Numerikus módszerek 1.

4. előadás: Megmaradási tételek, progonka módszer, *LDU*-felbontás, Cholesky-felbontás

Dr. Bozsik József

ELTE IK

Definíció: szimmetrikus mátrixok

Az A mátrix szimmetrikus, ha $A = A^\top$.

Definíció: szimmetrikus mátrixok

Az A mátrix szimmetrikus, ha $A = A^\top$.

Definíció: pozitív definit mátrixok

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix *pozitív definit*, ha

1. $\langle Ax, x \rangle = x^\top Ax > 0$ bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ esetén; vagy
2. minden főminorára $D_k = \det(A_k) > 0$; vagy
3. minden sajátértéke pozitív.

Definíció: szimmetrikus mátrixok

Az A mátrix szimmetrikus, ha $A = A^\top$.

Definíció: pozitív definit mátrixok

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix *pozitív definit*, ha

1. $\langle Ax, x\rangle = x^\top Ax > 0$ bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ esetén; vagy
2. minden főminorára $D_k = \det(A_k) > 0$; vagy
3. minden sajátértéke pozitív.

Állítás: pozitív definit mátrixok ekvivalens jellemzése

Az előző **1. 2. 3.** feltételek ekvivalensek.

Definíció: szimmetrikus mátrixok

Az A mátrix szimmetrikus, ha $A = A^\top$.

Definíció: pozitív definit mátrixok

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix *pozitív definit*, ha

1. $\langle Ax, x\rangle = x^\top Ax > 0$ bármely $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ esetén; vagy
2. minden főminorára $D_k = \det(A_k) > 0$; vagy
3. minden sajátértéke pozitív.

Állítás: pozitív definit mátrixok ekvivalens jellemzése

Az előző **1. 2. 3.** feltételek ekvivalensek.

Biz.: nélkül. □

Definíció:

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns a soraira**, ha $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Definíció:

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns a soraira**, ha $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Definíció:

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns az oszlopaira**, ha $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ji}| \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Definíció:

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns a soraira**, ha $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ij}| \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Definíció:

Az A mátrix **szigorúan diagonálisan domináns az oszlopaira**, ha $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i} |a_{ji}| \quad (i = 1, \ldots, n)$.

Példa:

A következő mátrix szigorúan diagonálisan domináns a soraira és oszlopaira is.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Definíció:

Az A mátrix **fél sávszélessége** $s \in \mathbb{N}$, ha

$$\begin{aligned} \forall\ i,j : |i-j| > s : \quad a_{ij} = 0 \ \text{ és} \\ \exists\ k,l : |k-l| = s : a_{kl} \neq 0. \end{aligned}$$

Definíció:

Az A mátrix **fél sávszélessége** $s \in \mathbb{N}$, ha

$$\forall \; i,j : |i-j| > s : \quad a_{ij} = 0 \; \text{ és}$$
$$\exists \; k,l : |k-l| = s : a_{kl} \neq 0.$$

Példa:

A következő mátrix szimmetrikus, pozitív definit és fél sávszélessége 1.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Definíció:

Az A mátrix **profilja** sorokra a $(k_1, \ldots, k_n)$, oszlopokra az $(l_1, \ldots, l_n)$ szám n-sek, melyekre

$$\forall \;\; j = 1, \ldots, k_i : \;\; a_{ij} = 0 \;\; \text{és} \;\; a_{i,k_i+1} \neq 0,$$
$$\forall \;\; i = 1, \ldots, l_j : \;\; a_{ij} = 0 \;\; \text{és} \;\; a_{l_j+1,j} \neq 0.$$

Soronként és oszloponként az első nem nulla elemig a nullák száma.

Definíció:

Az A mátrix **profilja** sorokra a $(k_1, \ldots, k_n)$, oszlopokra az $(l_1, \ldots, l_n)$ szám n-sek, melyekre

$$\forall\ j = 1, \ldots, k_i: \quad a_{ij} = 0 \text{ és } a_{i,k_i+1} \neq 0,$$
$$\forall\ i = 1, \ldots, l_j: \quad a_{ij} = 0 \text{ és } a_{l_j+1,j} \neq 0.$$

Soronként és oszloponként az első nem nulla elemig a nullák száma.

Példa:

A mátrix profilja sorokra $(0, 0, 2, 1)$, oszlopokra $(0, 1, 1, 2)$.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Készítsük el az $Ax = b$ LER k. sor utáni particionálását ($k < n$, $k \in \mathbb{N}$) és tegyük fel, hogy $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertálható.

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 \end{array}\right]$$

Készítsük el az $Ax = b$ LER k. sor utáni particionálását ($k < n$, $k \in \mathbb{N}$) és tegyük fel, hogy $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertálható.

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 \end{array}\right]$$

Particionált alakban a LER:

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &= b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Készítsük el az $Ax = b$ LER k. sor utáni particionálását ($k < n$, $k \in \mathbb{N}$) és tegyük fel, hogy $A_{11} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ invertálható.

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 \end{array}\right]$$

Particionált alakban a LER:

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &= b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Végezzünk el egy blokkos GE-s lépést:
2. egyenlet $-$ $(A_{21} \cdot A_{11}^{-1})$ 1. egyenlet

$$\underbrace{\left(A_{21} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{11}\right)}_{0} x_1 + \left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right) x_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1$$

A GE blokkos lépése után a 2. sor alakja:

$$\color{red}{\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)}\, x_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1.$$

Particionálva a LER:

A GE blokkos lépése után a 2. sor alakja:

$$\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)x_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1.$$

Particionálva a LER:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1 \end{array}\right]$$

A GE blokkos lépése után a 2. sor alakja:

$$\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)x_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1.$$

Particionálva a LER:

$$\left[\begin{array}{r|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1 \end{array}\right]$$

- Most már csak az $(n-k) \times (n-k)$-s jobb alsó mátrix részen kell folytatnunk a GE-t.

A GE blokkos lépése után a 2. sor alakja:

$$\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)x_2 = b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1.$$

Particionálva a LER:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ \hline b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1 \end{array}\right]$$

- Most már csak az $(n-k) \times (n-k)$-s jobb alsó mátrix részen kell folytatnunk a GE-t.
- $k = 1$ esetén $A_{11} = (a_{11})$. Feltéve, hogy $a_{11} \neq 0$, akkor a fenti lépés a (blokk nélküli) 1. GE-s lépést írja le.

Definíció: Schur-komplementer

Tegyük fel, hogy $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertálható mátrix. Az A mátrix A_{11}**-re vonatkozó Schur-komplementere** az

$$[A|A_{11}] := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

$(n-k) \times (n-k)$-s mátrix.

Definíció: Schur-komplementer

Tegyük fel, hogy $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ invertálható mátrix. Az A mátrix A_{11}**-re vonatkozó Schur-komplementere** az

$$[A|A_{11}] := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

$(n-k) \times (n-k)$-s mátrix.

A Schur komplementer azt mutatja, hogy az A_{11}-gyel végzett GE után mely mátrixon kell folytatni az eliminációt. Az új fogalom segítségével könnyebben fogalmazhatjuk meg, hogy a GE mely tulajdonságokat örökíti tovább.

Tétel: megmaradási tételek a GE-ra

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A-ról a Schur-komplementerre:

1. $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$

Tétel: megmaradási tételek a GE-ra

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A-ról a Schur-komplementerre:

1. $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$
2. A szimmetrikus $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ szimmetrikus

Tétel: megmaradási tételek a GE-ra

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A-ról a Schur-komplementerre:

1. $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$
2. A szimmetrikus $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ szimmetrikus
3. A pozitív definit $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ pozitív definit

Tétel: megmaradási tételek a GE-ra

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A-ról a Schur-komplementerre:

1. $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$
2. A szimmetrikus $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ szimmetrikus
3. A pozitív definit $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ pozitív definit
4. A szig. diag. dom. $\Rightarrow$ $[A|A_{11}]$ szig. diag. dom.

