JANUS PANNONIUS TUDOMÁNYEGYETEM

Schipp Ferenc

ANALÍZIS II.

Folytonosság, differenciálhatóság

****

Pécs, 1996

Lektorok:

DR. SZÉKELYHIDI LÁSZLÓ
egyetemi tanár, a mat. tud. doktora

DR. SZILI LÁSZLÓ
egyetemi docens, kandidátus

Előszó

Ez a jegyzet egy több kötetre tervezett sorozat része, amelynek eddig megjelent köteteit a jegyzet végén soroltuk fel. A sorozat — szánndékaink szerint — a matematikának a tanárképzés szempontjából legfontosabb fejezeteit dolgozza fel, figyelembe véve a tanárképző intézmények tanterveit. Az analízis tárgy keretében oktatott tananyagot 6-8 kisebb terjedelmű kötetben tervezzük kiadni. Ebben a jegyzetben az *Analízis I.* mellett Kamarás Lajos: *Matematikai bevezetés* című kötére támaszkodunk, amely a halmazelméleti és logikai alapokat tartalmazza.

A jegyzetben a szorosabb értelemben vett tananyagon túlmenően néhány olyan téma is szerepel, amely a kitekintést szolgálja és a tanár-továbbképzésben hasznosítható. Minden fejezethez egy feladatsor kapcsolódik, amely a gyakorlás mellett az anyag mélyebb elsajátítását is elősegítheti. A jegyzethez fűzött függelékben algebra alaptételének egy elemi bizonyítását ismertetjük.

TARTALOM

Jelölések

$\mathbb{N}$	a természtes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$	a racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{C}$	a komplex számok halmaza
$\mathbb{K}$	a valós vagy a komplex számok halmaza
$K_r(a)$	az $a \in \overline{\mathbb{K}}$ pont $r > 0$ sugarú környezete
$\mathcal{P}_n$	az n-edfokú polinomok halmaza
$\mathcal{P}$	a polinomok halmaza
$\mathcal{F}(H, K)$	az $f : H \to K$ típusú függvények halmaza
$\mathcal{C}(H, K)$	a $\mathcal{F}(H, K)$-beli folytonos függvények halmaza
$L_a(f),\ \lim_{x\to a} f(x)$	az f függvény a pontbeli határértéke
$L_{a+}(f),\ \lim_{x\to a+} f(x)$	az f függvény a pontbeli jobb oldali határértéke
$L_{a-}(f),\ \lim_{x\to a-} f(x)$	az f függvény a pontbeli bal oldali határértéke
$\triangle_a(f)$	az f függvény a pontbeli differenciahányadosa
$f'(a),\ \frac{df}{dx}(a)$	az f függvény a pontbeli deriváltja
$f^{(n)}(a),\ \frac{d^n f}{dx^n}(a)$	az f függvény a pontbeli n-edik deriváltja
$\mathcal{D}(H, K)$	az $\mathcal{F}(H, K)$-beli differenciálható függvények halmaza
$\mathcal{D}^n(H, K)$	az n-szer differenciálható függvények halmaza
$\mathcal{C}^n(H, K)$	az n-szer folytonosan differenciálható függvények halmaza

1. Függvények

Ebben a fejezetben néhány alapvető függvényosztállyal, nevezetesen a polinomok, a racionális függvények és az analitikus függvények osztályával foglalkozunk. Bevezetjük a legfontosabb elemi függvényeket, többek között az exponenciális-, a trigonometrikus- és a hiperbolikus függvényeket. Ezeket a függvényeket hatványsorukkal értelmezzük. Ennek a középiskolában megszokottól eltérő bevezetésnek több előnye is van. Ez a definició — kisebb-nagyobb módosítással — közvetlenül felhasználható a függvényértékek kiszámítására. Másrészt a hatványsorral történő értelmezés révén lehetőség nyílik az elemi függvények komplex kiterjesztésére.

A továbbiakban — ahol az lehetséges — egyszerre tárgyaljuk a valós és komplex változatot. Legtöbbször tehát $\mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ típusú függvényekkel foglalkozunk, ahol $\mathbb{K}_1$ és $\mathbb{K}_2$ a valós, ill. a komplex számok halmaza közül valamelyiket jelöli. Használni fogjuk a függvényekkel kapcsolatban az előző kötetben bevezetett fogalmakat és jelöléseket. Ezzel összhangban valamely f függvényt $\mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ **típusúnak** nevezzük, ha értelmezési tartománya része $\mathbb{K}_1$-nek, értékkészlete pedig része $\mathbb{K}_2$–nek. Az $f : H \to \mathbb{K}_2$ jelöléssel azt juttatjuk kifejezésre, hogy az f értelmezési tartománya a H halmaz, értékkészlete pedig része $\mathbb{K}_2$–nek.

A valós függvényeket célszerű grafikonjukkal ábrázolni. Ez azt jelenti, hogy a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon értelmezett $f : H \to \mathbb{R}$ függvényt a

$$\Gamma(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in H,\ y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

síkbeli halmazzal szemléltetjük. Komplex változós, komplex értékű függvények nem szemléltethetők ezzel a módszerrel, hiszen ilyenkor a grafikon a $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ (4 dimenziós) tér részhalmaza. Ebben az esetben célszerű bizonyos, a függvényre jellemző görbéket (pl. egyeneseket, vagy köröket) és ezeknek a függvény által létesített képét ábrázolni. Az ilyen típusú leképezéseket — a geometriában szokásos szóhasználattal élve — a komplex számsík transzformációinak is nevezik. Számos, a geometriában jól ismert transzformáció írható le $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ típusú függvénnyel. A komplex konjugálás segítségével értelmezett

$$\mathbb{C} \ni z := x + iy \to \bar{z} := x - iy \in \mathbb{C}$$

függvény a valós tengelyre vonatkozó **tükrözésnek** felel meg. Rögzített $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ esetén a $\mathbb{C} \ni z \to z + a \in \mathbb{C}$ leképezés egy **eltolásnak**, a $\mathbb{C} \ni z \to za \in \mathbb{C}$ leképezés pedig egy **forgatva–nyújtásnak** felel meg. A komplex változós függvényeknek ez az interpretációja lehetővé teszi, hogy geometriai feladatokat komplex függvénytani eszközökkel oldjunk meg.

$\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ és $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ típusú függvények grafikonját az $\mathbb{R}^3$ térben ábrázolhatjuk, megjelenítve a grafikonnak megfelelő görbét, illetve felületet. Ezekről a lehetőségekről az egyes példák kapcsán még részletesen szólunk.

1.1. Néhány nevezetes függvény

Ebben a pontban emlékeztetünk néhány ismert egyváltozós függvény értelmezésére. Ezeket a matematika minden ágában és a számítástechnikában is használják.

Definíció. *A*

$$\mathbb{K} \ni x \to abs\,(x) := |x| \in \mathbb{R}$$

függvényt ***abszolút érték függvénynek*** *nevezzük.*

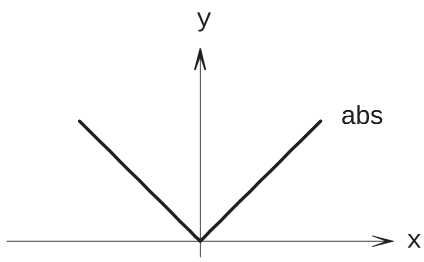
Számok abszolút értékének definícióját felhasználva az abszolút érték függvény valós estben az

$$\mathrm{abs}\,(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{ha} \quad x < 0, \end{cases}$$

komplex esetben pedig az

$$\mathrm{abs}\,(z) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (z = x + iy \in \mathbb{C})$$

alakban írható fel. A két függvény grafikonját az alábbi ábrákon szemléltetjük.

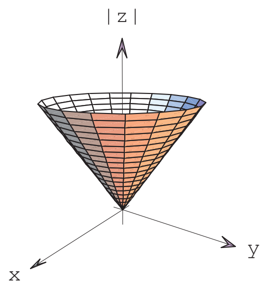


1. ábra

A komplex esetben — a $\mathbb{C}$ komplex számsíkot az $\mathbb{R}^2$-tel azonosítva — a grafikon az $\mathbb{R}^3$ térben ábrázolható:

$$\Gamma(\mathrm{abs}) := \{(x, y, |z|) : x, y \in \mathbb{R},\ z = x + iy\}.$$

Egyszerűen belátható, hogy $\Gamma(\text{abs})$ egy forgáskúp, amelynek tengelye $45°$-ot zár be az alkotókkal.



2. ábra

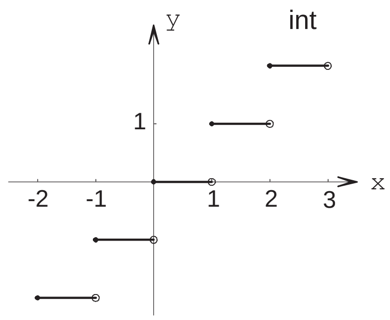
Ismeretes, hogy az $x \in \mathbb{R}$ szám $[x]$ szimbólummal jelölt egészrésze azzal az $n \in \mathbb{Z}$ egész számmal egyenlő, amelyre $n \leqq x < n + 1$ teljesül.

