HALMAZOK

$\{1,2,3\} = \{2,1,3\} = \cancel{\{1,1,2,2,3,3,3\}}$

1x soroljuk fel az elemeket

RELÁCIÓ

· Köznyelvi jelentése: „viszony" 2 dolog

Pl. SZÁMOK „osztója", $<$, $=$

$a \to b$ $\quad a < b$ $\quad a = b$

HALMAZOK $\subseteq$, $=$

$A \subseteq B$

EMBEREK „gyereke", idősebb

A B

Formális / absztrakt

DEF: Rendezett pár

$(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$ 2 elem, számít a sorrend

Tul: $(a,b) = (c,d) \iff a = c \wedge b = d$

Pl. $(3,4) \neq (4,3)$

$(4,5) \neq (4,4)$

$(2,x) = (x,2) \iff x = 2$

Reláció megadása: párok felsorolása, melyekre fennáll a viszony

Pl. osztója ($\mathbb{N}$) $\{(1,0),(1,1),(1,2)\,(1,3), \ldots$

$(2,0),(2,2),(2,4), \ldots$

$(3,0),(3,3), \ldots$

$\}$

Def. Egy halmaz bináris reláció,

ha minden eleme rendezett pár. (kétváltozós)

Def. A és B direkt szorzata (DESCARTES szorzata)

az a halmaz, mely az összes olyan rendezett párt tartalmazza,

melyre $a \in A$, $b \in B$

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

„A kereszt B"

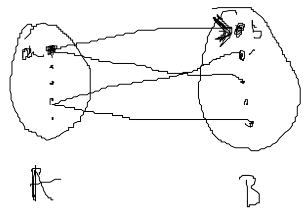
Pl. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{x,y\}$

$A \times B = \{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y),(3,x),(3,y)\}$

Def. R egy A és B közötti reláció, ha

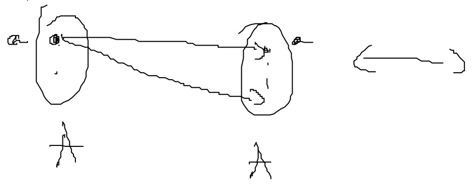
$R \subseteq A \times B$

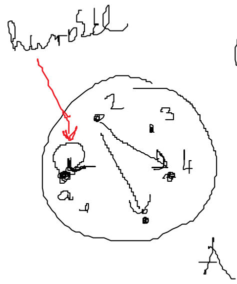
Rajz



(a,b) irányított gráf

ha $R \subseteq A \times A$:

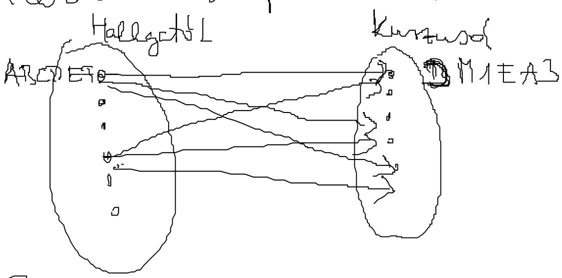




(a,a)

Példa Relációs adatbázis

Halmaz rendezett párokból $\longleftrightarrow$ táblázat, 2 oszlop



MAT. REPR.:

$\{(\text{ABCDEF}, \text{DM1EA3}), (\ldots,\ldots), (\ldots,\ldots), \ldots\}$

INF. REPR.

NEPTUNKÓD	KURZUSKÓD
ABCDEF	DM1EA3
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮

BINÉR REL $\Longleftrightarrow$ 2 OSZLOPOS TÁBL.

DEF.: R egy A-beli homogén reláció, ha $R \subseteq A \times A$.

INVERZ: hétköznapi

pl. a osztója b-nek $\Leftrightarrow$ b többszöröse a-nak

másik irányból nézve adjuk meg a viszonyt

$a < b \Leftrightarrow b > a$

EMBEREK a gyereke b-nek $\Leftrightarrow$ b szülője a-nak

$e \perp f \Leftrightarrow f \perp e$

DEF. R reláció inverze:

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

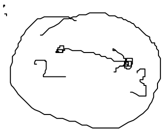
„R inverz"

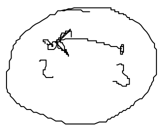
Pl. $R = \{(2,3),(3,7),(5,5)\} \Leftrightarrow R^{-1} = \{(3,2),(7,3),(5,5)\}$

Python:

```
[(b,a) for (a,b) in R]
```

Rajz.

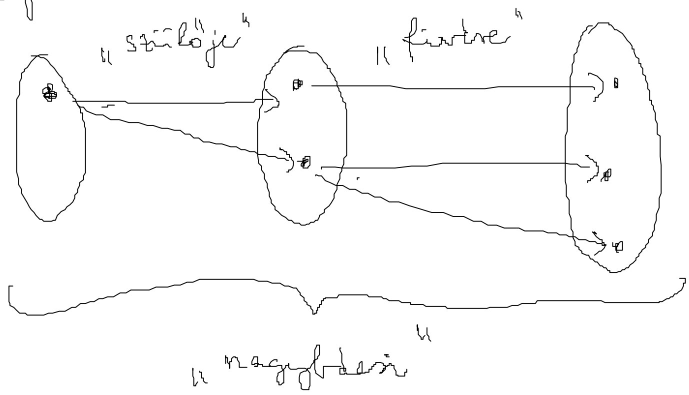
R: 