Tétel: megmaradási tételek a GE-ra

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A-ról a Schur-komplementerre:

1. $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$
2. A szimmetrikus $\Rightarrow [A|A_{11}]$ szimmetrikus
3. A pozitív definit $\Rightarrow [A|A_{11}]$ pozitív definit
4. A szig. diag. dom. $\Rightarrow [A|A_{11}]$ szig. diag. dom.
5. $[A|A_{11}]$ fél sávszélessége $\leq A$ fél sávszélessége

Tétel: megmaradási tételek a GE-ra

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A-ról a Schur-komplementerre:

1. $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$
2. A szimmetrikus $\Rightarrow [A|A_{11}]$ szimmetrikus
3. A pozitív definit $\Rightarrow [A|A_{11}]$ pozitív definit
4. A szig. diag. dom. $\Rightarrow [A|A_{11}]$ szig. diag. dom.
5. $[A|A_{11}]$ fél sávszélessége $\leq A$ fél sávszélessége
6. A GE során a profilnál a soronkénti és oszloponkénti nullák az első nem nulla elemig megmaradnak.

Tétel: megmaradási tételek a GE-ra

A GE során a következő tulajdonságok öröklődnek A-ról a Schur-komplementerre:

1. $\det(A) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$
2. A szimmetrikus $\Rightarrow [A|A_{11}]$ szimmetrikus
3. A pozitív definit $\Rightarrow [A|A_{11}]$ pozitív definit
4. A szig. diag. dom. $\Rightarrow [A|A_{11}]$ szig. diag. dom.
5. $[A|A_{11}]$ fél sávszélessége $\leq A$ fél sávszélessége
6. A GE során a profilnál a soronkénti és oszloponkénti nullák az első nem nulla elemig megmaradnak.

Gondoljuk végig az LU-felbontás L, U mátrixára a megfelelő tulajdonságokat.

Biz.: 1.) Determináns:

Mivel a GE determináns tartó, így $\det(A) = \det(A^{(1)}) \neq 0$.

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{r|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & [A|A_{11}] \end{array}\right]$$

Biz.: 1.) Determináns:
Mivel a GE determináns tartó, így $\det(A) = \det(A^{(1)}) \neq 0$.

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{r|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & [A|A_{11}] \end{array}\right]$$

$$0 \neq \det(A^{(1)}) = \underbrace{\det(A_{11})}_{\neq 0} \cdot \det([A|A_{11}]) \quad \Leftrightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$$

$\square$

Biz.: 1.) Determináns:
Mivel a GE determináns tartó, így $\det(A) = \det(A^{(1)}) \neq 0$.

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & [A|A_{11}] \end{array}\right]$$

$$0 \neq \det(A^{(1)}) = \underbrace{\det(A_{11})}_{\neq 0} \cdot \det([A|A_{11}]) \quad \Leftrightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$$

$\square$

2.) Szimmetria:
Ha A szimmetrikus, akkor A_{11} és A_{22} is az, továbbá $A_{21}^\top = A_{12}$.

Biz.: 1.) Determináns:
Mivel a GE determináns tartó, így $\det(A) = \det(A^{(1)}) \neq 0$.

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & [A|A_{11}] \end{array}\right]$$

$$0 \neq \det(A^{(1)}) = \underbrace{\det(A_{11})}_{\neq 0} \cdot \det([A|A_{11}]) \quad \Leftrightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$$

$\square$

2.) Szimmetria:
Ha A szimmetrikus, akkor A_{11} és A_{22} is az, továbbá $A_{21}^\top = A_{12}$.

$$\begin{aligned} [A|A_{11}]^\top &= (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^\top = A_{22}^\top - A_{12}^\top (A_{11}^{-1})^\top A_{21}^\top = \\ &= A_{22}^\top - A_{12}^\top (A_{11}^\top)^{-1} A_{21}^\top = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = [A|A_{11}] \end{aligned}$$

$\square$

Biz.: 3.) Pozitív definitség:

Tudjuk, hogy $\langle Ax, x\rangle > 0$ minden $x \neq 0$ vektorra.

Biz.: 3.) Pozitív definitség:
Tudjuk, hogy $\langle Ax, x\rangle > 0$ minden $x \neq 0$ vektorra.
Be kell látnunk, hogy $\langle [A|A_{11}]x_2, x_2\rangle > 0$ minden $x_2 \neq 0$ vektorra.
Vegyük észre, hogy $x \in \mathbb{R}^n$ és $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$.

Biz.: 3.) Pozitív definitség:
Tudjuk, hogy $\langle Ax, x\rangle > 0$ minden $x \neq 0$ vektorra.
Be kell látnunk, hogy $\langle [A|A_{11}]x_2, x_2\rangle > 0$ minden $x_2 \neq 0$ vektorra.
Vegyük észre, hogy $x \in \mathbb{R}^n$ és $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$.

$$Ax = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ \hline A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \end{array}\right]$$

Biz.: 3.) Pozitív definitség:
Tudjuk, hogy $\langle Ax, x\rangle > 0$ minden $x \neq 0$ vektorra.
Be kell látnunk, hogy $\langle [A|A_{11}]x_2, x_2\rangle > 0$ minden $x_2 \neq 0$ vektorra.
Vegyük észre, hogy $x \in \mathbb{R}^n$ és $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$.

$$Ax = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ \hline A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \end{array}\right]$$

Legyen $x_2 \in \mathbb{R}^{n-k}$ tetszőleges, válasszuk meg $x_1 \in \mathbb{R}^k$ vektort úgy, hogy Ax első k komponense 0 legyen:

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 := -A_{11}^{-1}A_{12}x_2.$$

$$x_1 := -A_{11}^{-1} A_{12} x_2$$

Helyettesítsük be a skaláris szorzatba:

$$x_1 := -A_{11}^{-1}A_{12}x_2$$

Helyettesítsük be a skaláris szorzatba:

$$\begin{aligned} 0 < \langle Ax, x\rangle &= \langle \underbrace{A_{11}x_1 + A_{12}x_2}_{0}, x_1\rangle + \langle A_{21}x_1 + A_{22}x_2, x_2\rangle = \\ &= \langle A_{21}(-A_{11}^{-1}A_{12}x_2) + A_{22}x_2, x_2\rangle = \\ &= \langle(-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22})x_2, x_2\rangle = \\ &= \langle(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})x_2, x_2\rangle = \langle[A|A_{11}]x_2, x_2\rangle \end{aligned}$$

$\square$

Biz.: 4.) Szigorúan diagonálisan domináns a soraira $k = 1$ esetén:
A GE az első sort nem változtatja, ezen a szig. diag. dom. megmarad. Be kellene látnunk, hogy $i = 2, \ldots, n$-re

$$\left| a_{ii}^{(1)} \right| > \sum_{j=2, j \neq i}^{n} \left| a_{ij}^{(1)} \right| .$$

Biz.: 4.) Szigorúan diagonálisan domináns a soraira $k = 1$ esetén:
A GE az első sort nem változtatja, ezen a szig. diag. dom. megmarad. Be kellene látnunk, hogy $i = 2, \ldots, n$-re

$$\left| a_{ii}^{(1)} \right| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left| a_{ij}^{(1)} \right| .$$

A GE képleteit behelyettesítve

$$\left| a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i} \right| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left| a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \right| .$$

Biz.: 4.) Szigorúan diagonálisan domináns a soraira $k = 1$ esetén:
A GE az első sort nem változtatja, ezen a szig. diag. dom. megmarad. Be kellene látnunk, hogy $i = 2, \ldots, n$-re

$$\left|a_{ii}^{(1)}\right| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left|a_{ij}^{(1)}\right|.$$

A GE képleteit behelyettesítve

$$\left|a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i}\right| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left|a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}\right|.$$

Szorozzuk be mindkét oldalt $|a_{11}| \neq 0$-val

$$|a_{ii} a_{11} - a_{i1} a_{1i}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{ij} a_{11} - a_{i1} a_{1j}| \quad (i = 2, \ldots, n).$$

A kapott egyenlőtlenség bal oldalát lefelé, jobb oldalát felfelé becsüljük

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{i1}a_{1i}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{ij}a_{11}| + |a_{i1}a_{1j}|\right) \quad (i = 2, \ldots, n).$$

A továbbiakban ezt fogjuk belátni.

