9. gyakorlat

Iterációs módszerek: egyszerű iteráció és a Jacobi-iteráció

1. Tekintsük a következő iterációt:

$$\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k+1})} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix} = B \cdot \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}$$

(a) Konvergens-e $\forall\ \boldsymbol{x}^{(0)}$-ra?

(b) Írjuk fel a hibabecslést! Az $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ esetén hány lépéssel érjük el a 10^{-3} pontosságot?

(c) Melyik LER megoldását közelítheti a fenti módszer?

2. Tekintsük a következő iterációt:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix} = B \cdot \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}$$

(a) Konvergens-e $\forall\ \boldsymbol{x}^{(0)}$-ra?

(b) Írjuk fel a hibabecslést! Az $\boldsymbol{x}^{(0)} = 0$ esetén hány lépéssel érjük el a 10^{-3} pontosságot?

(c) Melyik LER megoldását közelítheti a fenti módszer?

3. Tekintsük a

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER-t. A megoldáshoz a Jacobi-iterációt szeretnénk alkalmazni.

(a) Konvergens-e tetszőleges $\boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})}$ esetén?

(b) Írjuk fel a hibabecslést!

(c) Az $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ esetén számítsuk ki a $\boldsymbol{x}^{(1)}$-et és $\boldsymbol{x}^{(2)}$-t a a mátrixos és a koordinátás felírás segítségével!

(d) Hány lépést kell végeznünk a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

4. Konvergál-e az A mátrixra felírt Jacobi-iteráció?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Írjuk fel az

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixra a csillapított Jacobi-iterációt!

(a) Milyen ω-ra lesz konvergens az eljárás?

(b) Melyik ω-ra a leggyorsabb a konvergencia?

(c) Írjuk fel a hibabecslést 2-es normában az optimális ω-ra, ha a kezdővektor $\mathbf{0}$!

MEGOLDÁS

Emlékeztető:

A $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **kontrakció**, ha

$$\exists\ 0 \le q < 1 : \quad \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| \le q\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \qquad (\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n).$$

Ha a B átmenetmátrixra $\|B\| < 1$, akkor a $\varphi(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} + \mathbf{c}$ leképezés kontrakció az $\mathbb{R}^n$-en alkalmazott vektornormában, mely illeszkedik a mátrixnormához.
Ekkor $q := \|B\|$.

Banach-féle fixponttétel

Ha $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kontrakció a $0 \le q < 1$ együtthatóval, akkor

1. φ-nek egyértelműen létezik $\mathbf{x}^*$ fixpontja;
2. az $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ sorozat konv. $\forall\, \mathbf{x}^{(0)}$ esetén:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \varphi(\mathbf{x}^{(k)}), \qquad \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*$$

3. hibabecslés

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \le \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|$$

$$\|B\| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c} \quad \text{konvergál } \forall\ \mathbf{x}^{(0)}\text{–ra.}$$

$$\varrho(B) < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = B\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c} \quad \text{konvergál } \forall\ \mathbf{x}^{(0)}\text{–ra.}$$

1. Tekintsük a következő iterációt:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix} = B \cdot \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}$$

(a) Konvergens-e $\forall\ \boldsymbol{x}^{(0)}$-ra?

(b) Írjuk fel a hibabecslést! Az $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ esetén hány lépéssel érjük el a 10^{-3} pontosságot?

(c) Melyik LER megoldását közelítheti a fenti módszer?

Megoldás:

(a) Mivel

$$\|B\|_\infty = \max\{0.5, 0.4, 0.5\} = \frac{1}{2} := q < 1,$$

azaz a módszer bármely $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ esetén konvergens.

(A B mátrix szimmetrikus, ezért $\|B\|_1 = \frac{1}{2}$ is vehető q-nak, de ekkor a hibabecslésnél a $\|.\|_1$ vektornormát kell használnunk.)