Definíció. *Az*

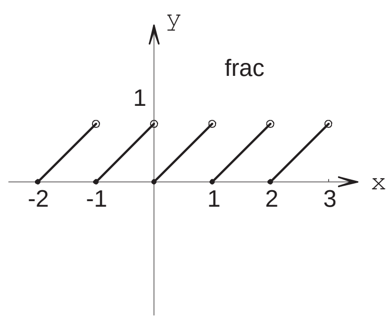
$$int\,(x) := [x], \qquad frac\,(x) := x - [x] \quad (x \in \mathbb{R})$$

utasításokkal értelmezett függvényeket ***egészrész függvénynek****, illetve* ***törtrész függvénynek*** *nevezzük.*

Ezek grafikonját az alábbi ábrákon szemléltetjük.



3. ábra



4. ábra

Gyakran használni fogjuk az **előjelfüggvényt** (más szóval a **szignumfüggvényt**), amelynek komplex változatát a következőképpen értelmezzük.

Definíció. *A*

$$\mathit{sign}\,(z) := \begin{cases} 0, & \mathit{ha} \quad z = 0, \\ \bar{z}/|z|, & \mathit{ha} \quad z \neq 0 \end{cases}$$

utasítással értelmezett függvényt ***előjelfüggvénynek*** *nevezzük.*

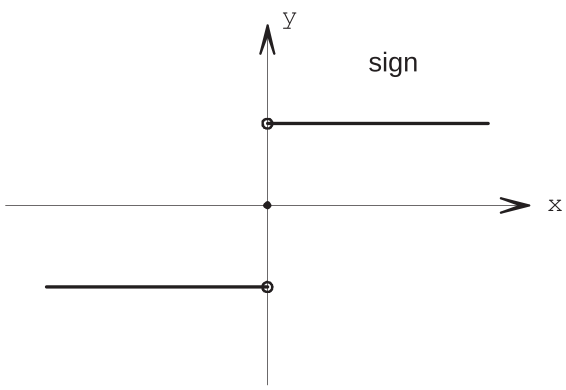
Az értelmezésből következik, hogy

$$|\mathrm{sign}\,(z)| = 1, \quad \text{ha} \quad z \neq 0, \qquad z\,\mathrm{sign}\,(z) = |z| \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Az előjelfüggvénynek a valós számok halmazára vonatkozó leszűkítését ugyanezzel a szimbólummal jelöljük. Nyilván erre

$$\mathrm{sign}\,(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0, \\ -1, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$$

teljesül.



5. ábra

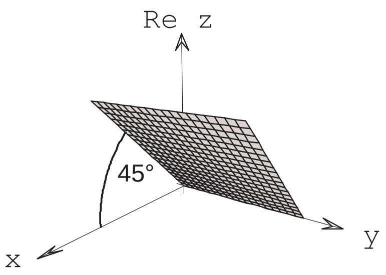
Az említett egyszerű komplex változós függvényeken kívül használni fogjuk még azokat a leképezéseket, amelyek komplex számokhoz azok valós, illetve képzetes részét rendelik.

Definíció. *Az*

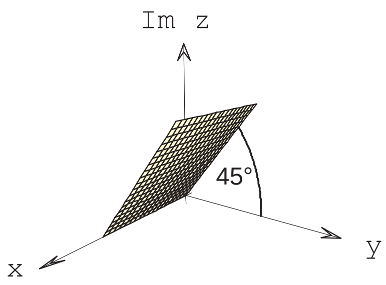
$$\mathbb{C} \ni z := x + iy \to re\,(z) := x \in \mathbb{R}$$
$$\mathbb{C} \ni z := x + iy \to im\,(z) := y \in \mathbb{R}$$

utasítással értelmezett függvényeket ***valós rész függvénynek****, illetve* ***képzetes rész függvénynek*** *nevezzük.*

Ezek grafikonja egy-egy sík, amelyek az XY-síkkal 45°-os szöget zárnak be, és amelyek áthaladnak az Y, illetve az X tengelyen.



6.ábra



7.ábra

1.2. Polinomok és racionális függvények

A $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ típusú függvények között sok vonatkozásban kitüntetett szerepet játszanak az **algebrai polinomok**. Ezek helyettesítési értékei egyszerűen kiszámíthatók. Ezért a polinomokat gyakran használjuk más, bonyolultabb függvények értékeinek közelítésére.

Definíció. *Legyenek $n \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ adott számok. A*

$$\mathbb{K} \ni x \to P(x) := a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{K} \tag{1}$$

*utasítással értelmezett P függvényt n–**edfokú polinomnak** nevezzük. Ha $a_n \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy a P polinom **pontosan** n-**edfokú**, s ilyenkor az $n \in \mathbb{N}$ számot a P **polinom fokszámának** nevezzük és a $deg(P)$ szimbólummal jelöljük. Az $a_i\,(i = 0, 1, \cdots, n)$ számokat P **együtthatóinak** nevezzük.*

Az n-edfokú polinomok halmazát a $\mathcal{P}_n$ szimbólummal fogjuk jelölni. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{P}_0$ azonos a konstans függvények halmazával. Speciálisan azt a konstans polinomot, amely a 0 értéket veszi fel **zéruspolinomnak** nevezzük, és a θ szimbólummal jelöljük. A polinomok összessége, azaz a

$$\mathcal{P} := \cup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$$

függvényhalmaz a $\mathbb{K}$-n értelmezett függvények terének egy lineáris altere, az n-edfokú polinomok halmaza pedig $\mathcal{P}$-nek egy altere. Ezeknek a zéruspolinom a nulleleme. (Lásd az [A1] Függelékét.)

A polinomok helyettesítési értékei — felhasználva az alábbi, ún. **Horner-féle elrendezést** — egyszerűen megkaphatók. Valóban, P értékei a

$$P(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \cdots + x(a_{n-1} + a_n x) \cdots)) \quad (x \in \mathbb{K})$$

azonosság alapján az alábbi (fordított irányú) rekurzióval számíthatók ki:

$$y_n := a_n, \quad y_k := a_k + x\, y_{k+1} \quad (k = n-1, n-2, \cdots, 2, 1, 0)$$
$$P(x) = y_0.$$

Polinomokkal kapcsolatban gyakran felhasználjuk a következő alapvető állítást, amelynek a bizonyítását a Függelékben közöljük.

1. Tétel. *Legyen $P(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n\,(z \in \mathbb{C})$ egy komplex együtthatós, nem konstans, pontosan n-edfokú polinom. Ekkor léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ komplex számok, amelyekkel a P polinom felírható*

$$P(z) = a_n(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n) \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{2}$$

alakban.

A (2) előállítást a P polinom **gyöktényezős alakjának** nevezzük. A λ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ komplex számokra (2) alapján nyilvánvalóan

$$P(\lambda_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

teljesül, azaz a λ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ számok a P **gyökei**, vagy **zérushelyei**.

A (2) előállításban szereplő λ_i számok nem feltétlenül különböznek egymástól. Ha a λ szám a $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ számok között pontosan m-szer fordul elő, akkor azt mondjuk, hogy a λ **gyök multiplicitása** m.

Tegyük fel, hogy a P-nek r számú, egymástól különböző gyöke van és jelöljük ezeket a $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ szimbólumokkal. Ha a λ_j multiplicitása m_j, akkor a (2) szorzat felírható a

$$P(z) = a_n(z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (z - \lambda_r)^{m_r} \quad (z \in \mathbb{C})$$

alakban, ahol a $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ számok páronként különbözőek. Könnyen igazolható, hogy ez az előállítás — a tényezők sorrendjét leszámítva — egyértelmű. A fenti előállításában előforduló $(z - \lambda_j)^{m_j} \quad (z \in \mathbb{K})$ függvényeket a P **polinom gyöktényezőinek** nevezzük.

Az 1. Tételnek, amelyet az **algebra alaptételének** is szokás nevezni, egy fontos következményét fogalmazzuk meg az alábbi állításban.

1. Következmény. *Ha valamely n-edfokú polinomnak n-nél több gyöke van, akkor a polinomnak minden együtthatója nulla.*

Valóban, tegyük fel, hogy P pontosan n-edfokú, azaz $a_n \neq 0$ és írjuk fel a P polinomot a (2) gyöktényezős alakban. Minthogy P-nek n-nél több egymástól különböző gyöke van, ezért P-nek létezik olyan $\lambda \in \mathbb{K}$ gyöke, amelyre $\lambda \neq \lambda_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$. Következésképpen (2) alapján

$$0 = P(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n).$$

Minthogy $\lambda - \lambda_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, azért $a_n = 0$, s ezzel ellenmondásra jutottunk.

Emlékeztetünk arra, hogy a P és Q függvényt akkor tekintjük egyenlőnek, ha értelmezési tartományuk egyenlő, továbbá, ha az értelmezési tartomány bármely z elemére $P(z) = Q(z)$ teljesül. Polinomok esetén ez azzal ekvivalens, hogy az együtthatók egyenlők.

2. Következmény. *Legyen*

$$P(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad Q(z) := b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m \quad (z \in \mathbb{K})$$

két polinom. Ha $P = Q$, akkor $m = n$ és

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \cdots,\ a_n = b_n.$$

Valóban, tegyük fel, hogy például $n \leqq m$ és tetszőleges $z \in \mathbb{K}$ esetén legyen

$$R(z) := P(z) - Q(z) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)z + \cdots + (a_n - b_n)z^n + \cdots + (a_m - b_m)z^m.$$

Ekkor minden $z \in \mathbb{K}$ esetén $R(z) = 0$, s ezért az 1. Következmény alapján $a_j - b_j = 0$ $(j = 0, 1, \cdots, m)$.