A kapott egyenlőtlenség bal oldalát lefelé, jobb oldalát felfelé becsüljük

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{i1}a_{1i}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{ij}a_{11}| + |a_{i1}a_{1j}|\right) \quad (i = 2, \ldots, n).$$

A továbbiakban ezt fogjuk belátni. Az 1. sort a GE helyben hagyja, ezért itt továbbra is igaz, hogy $|a_{11}| > \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|$ Szorozzuk $|a_{i1}| \neq 0$-val és vegyük külön az i. tagot:

$$|a_{11}a_{i1}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{1j}a_{i1}|.$$

A kapott egyenlőtlenség bal oldalát lefelé, jobb oldalát felfelé becsüljük

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{i1}a_{1i}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{ij}a_{11}| + |a_{i1}a_{1j}|\right) \quad (i = 2, \dots, n).$$

A továbbiakban ezt fogjuk belátni. Az 1. sort a GE helyben hagyja, ezért itt továbbra is igaz, hogy $|a_{11}| > \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|$
Szorozzuk $|a_{i1}| \neq 0$-val és vegyük külön az i. tagot:

$$|a_{11}a_{i1}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{1j}a_{i1}|.$$

Írjuk fel a szigorúan diagonálisan dominanciát az $i = 2, \dots, n$-re
$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| = |a_{i1}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$.
Szorozzuk $|a_{11}|$-gyel mindkét oldalt:

$$|a_{ii}a_{11}| > |a_{i1}a_{11}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} |a_{ij}a_{11}|.$$

Becsüljük $|a_{ii}a_{11}|$-t alulról

$$|a_{ii}a_{11}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Becsüljük $|a_{ii}a_{11}|$-t alulról

$$|a_{ii}a_{11}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{1i}a_{i1}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Becsüljük $|a_{ii}a_{11}|$-t alulról

$$|a_{ii}a_{11}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{1i}a_{i1}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Nézzük meg, hogy korábban mivel szoroztunk:

Becsüljük $|a_{ii}a_{11}|$-t alulról

$$|a_{ii}a_{11}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{1i}a_{i1}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Nézzük meg, hogy korábban mivel szoroztunk:

- Ha $a_{i1} = 0$, akkor ezen a soron nem változtat a GE, tehát a diag. dominancia nem változik.

Becsüljük $|a_{ii}a_{11}|$-t alulról

$$|a_{ii}a_{11}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2,j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{1i}a_{i1}| > \sum_{j=2,j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Nézzük meg, hogy korábban mivel szoroztunk:

- Ha $a_{i1} = 0$, akkor ezen a soron nem változtat a GE, tehát a diag. dominancia nem változik.
- $a_{11} \neq 0$, mivel ez feltétele a GE-nak.

Becsüljük $|a_{ii}a_{11}|$-t alulról

$$|a_{ii}a_{11}| > |a_{1i}a_{i1}| + \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Átrendezve a bizonyítandó állítást kapjuk

$$|a_{ii}a_{11}| - |a_{1i}a_{i1}| > \sum_{j=2, j\neq i}^{n} \left(|a_{1j}a_{i1}| + |a_{ij}a_{11}|\right).$$

Nézzük meg, hogy korábban mivel szoroztunk:

- Ha $a_{i1} = 0$, akkor ezen a soron nem változtat a GE, tehát a diag. dominancia nem változik.
- $a_{11} \neq 0$, mivel ez feltétele a GE-nak.

Az oszlopokra vonatkozó bizonyítás analóg módon elvégezhető. $\square$

Tartalomjegyzék

Rövidített GE (progonka módszer)

A gyakorlatban megszokott, hogy tridiagonális (hároműtlós) LER-t kell megoldanunk. Az év eleji példában is láttuk, de köbös spline-ok meghatározása esetén is ilyen alakú LER-t kapunk. A speciális alakot felhasználva hatékonyabb alakot algoritmust készítünk.

Rövidített GE (progonka módszer)

A gyakorlatban megszokott, hogy tridiagonális (háromátlós) LER-t kell megoldanunk. Az év eleji példában is láttuk, de köbös spline-ok meghatározása esetén is ilyen alakú LER-t kapunk. A speciális alakot felhasználva hatékonyabb alakot algoritmust készítünk.

- Tárolás: n^2 helyett $3n - 2$ elem.

Rövidített GE (progonka módszer)

A gyakorlatban megszokott, hogy tridiagonális (háromátlós) LER-t kell megoldanunk. Az év eleji példában is láttuk, de köbös spline-ok meghatározása esetén is ilyen alakú LER-t kapunk. A speciális alakot felhasználva hatékonyabb alakot algoritmust készítünk.

- Tárolás: n^2 helyett $3n - 2$ elem.
- Műveletigény: $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ helyett $8n + \mathcal{O}(1)$.

Rövidített GE (progonka módszer)

A gyakorlatban megszokott, hogy tridiagonális (háromátlós) LER-t kell megoldanunk. Az év eleji példában is láttuk, de köbös spline-ok meghatározása esetén is ilyen alakú LER-t kapunk. A speciális alakot felhasználva hatékonyabb alakot algoritmust készítünk.

- Tárolás: n^2 helyett $3n - 2$ elem.
- Műveletigény: $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ helyett $8n + \mathcal{O}(1)$.

Mivel a GE a sávszélességet megtartja, tridiagonális esetben a három átlón kívül mindig nulla lesz. A GE végén kapott U mátrix is csak két átlót tartalmaz, ezért a visszahelyettesítés i. egyenlete

$$a_{ii}^{(i-1)} x_i + a_{ii+1}^{(i-1)} x_{i+1} = a_{in+1}^{(i-1)}.$$

Ebből x_i-t kifejezve, új jelölésrendszerrel $x_i = f_i x_{i+1} + g_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ alakú.

Jelölések: $A = \operatorname{tridiag}(\beta_{i-1}, \alpha_i, \gamma_i)$,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Jelölések: $A = \text{tridiag}\,(\beta_{i-1}, \alpha_i, \gamma_i)$,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

A LER 1. egyenlete:

$$\alpha_1 x_1 + \gamma_1 x_2 = b_1 \quad \to \quad \alpha_1 x_1 = -\gamma_1 x_2 + b_1 \quad \to \quad x_1 = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1} x_2 + \frac{b_1}{\alpha_1}$$

Jelölések: $A = \text{tridiag}\,(\beta_{i-1}, \alpha_i, \gamma_i)$,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \gamma_2 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \beta_{n-2} & \alpha_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

A LER 1. egyenlete:

$$\alpha_1 x_1 + \gamma_1 x_2 = b_1 \quad \to \quad \alpha_1 x_1 = -\gamma_1 x_2 + b_1 \quad \to \quad x_1 = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1} x_2 + \frac{b_1}{\alpha_1}$$

Az $x_1 = f_1 x_2 + g_1$ alakot keresve $f_1 = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}$ és $g_1 = \frac{b_1}{\alpha_1}$.

Rövidített GE (progonka módszer)

Tegyük fel, hogy $f_1, \dots, f_{i-1}$ és $g_1, \dots, g_{i-1}$, továbbá az $x_k = f_k x_{k+1} + g_k$ $(k = 1, \dots, i-1)$ rekurzió ismert. Az $x_i = f_i x_{i+1} + g_i$ rekurzió képleteit szeretnénk meghatározni.

Rövidített GE (progonka módszer)

Tegyük fel, hogy $f_1, \ldots, f_{i-1}$ és $g_1, \ldots, g_{i-1}$, továbbá az $x_k = f_k x_{k+1} + g_k$ $(k = 1, \ldots, i-1)$ rekurzió ismert. Az $x_i = f_i x_{i+1} + g_i$ rekurzió képleteit szeretnénk meghatározni. Írjuk fel az i. egyenletet és helyettesítsük be x_{i-1} helyére a rekurziót:

$$\begin{aligned}
\beta_{i-1}x_{i-1} + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i \\
\beta_{i-1}(f_{i-1}x_i + g_{i-1}) + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i \\
(\beta_{i-1}f_{i-1} + \alpha_i)x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i - \beta_{i-1}g_{i-1}
\end{aligned}$$

Rövidített GE (progonka módszer)

Tegyük fel, hogy $f_1, \ldots, f_{i-1}$ és $g_1, \ldots, g_{i-1}$, továbbá az $x_k = f_k x_{k+1} + g_k$ $(k = 1, \ldots, i-1)$ rekurzió ismert. Az $x_i = f_i x_{i+1} + g_i$ rekurzió képleteit szeretnénk meghatározni. Írjuk fel az i. egyenletet és helyettesítsük be x_{i-1} helyére a rekurziót:

$$\begin{aligned} \beta_{i-1}x_{i-1} + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i \\ \beta_{i-1}(f_{i-1}x_i + g_{i-1}) + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i \\ (\beta_{i-1}f_{i-1} + \alpha_i)x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i - \beta_{i-1}g_{i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1})x_i &= -\gamma_i x_{i+1} + (b_i - \beta_{i-1}g_{i-1}) \\ x_i &= -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1}} x_{i+1} + \frac{b_i - \beta_{i-1}g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1}}. \end{aligned}$$

