Logika (MSc)

Elsőrendű logika
A logika szintaktikus tárgyalása

Eldöntésprobléma megoldása szemantikai eszközökkel

Elsőrendű n változós B formula logikailag igaz, ha

- minden U univerzumon, a változók minden behelyettesítése mellett kapott B' alapformulák igazak minden, a nyelvnek megfelelő struktúrában.
- $\neg B$ kielégíthetetlen. Egyetlen interpretációban sem igaz.

Ezek a problémák szemantikailag világosak, de megoldásuk a teljes kipróbálást tételezi fel.

Szemantikus eldöntésprobléma megoldhatósága

Gödel bebizonyította, hogy **„A szemantikus eldöntésprobléma algoritmikusan nem oldható meg – nem létezik univerzális eldöntési algoritmus”**.

Kutatások **„eldönthető formulaosztályok”** keresésére. Logikailag ekvivalens formulaátalakítások.

Az egyik, eldönthető formulaosztályokhoz tartozó formulákkal leírt szemantikus eldöntésproblémára kalkulus keresése (tabló, rezolúciós elv).

A másik, a logika szintaktikai alapon való felépítése, szintaktikus eldöntésprobléma megadása és arra kalkulus kidolgozása.

Tartalom

A logika szintaktikus tárgyalása – bevezetés

Eddig a logika szemantikus tárgyalását tisztáztuk. Mivel el akarjuk kerülni az interpretációval kapcsolatos halmazelméleti problémákat a logika tárgyalását szintaktikai alapokra helyezzük.

Az ítéletlogika szintaktikai alapokon való felépítése az **ítéletkalkulus**.

Az elsőrendű logika szintaktikai alapokon való felépítése a **predikátumkalkulus** vagy logikai **függvénykalkulus**.

(bizonyításelméleti tárgyalás = szintaktikus következményfogalom – szintaktikus eldöntésprobléma).

Az ítélet vagy állításlogika **bizonyításelméleti felépítése**.

(Elmélet – egy axiomatizált struktúra)

Axiómasémák az ítéletlogikában

- Ítéletlogika, mint matematikai struktúra: $\langle \{i, h\}, \neg, \supset \rangle$
- Axiómák (**axiómasémák**): megadják a műveletek tulajdonságait.
- Az ítéletlogikai nyelvben itt a logikai összekötőjelekből csak a $\neg, \supset$ párt használjuk (funkcionálisan teljes művelethalmaz).

Axiómasémák – ítéletlogika Tk.168.o.

(A1) $X \supset (Y \supset X)$

(A2) $(X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$

(A3) $(\neg X \supset Y) \supset ((\neg X \supset \neg Y) \supset X)$

Axiómasémák a bővebb logikai művelethalmaz esetén: ld. Függelék1

Axiómák kapcsolata a szemantikával

Az axiómák **tautológiák/logikai törvények**.

Tétel

Legyen egy G formula, $G(X|S)$ az a formula, amit G-ből X változójának egy S formulával való behelyettesítésével kaptunk. Ha G tautológia, akkor $G(X|S)$ is az.

Következmény: Az axiómákból behelyettesítéssel kapott formulák is logikai törvények – axiómának tekinthetők.

Tétel (modus ponens)

$\{A \supset B, A\} \models_0 B$

Bizonyításelméleti levezetés

Bizonyításelméleti levezetés fogalma

G-nek $\mathcal{F}$-ből való levezetése egy olyan $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots, \varphi_n$ formulasorozat, amelynek utolsó formulája a G, ahol

- $\varphi_k \in \mathcal{F}$, vagy
- φ_k-t axiómasémákból kaptuk, vagy
- φ_k-t a levezetési szabállyal kaptuk φ_s, φ_t -ből $(s, t < k)$, azaz $\varphi_k = mp(\varphi_s, \varphi_t)$

Levezetési szabály a modus ponens: **leválasztási szabály**.

Egy G formula az $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ formulahalmazból levezethető ($\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \vdash_0 G$), ha van G-nek $\mathcal{F}$-ből való levezetése. Ez a **szintaktikus következményfogalom**.

Egy A formulának az üres feltételhalmazból (csak axiómákból) való levezetése az A **bizonyítása** ($\vdash_0 A$).

Predikátumkalkulus

Az elsőrendű logika bizonyításelméleti felépítése: **predikátumkalkulus**.
A szintaktikus következményfogalom definiálásához csak az elsőrendű logika axiomatizálását kell megadni. Ehhez még a kvantorok és a műveletek kapcsolatát kell axiómákkal megadni.

Axiómasémák – elsőrendű logika

(B1) $A \supset (B \supset A)$
(B2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
(B3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$
(B4) $\forall x A \supset [A(x \parallel t)]$
(B5) $\forall x(A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B)$
(B6) $A \supset \forall x A$, ahol $x \notin Par(A)$
(B7) a (B1)–(B6) axiómák általánosításai

A levezetés fogalma, a dedukciós tétel és a szintaktikus következményfogalom: mint az ítletlogikában.
Bővített axiómarendszer: Függelék2, Függelék3

Bizonyításelmélet helyessége, teljessége

Tétel

A bizonyításelméleti kalkulus **helyes**, azaz ha $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \vdash_0 G$, akkor $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models_0 G$.