Az 1.Tételből egyszerűen adódik az alábbi

3. Következmény. *A*

$$h_k(z) := z^k \quad (z \in \mathbb{K},\, k \in \mathbb{N})$$

hatványfüggvények *lineárisan függetlenek.*

Valóban, tegyük fel, hogy a $h_0, h_1, \cdots, h_n$ függvények valamely lineáris kombinációja a zérus polinommal egyenlő, azaz minden $z \in \mathbb{K}$ számra

$$Q(z) := c_0 h_0(z) + c_1 h_1(z) + \cdots + c_n h_n(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n = 0.$$

Ekkor a $\mathbb{K}$-nak minden eleme az n-edfokú Q polinomnak gyöke, s ezért az 1. Következmény alapján a Q valamennyi együtthatója 0. Minthogy a $h_0, h_1, \cdots, h_n$ függvények lineáris burka $\mathcal{P}_n$, azért ezek a függvények a $\mathcal{P}_n$ tér egy **bázisát** alkotják. (Lásd az [A1] Függelékét.)

Megmutatjuk, hogy a h_n hatványfüggvények tetszőleges $a \in \mathbb{K}$ számmal való eltoltjai, azaz a

$$h_n(z + a) = (z + a)^n \quad (z \in \mathbb{K})$$

függvények előállíthatók a $h_0, h_1, \cdots, h_n$ lineáris kombinációjaként. A lineáris kombináció együtthatói — amint ezt az alábbi ún. binomiális tételben bebizonyítjuk — kifejezhetők az

$$\binom{n}{0} := 1, \quad \binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \quad (n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}^*)$$

binomiális együtthatók segítségével. Ezek értelmezéséből egyszerűen következik, hogy

$$(4) \qquad \binom{n}{k} = 0 \quad (k > n), \qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad (n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}^*).$$

Minthogy $k > n$ esetén a binomiális együttható számlálójában az $(n - n)$ tényező is előfordul, azért ilyenkor 0-át kapunk. Az állítás második része a következőképpen igazolható:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}(1 + \frac{n-k+1}{k}) = \binom{n}{k-1}\frac{n+1}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

A most igazolt rekurziós formulák alapján nyilvánvaló, hogy a binomiális együtthatók egész számok.

Binomiális tétel. *Bármely $n \in \mathbb{N}$ és $a, z \in \mathbb{K}$ esetén fennáll a*

$$(z+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k a^{n-k} \tag{5}$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Ha $n = 0$ vagy ha $n = 1$, akkor (5) nyilván teljesül. n–re vonatkozó teljes indukciót alkalmazva tegyük fel, hogy a szóban forgó egyenlőség az n kitevőre érvényes, s ezt felhasználva igazoljuk $(n+1)$-re. Az indukciós feltétel alapján

$$(z+a)^{n+1} = (z+a)(z+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{k+1} a^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k a^{n+1-k}.$$

Az első összegben a $k+1 = \ell$, a második összegben pedig $k = \ell$ helyettesítést alakalmazva és felhasználva a (4) rekurziót, valamint az $\binom{n}{n+1} = 0$ egyenlőséget azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(z+a)^{n+1} &= \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} z^\ell a^{n+1-\ell} + \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n}{\ell} z^\ell a^{n+1-\ell} = \\ &= \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} z^\ell a^{n+1-\ell},\end{aligned}$$

s ezzel az (5) egyenlőséget az $n+1$ kitevőre is bebizonyítottuk. □

A h_0 és a h_1 hatványfüggvényekből kiindulva a számmal való szorzás, az összeadás, kivonás, és szorzás műveletét véges sokszor alkalmazva minden polinomhoz eljuthatunk. Nyilvánvaló, hogy két polinom összege és szorzata is polinom, továbbá bármely polinom számszorosa szintén polinom. Ebből következik, hogy a polinomok $\mathcal{P}$ halmaza **algebrát alkot**. (Lásd az [A1] Függelékét.)

Ismeretes, hogy az osztás általában már kivezet a polinomok köréből, az ún. **maradékos osztás** azonban mindig elvégezhető. Egyszerűen igazolható, hogy bármely P és Q polinomhoz egyértelműen létezik olyan S és R polinom, amelyre

$$P = QS + R, \quad \deg(R) < \deg(Q)$$

teljesül. S-et a P-nek Q-val való osztásánál kapott **hányadosának**, az R polinomot pedig **maradéknak** nevezzük. (Lásd a 2. Feladatot.)

Definíció. *Legyenek P és Q $\mathbb{K}$-beli együtthatós polinomok, ahol $Q \neq \theta$ és jelölje $\Lambda_Q := \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ a Q gyökeinek a halmazát. A*

$$\mathbb{K} \setminus \Lambda_Q \ni z \to S(z) := \frac{P(z)}{Q(z)} \in \mathbb{K}$$

utasítással értelmezett S függvényt ***racionális függvénynek*** *nevezzük.*

A P polinomot S **számlálójának**, Q-t pedig az S **nevezőjének** nevezzük. A racionális függvények összességét a $\mathcal{Q}$ szimbólummal fogjuk jelölni. Minthogy bármely $P \in \mathcal{P}$ polinom felírható P/h_0 alakban, azért $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$.

Előfordulhat, hogy a P és Q polinomnak vannak közös gyökei. A megfelelő gyöktényezőkkel való egyszerűsítéssel olyan racionális függvényhez jutunk, amelyben a számlálónak és a nevezőnek már nincsenek közös gyökei. $\mathcal{Q}$-beli függvények vizsgálatánál elegendő ilyen, tovább már nem egyszerűsíthető racionális függvényekre szorítkozni.

Ha P fokszáma kisebb Q fokszámánál, akkor P/Q-t **valódi** racionális függvénynek nevezzük . Maradékos osztást alkalmazva nyilvánvaló, hogy tetszőleges P/Q racionális függvény felírható

$$\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q}$$

alakban, ahol $S \in \mathcal{P}$ és R/Q már valódi racionális függvény. Ez az előállítás lehetővé teszi, hogy bizonyos, racionális függvényekkel kapcsolatos kérdések vizsgálatában valódi racionális függvényekre szorítkozzunk.

A polinomok előállíthatók a h_1 hatványainak lineáris kombinációjaként. A valódi racionális függvények — amint azt a függelékben bebizonyítjuk — az

$$r_\sigma(z) := \frac{1}{z - \sigma} \quad (z \in \mathbb{K} \setminus \{\sigma\},\ \sigma \in \mathbb{K})$$

függvények hatványainak lineáris kombinációjaként kaphatók meg. Erre vonatkozik az alábbi

2. Tétel. *Legyen $S = P/Q$ komplex együtthatós, tovább már nem egyszerűsíthető valódi racionális függvény, amely nevezőjének gyöktényezős felbontása*

$$Q(z) = (z - \sigma_1)^{m_1} \cdots (z - \sigma_s)^{m_s} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Ekkor léteznek olyan $A_{\ell k}\,(k = 1, 2, \cdots, m_\ell,\ \ell = 1, \cdots, s)$ komplex számok, hogy

$$S(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{\ell=1}^{s} \sum_{k=1}^{m_\ell} \frac{A_{\ell k}}{(z - \sigma_\ell)^k} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_Q). \tag{6}$$

A (6) felbontásban fellépő $A_{\ell k}$ számok meghatározhatók. Nevezetesen a (6) egyenlőségben mindkét oldalt Q-val megszorozva egy-egy polimot kapunk. Ezek — a 2. Következmény alapján — pontosan akkor egyenlők, ha a megfelelő együtthatók egyenlők. Ezt a feltételt az $A_{\ell k}$ együtthatókra felírva egy, a (6)-tal ekvivalens lineáris egyenletrendszert kapunk.

1.3. Analitikus függvények

A polinomokat együtthatóik segítségével (1)–ben értelmeztük. Ebben a definícióban a véges összeget végtelen sorral helyettesítve eljuthatunk a hatványsor fogalmához.

Definíció. *Rögzítsünk egy $z_0 \in \mathbb{K}$ számot és egy $a = (a_n, n \in \mathbb{N})$ $\mathbb{K}$-beli számsorozatot. Az ezekkel képzett*

$$\begin{aligned} a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (z \in \mathbb{K})& \end{aligned} \tag{7}$$

végtelen sort ***hatványsornak****, az $(a_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat tagjait a hatványsor* ***együtthatóinak****, a $z_0 \in \mathbb{K}$ számot pedig a hatványsor* ***konvergenciaközéppontjának*** *nevezzük.*

Véve bármely $z \in \mathbb{K}$ számot a (7) végtelen sor konvergens, vagy divergens. Azoknak a $z \in \mathbb{K}$ számoknak az összességét, amelyekre a (7) végtelen sor konvergens a **hatványsor konvergenciahalmazának** nevezzük. Minthogy $z = z_0$ esetén a szóban forgó sor valemennyi 0-nál nagyobb indexű tagja 0, azért a konvergenciaközéppont eleme a konvergenciahalmaznak.

Legyen

$$\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Definíció. *Az*

$$R := \begin{cases} 0, & (\alpha = +\infty), \\ +\infty, & (\alpha = 0), \\ 1/\alpha, & (0 < \alpha < \infty) \end{cases}$$

*$\overline{\mathbb{R}}$–beli elemet a (7) hatványsor **konvergenciasugarának** nevezzük.*

A konvergencia halmazról nyújt pontosabb felvilágosítást az alábbi állítás.