Rövidített GE (progonka módszer)

Tegyük fel, hogy $f_1, \ldots, f_{i-1}$ és $g_1, \ldots, g_{i-1}$, továbbá az $x_k = f_k x_{k+1} + g_k$ $(k = 1, \ldots, i-1)$ rekurzió ismert. Az $x_i = f_i x_{i+1} + g_i$ rekurzió képleteit szeretnénk meghatározni. Írjuk fel az i. egyenletet és helyettesítsük be x_{i-1} helyére a rekurziót:

$$\begin{aligned} \beta_{i-1}x_{i-1} + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i \\ \beta_{i-1}(f_{i-1}x_i + g_{i-1}) + \alpha_i x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i \\ (\beta_{i-1}f_{i-1} + \alpha_i)x_i + \gamma_i x_{i+1} &= b_i - \beta_{i-1}g_{i-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1})x_i &= -\gamma_i x_{i+1} + (b_i - \beta_{i-1}g_{i-1}) \\ x_i &= -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1}} x_{i+1} + \frac{b_i - \beta_{i-1}g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1}}. \end{aligned}$$

Innen $f_i = -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1}}$ és $g_i = \frac{b_i - \beta_{i-1}g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1}f_{i-1}}$.

Írjuk fel az n. egyenletet és helyettesítsük be x_{n-1} helyére a rekurziót:

Írjuk fel az n. egyenletet és helyettesítsük be x_{n-1} helyére a rekurziót:

$$\begin{aligned}
\beta_{n-1}x_{n-1} + \alpha_n x_n &= b_n \\
\beta_{n-1}(f_{n-1}x_n + g_{n-1}) + \alpha_n x_n &= b_n \\
(\beta_{n-1}f_{n-1} + \alpha_n)x_n &= b_n - \beta_{n-1}g_{n-1}
\end{aligned}$$

Írjuk fel az n. egyenletet és helyettesítsük be x_{n-1} helyére a rekurziót:

$$\begin{aligned}
\beta_{n-1}x_{n-1} + \alpha_n x_n &= b_n \\
\beta_{n-1}(f_{n-1}x_n + g_{n-1}) + \alpha_n x_n &= b_n \\
(\beta_{n-1}f_{n-1} + \alpha_n)x_n &= b_n - \beta_{n-1}g_{n-1}
\end{aligned}$$

$$x_n = \frac{b_n - \beta_{n-1}g_{n-1}}{\alpha_n + \beta_{n-1}f_{n-1}} =: g_n$$

$\square$

Algoritmus: progonka módszer

1. lépés: $f_1 := -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \quad g_1 := \frac{b_1}{\alpha_1}$

Algoritmus: progonka módszer

1. lépés: $f_1 := -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \quad g_1 := \frac{b_1}{\alpha_1}$

$$i = 2, \ldots, n-1 : \quad f_i := -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}$$

$$g_i := \frac{b_i - \beta_{i-1} g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}$$

$$g_n := \frac{b_i - \beta_{n-1} g_{n-1}}{\alpha_n + \beta_{n-1} f_{n-1}}$$

Algoritmus: progonka módszer

1. lépés: $f_1 := -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \quad g_1 := \frac{b_1}{\alpha_1}$

$$i = 2, \ldots, n-1: \quad f_i := -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}$$

$$g_i := \frac{b_i - \beta_{i-1} g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}$$

$$g_n := \frac{b_i - \beta_{n-1} g_{n-1}}{\alpha_n + \beta_{n-1} f_{n-1}}$$

2. lépés: $x_n := g_n$

$i = n-1, n-2, \ldots, 1: \quad x_i = f_i x_{i+1} + g_i$

Algoritmus: progonka módszer

1. lépés: $f_1 := -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \quad g_1 := \frac{b_1}{\alpha_1}$

$$i = 2, \ldots, n-1: \quad f_i := -\frac{\gamma_i}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}$$

$$g_i := \frac{b_i - \beta_{i-1} g_{i-1}}{\alpha_i + \beta_{i-1} f_{i-1}}$$

$$g_n := \frac{b_i - \beta_{n-1} g_{n-1}}{\alpha_n + \beta_{n-1} f_{n-1}}$$

2. lépés: $x_n := g_n$

$i = n-1, n-2, \ldots, 1: \quad x_i = f_i x_{i+1} + g_i$

Megj.: 3 művelettel több, de könnyebben megjegyezhető az algoritmus, ha f_n értékét is meghatározzuk. Ekkor $x_{n+1} := 0$-val indítjuk a 2. lépést.

Műveletigény:

1. lépés (előre):

f_1, g_1 : 2 művelet.

Műveletigény:

1. lépés (előre):
f_1, g_1 : 2 művelet.

A ciklus i. lépésében: a közös nevezőben 2 db, f_i-ben 1 db, g_i-ben 3 db, tehát $i = 2, \ldots, n-1$-re összesen $6(n-2)$ db.

g_n-ben 5 db művelet.

Műveletigény:

1. lépés (előre):
f_1, g_1 : 2 művelet.

A ciklus i. lépésében: a közös nevezőben 2 db, f_i-ben 1 db, g_i-ben 3 db, tehát $i = 2, \ldots, n-1$-re összesen $6(n-2)$ db.

g_n-ben 5 db művelet.

2. lépés (vissza):
$i = n-1, n-2, \ldots, 1$-re $2(n-1)$ db művelet.

Műveletigény:

1. lépés (előre):
f_1, g_1 : 2 művelet.

A ciklus i. lépésében: a közös nevezőben 2 db, f_i-ben 1 db, g_i-ben 3 db, tehát $i = 2, \dots, n-1$-re összesen $6(n-2)$ db.

g_n-ben 5 db művelet.

2. lépés (vissza):
$i = n-1, n-2, \dots, 1$-re $2(n-1)$ db művelet.

Összesen:
$2 + 6(n-2) + 5 + 2(n-1) = 8n - 7 = 8n + \mathcal{O}(1)$ művelet. □

Tartalomjegyzék

Definíció: LDU-felbontás

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix LDU-felbontásának nevezzük az $A = L \cdot D \cdot U$ szorzatot, ha $L \in \mathcal{L}_1$ alsó háromszögmátrix, D diagonális mátrix és $U \in \mathcal{U}_1$ felső háromszögmátrix.

Definíció: LDU-felbontás

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix LDU-felbontásának nevezzük az $A = L \cdot D \cdot U$ szorzatot, ha $L \in \mathcal{L}_1$ alsó háromszögmátrix, D diagonális mátrix és $U \in \mathcal{U}_1$ felső háromszögmátrix.

Előállítás LU-felbontásból:

Az $A = L \cdot \widetilde{U}$ felbontásban $L \in \mathcal{L}_1$ jó, $D = \operatorname{diag}(\widetilde{u}_{11}, \ldots, \widetilde{u}_{nn})$. A keresett $U \in \mathcal{U}_1$ mátrixot úgy kapjuk, hogy $U = D^{-1}\widetilde{U}$, azaz minden i-re $\widetilde{U}$ i. sorát $\widetilde{u}_{ii}$-vel osztjuk. Ekkor

$$A = L\widetilde{U} = LD \cdot \underbrace{(D^{-1}\widetilde{U})}_{U} = LDU.$$

Példa: *LDU*-felbontás *LU*-felbontásból

Készítsük el példamátrixunk *LDU*-felbontását az *LU*-felbontás segítségével.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Korábban láttuk, hogy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = L \cdot \widetilde{U}.$$

Korábban láttuk, hogy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = L \cdot \widetilde{U}.$$

Legyen $D := \operatorname{diag}(2, 5, -1)$, $U := D^{-1}\widetilde{U}$. Tehát $A = LDU$, ahol

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Korábban láttuk, hogy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = L \cdot \widetilde{U}.$$

Legyen $D := \operatorname{diag}(2, 5, -1)$, $U := D^{-1}\widetilde{U}$. Tehát $A = LDU$, ahol

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Balról D^{-1}-zel úgy szorzunk, hogy D megfelelő átlóbeli elemeivel osztjuk a megfelelő sorokat. $\square$