Tétel

A bizonyításelméleti kalkulus **teljes**, azaz ha $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models_0 G$, akkor $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \vdash_0 G$.
Biz.: ítéletkalkulus esetén ld. később; predikátumkalkulus teljességét nem bizonyítjuk.

Tulajdonságok

Egy G formula az $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ formulahalmazból **levezethető** ($\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \vdash_0 G$), ha van G-nek $\mathcal{F}$-ből való levezetése.

G **bizonyítható** ($\vdash_0 G$), ha a G formula bármely $\mathcal{F}$ feltételhalmazból levezethető.

Egy $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ formulahalmaz **ellentmondásos** (**inkonzisztens**), ha $\mathcal{F} \vdash_0 G$ és $\mathcal{F} \vdash_0 \neg G$.
Egyébként a formulahalmaz **nem ellentmondásos** (**konzisztens**).

Tételek I.

Tétel

Két levezetés konkatenációja is levezetés. Ha $\mathcal{F}$-ből levezethető G_1 és $\mathcal{S}$-ből levezethető G_2, akkor a két levezetés konkatenációja az $\mathcal{F} \cup \mathcal{S}$-ből való levezetés.

Tétel

Ha $\mathcal{F}$-ből levezethető G_1 és $\mathcal{S}$-ből levezethető G_2, valamint $\{G_1, G_2\}$-ből levezethető A, akkor az $\mathcal{F} \cup \mathcal{S}$-ből levezethető A.

Az eldöntésprobléma tétele a bizonyításelméletben

Az $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \vdash_0 G \iff$
$\vdash_0 F_1 \supset (F_2 \supset (\ldots \supset (F_{n-1} \supset (F_n \supset G))\ldots))$.

Biz.: a dedukciós tétel következménye

Tételek II.

Tétel

Ha $\mathcal{F}$-ből levezethető G, akkor az $\mathcal{F} \cup \{\neg G\}$ ellentmondásos.

Tétel

Ha $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ ellentmondásos, akkor kielégíthetetlen.

Tétel

Legyen A egy formula, és $\mathcal{F}$ egy konzisztens formulahalmaz, ekkor

(a) $\mathcal{F}$, $\neg A$ ellentmondásos, akkor és csak akkor, ha $\mathcal{F} \vdash_0 A$.

(b) $\mathcal{F}$, A ellentmondásos, akkor és csak akkor, ha $\mathcal{F} \vdash_0 \neg A$.

Tétel – bizonyítás

Az előző dia utolsó tételének bizonyítása.

(a) $\Rightarrow$: Ha $\mathcal{F}$, $\neg A$ ellentmondásos, akkor $\mathcal{F}$, $\neg A \vdash_0 B$ és $\mathcal{F}$, $\neg A \vdash_0 \neg B$. A dedukciós tétel miatt $\mathcal{F} \vdash_0 \neg A \supset B$ és $\mathcal{F} \vdash_0 \neg A \supset \neg B$. A két levezetés konkatenációját folytatva a 3. axióma $(\neg A \supset B) \supset (\neg A \supset \neg B) \supset A$ alakjával, majd a $\neg A \supset B$ és a $\neg A \supset \neg B$ leválasztásával megkapjuk az A levezetését az $\mathcal{F}$-ből.

$\Leftarrow$: Ha $\mathcal{F} \vdash_0 A$, akkor $\mathcal{F}, \neg A$ ellentmondásos, mivel $\mathcal{F}, \neg A \vdash_0 A$ és $\mathcal{F}, \neg A \vdash_0 \neg A$

(b) $\Rightarrow$: $\mathcal{F}$, A ellentmondásos, akkor mivel minden, ami $\mathcal{F}, A$-ból levezethető, az $\mathcal{F}, \neg\neg A$-ból is levezethető; tehát, ha $\mathcal{F}, A$ ellentmondásos, akkor $\mathcal{F}, \neg\neg A$ is az. Használva a tétel (a) részét, A helyett $\neg A$-ra: $F \models_0 \neg A$.

$\Leftarrow$: Ha $F \vdash_0 \neg A$, akkor $\mathcal{F}, A$ ellentmondásos, mivel $F, A \vdash_0 A$ és $F, A \vdash_0 \neg A$.

Tételek III

Kalmár László lemmája

Egy k változós G formula igazságtáblájának minden sorában $X_1', X_2', \ldots, X_k' \vdash_0 G'$.

Tétel

Ha $X_1', X_2', \ldots, X_k' \vdash_0 G'$ és $\neg X_1', X_2', \ldots, X_k' \vdash_0 G'$, akkor $X_2', \ldots, X_k' \vdash_0 G'$.