Cauchy–Hadamard-tétel. *Legyen R a (7) hatványsor konvergenciasugara. Ekkor a (7) sor a*

$$K_R(z_0) := \{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| < R\}$$

*halmaz pontjaiban **abszolút konvergens**, $|z - z_0| > R$ esetén pedig **divergens.***

Bizonyítás. Legyen először $|z - z_0| < R$ és alkalmazzuk a **Cauchy-féle gyökkritériumot** a (7) sorra (lásd [A1], 101. oldal). Mivel

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = |z - z_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |z - z_0|/R < 1,$$

azért a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z - z_0|^n$$

sor konvergens. Ezzel az állítás első részét bebizonyítottuk. Ha $|z - z_0| > R$, akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = |z - z_0|/R > 1.$$

Ismét alkalmazva a gyökkritériumot azt kapjuk, hogy ebben az esetben a (7) sor valóban divergens. □

A most igazolt tétel szerint az $R = 0$ esetben a (7) sor konvergenciahalmaza egyetlen pontból, a z_0-ból áll, $R = \infty$ esetén pedig a konvergenciahalmaz $\mathbb{K}$-val egyenlő. Ha $0 < R < \infty$, akkor a szóban forgó hatványsor konvergenciahalmaza tartalmazza a $K_R(z_0)$ környezetet. A környezet $\Gamma := \{z \in \mathbb{K} : |z - z_0| = R\}$

határának pontjai nem biztos, hogy a konvergenciahalmazhoz tartoznak. A $K_R(z_0)$ környezet a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetben a $(z_0 - R, z_0 + R)$ intervallummal, komplex esetben pedig a z_0 középpontú R sugarú (nyílt) körrel egyenlő. A konvergenciaközéppont elnevezés a z_0-nak erre a geometriai jelentésére utal. Azzal kapcsolatban, hogy a Γ pontjaiban a hatványsor konvergens-e, vagy sem, általános szabály nincs.

A most igazolt állításhoz hasonlóan adódik a

4. Következmény. *Legyen R a (7) sor konvergenciasugara. Ha $0 \leqq r < R$, akkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty.$$

Valóban, minthogy ebben az esetben

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n r^n|} = r \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r/R < 1,$$

azért a Cauchy-féle gyökkritérium alapján a (7) sor konvergens.

Hatványsor konvergenciasugarára alsó becslést adhatunk az alábbi állítás alapján.

5. Következmény. *Ha a (7) hatványsor valamely $z^* \in \mathbb{K}$ pontban konvergens, akkor konvergencia sugarára $R \geq |z^* - z_0|$ teljesül.*

Valóban, a Cauchy–Hadamard-tétel szerint minden olyan $z \in \mathbb{K}$ pontban, amelyre $|z - z_0| > R$ teljesül a hatványsor divergens. Ezért a z^* számra szükségképpen $|z^* - z_0| \leqq R$.

A konvergenciahalmaz minden eleméhez a hatványsor összegét rendelve egy függvényt értelmezhetünk. Ha a hatványsor konvergencia sugara 0, akkor ennek értelmezési tartománya egyetlen pontból áll. Ezt az érdektelen esetet kizárva és csak a $K_R(z_0)$ pontjaira szoritkozva bevezetjük az alábbi fogalmat.

Definíció. *Tegyük fel, hogy a (7) hatványsor R konvergencia sugara pozitív. A*

$$K_R(z_0) \ni z \to f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \in \mathbb{K}$$

utasítással értelmezett függvényt az (7) ***hatványsor összegfüggvényének*** *nevezzük.*

Ahelyett, hogy „f a (7) hatványsor összegfüggvénye” néha azt mondjuk, hogy az f függvény a $K_R(z_0)$ környezetben $z - z_0$ hatványai szerint haladó **hatványsorba fejtettük**.

Például, ha a (7) hatványsor minden együtthatója 1-gyel egyenlő, akkor egy olyan mértani sort kapunk, amelynek a hányadosa $z - z_0$. A mértani sor konvergenciájára vonatkozó ismert eredmény alapján ez a sor $|z - z_0| < 1$ esetén konvergens, és a $|z - z_0| > 1$ esetben divergens. Innen következik, hogy ennek a hatványsornak a konvergenciasugara 1, továbbá a mértani sor összegképlete alapján ennek a hatványsornak az összegfüggvénye felírható

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n = \frac{1}{1 - (z - z_0)} \qquad (z \in K_1(z_0))$$

alakban. Speciálisan a $z_0 = 0$ esetben

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \qquad (z \in K_1(0))$$

adódik.

Felhasználva a végtelen sorok összegére és szorzatára vonatkozó tételeket (lásd [A1], 3.4.pont 4. Tétel, 91. oldal, 3.8.pont 12. Tétel, 112. oldal) az

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (z \in K_{R_1}(z_0)), \tag{8}$$

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n \quad (z \in K_{R_2}(z_0)) \tag{9}$$

hatványsorok összegfüggvényeként értelmezett függvények összege és szorzata is előállítható hatványsorok segítségével. Ezzel kapcsolatos a

3. Tétel. *Tegyük fel, hogy a (8) és (9) hatványsorok R_1 és R_2 konvergenciasugarai pozitívak és legyen $R = \min\{R_1, R_2\}$. Ekkor az $f + g$ és az fg függvény a $K_R(z_0)$ környezetben felírható az alábbi hatványsor összegeként:*

$$f(z) + g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)(z - z_0)^n, \tag{10}$$

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0)(z - z_0)^n. \tag{11}$$

Bizonyítás. Mivel a $z \in K_R(z_0)$ pontban a (8) és (9) sorok abszolút konvergensek, azért ezeknek a soroknak az összege és Cauchy-szorzata is konvergens és összegük

$\big(f(z)+g(z)\big)$-vel, szorzatuk pedig $f(z)g(z)$-vel egyenlő. (Lásd [A1], 91. és 112. oldal.) Ezzel a bizonyítandó állítást igazoltuk. □

Speciálisan, ha valamely függvény olyan hatványsor összegfüggvényeként állítható elő, amelynek konvergenciasugara végtelen, akkor — az egész $\mathbb{K}$-n értelmezett — függvényt **egész függvénynek** nevezzük. Minden n-edfokú polinom olyan hatványsor összegfüggvényének tekinthető, amelynek az n-nél nagyobb indexű együtthatói 0-val egyenlők. Az egész függvények tehát a polinomok egyfajta általánosításaként is felfoghatók.

Egyszerűen belátható, hogy a racionális függvények értelmezési tartományuk bármely pontjának alkalmasan választott környezetében előállíthatók hatványsor összegfüggvényeként. Ehhez induljunk ki az $S = P/Q$ valódi racionális függvény (6) előállításából és tegyük fel, hogy $z_0 \notin \Lambda_Q$. Legyen

$$R := \min\{|z_0-\sigma| : \sigma \in \Lambda_Q\}.$$

Ekkor $z \in K_R(z_0)$ és $\sigma \in \Lambda_Q$ esetén a $q := (z-z_0)/(\sigma-z_0)$ hányados abszolút értékére nyilván $|q| \leqq |z-z_0|/R < 1$. A mértani sor összegképletét felhasználva

$$\begin{aligned} r_\sigma(z) :&= \frac{1}{z-\sigma} = \frac{1}{(z-z_0)-(\sigma-z_0)} = -\frac{1}{\sigma-z_0}\frac{1}{1-(z-z_0)/(\sigma-z_0)} = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\sigma-z_0)^{n+1}} \quad (z \in K_R(z_0)). \end{aligned}$$

A hatványsorok szorzatára vonatkozó, előbb igazolt tétel alapján az r_σ hatványai is előállíthatók a $K_R(z_0)$ környezetben konvergens hatványsorok összegfüggvényeként. Végül figyelembe véve a racionális függvények előállítására vonatkozó 2. Tételt, adódik, hogy S a szóban forgó környezetben hatványsorba fejthető.

Gyakran szükség van arra, hogy valamely $z - z_0$ hatványai szerint haladó hatványsor összegeként előállított f függvényt $z - z_1$ hatványai szerint fejtsük sorba, ahol $z_1 \in K_R(z_0)$. Ennek lehetőségét fogalmaztuk meg az alábbi állításban.

4. Tétel. *Tegyük fel, hogy a (7) hatványsor R konvergenciasugara pozitív, legyen $z_1 \in K_R(z_0)$ és $r := R - |z_0 - z_1|$. Ekkor az f függvény a $K_r(z_1)$ környezetben előállítható az alábbi, $z - z_1$ hatványai szerint haladó*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - z_1)^k \quad (z \in K_r(z_1)) \tag{12}$$

hatványsor összegeként, ahol az A_k együttható az alábbi konvergens sor összege:

$$A_k := \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (z_1 - z_0)^{n-k} \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{13}$$

Bizonyítás. Első lépésként a binomiális tételt felhasználva írjuk fel $z - z_0$ hatványait $z - z_1$ hatványai szerint:

$$(z - z_0)^n = \big((z - z_1) + (z_1 - z_0)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z - z_1)^k (z_1 - z_0)^{n-k}.$$

Bevezetve az

$$u_{nk} := \begin{cases} a_n \binom{n}{k} (z - z_1)^k (z_1 - z_0)^{n-k} & (k \leqq n), \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

kettős sorozatot a (7) sor felírható az alábbi kettős sor alakjában:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} u_{nk} \Big).$$

Most — a nagy átrendezési tételt alkalmazva — megmutatjuk, hogy ebben a kettős sorban a két szumma egymással felcserélhető (lásd [A1], 3.6.pont 9.Tétel, 106. oldal). Ehhez először is vegyük figyelembe, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |u_{nk}| \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} |a_n| \binom{n}{k} |z - z_1|^k |z_1 - z_0|^{n-k} \Big) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \big(|z - z_1| + |z_1 - z_0| \big)^n.$$

Mivel $z \in K_r(z_1)$, azért

$$|z - z_1| + |z_1 - z_0| < r + |z_1 - z_0| = R,$$

s így a 4. Következmény alapján a $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|u_{nk}|$ kettős sor konvergens. Ezzel megmutattuk, hogy teljesülnek a nagy átrendezési tétel feltételei. Alkalmazva a szóban forgó tételt azt kapjuk, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{nk} = (z-z_1)^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (z_1 - z_0)^{n-k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

végtelen sorok abszolút konvergensek, továbbá — az A_k értelmezését felhasználva — a következőt írhatjuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_n \binom{n}{k} (z-z_1)^k (z_1-z_0)^{n-k} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z-z_1)^k.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

A továbbiakban gyakran olyan függvényeket vizsgálunk, amelyek bizonyos speciális (ún. nyílt) halmazokon vannak értelmezve.

