonos osztályban lévő elemek rel-ban állnak, különböző osztályban lévő elemek nem.

Megj.:
- Rel. szabálya helyett megadhatjuk az osztályfelbontást.
- Minden ekv. rel.

Pl. • $\parallel$ egyenesek: meredekség (irány)

Jelölés: $[x] := \{ y \in H \mid (x, y) \in R \}$ „vki, aki x-szel rel-ban áll"
x barátai

Biz.: kell: $\mathcal{O} := \{ [x] \mid x \in H \}$ egy osztályfelbontás

kell:
- $[x]$ nemüres: $x \in [x]$, mert R reflexív ✓
- $\bigcup \mathcal{O} = \bigcup_{x \in H} [x] = H$: kell: $\forall x \in H$-ra $\exists [\ ] : x \in [\ ]$
  pl. $x \in [x]$ ✓
- páronként diszjunktak:
  $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ lehet, de akkor $[x] = [y]$ kell

TILOS

Tf. van nemüres metszet

$\exists z \in H: z \in [x] \wedge z \in [y]$

$(x, z) \in R \qquad (y, z) \in R$

$\Updownarrow$ szimm

$(z, y) \in R$

$(x, z) \in R \wedge (z, y) \in R \overset{\text{tranz.}}{\Longrightarrow} (x, y) \in R$

$x \in [y]$

Legyen $w \in [x]$ tetszőleges

$\Downarrow$

$(x, w) \in R$

$(w, x) \in R \qquad (x, y) \in R \Bigg\} \overset{\text{tranz.}}{\Longrightarrow} (w, y) \in R$

$w \in [y]$

Tehát $\forall$ $[x]$-beli benne van $[y]$-ban

$[x] \subseteq [y]$

Fordítva ugyanez: $[y] \subseteq [x] \qquad \Longrightarrow [x] = [y]$ $\square$

<u>Áll.</u> Ha H-n $\mathcal{O}$ osztályozás, akkor „egy osztályban van vele" reláció ekv.-rel.

$$R = \{(x, y) \mid \exists A \in \mathcal{O}: x, y \in A\}$$

<u>Biz.</u> kell: refl.

szimm

tranz.

H. F.

RÉSZBENRENDEZÉS

Pl. $\leq$, $|$, $\subseteq$, „osztója" ($\mathbb{N}$)

Def. Egy A alaphalmazon R reláció részbenrendezés, ha
- reflexív
- antiszimm.
- tranzitív.

Pl. $\leq$: $a \leq a$

$a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$

$a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$

„összehasonlítjuk az elemeket, kicsi, nagyobb"

„osztója" ↓ osztója ↓ többszöröse

Pl. $H = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ /hatványhalmaz/

$= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

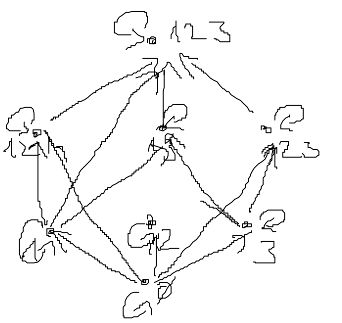
Reláció: $\subseteq$

Refl. ✓

antiszimm. ✓

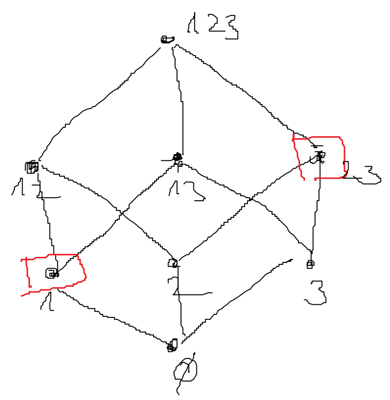
tranz. ✓ Részbenrendezés ✓

Relációgráf: {} elhagyjuk



$\longleftrightarrow$

HASSE-DIAGRAM



- hurokél nincs
- nyíl helyett vonal
- tranzitivitásból köv. nem

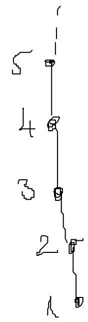
Def. Ha H-n R részbenrendezés

(H,R): részbenrendezett halmaz (R.R.H.)

Def. Ha H-n R részbenrendezés

(H, R): részbenrendezett halmaz (R.R.H.)

Pl. $\mathbb{N}^+, \leq$



lánc