Tétel: az *LDU*-felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az L, D és U mátrixok elemeit jó sorrendben (lásd LU-felbontás) számolva a jobboldalon mindig ismert értékek lesznek:

$$i < j \text{ (felső)} \qquad u_{ij} = \frac{1}{d_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot u_{kj} \right),$$

$$i = j \text{ (diag)} \qquad d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot u_{ki},$$

$$i > j \text{ (alsó)} \qquad l_{ij} = \frac{1}{d_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot u_{kj} \right).$$

Az *LDU*-felbontás „közvetlen” kiszámítása

Tétel: az *LDU*-felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az L, D és U mátrixok elemeit jó sorrendben (lásd LU-felbontás) számolva a jobboldalon mindig ismert értékek lesznek:

$$i < j \text{ (felső)} \qquad u_{ij} = \frac{1}{d_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot u_{kj} \right),$$

$$i = j \text{ (diag)} \qquad d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot u_{ki},$$

$$i > j \text{ (alsó)} \qquad l_{ij} = \frac{1}{d_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot u_{kj} \right).$$

A képleteket az $A = L\widetilde{U}$ felbontás „közvetlen” képleteiből kapjuk:

$$\widetilde{u}_{ii} \mapsto d_{ii}, \quad \widetilde{u}_{kj} \mapsto d_{kk} u_{kj}.$$

Tétel: Szimmetrikus mátrix LDU-felbontása

Ha A szimmetrikus mátrix, akkor az LDU-felbontásában $U = L^\top$.

Tétel: Szimmetrikus mátrix LDU-felbontása

Ha A szimmetrikus mátrix, akkor az LDU-felbontásában $U = L^\top$.

Biz.: az $A = LDU$ felbontás bal oldalát szorozzuk L^{-1}-zel, jobb oldalát $(L^{-1})^\top$-tal:

$$L^{-1}A(L^{-1})^\top = L^{-1} \cdot (LDU) \cdot (L^{-1})^\top = DU(L^{-1})^\top.$$

Tétel: Szimmetrikus mátrix LDU-felbontása

Ha A szimmetrikus mátrix, akkor az LDU-felbontásában $U = L^\top$.

Biz.: az $A = LDU$ felbontás bal oldalát szorozzuk L^{-1}-zel, jobb oldalát $(L^{-1})^\top$-tal:

$$L^{-1}A(L^{-1})^\top = L^{-1} \cdot (LDU) \cdot (L^{-1})^\top = DU(L^{-1})^\top.$$

A bal oldali mátrixról tudjuk, hogy szimmetrikus, a jobboldali felső háromszögmátrix. Ebből következik, hogy a jobboldali mátrix diagonális mátrix. $U(L^{-1})^\top \in \mathcal{U}_1$, így $U(L^{-1})^\top = I$.

Tétel: Szimmetrikus mátrix LDU-felbontása

Ha A szimmetrikus mátrix, akkor az LDU-felbontásában $U = L^\top$.

Biz.: az $A = LDU$ felbontás bal oldalát szorozzuk L^{-1}-zel, jobb oldalát $(L^{-1})^\top$-tal:

$$L^{-1}A(L^{-1})^\top = L^{-1} \cdot (LDU) \cdot (L^{-1})^\top = DU(L^{-1})^\top.$$

A bal oldali mátrixról tudjuk, hogy szimmetrikus, a jobboldali felső háromszögmátrix. Ebből következik, hogy a jobboldali mátrix diagonális mátrix. $U(L^{-1})^\top \in \mathcal{U}_1$, így $U(L^{-1})^\top = I$.

$$U(L^{-1})^\top = I \quad \Leftrightarrow \quad U(L^\top)^{-1} = I \quad \Leftrightarrow \quad U = L^\top$$

$\square$

Következmény:

- Szimmetrikus mátrix esetén az LDU-felbontás megtartja a szimmetriát. A teljes mátrix helyett elég pl. az alsó háromszög részét tárolni. Az $A = LDU$ felbontás valójában $LDL^\top$-felbontás lesz, ahol szintén elég L, D-t tárolni. Ezzel a tárolás- és műveletigény kb. a felére csökken $(\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$.

Következmény:

- Szimmetrikus mátrix esetén az LDU-felbontás megtartja a szimmetriát. A teljes mátrix helyett elég pl. az alsó háromszög részét tárolni. Az $A = LDU$ felbontás valójában $LDL^\top$-felbontás lesz, ahol szintén elég L, D-t tárolni. Ezzel a tárolás- és műveletigény kb. a felére csökken $(\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$.
- Szimmetrikus mátrix esetén az $LDL^\top$-felbontás GE-val közvetlenül is elkészíthető.

Példa: *LDU-felbontás LU-felbontásból*

Készítsük el szimmetrikus példamátrixunk $LDL^\top$-felbontását a GE segítségével.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 6 \\ 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Példa

A GE-s hányadosokat minden lépésben az eliminált pozíciókon tudjuk tárolni: az eliminálandó mátrix rész 1. oszlopában az első elemmel leosztjuk az alatta levőket. Vonalakkal jelezzük, hogy itt már tárolásról is szó van. A jobb alsó 2×2-es mátrix részen elvégezzük az eliminációt.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 6 \\ 1 & 6 & 6 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline {\color{red}2} & 4 & 4 \\ {\color{red}1} & 4 & 5 \end{array}\right] \to$$

Példa

A GE-s hányadosokat minden lépésben az eliminált pozíciókon tudjuk tárolni: az eliminálandó mátrix rész 1. oszlopában az első elemmel leosztjuk az alatta levőket. Vonalakkal jelezzük, hogy itt már tárolásról is szó van. A jobb alsó 2×2-es mátrix részen elvégezzük az eliminációt.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 6 \\ 1 & 6 & 6 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline {\color{red}2} & 4 & 4 \\ {\color{red}1} & 4 & 5 \end{array}\right] \to$$

Ugyanúgy dolgozunk tovább, de most már csak a jobb alsó 2×2-es mátrix részen, a többit változatlanul leírjuk.

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline {\color{red}2} & 4 & 4 \\ {\color{red}1} & 4 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline {\color{red}2} & \multicolumn{2}{c}{4} \\ \cline{2-3} {\color{red}1} & {\color{red}1} & 1 \end{array}\right]$$

Készen vagyunk, csak le kell olvasnunk a felbontást: $A = LDL^\top$, ahol

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Az $LDL^\top$-felbontás „közvetlen” kiszámítása

Tétel: az $LDL^\top$-felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az L és U mátrixok elemei a következő képletekkel számolhatók:

$$i = j \text{ (diag)} \qquad d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot l_{ik},$$

$$i > j \text{ (alsó)} \qquad l_{ij} = \frac{1}{d_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot l_{jk} \right).$$

Ha jó sorrendben számolunk, mindig ismert az egész jobb oldal.

Tartalomjegyzék

Definíció: Cholesky-felbontás, avagy $LL^\top$-felbontás

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix Cholesky-felbontásának nevezzük az $L \cdot L^\top$ szorzatot, ha $A = LL^\top$, ahol $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ alsó háromszögmátrix és $l_{ii} > 0 \ \ (i = 1, \ldots, n)$.

Definíció: Cholesky-felbontás, avagy $LL^\top$-felbontás

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrix Cholesky-felbontásának nevezzük az $L \cdot L^\top$ szorzatot, ha $A = LL^\top$, ahol $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ alsó háromszögmátrix és $l_{ii} > 0 \ \ (i = 1, \ldots, n)$.

Tétel: Cholesky-felbontás $\exists!$

Ha A szimmetrikus és pozitív definit mátrix, akkor egyértelműen létezik Cholesky-felbontása.

Biz.: Egyértelműség: Tegyük fel indirekt, hogy létezik legalább két különböző felbontás,

$$A = L_1 L_1^\top = L_2 L_2^\top,$$

ahol $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, melyek diagonális elemei pozitívak.
Legyen $D_1 = \operatorname{diag}\left((L_1)_{ii}\right)$ és $D_2 = \operatorname{diag}\left((L_2)_{ii}\right)$.