> Definíció. *Akkor mondjuk, hogy a $H \subseteq \mathbb{K}$* ***halmaz nyílt****, ha a H halmaz bármely $a \in H$ pontjának van olyan $K_r(a)$ környezete, amelyre $K_r(a) \subset H$ teljesül.*

Az **üres halmazt**, amelyre ez az értelmezés nem alkalmazható, definíció szerint **nyílt halmaznak tekintjük**. Nyilvánvaló, hogy $\mathbb{K}$ nyílt halmaz, továbbá egyszerűen igazolható, hogy minden $\Lambda \subset \mathbb{K}$ **véges** halmaz esetén $\mathbb{K} \setminus \Lambda$ is nyílt.

Most megmutatjuk, hogy bármely $a \in \mathbb{K}$ középpontú $0 < r < \infty$ sugarú $K_r(a)$ **környezet nyílt halmaz.** Valóban, legyen $b \in K_r(a)$. Ekkor $|b-a| < r$ és a b pont bármely az $r - |a-b|$ számnál kisebb s sugarú környezetére $K_s(b) \subset K_r(a)$ teljesül. Ha ugyanis $0 < s < r - |a-b|$ és $x \in K_s(b)$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$|x-a| = |(x-b)+(b-a)| \leqq |x-b| + |b-a| < s + |b-a| < r.$$

Ezzel megmutattuk, hogy minden $x \in K_s(b)$ pontra $x \in K_r(a)$ teljesül, következésképpen $K_s(b) \subset K_r(a)$. Hasonló meggondolásokkal adódik, hogy a

$$\overline{K_r}(a) := \{z \in \mathbb{K} : |z-a| \leqq r\}$$

ún. **zárt környezet komplementere**, azaz a

$$\mathbb{K} \setminus \overline{K_r}(a) = \{z \in \mathbb{K} : |z-a| > r\}$$

halmaz is nyílt.

A hatványsor fogalmát felhasználva bevezetjük az alábbi fontos függvényosztályt.

Definíció. *Legyen $H \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmaz. Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{K}$ függvény* ***analitikus****, ha bármely $a \in H$ pontnak van olyan $K_r(a)$ környezete, amelyben az f előállítható hatványsor összegfüggvényeként.*

A racionális függvényekkel kapcsolatban tett előző megjegyzés — a most bevezetett fogalmat használva — pontosan azt jelenti, hogy $\mathcal{Q}$ elemei analitikus függvények.

1.4. Néhány elemi függvény

Ebben a pontban bevezetünk néhány elemi függvényt. Ezeket a függvényeket hatványsor segítségével értelmezzük. A szóbajövő hatványsorok mindegyike

$$\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{K}) \tag{14}$$

alakú, ahol $\epsilon_n \in \{0, 1, -1\}$. E sorok konvergenciájának vizsgálatához alkalmazzuk a D'Alambert-féle hányadoskritériumot a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \tag{15}$$

végtelen sorra (lásd [A1], 102. oldal). Minthogy minden $z \in \mathbb{K}$ számra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0,$$

ezért a (15) sor minden $z \in \mathbb{K}$ esetén konvergens. A sorokra vonatkozó összehasonlító kritérium (lásd [A1], 85. oldal) alapján a (14) sor is minden $z \in \mathbb{K}$ pontban abszolút konvergens. Az 5. Következmény alapján tehát a (14) hatványsor konvergenciasugara $+\infty$, következésképpen az összegfüggvénye egész függvény.

Az $(\epsilon_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat speciális megválasztásával az alábbi nevezetes függvényekhez juthatunk el.

Definíció. *Legyen*

$$\begin{aligned}
\exp(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C}),\\
\sin(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (z \in \mathbb{C}),\\
\cos(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (z \in \mathbb{C}),\\
\sinh(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (z \in \mathbb{C}),\\
\cosh(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (z \in \mathbb{C}).
\end{aligned}$$

Ezeket rendre ***exponenciális-, szinusz-, koszinusz-, szinusz hiperbolikusz*** *és* ***koszinusz hiperbolikusz függvénynek*** *nevezzük.*

A *sin* és *cos* függvényeket **trigonometrikus-**, a *sinh* és *cosh* függvényeket **hiperbolikus függvényeknek** nevezzük. Megjegyezzük, hogy az $\exp(z), \sin(z), \cdots$ helyett gyakran az $\exp\, z$, $\sin\, z, \cdots$ szimbólumokat használják a függvényértékek jelölésére. Minhogy a szóban forgó hatványsorok valemennyi együtthatója valós, ezért a most bevezetett függvényeknek az $\mathbb{R}$-re vonatkozó leszűkítései valós értékű függvények. Ezeket a leszűkítéseket **valós exponenciális, valós szinusz**, stb. függvényeknek nevezzük.

A fenti értelmezésből közvetlenül adódik az

5. Tétel. *A sin, sinh függvények páratlanok, a cos, cosh függvények párosak, azaz tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ komplex számra*

$$\begin{aligned}
&a) \quad \sin(-z) = -\sin(z), \quad \sinh(-z) = -\sinh(z),\\
&b) \quad \cos(-z) = \cos(z), \qquad \cosh(-z) = \cosh(z).
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Mivel a *sin*, *sinh* függvények hatványsorában a z csak páratlan kitevővel fordul elő, azért z helyett a $-z$ számot írva, a függvényértékek (-1)-szeresükbe mennek át.

A *cos*, *cosh* függvények hatványsorában a z csak páros kitevővel fordul elő. Ezért z helyébe annak (-1)-szeresét írva e függvények értéke nem változik. □

A most bevezetett függvények szoros kapcsolatban állnak egymással. Erre vonatkoznak az

Euler–féle összefüggések. *Legyen $i := \sqrt{-1}$ az imaginárius egység. Ekkor bármely $z \in \mathbb{C}$ komplex számra*

$$\begin{aligned}
&a) \quad \exp(iz) = \cos\, z + i\, \sin\, z,\\
&b) \quad \cos\, z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2},\\
&c) \quad \sin\, z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Az a) egyenlőség egyszerűen következik a benne szereplő függvények értelmezéséből és a végtelen sorokra vonatkozó műveleti szabályokból:

$$\begin{aligned}
\cos\, z + i\, \sin\, z &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \exp(iz).
\end{aligned}$$

A b) és c) igazolásához írjuk fel az a) azonosságot z helyett $(-z)$-re és használjuk fel az 5. Tétel a) és b) azonosságát. Az így kapott egyenlőségből öszeadás és kivonás után adódik b) és c). □

Az *exp* függvény — ellentétben a többi most bevezetett függvénnyel — reciprokába megy át, ha a z helyett a $-z$ számot írjuk. Ez következik az alábbi *a*) azonosságból, amelyet az **exponenciális függvény függvényegyenletének** is neveznek.

6. Tétel. *Bármely $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ komplex számra*

$$\begin{aligned}
&a) \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp\, z_1\, \exp\, z_2,\\
&b) \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp\, z}.
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Ismeretes, hogy abszolút konvergens sorok Cauchy-féle szorzata abszolút konvergens, és a szorzatsor összege egyenlő a tényező sorok összegének szorzatával (lásd [A1], 3.7.pont, 12. Tétel, 112. oldal). Ezt és a binomiális tételt felhasználva az a) azonosság a következőképpen adódik:

$$\exp\, z_1 \exp\, z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+\ell=n} \frac{z_1^k}{k!} \frac{z_2^\ell}{\ell!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n = \exp(z_1 + z_2).$$

A b) igazolásához vegyük figyelembe, hogy a definició alapján $\exp(0) = 1$, következésképpen az a) azonosságot felhasználva

$$\exp(-z) \exp(z) = \exp(-z + z) = \exp(0) = 1$$

adódik, ahonnan az állítás már következik. □

Az exponenciális függvény most igazolt alapazonossága alapján egyszerűen bizonyíthatók az alábbi ún. **addíciós formulák**.