(b) A fixpont-tétel alapján az alábbi hibabecslést írhatjuk fel ∞ normában:

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q} \cdot \|\boldsymbol{x}^{(\mathbf{1})} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty$$

Ha $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, akkor

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = B \cdot \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{c} = \boldsymbol{c}$$

amelyből

$$\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty = \|\boldsymbol{c}\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

Ekkor a hibabecslés:

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \leq \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}.$$

Így ahhoz, hogy elérjük a 10^{-3} pontosságot, legalább 10 iterációs lépésre lesz szükségünk, ugyanis

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^k} \leq 10^{-3} \\ &10^3 \leq 2^k \\ &10 \leq k. \end{aligned}$$

(c)

$$\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c} \quad \Longrightarrow \quad (I - B)\mathbf{x} = \mathbf{c},$$

innen a LER

$$\begin{bmatrix} 0.6 & -0.1 & 0 \\ -0.1 & 0.8 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & 0.6 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

2. Tekintsük a következő iterációt:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x}^{(k)} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix} = B \cdot \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c}$$

(a) Konvergens-e $\forall\, \boldsymbol{x}^{(0)}$-ra?

(b) Írjuk fel a hibabecslést! Az $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ esetén hány lépéssel érjük el a 10^{-3} pontosságot?

(c) Melyik LER megoldását közelítheti a fenti módszer?

Megoldás:

(a) $\|B\|_1 = 1$, az oszlopnorma nem mond semmit a konvergenciáról.

$\|B\|_\infty = 0.9 < 1$, ezért ebben a normában tudjuk, hogy a sorozat konvergens minden kezdővektor esetén. ($q = 0.9$)

(b) Hibabecslés:

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q}\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{0}\|_\infty = \frac{0.9^k}{0.1} \cdot 0.3 \leq 10^{-3},$$

és innen

$$\lg 3000 \leq k \cdot \lg\left(\frac{10}{9}\right)^k,$$

melyből azt kapjuk, hogy $k \geq 76$.

(c)

$$\mathbf{x} = B\mathbf{x} + \mathbf{c} \quad \Longrightarrow \quad (I - B)\mathbf{x} = \mathbf{c},$$

innen a LER

$$\begin{bmatrix} 0.9 & -0.3 & -0.1 \\ -0.5 & 0.7 & -0.1 \\ 0 & -0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

Legyen $A = L + D + U$, ekkor

$$Ax = \mathbf{b}$$
$$(L + D + U)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$D\mathbf{x} = -(L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

innen

$$\mathbf{x} = -D^{-1}(L + U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b},$$

és a

Jacobi-iteráció

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{B_{\mathrm{J}}}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{D^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}_{\mathrm{J}}}$$

A Jacobi-iteráció koordinátás alakja:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i \right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n}$$

Ha A szigorúan diagonálisan domináns a mátrix soraira nézve, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER- re felírt Jacobi-iteráció konvergens tetszőleges kezdővektor esetén.

3. Tekintsük a

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ LER-t. A megoldáshoz a Jacobi-iterációt szeretnénk alkalmazni.

(a) Konvergens-e tetszőleges $\boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})}$ esetén?

(b) Írjuk fel a hibabecslést!

(c) Az $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ esetén számítsuk ki $\boldsymbol{x}^{(1)}$-et és $\boldsymbol{x}^{(2)}$-t a mátrixos és a koordinátás felírás segítségével!

(d) Hány lépést kell végeznünk a 10^{-3} pontosság eléréséhez?

Megoldás:

(a) Az A mátrix szigorúan diagonálisan domináns a soraira nézve, ezért a tételünk biztosítja az iteráció konvergenciáját tetszőleges kezdővektor esetén.

Második megoldás: Az iteráció átmenetmátrixának a vizsgálata.
(Ha hibabecslést is kell számolnunk, erre mindenképpen szükségünk lesz.)

A feladatunk (Jacobi-iterációs) átmenetmátrixa

$$B_J = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix},$$

amelyből $\|B_J\|_\infty = \frac{1}{2} = q < 1$, azaz az iteráció bármely $\boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})}$ esetén konvergens.

Megjegyzés: Figyelembe véve, hogy B_J szimmetrikus, $\|B_J\|_1 = \frac{1}{2} < 1$ és könnyen ki tudjuk számítani a a 2-es normáját is:

$$\|B_J\|_2 = \varrho(B_J) = \frac{1}{\sqrt{8}} < 1.$$

Ezen normák alkalmazásakor viszont a hibabecslésnél a megfelelő illeszkedő vektornormákkal kell számolnunk.