Biz.: Egyértelműség: Tegyük fel indirekt, hogy létezik legalább két különböző felbontás,

$$A = L_1 L_1^\top = L_2 L_2^\top,$$

ahol $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, melyek diagonális elemei pozitívak.
Legyen $D_1 = \operatorname{diag}\left((L_1)_{ii}\right)$ és $D_2 = \operatorname{diag}\left((L_2)_{ii}\right)$.

$$\underbrace{(L_1 D_1^{-1})}_{\in \mathcal{L}_1} \cdot \underbrace{(D_1 L_1^\top)}_{\in \mathcal{U}} = \underbrace{(L_2 D_2^{-1})}_{\in \mathcal{L}_1} \cdot \underbrace{(D_2 L_2^\top)}_{\in \mathcal{U}}$$

Cholesky-felbontás egyértelműség bizonyítása

Biz.: Egyértelműség: Tegyük fel indirekt, hogy létezik legalább két különböző felbontás,

$$A = L_1 L_1^\top = L_2 L_2^\top,$$

ahol $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, melyek diagonális elemei pozitívak.
Legyen $D_1 = \operatorname{diag}\left((L_1)_{ii}\right)$ és $D_2 = \operatorname{diag}\left((L_2)_{ii}\right)$.

$$\underbrace{(L_1 D_1^{-1})}_{\in \mathcal{L}_1} \cdot \underbrace{(D_1 L_1^\top)}_{\in \mathcal{U}} = \underbrace{(L_2 D_2^{-1})}_{\in \mathcal{L}_1} \cdot \underbrace{(D_2 L_2^\top)}_{\in \mathcal{U}}$$

A két oldalon egy-egy LU-felbontást látunk. Mivel az LU-felbontás egyértelmű (a főminorok nem nullák): $D_1 L_1^\top = D_2 L_2^\top$.

Cholesky-felbontás egyértelműség bizonyítása

Biz.: Egyértelműség: Tegyük fel indirekt, hogy létezik legalább két különböző felbontás,

$$A = L_1 L_1^\top = L_2 L_2^\top,$$

ahol $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, melyek diagonális elemei pozitívak.
Legyen $D_1 = \operatorname{diag}((L_1)_{ii})$ és $D_2 = \operatorname{diag}((L_2)_{ii})$.

$$\underbrace{(L_1 D_1^{-1})}_{\in \mathcal{L}_1} \cdot \underbrace{(D_1 L_1^\top)}_{\in \mathcal{U}} = \underbrace{(L_2 D_2^{-1})}_{\in \mathcal{L}_1} \cdot \underbrace{(D_2 L_2^\top)}_{\in \mathcal{U}}$$

A két oldalon egy-egy LU-felbontást látunk. Mivel az LU-felbontás egyértelmű (a főminorok nem nullák): $D_1 L_1^\top = D_2 L_2^\top$.

A főátlókban lévő elemek egyeznek, ezért $(L_1)_{ii}^2 = (L_2)_{ii}^2 \;\; \forall \;\; i$-re.

Cholesky-felbontás egyértelműség bizonyítása

Biz.: Egyértelműség: Tegyük fel indirekt, hogy létezik legalább két különböző felbontás,

$$A = L_1 L_1^\top = L_2 L_2^\top,$$

ahol $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$, melyek diagonális elemei pozitívak.
Legyen $D_1 = \mathrm{diag}\left((L_1)_{ii}\right)$ és $D_2 = \mathrm{diag}\left((L_2)_{ii}\right)$.

$$\underbrace{(L_1 D_1^{-1})}_{\in \mathcal{L}_1} \cdot \underbrace{(D_1 L_1^\top)}_{\in \mathcal{U}} = \underbrace{(L_2 D_2^{-1})}_{\in \mathcal{L}_1} \cdot \underbrace{(D_2 L_2^\top)}_{\in \mathcal{U}}$$

A két oldalon egy-egy LU-felbontást látunk. Mivel az LU-felbontás egyértelmű (a főminorok nem nullák): $D_1 L_1^\top = D_2 L_2^\top$.

A főátlókban lévő elemek egyeznek, ezért $(L_1)_{ii}^2 = (L_2)_{ii}^2 \ \forall \ i$-re.
A diagonális elemek pozitivitása miatt

$$\forall i : \ (L_1)_{ii} = (L_2)_{ii} \quad \Rightarrow \quad L_1 = L_2 \quad \Rightarrow \quad D_1 = D_2.$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk.

Cholesky-felbontás létezés bizonyítása

Létezés: Mivel A szimmetrikus és pozitív definit, ezért $D_k = \det(A_k) > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. A főminorok pozitivitásából következik, hogy $\exists\,!\ A = \widetilde{L}\widetilde{U}$ LU-felbontás és $\widetilde{u}_{ii} > 0\ \forall\ i$-re.

Cholesky-felbontás létezés bizonyítása

Létezés: Mivel A szimmetrikus és pozitív definit, ezért $D_k = \det(A_k) > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. A főminorok pozitivitásából következik, hogy $\exists\,!\ A = \widetilde{L}\widetilde{U}$ LU-felbontás és $\widetilde{u}_{ii} > 0\ \forall\ i$-re. Legyen $D = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\widetilde{u}_{11}}, \ldots, \sqrt{\widetilde{u}_{nn}}\right)$, így

$$A = \underbrace{(\widetilde{L}D)}_{B} \cdot \underbrace{(D^{-1}\widetilde{U})}_{C} = B \cdot C.$$

Létezés: Mivel A szimmetrikus és pozitív definit, ezért $D_k = \det(A_k) > 0$ $(k = 1, \dots, n)$. A főminorok pozitivitásából következik, hogy $\exists\,!\ A = \widetilde{L}\widetilde{U}$ LU-felbontás és $\widetilde{u}_{ii} > 0\ \forall\ i$-re. Legyen $D = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\widetilde{u}_{11}}, \dots, \sqrt{\widetilde{u}_{nn}}\right)$, így

$$A = \underbrace{(\widetilde{L}D)}_{B} \cdot \underbrace{(D^{-1}\widetilde{U})}_{C} = B \cdot C.$$

$B, C \in \mathcal{L}$, átlójuk egyaránt a $\widetilde{u}_{ii}$ elemekből áll. Be kell még látnunk, hogy $C^\top = B$.

Cholesky-felbontás létezés bizonyítása

Létezés: Mivel A szimmetrikus és pozitív definit, ezért $D_k = \det(A_k) > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. A főminorok pozitivitásából következik, hogy $\exists\,!\ A = \widetilde{L}\widetilde{U}$ LU-felbontás és $\widetilde{u}_{ii} > 0\ \forall\ i$-re.
Legyen $D = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\widetilde{u}_{11}}, \ldots, \sqrt{\widetilde{u}_{nn}}\right)$, így

$$A = \underbrace{(\widetilde{L}D)}_{B} \cdot \underbrace{(D^{-1}\widetilde{U})}_{C} = B \cdot C.$$

$B, C \in \mathcal{L}$, átlójuk egyaránt a $\widetilde{u}_{ii}$ elemekből áll. Be kell még látnunk, hogy $C^\top = B$.
A szimmetria miatt $A = A^\top$, azaz $BC = C^T B^\top$.

Cholesky-felbontás létezés bizonyítása

Létezés: Mivel A szimmetrikus és pozitív definit, ezért $D_k = \det(A_k) > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. A főminorok pozitivitásából következik, hogy $\exists\,!$ $A = \widetilde{L}\widetilde{U}$ LU-felbontás és $\widetilde{u}_{ii} > 0$ $\forall$ i-re.
Legyen $D = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\widetilde{u}_{11}}, \ldots, \sqrt{\widetilde{u}_{nn}}\right)$, így

$$A = \underbrace{(\widetilde{L}D)}_{B} \cdot \underbrace{(D^{-1}\widetilde{U})}_{C} = B \cdot C.$$

$B, C \in \mathcal{L}$, átlójuk egyaránt a $\widetilde{u}_{ii}$ elemekből áll. Be kell még látnunk, hogy $C^\top = B$.
A szimmetria miatt $A = A^\top$, azaz $BC = C^T B^\top$.
Bal oldalról szorozzunk B^{-1}-zel, jobbról $(B^\top)^{-1}$-zel:

$$B^{-1}(BC)(B^\top)^{-1} = B^{-1}(C^T B^\top)(B^\top)^{-1}$$

$$\mathcal{U}_1 \in C(B^\top)^{-1} = B^{-1}C^\top \in \mathcal{L}_1$$

$$B^{-1}C^\top = I \quad \Leftrightarrow \quad C^\top = B$$

Miért jó az $LL^\top$-felbontás?