7. Tétel. *Bármely $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ komplex számra*

$$a) \quad \sin(z_1 + z_2) = \sin\, z_1 \cos\, z_2 + \cos\, z_1 \sin\, z_2,$$
$$b) \quad \cos(z_1 + z_2) = \cos\, z_1 \cos\, z_2 - \sin\, z_1 \sin\, z_2.$$

Bizonyítás. Ezek az azonosságok egyszerűen következnek az Euler-féle formulából és az *exp* függvényegyenletéből. Valóban ezek alapján

$$\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 =$$
$$= \frac{\exp(iz_1) - \exp(-iz_1)}{2i} \cdot \frac{\exp(iz_2) + \exp(-iz_2)}{2} +$$
$$+ \frac{\exp(iz_1) + \exp(-iz_1)}{2} \cdot \frac{\exp(iz_2) - \exp(-iz_2)}{2i} =$$
$$= \frac{\exp(iz_1 + iz_2) - \exp(-iz_1 - iz_2)}{2i} = \sin(z_1 + z_2).$$

Hasonlóan igazolható a b) azonosság is. □

A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények közötti kapcsolatot felhasználva a most igazolt addiciós képletek átvihetők a hiperbolikus függvényekre. Erre vonatkozik a

8. Tétel. *Bármely $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ komplex számra*

$$a) \quad \cosh(iz) = \cos\, z, \quad \sinh(iz) = i \sin\, z,$$
$$b) \quad \sinh(z_1 + z_2) = \sinh\, z_1 \cosh\, z_2 + \cosh\, z_1 \sinh\, z_2,$$
$$c) \quad \cosh(z_1 + z_2) = \cosh\, z_1 \cosh\, z_2 + \sinh\, z_1 \sinh\, z_2.$$

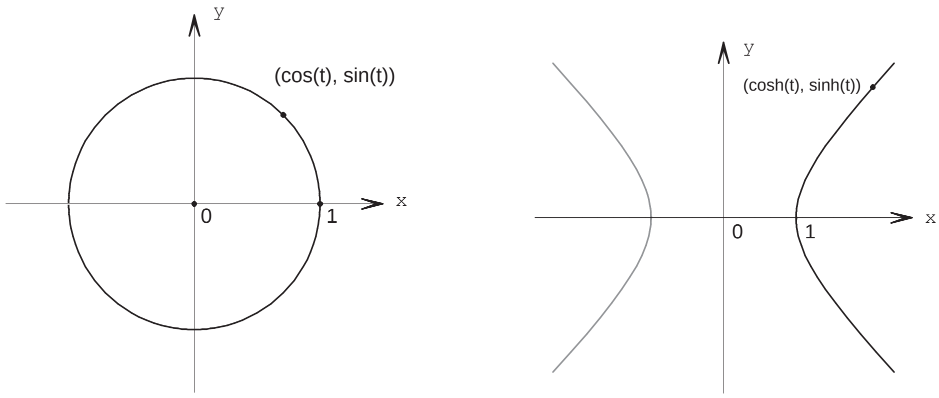
Bizonyítás. Az a) azonosság közvetlenül adódik a szóban forgó függvények definíciójából. A b) és c) azonosság a megfelelő, trigonometrikus függvényekre vonatkozó egyenlőségekből egyszerű számolással adódik, felhasználva az a) azonosságokat. □

Az addiciós tételekből a $z = z_1 = z_2$ helyettesítéssel és $\cos 0 = \cosh 0 = 1$ figyelembe vételével kapjuk az alábbi ún. **négyzetes összefüggéseket**.

6. Következmény. *Bármely $z \in \mathbb{C}$ komplex számra*

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

A most megfogalmazott összefüggéseknek szemléletes geometriai tartalmuk van. Nevezetesen, a trigonometrikus függvényekre vonatkozó négyzetes öszefüggés alapján minden $t \in \mathbb{R}$ valós számra a $(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$ pontok rajta vannak az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körön. Később megmutatjuk, hogy a szóban forgó kör minden pontja — alkalmas valós t számot véve — megkapható ilyen módon. A hiperbolikus függvényekre vonatkozó négyzetes összefüggés a következőképpen interpretálható. Minden $t \in \mathbb{R}$ valós szám esetén a $(\cosh t, \sinh t) \in \mathbb{R}^2$ pontok rajta vannak az $x^2 - y^2 = 1$ $(x > 0)$ egyenletű hiperbolaágon. A függvények nevében szereplő hiperbolikus jelző erre a geometria kapcsolatra utal.



$x^2 + y^2 = 1$ $\qquad$ $x^2 - y^2 = 1$

8.ábra

Az első Eule–féle összefüggést és az *exp* függvény függvényegyenletét felhasználva adódik az alábbi

7. Következmény. *Bármely $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ komplex számra*

$$\exp(x + i\,y) = \exp x\,(\cos y + i\,\sin y). \tag{16}$$

Ezt az azonosságot és a valós *exp*, *cos*, *sin* függvényeket felhasználva kiszámíthatjuk az exponenciális függvény értékét bármely komplex helyen. A (16) jobb oldalán az $\exp z$ ún. trigonometrikus alakja áll. Ebből látható, hogy $|\exp z| = \exp x$ és az y valós szám az $\exp z$ argumentuma.

Megjegyzések

1. A most bevezetett függvények értékeit komplex változó esetén nem az eredeti definíció alapján célszerű kiszámítani. Az *exp* függvényhez hasonlóan a *sin*, *sinh*, *cos*, *cosh* függvények értékei a $z \in \mathbb{C}$ helyen az addiciós formulák valamint az 5. Tétel alapján kifejezhetők a szóban forgó függvények valós értékeivel (lásd a 11. feladatot).

2. Később megmutatjuk, hogy az itt értelmezett valós *sin* és *cos* függvények azonosak a középiskolában geometriai úton bevezetett trigonometrikus függvényekkel.

1.5. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy egy polinom számszorosa, két polinom összege és két polinom szorzata is polinom.

2. Legyen

$$P(z) := p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n,\ Q(z) := q_0 + q_1 z + \cdots + q_m z^m \quad (z \in \mathbb{K})$$

két adott polinom, ahol $p_n \neq 0, q_m \neq 0$ és $n \geq m$. Legyen továbbá

$$S(z) := s_0 + s_1 z + \cdots + s_{n-m} z^{n-m},\ R(z) := r_0 + r_1 z + \cdots + r_{m-1} z^{m-1} \quad (z \in \mathbb{K}).$$

a) Igazoljuk, hogy a

$$P = QS + R, \quad \deg(R) < \deg(Q)$$

egyenlőség az együtthatókra vonatkozó alábbi egyenletrendszerrel ekvivalens:

$$\begin{aligned}
&s_{n-m}q_m && = p_n \\
&s_{n-m-1}q_m + s_{n-m}q_{m-1} && = p_{n-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots && \\
&s_0 q_m + s_1 q_{m-1} + \cdots + s_m q_0 && = p_m \\
&s_0 q_{m-1} + s_1 q_{m-2} + \cdots + s_{m-1} q_0 && = p_{m-1} + r_{m-1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots && \\
&s_0 q_1 + s_1 q_0 && = p_1 + r_1 \\
&s_0 q_0 && = p_0 + r_0
\end{aligned}$$

b) Mutassuk meg először, hogy az első $(n-m+1)$ egyenletből álló rendszer egyértelműen megoldható az $s_{n-m}, s_{n-m-1}, \cdots, s_0$ együtthatókra vonatkozóan. Ezt felhasználva igazoljuk, hogy a maradék egyenletrendszernek is létezik egyértelmű megoldása az $r_{m-1}, r_{m-2}, \cdots, r_0$ együtthatókra vonatkozóan.

c) Készítsünk programot a maradékos osztással adódó S és R polinomok együtthatóinak kiszámítására.

3. Igazoljuk, hogy két racionális függvény összege, szorzata, hányadosa is racionális függvény.
4. Ábrázoljuk az alábbi $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvényeket:

a) $\quad sign, \quad abs, \quad int.$

b) $\quad sign \circ abs, \quad abs \circ sign, \quad int \circ abs.$

c) $\quad f(x) := \operatorname{frac}(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad f \circ \operatorname{abs}, \quad f^2.$

d) $\quad f(x) := \operatorname{frac}(x^2) \quad (x \in \mathbb{R}), \quad g(x) := 1/x, \quad h(x) := \operatorname{int}(1/x) \quad (x \in \mathbb{R}^*).$

5. Irjunk programot az abs, $sign$, $frac$ függvények helyettesítési értékeinek kiszámítására.
6. Határozzuk meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)x^n, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x-1)^n,$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-i)^n}{n^p}, \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n,$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n^2}x^n \quad (0<\alpha<1), f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^n \quad (a>1),$$

$$g)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad (a>1), h)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

7. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1),\\
&b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2} \quad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1),\\
&c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} = \frac{2}{(1-z)^3} \quad (z \in \mathbb{C}, |z| < 1).
\end{aligned}
$$

8. Állítsuk elő az alábbi függvényeket, illetve ezek alkalmasan vett leszűkítéseit 0 konvergenciaközéppontú hatványsorok összegfüggvényeként:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad f(x) := \frac{1+x}{1-x^2} \quad (x \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}),\\
&b) \quad f(x) := \frac{1+x}{1-x^3} \quad (x \in \mathbb{C} \setminus \{1, i, -i\}),\\
&c) \quad f(x) := \cos^2 x \quad (x \in \mathbb{C}),\\
&d) \quad f(x) := \cos^3 x \quad (x \in \mathbb{C}),\\
&e) \quad f(x) := \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} \quad (x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}).
\end{aligned}
$$

9. Igazoljuk az alábbi egyenlőségeket:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \frac{\sin x}{1-x} = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + \frac{101}{120}x^5 + \cdots\\
&b) \quad \exp(-x)\cos(\sqrt{x}) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{25}{24}x^2 - \frac{331}{720}x^3 + \cdots .
\end{aligned}
$$