(b) A hibabecslést az alábbi módon kapjuk:

$$\|\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \le \frac{q^k}{1-q}\|\boldsymbol{x}^{(\mathbf{1})} - \boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})}\|_\infty = \frac{1}{2^{k-1}}\|\boldsymbol{x}^{(\mathbf{1})} - \boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})}\|_\infty$$

(c) Ha $\boldsymbol{x}^{(\mathbf{0})} = \mathbf{0}$, akkor

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = B_J \cdot \mathbf{0} + \boldsymbol{c}_J = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 2/4 \\ 3/4 \end{bmatrix},$$

és

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = B_J \cdot \boldsymbol{x}^{(1)} + \boldsymbol{c}_J = \begin{bmatrix} 1/8 \\ 3/8 \\ 1/8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6/8 \\ 4/8 \\ 6/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/8 \\ 7/8 \\ 7/8 \end{bmatrix}$$

Koordinátás alakban is felírhatjuk vektorok elemeit az alábbi formula segítségével.

A Jacobi-iteráció koordinátás alakja:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n}$$

Alkalmazzuk a formulát a feladatra. Ekkor

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= -\frac{1}{a_{11}} \left(a_{12}x_2^{(0)} + a_{13}x_3^{(0)} - b_1 \right) = -\frac{1}{4}(-1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 3) = -\frac{1}{4} \cdot (-3) = \frac{3}{4} \\
x_2^{(1)} &= -\frac{1}{a_{22}} \left(a_{21}x_1^{(0)} + a_{23}x_3^{(0)} - b_2 \right) = -\frac{1}{4}(-1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 2) = -\frac{1}{4} \cdot (-2) = \frac{2}{4} \\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{a_{33}} \left(a_{31}x_1^{(0)} + a_{32}x_2^{(0)} - b_3 \right) = -\frac{1}{4}(0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 3) = -\frac{1}{4} \cdot (-3) = \frac{3}{4},
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= -\frac{1}{a_{11}} \left(a_{12}x_2^{(1)} + a_{13}x_3^{(1)} - b_1 \right) = -\frac{1}{4} \left(-1 \cdot \frac{2}{4} - 3 \right) = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{7}{2} \right) = \frac{7}{8} \\
x_2^{(2)} &= -\frac{1}{a_{22}} \left(a_{21}x_1^{(1)} + a_{23}x_3^{(1)} - b_2 \right) = -\frac{1}{4} \left(-1 \cdot \frac{3}{4} - 1 \cdot \frac{3}{4} - 2 \right) = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{14}{4} \right) = \frac{7}{8} \\
x_3^{(2)} &= -\frac{1}{a_{33}} \left(a_{31}x_1^{(1)} + a_{32}x_2^{(1)} - b_3 \right) = -\frac{1}{4} \left(-1 \cdot \frac{2}{4} - 3 \right) = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{7}{2} \right) = \frac{7}{8}.
\end{aligned}$$

(d) Mivel $\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{c}_J$, ezért $\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty = \|\boldsymbol{c}_J\|_\infty = \frac{3}{4}$. Innen a hibabecslés

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Ahhoz, hogy a hiba legfeljebb 10^{-3} legyen, k-t úgy kell megválasztanunk, hogy

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq 10^{-3}$$

teljesüljön. Átrendezve az egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$1500 < 2^k,$$

melyből

$$k \geq 11.$$

4. Konvergál-e az A mátrixra felírt a Jacobi-iteráció?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Az A mátrix **nem** szigorúan diagonálisan domináns a soraira nézve.

Írjuk fel az átmenetmátrixot, a $B_J = -D^{-1}(L+U)$ összefüggés alapján:

$$B_J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy jelen esetben nem tudjuk alkalmazni egyik elégséges feltételt sem: a B_J mátrixnak van 1-nél nagyobb abszolútértékű eleme, ezért a sor-, az oszlop- és a Frobenius norma mindegyike nagyobb 1-nél.

Ahhoz, hogy a konvergenciát igazoljuk, vagy elvessük, ellenőriznünk kell a szükséges és elégséges feltételt. Meg kell vizsgálnunk, hogy $\varrho(B_J) < 1$ teljesül vagy sem. .