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható,
- A szimmetrikus és
- rendelkezésünkre áll az $A = LL^\top$ felbontás.

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható,
- A szimmetrikus és
- rendelkezésünkre áll az $A = LL^\top$ felbontás.

Ekkor $Ax = L \cdot \underbrace{L^\top \cdot x}_{y} = b$ helyett $\left(\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)\right)$

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható,
- A szimmetrikus és
- rendelkezésünkre áll az $A = LL^\top$ felbontás.

Ekkor $Ax = L \cdot \underbrace{L^\top \cdot x}_{y} = b$ helyett $\left(\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)\right)$

1. oldjuk meg az $Ly = b$ alsó háromszögű, $\left(n^2 + \mathcal{O}(n)\right)$

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható,
- A szimmetrikus és
- rendelkezésünkre áll az $A = LL^\top$ felbontás.

Ekkor $Ax = L \cdot \underbrace{L^\top \cdot x}_{y} = b$ helyett $\left(\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)\right)$

1. oldjuk meg az $Ly = b$ alsó háromszögű, $(n^2 + \mathcal{O}(n))$
2. majd az $L^T x = y$ felső háromszögű LER-t. $(n^2 + \mathcal{O}(n))$

Miért jó az $LL^\top$-felbontás?

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható,
- A szimmetrikus és
- rendelkezésünkre áll az $A = LL^\top$ felbontás.

Ekkor $Ax = L \cdot \underbrace{L^\top \cdot x}_{y} = b$ helyett $\left(\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)\right)$

1. oldjuk meg az $Ly = b$ alsó háromszögű, $\left(n^2 + \mathcal{O}(n)\right)$
2. majd az $L^T x = y$ felső háromszögű LER-t. $\left(n^2 + \mathcal{O}(n)\right)$

Persze valamikor elő kell állítani az $LL^\top$-felbontást, de csak L-et kell tárolni hozzá. $\left(\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)\right)$

Előnyös, ha sokszor ugyanaz A.

1. előállítási módszer: LU-felbontásból LDU-n keresztül.

- Legyen az A mátrix LU-felbontása: $A = \widetilde{L}\widetilde{U}$.

1. előállítási módszer: LU-felbontásból LDU-n keresztül.

- Legyen az A mátrix LU-felbontása: $A = \widetilde{L}\widetilde{U}$.
- Ha A poz. def., akkor $\widetilde{U}$ főátlóbeli elemei mind pozitívak. (!)
  (Látjuk, hogy elkészíthető-e a Cholesky-felbontás.)

1. előállítási módszer: LU-felbontásból LDU-n keresztül.

- Legyen az A mátrix LU-felbontása: $A = \widetilde{L}\widetilde{U}$.
- Ha A poz. def., akkor $\widetilde{U}$ főátlóbeli elemei mind pozitívak. (!) (Látjuk, hogy elkészíthető-e a Cholesky-felbontás.)
- Legyen $D := \operatorname{diag}(\widetilde{u}_{1,1}, \ldots, \widetilde{u}_{n,n})$, valamint $U = D^{-1}\widetilde{U}$.

1. előállítási módszer: LU-felbontásból LDU-n keresztül.

- Legyen az A mátrix LU-felbontása: $A = \widetilde{L}\widetilde{U}$.
- Ha A poz. def., akkor $\widetilde{U}$ főátlóbeli elemei mind pozitívak. (!) (Látjuk, hogy elkészíthető-e a Cholesky-felbontás.)
- Legyen $D := \operatorname{diag}(\widetilde{u}_{1,1}, \ldots, \widetilde{u}_{n,n})$, valamint $U = D^{-1}\widetilde{U}$.
- Kiderül, hogy szimmetrikus A esetén $U = \widetilde{L}^\top$. $(A = \widetilde{L}D\widetilde{L}^\top)$

1. előállítási módszer: LU-felbontásból LDU-n keresztül.

- Legyen az A mátrix LU-felbontása: $A = \widetilde{L}\widetilde{U}$.
- Ha A poz. def., akkor $\widetilde{U}$ főátlóbeli elemei mind pozitívak. (!) (Látjuk, hogy elkészíthető-e a Cholesky-felbontás.)
- Legyen $D := \operatorname{diag}(\widetilde{u}_{1,1}, \ldots, \widetilde{u}_{n,n})$, valamint $U = D^{-1}\widetilde{U}$.
- Kiderül, hogy szimmetrikus A esetén $U = \widetilde{L}^\top$. ($A = \widetilde{L}D\widetilde{L}^\top$)
- $\sqrt{D} := \operatorname{diag}\left(\sqrt{\widetilde{u}_{1,1}}, \ldots, \sqrt{\widetilde{u}_{n,n}}\right)$ jelöléssel most $A = \underbrace{\widetilde{L} \cdot \sqrt{D}}_{L} \cdot \underbrace{\sqrt{D} \cdot \widetilde{L}^\top}_{L^\top} = L \cdot L^\top$.

1. előállítási módszer: LU-felbontásból LDU-n keresztül.

- Legyen az A mátrix LU-felbontása: $A = \widetilde{L}\widetilde{U}$.
- Ha A poz. def., akkor $\widetilde{U}$ főátlóbeli elemei mind pozitívak. (!) (Látjuk, hogy elkészíthető-e a Cholesky-felbontás.)
- Legyen $D := \operatorname{diag}(\widetilde{u}_{1,1}, \ldots, \widetilde{u}_{n,n})$, valamint $U = D^{-1}\widetilde{U}$.
- Kiderül, hogy szimmetrikus A esetén $U = \widetilde{L}^\top$. $(A = \widetilde{L}D\widetilde{L}^\top)$
- $\sqrt{D} := \operatorname{diag}\left(\sqrt{\widetilde{u}_{1,1}}, \ldots, \sqrt{\widetilde{u}_{n,n}}\right)$ jelöléssel most $A = \underbrace{\widetilde{L} \cdot \sqrt{D}}_{L} \cdot \underbrace{\sqrt{D} \cdot \widetilde{L}^\top}_{L^\top} = L \cdot L^\top$.

Megj.: Nem szükséges az $LDL^\top$-felbontást előállítani, $\widetilde{U}$ elemeit felhasználva egyből az utolsó pontra térhetünk.

2. előállítási módszer: „mechanikusan” a GE-n keresztül.

- Az a_{11} helyére $\sqrt{a_{11}}$-et írunk.

2. előállítási módszer: „mechanikusan” a GE-n keresztül.

- Az a_{11} helyére $\sqrt{a_{11}}$-et írunk.
- Végigosztjuk az 1. oszlopot $\sqrt{a_{11}}$-gyel.

2. előállítási módszer: „mechanikusan” a GE-n keresztül.

- Az a_{11} helyére $\sqrt{a_{11}}$-et írunk.
- Végigosztjuk az 1. oszlopot $\sqrt{a_{11}}$-gyel.
- Eliminálunk a maradék $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixban.

2. előállítási módszer: „mechanikusan" a GE-n keresztül.

- Az a_{11} helyére $\sqrt{a_{11}}$-et írunk.
- Végigosztjuk az 1. oszlopot $\sqrt{a_{11}}$-gyel.
- Eliminálunk a maradék $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixban.
- Megyünk tovább...

2. előállítási módszer: „mechanikusan" a GE-n keresztül.

- Az a_{11} helyére $\sqrt{a_{11}}$-et írunk.
- Végigosztjuk az 1. oszlopot $\sqrt{a_{11}}$-gyel.
- Eliminálunk a maradék $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixban.
- Megyünk tovább...
- A végén csak az alsó háromszögmátrixot olvassuk ki.

3. előállítási módszer: mátrixszorzás alapján.

Tétel: az $LL^\top$-felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az L mátrix elemei az A alsóháromszögbeli elemeiből a következő képletekkel számolhatók:

$$i = j \text{ (átló)} \qquad l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2},$$

$$i > j \text{ (alsó)} \qquad l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot l_{jk} \right).$$

Ha jó sorrendben számolunk, mindig ismert az egész jobb oldal.

Biz.: Az LU-felbontáshoz hasonlóan. Írjuk fel az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, mint mátrixszorzat i-edik sorának j-edik elemét feltéve, hogy $A = L \cdot L^\top$. Használjuk ki, hogy háromszögmátrixokról van szó, majd válasszunk le egy tagot.