10. Rendezzük át az $x - 1/2$ hatványai szerint az alábbi hatványsorokat:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n x^n,\\
&c) \quad 1 - x + x^2.
\end{aligned}
$$

11. Igazoljuk, hogy minden $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számra fennállnak az alábbi egyenlőségek:

$$\begin{array}{ll}
a) & \cosh(iz) = \cos z, \quad \cos(iz) = \cosh z, \\
b) & \sinh(iz) = i \sin z, \quad \sin(iz) = i \sinh z, \\
c) & \cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2, \\
d) & \cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z, \\
e) & \sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2, \\
f) & \sin(2z) = 2 \sin z \cos z, \\
g) & \cosh(z_1 - z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, \\
h) & \cosh(2z) = \cosh^2 z + \sinh^2 z, \\
i) & \sinh(z_1 - z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 - \cosh z_1 \sinh z_2, \\
j) & \sinh(2z) = 2 \sinh z \cosh z, \\
k) & \cosh z = \dfrac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}, \quad \sinh z = \dfrac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}.
\end{array}$$

12. Igazoljuk, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ számra fennállnak az alábbi egyenlőségek:

$$\begin{array}{ll}
a) & \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \\
b) & \cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \\
c) & \sinh(x + iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y, \\
d) & \cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y.
\end{array}$$

13. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{re}\,(z) = \alpha\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{im}\,(z) = \beta\}$ halmazoknak — a valós, illetve képzetes tengellyel párhuzamos egyeneseknek — az alábbi függvények által létesített **képét**:

a) *exp*, *b)* *sin*, *c)* *cos*, *d)* *sinh*, *e)* *cosh*.

14. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a

$$\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{re}\,(w) = \alpha\}, \quad \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{im}\,(w) = \alpha\},$$
$$\{w \in \mathbb{C} : |w| = r\}, \quad \{w \in \mathbb{C} : \arg\,(w) = \varphi\}$$

halmazoknak az alábbi függvények által létesített **ősképét**:

a) exp, *b)* $f(z) := z^2 \quad (z \in \mathbb{C})$, *c)* $f(z) := z^3 \quad (z \in \mathbb{C})$,
d) $f(z) := \bar{z} \quad (z \in \mathbb{C})$, *e)* $f(z) := z^{-1} \quad (z \in \mathbb{C}^*)$.

15. Adjunk felső becslést az alábbi különbségek abszolút értékére (a szóban forgó függvények és hatványsoruk részletösszegeinek eltérésére):

$$a)\quad \exp x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in [0,1]),$$

$$b)\quad \cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad (x \in [-\pi,\pi]),$$

$$c)\quad \sin x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (x \in [-\pi,\pi]),$$

$$d)\quad \cosh x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad (x \in [0,1]),$$

$$e)\quad \sinh x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (x \in [0,1]).$$

16. Írjunk programot a valós *exp*, *sin*, *cos*, *sinh*, *cosh* függvények értékeinek kiszámítására.
17. Felhasználva a 11. feladatban közölt azonosságokat, írjunk programot a komplex *exp*, *sin*, *cos*, *sinh*, *cosh* függvények értékeinek kiszámítására.

2. Függvények határértéke

A matematikai analízis egyik alapvető fogalma a határérték. Ebben a fejezetben bevezetjük függvények határértékének a foglalmát és ismertetjük a határértékkel kapcsolatos legfontosabb műveleti szabályokat. Arra törekszünk, hogy a különböző lehetséges eseteket egységes formában tárgyaljuk. Ezért az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú ún. **valós változós, valós értékű függvények** mellett vizsgálni fogjuk az $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ típusú, ún. **valós változós, komplex értékű**, a $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ típusú, ún. **komplex változós, valós értékű**, valamint a $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ típusú, ún. **komplex változós, komplex értékű** függvényeket is. A definíciókat — ahol az lehetséges — egységes formában fogalmazzuk meg, megvilágítva az egyes esetek szemléletes geometriai tartalmát. Ezzel összhangban a továbbiakban általában $\mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ típusú függvényekkel foglalkozunk, ahol $\mathbb{K}_1$ és $\mathbb{K}_2$ (egymástól függetlenül) vagy a valós, vagy a komplex számok halmazát jelöli.

A definíciók megfogalmazásában nemcsak függvény-, hanem határérték-típusok szerint is egységes szemléletre törekszünk. Ezzel összhangban az ún. **végesben vett véges**, a **végtelenben vett véges**, a **végesben vett végtelen**, valamint az ún. **egyoldali** határérték-típusokra közös értelmezést adunk. Ebből a definícióból speciális esetként a sorozatok határértéke is megkapható. Megmutatjuk, hogy a bonyolultabbnak tűnő függvény-határértékek az ún. **átviteli elv** segítségével visszavezethetők sorozatok határértékére. Ez lehetővé teszi számunkra, hogy a sorozatokra vonatkozó, [A1]-ben igazolt tételeket felhasználhassuk (lásd [A1], 2. fejezet).

2.1. Számhalmaz torlódási pontja

Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, és az első esetben a $\mathbb{K}$-t bővítsük a $+\infty, -\infty$ elemekkel, a második esetben pedig a ∞ elemmel. Az így kapott ún. ideális elemekkel bővitett halmazokat $\overline{\mathbb{K}}$-sal fogjuk jelölni. Emlékeztetünk arra, hogy $\overline{\mathbb{K}}$-beli pontok $\epsilon > 0$ indexű **környezeteit** az alábbi módon értelmeztük: ha $a \in \mathbb{K}$, akkor

$$K_\epsilon(a) := \{z \in \mathbb{K} : |z - a| < \epsilon\},$$

ha pedig $a \in \{+\infty, -\infty\}$, akkor

$$K_\epsilon(+\infty) := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x > 1/\epsilon\}, \quad K_\epsilon(-\infty) := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < -1/\epsilon\},$$

és végül $a = \infty \in \overline{\mathbb{C}}$ esetén

$$K_\epsilon(a) := \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 1/\epsilon\}.$$

A $\mathbb{K}$-beli számokat $\overline{\mathbb{K}}$ **véges elemeinek** is szokás nevezni. A környezet felhasználásával bevezetjük a torlódási pont fogalmát.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $a \in \overline{\mathbb{K}}$ elem (pont) a $H \subseteq \mathbb{K}$ **számhalmaz torlódási pontja**, ha az a pont bármely környezete végtelen sok H-beli elemet tartalmaz, röviden $\forall \epsilon > 0 : K_\epsilon(a) \cap H$ **végtelen halmaz**. A H halmaz torlódási pontjainak halmazát a H **derivált halmazának** nevezzük és a H' szimbólummal jelöljük.*

Egyszerűen igazolható, hogy az $a \in \overline{\mathbb{K}}$ pont akkor és csak akkor torlódási pontja a $H \subseteq \mathbb{K}$ halmaznak, ha az a pont **minden környezete tartalmaz legalább egy a-tól különböző H-beli pontot**.

Definíció. *A $H \subseteq \mathbb{K}$ halmaznak azokat a pontjait, amelyek nem tartoznak H'-höz, a H **halmaz izolált pontjainak** nevezzük.*

A torlódási pont értelmezéséből következik, hogy a $b \in H$ pont pontosan akkor izolált pontja H-nak, ha b-nek **van olyan környezete, amely nem tartalmaz b-től különböző H-beli elemet**. Bármely halmaz izolált pontjai — definíció szerint — a halmazhoz tartoznak, torlódási pontjaira azonban ez általában nem teljesül. Például a $H := \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$ valós számhalmaz minden eleme a szóban forgó halmaznak izolált pontja. Egyszerűen belátható, hogy H-nak a 0 pont az egyetlen torlódási pontja, amely azonban nem tartozik a H-hoz.

Véges halmaznak nyilván nincs torlódási pontja, végtelen halmaznak viszont mindig van torlódási pontja. Ez utóbbi állítást, amely a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel egyszerű következménye, fontossága miatt külön tételben is megfogalmazzuk.

1. Tétel. *Bármely $H \subseteq \mathbb{K}$ végtelen számhalmaznak van torlódási pontja. A H végtelen halmaz akkor és csak akkor korlátos, ha minden torlódási pontja véges.*

Bizonyítás. Mivel a H halmaz nem véges, azért elemeiből kiválasztható olyan sorozat, amelynek tagjai páronként különbözőek. Jelöljön $(x_n, n \in \mathbb{N})$ egy ilyen sorozatot. Ekkor a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel alapján létezik olyan $(\nu_n, n \in \mathbb{N})$ indexsorozat, hogy a neki megfelelő részsorozatnak létezik az

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} x_{\nu_n}$$

határértéke. A határérték és a torlódási pont definícióját egybevetve adódik, hogy az $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ pont bármely környezetébe H-nak végtelen sok eleme esik, azaz $\alpha \in H'$.

Ha a $H \subset \mathbb{K}$ halmaz korlátos, akkor létezik olyan $R > 0$ szám, hogy minden $x \in H$ elemre $|x| \leqq R$. A torlódási pont definíciója alapján egyszerűen adódik, hogy az $y \in H'$ pontra is $|y| \leqq R$ teljesül. Végül, ha a H végtelen halmaz nem korlátos, akkor elemeiből kiválasztható egy olyan részsorozat, amelynek valós esetben $+\infty$ vagy $-\infty$, komplex esetben pedig ∞ a határértéke. □

$\mathbb{K}$ részhalmazai között kitüntetett szerepet játszanak a zárt halmazok.