A sajátértékek meghatározásához, először írjuk fel B_J karakterisztikus polinomját:

$$P(\lambda) = \det(B_J - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \cdot (\lambda^2 - 2) - 1 \cdot (-2\lambda + 4) + 2 \cdot (2 - 2\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda + 2\lambda - 4 + 4 - 4\lambda = -\lambda^3.$$

A sajátértékeket ebből könnyen meghatározhatjuk:

$$P(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0,$$

azaz a $\lambda = 0$ háromszoros sajátérték. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$\varrho(B_J) = 0 < 1,$$

azaz teljesül a konvergencia szükséges és elégséges feltétele, a Jacobi-iteráció konvergens a feladatunkra.

$$\mathbf{x} = -D^{-1}(L+U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Az első egyenletet szorozzuk meg ω-val, a másodikat $(1-\omega)$-val, és adjuk össze őket:

$$\mathbf{x} = \Big[(1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)\Big]\,\mathbf{x} + \omega D^{-1}\mathbf{b},$$

és

A **csillapított Jacobi-iteráció**

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{\Big[(1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)\Big]}_{B_{J(\omega)}}\,\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\omega D^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{c}_{B_{J(\omega)}}}$$

melynek átmenetmátrixa így is felírható:

$$\boxed{B_{J(\omega)} = (1-\omega)\cdot I + \omega B_J}$$

Láthatjuk, hogy az $\omega = 1$ esetben a Jacobi-iterációt kapjuk, ezért használjuk gyakran a $J(1)$ jelölést a Jacobi-iterációra. Továbbá, átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k+1)} = (1-\omega)\mathbf{x}^{(k)} + \omega\,\mathbf{x}_J^{(k+1)}}$$

Ha az Ax = b LER-re a Jacobi-iteráció konvergens minden kezdőértékre, akkor a csillapított Jacobi-iteráció is az, minden $0 < \omega < 1$ esetén.

5. Írjuk fel az

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixra a csillapított Jacobi-iterációt!

(a) Milyen ω-ra lesz konvergens az eljárás?

(b) Melyik ω-ra a leggyorsabb a konvergencia?

(c) Írjuk fel a hibabecslést 2-es normában az optimális ω-ra, ha a kezdővektor $\mathbf{0}$!

Megoldás:

(a) Az A mátrix szigorúan diagonálisan domináns a soraira nézve, ezért a Jacobi-iteráció konvergens minden $\mathbf{x}^{(0)}$ esetén. A fenti tétel alapján a csillapított Jacobi-módszer $0 < \omega < 1$ esetén konvergens tetszőleges kezdőértékkel. Milyen más ω értékekre teljesül még a konvergencia?

Vizsgáljuk meg a csillapított iteráció $B_{J(\omega)}$ mátrix sajátértékeit!
Ha λ sajátértéke B_J-nek, akkor $B_J\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ valamely $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ esetén. Ekkor

$$B_{J(\omega)}\mathbf{v} = \Big((1-\omega)\cdot I + \omega B_J\Big)\mathbf{v} = (1-\omega)\mathbf{v} + \omega\lambda\mathbf{v} = (1-\omega+\omega\lambda)\mathbf{v},$$

azaz $(1-\omega+\omega\lambda)$ sajátértéke $B_{J(\omega)}$-nek. A B_J mátrix karakterisztikus polinomjának

$$|B_J - \lambda I\,| = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{16}\lambda = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{8}\right)$$

gyökei 0, $\frac{1}{\sqrt{8}}$, $-\frac{1}{\sqrt{8}}$. Tehát a $B_{J(\omega)}$ sajátértékei