Tétel

Ha G tautológia, akkor G bizonyítható.

Tétel (gyenge teljesség)

Legyen $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ véges formulahalmaz. Ha $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models_0 G$, akkor $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \vdash_0 G$.

Teljesség bizonyítása (Gödel)

Tétel

Ha $\{F_1, F_2, \ldots\} \models_0 G$, akkor $\{F_1, F_2, \ldots\} \vdash_0 G$.

Bizonyítás a Gödel-féle gondolatmenettel:

1. Ha $\{F_1, F_2, \ldots\} \models_0 G$, akkor $\{F_1, F_2, \ldots\} \cup \{\neg G\}$ kielégíthetetlen.
2. Ha $\{F_1, F_2, \ldots\} \cup \{\neg G\}$ ellentmondásos (inkonzisztens), akkor $\{F_1, F_2, \ldots\} \vdash_0 G$.

Bizonyítás – folytatás

Azt tudjuk, hogy az ellentmondásos formulahalmaz kielégíthetetlen. Ha meg tudjuk mutatni, hogy a **kielégíthetetlenség** mint **szemantikus** tulajdonság és az **inkonzisztencia** mint **szintaktikus** tulajdonság a formulahalmazok halmazát ugyanúgy osztja két diszjunkt részre, akkor a bizonyítás a következő lenne:

Ha $\{F_1, F_2, \ldots\} \models_0 G$, akkor $\{F_1, F_2, \ldots\} \cup \{\neg G\}$ kielégíthetetlen. Ha egy formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor ellentmondásos (inkonzisztens) is.
Ha $\{F_1, F_2, \ldots\} \cup \{\neg G\}$ ellentmondásos, akkor $\{F_1, F_2, \ldots\} \vdash_0 G$.

Azt nem tudjuk közvetlenül belátni, hogy ha egy formulahalmaz kielégíthetetlen, akkor ellentmondásos (inkonzisztens) is. E helyett belátjuk azt, hogy ha egy formulahalmaz ellentmondásmentes (konzisztens), akkor kielégíthető.

Összegzés

Az ítéletkalkulus tehát a szemantikus tárgyalásával ekvivalens szintaktikus tárgyalásmód. A bizonyításelméleti levezetés konstrukciója a tételbizonyítás eszköze, szintaktikus **kalkulus**.

Tartalom

Az ítéletkalkulus axiómasémái kibővítve

(A1) $X \supset (Y \supset X)$

(A2) $(X \supset (Y \supset Z)) \supset ((X \supset Y) \supset (X \supset Z))$

(A3) $(\neg X \supset Y) \supset ((\neg X \supset \neg Y) \supset X)$

(A4) $\neg\neg X \supset X$

(A5) $X \supset (Y \supset X \wedge Y)$

(A6) $X \wedge Y \supset X$

(A7) $X \wedge Y \supset Y$

(A8) $(X \supset Z) \supset ((Y \supset Z) \supset (X \vee Y \supset Z))$

(A9) $X \supset X \vee Y$

(A10) $Y \supset X \vee Y$

◂ Alap axiómasémák

A predikátumkalkulus axiómasémái kibővítve

(C1) $A \supset (B \supset A)$

(C2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

(C3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

(C4) $\neg\neg A \supset A$

(C5) $A \supset (B \supset A \wedge B)$

(C6) $A \wedge B \supset A$

(C7) $A \wedge B \supset B$

(C8) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

(C9) $A \supset A \vee B$

(C10) $B \supset A \vee B$

(C11) $\forall x A \supset [A(x \parallel t)]$

(C12) $\forall x(B \supset A) \supset (B \supset \forall x A)$, ahol $x \notin Par(B)$

(C13) $[A(x \parallel t)] \supset \exists x A$

(C14) $\forall x(A \supset B) \supset (\exists x A \supset B)$, ahol $x \notin Par(B)$.

(C15) $A \supset \forall x A$, ahol $x \notin Par(A)$

(C16) a (C1)–(C15) axiómák általánosításai

Alap axiómasémák

Az egyenlőségjeles predikátumkalkulus axiómasémái

(D1) $A \supset (B \supset A)$

(D2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

(D3) $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

(D4) $\forall x A \supset [A(x \parallel t)]$

(D5) $\forall x(A \supset B) \supset (\forall x A \supset \forall x B)$

(D6) $A \supset \forall x A$, ahol $x \notin Par(A)$

(D7) $t = t$

(D8) $t_1 = t_{n+1} \supset \ldots \supset t_n = t_{2n} \supset f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots, t_{2n})$

(D9) $t_1 = t_{n+1} \supset \ldots \supset t_n = t_{2n} \supset P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \supset P(t_{n+1}, t_{n+2}, \ldots, t_{2n})$

(D10) a (D1)–(D9) axiómák általánosításai

◂ Alap axiómasémák