Biz.: Az LU-felbontáshoz hasonlóan. Írjuk fel az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, mint mátrixszorzat i-edik sorának j-edik elemét feltéve, hogy $A = L \cdot L^\top$. Használjuk ki, hogy háromszögmátrixokról van szó, majd válasszunk le egy tagot.

Ha $i = j$, azaz egy főátlóbeli elemről van szó, akkor $k > j \Rightarrow l_{j,k} = 0$, valamint $(L^\top)_{kj} = l_{jk}$, és így

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{n} l_{jk} \cdot (L^\top)_{kj} = \sum_{k=1}^{j} l_{jk}^2 = l_{jj}^2 + \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2.$$

Biz.: Az LU-felbontáshoz hasonlóan. Írjuk fel az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, mint mátrixszorzat i-edik sorának j-edik elemét feltéve, hogy $A = L \cdot L^\top$. Használjuk ki, hogy háromszögmátrixokról van szó, majd válasszunk le egy tagot.

Ha $i = j$, azaz egy főátlóbeli elemről van szó, akkor $k > j \Rightarrow l_{j,k} = 0$, valamint $(L^\top)_{kj} = l_{jk}$, és így

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{n} l_{jk} \cdot (L^\top)_{kj} = \sum_{k=1}^{j} l_{jk}^2 = l_{jj}^2 + \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2.$$

Ebből l_{jj} kifejezhető

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}.$$

Biz. folyt. Ha $i > j$, azaz egy főátló alatti elemről van szó, akkor

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot (L^\top)_{kj} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} \cdot l_{jk} = l_{ij} \cdot l_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot l_{jk}.$$

Biz. folyt. Ha $i > j$, azaz egy főátló alatti elemről van szó, akkor

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot (L^\top)_{kj} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} \cdot l_{jk} = l_{ij} \cdot l_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot l_{jk}.$$

Ha $l_{jj} \neq 0$ (találkoztunk már ezzel a feltétellel), akkor l_{ij} kifejezhető

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot l_{jk} \right).$$

Biz. folyt. Ha $i > j$, azaz egy főátló alatti elemről van szó, akkor

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} \cdot (L^\top)_{kj} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} \cdot l_{jk} = l_{ij} \cdot l_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot l_{jk}.$$

Ha $l_{jj} \neq 0$ (találkoztunk már ezzel a feltétellel), akkor l_{ij} kifejezhető

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot l_{jk} \right).$$

Figyeljük meg, hogy ha valamely „jó sorrendben” (lásd LU-felbontásnál a sorrendek) megyünk végig az (i,j) indexekkel A alsóháromszögbeli elemein, akkor az l_{ij} illetve l_{jj} értékét megadó egyenlőségek jobb oldalán minden mennyiség ismert. $\square$

A Cholesky-felbontás műveletigénye

Tétel: A Cholesky-felbontás előállításának műveletigénye

A szorzások és osztások száma

$$\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

valamint n darab négyzetgyökvonás is szükséges.

Tétel: A Cholesky-felbontás előállításának műveletigénye

A szorzások és osztások száma

$$\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

valamint n darab négyzetgyökvonás is szükséges.

Biz.: A képletekből:

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}, \quad l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot l_{jk} \right).$$

Rögzített j-re: l_{jj}-hez $2(j-1)$ szorzás és összeadás kell.

Tétel: A Cholesky-felbontás előállításának műveletigénye

A szorzások és osztások száma

$$\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

valamint n darab négyzetgyökvonás is szükséges.

Biz.: A képletekből:

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}, \quad l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot l_{jk} \right).$$

Rögzített j-re: l_{jj}-hez $2(j-1)$ szorzás és összeadás kell.

Rögzített i, j-re: l_{ij}-hez 1 osztás, $(j-1)$ szorzás és $(j-1)$ összeadás kell. Összesen $2j-1$ művelet.

A Cholesky-felbontás műveletigénye

$$\sum_{j=1}^{n} 2(j-1) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(2j-1) =$$

$$\sum_{s=1}^{n-1} 2s + \sum_{i=2}^{n}\left(2\cdot\frac{(i-1)i}{2} - (i-1)\right) =$$

$$\sum_{s=1}^{n-1} 2s + \sum_{i=2}^{n}(i-1)^2 = \sum_{s=1}^{n-1} 2s + \sum_{t=1}^{n-1} t^2$$

$$= 2\cdot\frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2). \quad \square$$

Példa

Készítsük el a következő (szimmetrikus, pozitív definit) mátrix Cholesky-felbontását

a) az LU-felbontás alapján,

b) „mechanikusan”.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

LU-**felbontásból:** A mátrixon elvégezzük a GE lépéseit:
1. lépés:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{c|cc} 4 & 2 & 4 \\ \hline \color{red}{\frac{1}{2}} & 9 & 3 \\ \color{red}{1} & 3 & 2 \end{array}\right] \to$$

LU-**felbontásból:** A mátrixon elvégezzük a GE lépéseit:

1. lépés:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{c|cc} \multicolumn{1}{c}{4} & 2 & 4 \\ \hline \color{red}{\frac{1}{2}} & 9 & 3 \\ \color{red}{1} & 3 & 2 \end{array}\right] \to$$

2. lépés:

$$\left[\begin{array}{c|cc} \multicolumn{1}{c}{4} & 2 & 4 \\ \hline \color{red}{\frac{1}{2}} & 9 & 3 \\ \color{red}{1} & 3 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{2} & 4 \\ \hline \color{red}{\frac{1}{2}} & \multicolumn{1}{c}{9} & 3 \\ \cline{2-3} \color{red}{1} & \color{red}{\frac{1}{3}} & 1 \end{array}\right]$$

Készen vagyunk az eliminációval, csak le kell olvasnunk $\widetilde{L}$, $\widetilde{U}$-ot.

$$A = \widetilde{L} \cdot \widetilde{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Készen vagyunk az eliminációval, csak le kell olvasnunk $\widetilde{L}$, $\widetilde{U}$-ot.

$$A = \widetilde{L} \cdot \widetilde{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

$D = \operatorname{diag}(\sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{1}) = \operatorname{diag}(2, 3, 1)$.

Készen vagyunk az eliminációval, csak le kell olvasnunk $\widetilde{L}$, $\widetilde{U}$-ot.

$$A = \widetilde{L} \cdot \widetilde{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

$D = \mathrm{diag}\,(\sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{1}) = \mathrm{diag}\,(2, 3, 1).$

$$L = \widetilde{L} \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A diagonális mátrix-szal jobbról szorzás az $\widetilde{L}$ megfelelő oszlopait szorozza az átlóbeli elemekkel. $\square$

Példa (b)

„Mechanikusan” közvetlenül a GE-ból: Az a_{11} helyére $\sqrt{a_{11}}$-et írunk. Végigosztjuk az 1. oszlopot $\sqrt{a_{11}}$-gyel. A jobb alsó 2×2-es mátrix részen elvégezzük az 1. sor segítségével az eliminációt.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ \hline \color{red}{1} & 9 & 3 \\ \color{red}{2} & 3 & 2 \end{array}\right] \to$$

Példa (b)

„Mechanikusan” közvetlenül a GE-ból: Az a_{11} helyére $\sqrt{a_{11}}$-et írunk. Végigosztjuk az 1. oszlopot $\sqrt{a_{11}}$-gyel. A jobb alsó 2×2-es mátrix részen elvégezzük az 1. sor segítségével az eliminációt.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ \hline \color{red}{1} & 9 & 3 \\ \color{red}{2} & 3 & 2 \end{array}\right] \to$$

Ugyanúgy dolgozunk tovább, de most már csak a jobb alsó 2×2-es mátrix részen, a többit változatlanul leírjuk.

$$\left[\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ \hline \color{red}{1} & 9 & 3 \\ \color{red}{2} & 3 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & & \\ \hline \color{red}{1} & 3 & \\ \cline{2-3} \color{red}{2} & \color{red}{1} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & & \\ \hline \color{red}{1} & 3 & \\ \cline{2-3} \color{red}{2} & \color{red}{1} & \color{red}{\sqrt{1}} \end{array}\right]$$

Az utolsó átlóbeli elemből ne felejtsünk el gyököt vonni.

Készen vagyunk, ellenőrizhetjük a Cholesky-felbontást:

$$A = L \cdot L^\top = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Példák Matlab-ban

1. Példák pozitív definit mátrixokra,