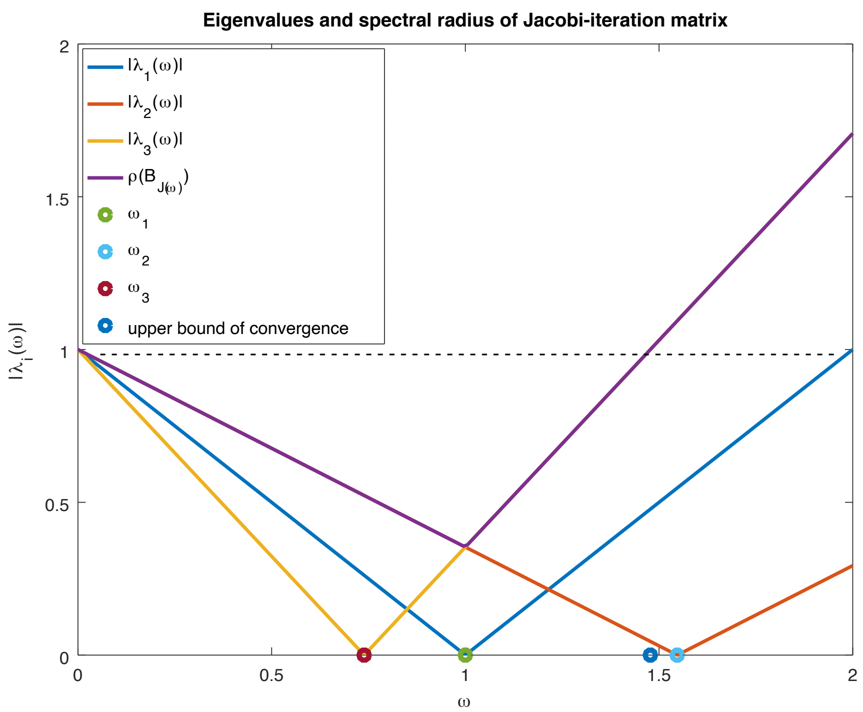
$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \lambda_1(\omega) = 1-\omega \\
\lambda_2 &= \lambda_2(\omega) = 1-\omega+\frac{\omega}{\sqrt{8}} = 1-\omega\cdot\frac{\sqrt{8}-1}{\sqrt{8}} \\
\lambda_3 &= \lambda_3(\omega) = 1-\omega-\frac{\omega}{\sqrt{8}} = 1-\omega\cdot\frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{8}}
\end{aligned}$$

Látható, hogy mindhárom sajátérték lineárisan függ ω-tól. A $J(\omega)$ iteráció konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele, hogy $|\lambda_i(\omega)| < 1$ minden i-re. Mivel a $|\lambda_i(\omega)|$ függvények grafikonja V alakú, ábrázolásukhoz jelöljük az x-tengellyel való metszéspontjukat rendre ω_i-vel:

$$\omega_1 = 1, \qquad \omega_2 = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}-1} = 1,5469, \qquad \omega_3 = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}+1} = 0,7388$$

Az alábbi ábra értelmében a konvergencia pontosan akkor teljesül, ha

$$\omega \in (0; 2\omega_3) = \left(0; \frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{8}+1}\right) = (0; 1.4776).$$



.

(b) A konvergencia sebessége $B_{J(\omega)}$ spektrálsugarától függ. Esetünkben a spektrálsugár akkor minimális (és így akkor a leggyorsabb a konvergencia), ha

$$|\lambda_3(\omega)| = |\lambda_2(\omega)|$$

teljesül. Ebből az alábbi egyenletet kapjuk ω-ra

$$-\left(1 - \omega - \omega \cdot \frac{1}{\sqrt{8}}\right) = 1 - \omega + \omega \cdot \frac{1}{\sqrt{8}},$$

melyből

$$2 \cdot \omega = 2,$$

azaz az optimális paraméter $\omega_{opt} = 1$, ami azt jelenti, hogy a feladatunkra az eredeti Jacobi-módszer a leggyorsabb a paraméteres változatok között.

(c) Most legyen $\omega = 1$, és $\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{0}$, ekkor a hibabecslés 2-es normában:

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^*\|_2 \leq \frac{q^k}{1-q}\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_2,$$

ahol

$$q = \|B_{J(1)}\|_2 = \|B_J\|_2 = \varrho(B_J) = \frac{1}{\sqrt{8}}, \qquad \boldsymbol{x^{(1)}} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 2/4 \\ 3/4 \end{bmatrix},$$

(ld. 3. feladat megoldása). Végül

$$\|\boldsymbol{x^{(k)}} - \boldsymbol{x}^*\|_2 \leq \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^k}{1 - \frac{1}{\sqrt{8}}} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{9+4+9}.$$