R^{-1} 

irányítás megfordul

KOMPOZÍCIÓ („rel. szorzata")

Pl. hétköznapi



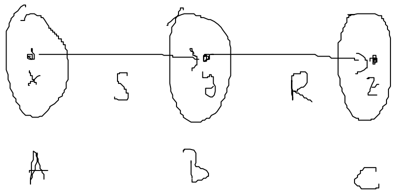
prog. JOIN

neptunkód	kurzuskód
⋮	⋮

neptunkód	név
⋮	⋮

2 tábla

halmazokkal,



irányított út

(x,z) párok

DEF: R és S rel. kompozíciója

$$R \circ S = \{(x,z) \mid \exists y : (x,y) \in S \wedge (y,z) \in R\}$$

„R kör S"

← olvassuk

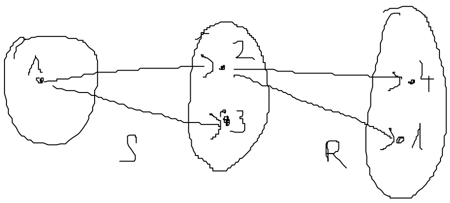
xf

$f(x)$

$f \circ g(x) = f(g(x))$

Pl. $S = \{(1,2),(1,3)\}$, $R = \{(2,4),(2,1)\}$

$R \circ S$



$$R \circ S = \{(1,4),(1,1)\}$$

Def. R értelmezési tart. $A \times B \supseteq R$

$\mathrm{dmn}(R) = \{a \mid \exists b : (a,b) \in R\}$ ir. élek kezdőpontjai

„domain"

R értékkészlete

$\mathrm{rng}(R) = \{b \mid \exists a : (a,b) \in R\}$ ir. élek végpontjai

„range"

Tétel Reláció kompozícióinverze: R, S relációk

$$(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$$

külön-külön invertáljuk, megcseréljük a sorrendet

(zokni fel, cipő fel)$^{-1}$ =

(cipő le, zokni le)

Biz. „megfejtjük"

B.o. $$(R\circ S)^{-1} \underset{\text{inverz def.}}{=} \{(z,x) \mid (x,z)\in R\circ S\} \underset{\text{komp. def.}}{=} \boxed{\{(z,x)\mid \exists y: (x,y)\in S \land (y,z)\in R\}}$$

$$x \xrightarrow{S} y \xrightarrow{R} z$$

$\land$ kommutatív

J.o. $$S^{-1}\circ R^{-1} \underset{\text{komp. def.}}{=} \{(z,x)\mid \exists y: (z,y)\in R^{-1} \land (y,x)\in S^{-1}\} \underset{\text{inverz def.}}{=} \boxed{\{(z,x)\mid \exists y: (y,z)\in R \land (x,y)\in S\}}$$

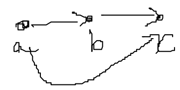
∎

RELÁCIÓTULAJDONSÁGOK

DEF. Legyen A tetsz. halmaz, $R \subseteq A \times A$ homogén rel.

R relációt

• tranzitív, ha $\forall a,b,c \in A: \left((a,b)\in R \wedge (b,c)\in R\right) \Rightarrow (a,c)\in R$



pl. „≤"

$a \le b \wedge b \le c \Rightarrow a \le c$ $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R})$

$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

a „osztója" b ∧ b „osztója" c ⇒ a „osztója" c $(\mathbb{N}^+)$

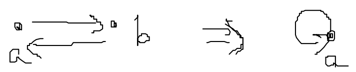
$e \parallel f \wedge f \parallel g \Rightarrow e \parallel g$

De! nem tranzitív

$e \perp f \wedge f \perp g \not\Rightarrow e \perp g$

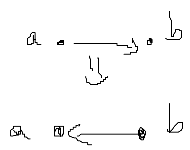
x ismeri y-t ∧ y ismeri z-t ⇏ x ismeri z-t

Megj. $a = c$ esetén is!



„testvér" ?! nem

• szimmetrikus, ha $\forall a,b \in A: (a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R$



pl. „testvér"

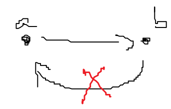
$a = b \Rightarrow b = a$

$e \parallel f \Rightarrow f \parallel e$

DE! a „gyereke" b-nek nem

megj. szimm. $\Leftrightarrow R = R^{-1}$ inverz saját maga

• antiszimmetrikus, ha $\forall a,b \in A: \left((a,b)\in R \wedge (b,a)\in R\right) \Rightarrow a = b$



ekv. def.

ha $a \neq b \Rightarrow \left(\neg\left((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R\right)\right)$ megtiltjuk a szimm-t

$$a \neq b \Rightarrow \left((a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R\right)$$

Pl. $\leq$, $\subseteq$, „osztója" $(\mathbb{N})$

$a \leq b$ és $b \leq a$

- __szigorúan antiszimmetrikus__, ha $\forall a,b \in A: (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R$

  ↳ antiszimm + $\forall a: (a,a) \notin R$

- __reflexív__, ha $\forall a \in A: (a,a) \in R$

  pl. $=$, osztója , $\subseteq$, $\parallel$, $\leq$

- __irreflexív__, ha $\forall a \in A: (a,a) \notin R$

  pl. $<$, $\subsetneq$, sík egyenesei: $\perp$