> Definíció. *Akkor mondjuk, hogy a $H \subseteq \mathbb{K}$ halmaz* ***zárt****, ha tartalmazza összes véges torlódási pontját.*

Nyilvánvaló, hogy $\mathbb{K}$-nak **minden véges részhalmaza zárt.** Az alábbi állításban zárt halmazoknak egy jellemzését adjuk.

> 2. Tétel. *A $H \subseteq \mathbb{K}$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha bármely H elemeiből alkotott konvergens sorozatnak a határértéke is H-hoz tartozik.*

Bizonyítás. i) Tegyük fel először, hogy a H halmaz zárt, és tekintsünk egy H-beli elemekből alkotott $(x_n, n \in \mathbb{N})$ konvergens sorozatot. Ha ez a sorozat stacionárius, azaz csak véges sok egymástól különböző tagja van, akkor határértéke valamelyik tagjával egyenlő, következésképpen H-hoz tartozik. Ha a konvergens sorozat nem stacionárius, akkor végtelen sok, páronként egymástól különböző tagja van. Minthogy a határérték — definíció alapján — a konvergens sorozat tagjaiból alkotott halmaznak, s így egyben H-nak is véges torlódási pontja, azért H zártsága miatt a határérték H-nak eleme.

ii) Megfordítva, most tegyük fel, hogy H tartalmazza valamennyi, elemeiből alkotott konvergens sorozat határértékét, és mutassuk meg, hogy ekkor minden véges torlódási pontját is tartalmazza.

Legyen tehát $a \in \mathbb{K}$ a H halmaz egy véges torlódási pontja. Először megmutatjuk, hogy ekkor van olyan H-beli elemekből álló sorozat, amely a-hoz konvergál. Valóban, minthogy az a bármely környezetében van H-beli elem, azért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $x_n \in H$, amelyre

$$|x_n - a| < 2^{-n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül. Következésképpen $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Minthogy — a feltétel szerint — a H halmaz az elemeiből alkotott konvergens sorozatok határértékét is tartalmazza, azért az a torlódási pontra $a \in H$ teljesül. □

Megjegyzések

1. Ha $H \subset \mathbb{R}$ véges halmaz, akkor nyilván $H' = \emptyset$. Ellenkező esetben az 1.Tétel szerint $H' \neq \emptyset$.
2. A

$$\overline{H} := H \cup H'$$

halmazt a $H \subseteq \mathbb{K}$ számhalmaz **lezárásának** nevezzük.

3. Legyen $H := (a, b) \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum. Az $[a, b]$ intervallum bármely pontjának minden környezete végtelen sok H-beli pontot tartalmaz. Ha $c \notin [a, b]$, akkor c-nek van olyan környezete, amelyben nincs H-beli pont. Ez azt jelenti, hogy $H' = \overline{H} = [a, b]$.
4. Ha $H = [a, b]$ zárt intervallum, akkor $H' = [a, b] \subseteq [a, b]$ miatt a szóban forgó intervallum **zárt halmaz a most bevezetett definíció értelmében is**.
5. Az előző meggondoláshoz hasonlóan adódik, hogy minden $a \in \mathbb{K}$ és $\epsilon > 0$ esetén
$$K'_\epsilon(a) = \overline{K_\epsilon}(a) = \{z \in \mathbb{K} : |z - a| \leqq \epsilon\}.$$
6. Bármely $\mathbb{R}$-beli környezet végtelen sok racionális számot tartalmaz. Következésképpen $\overline{\mathbb{R}}$ bármely eleme torlódási pontja a $\mathbb{Q}$ halmaznak, azaz $\mathbb{Q}' = \overline{\mathbb{R}}$.
7. A $H = \mathbb{K}$ speciális esetben $H' = \overline{H} = \overline{\mathbb{K}}$. Minthogy $\mathbb{K}$ minden véges torlódási pontját tartalmazza, azért $\mathbb{K}$ **zárt halmaz**. Az ideális elemekkel kibővített számtestekre korábban már használt $\overline{\mathbb{K}}$ jelölés is összhangban van a halmazok lezárására vonatkozó, most bevezetett jelöléssel.
8. A zárt halmaz egy további jellemzése adható a nyílt halmaz fogalmát felhasználva. Könnyen igazolható, hogy a $H \subseteq \mathbb{K}$ halmaz **akkor és csak akkor zárt, ha komplementere**, azaz a $H^c := \mathbb{K} \setminus H$ **halmaz nyílt.**

2.2. Függvény határértéke

Ebben a pontban $\mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ típusú függvények határértékét definiáljuk értelmezési tartományuk torlódási pontjaiban.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy a nem üres $H \subseteq \mathbb{K}_1$ halmazon értelmezett $f : H \to \mathbb{K}_2$* ***függvénynek az*** *$a \in H'$* ***pontban van határértéke****, ha létezik olyan $A \in \overline{\mathbb{K}}_2$ pont, amelynek bármely $K_\epsilon(A)$ környezetéhez létezik az $a \in H'$ pontnak olyan $K_\delta(a)$ környezete, hogy minden $x \in K_\delta(a) \cap H$, $x \neq a$ esetén $f(x) \in K_\epsilon(A)$ teljesül. Logikai jelöléseket használva:*

$$(1)\quad \exists A \in \overline{\mathbb{K}}_2\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \big(K_\delta(a) \setminus \{a\}\big) \cap H\ :\ f(x) \in K_\epsilon(A).$$

Könnyű megmutatni, hogy **legfeljebb egy** olyan $A \in \overline{\mathbb{K}}_2$ létezik, amelyre az (1) feltétel teljesül. Indirekt bizonyítást alkalmazva tegyük fel, hogy léteznek olyan $A_1, A_2 \in \overline{\mathbb{K}}_2$, $A_1 \neq A_2$ elemek, amelyekre fennáll az (1) állítás. Mivel $A_1 \neq A_2$, azért létezik olyan $\epsilon > 0$ szám, hogy

$$(2)\qquad K_\epsilon(A_1) \cap K_\epsilon(A_2) = \emptyset.$$

Alkalmazzuk az (1) definíciót A helyett A_i-re $i = 1, 2$ esetén . Ekkor azt kapjuk, hogy létezik olyan $\delta_i > 0$ szám, amelyre minden $x \in K_{\delta_i}(a) \cap H, x \neq a$ pontban

$f(x) \in K_\epsilon(A_i)$ teljesül. Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Minthogy az a pont a H halmaznak torlódási pontja, azért H-nak van olyan a-tól különböző x pontja, amelyre $x \in K_\delta(a)$ teljesül. Ebben a pontban viszont (2) alapján

$$f(x) \in K_\epsilon(A_1), \quad f(x) \in K_\epsilon(A_2),$$

azaz az $f(x)$ pont a szóban forgó két környezetnek egy közös eleme. Mivel másrészt (2) alapján ezek a környezetek diszjunktak, ellentmondásra jutottunk. Ezzel a határérték egyértelműségére vonatkozó állítást bebizonyítottuk.

Definíció. *Az (1) értelmezésben szereplő $A \in \bar{\mathbb{R}}_2$ elemet az f* ***függvény*** *a* ***pontban vett határértékének*** *nevezzük és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

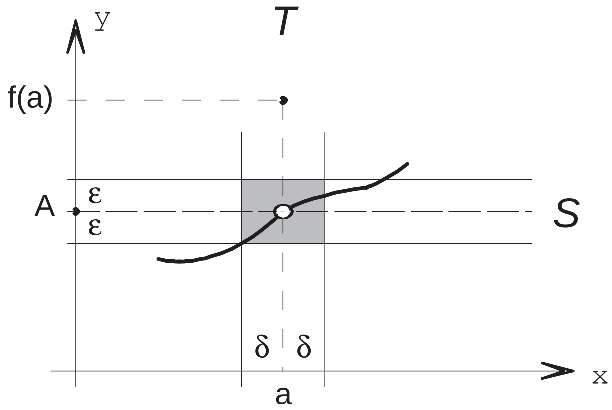
$$\lim_a f = A, \quad \lim_{x \to a} f(x) = A, \quad L_a(f) = A, \quad f(x) \to A, \quad \text{ha} \quad x \to a.$$

Az utolsó szimbólumot úgy olvassuk, hogy "$f(x)$ tart A-hoz, ha x tart a-hoz". A határérték értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy az f függvénynek az a helyen vett határértéke független attól, hogy $a \notin H$ vagy $a \in H$, és ebben az utóbbi esetben a határérték független f-nek az a helyen felvett értékétől. Az $L_a(f)$ határérték tehát akkor is létezhet, ha f az a helyen nincs értelmezve. A definícióból az látható, hogy **ha az** $f : H \to \mathbb{K}_2$ **és a** $g : H \to \mathbb{K}_2$ **függvénynek valamely** $H \cap K_\delta(a) \setminus \{a\}$ **halmazra vonatkozó leszűkítései megegyeznek, akkor a két függvénynek egyszerre létezik, vagy nem létezik az** a **pontban a határértéke**, és — az első esetben — $L_a(f) = L_a(g)$.

Az alábbiakban kiemeljük és szemléltetjük az általános definíció néhány fontos speciális esetét. Ha $a \in \mathbb{K}_1$ és $A \in \mathbb{K}_2$, azaz a és A is **véges**, akkor **véges helyen vett véges határértékről** szokás beszélni. Az általános értelmezést erre az esetre felírva és a környezet definícióját felhasználva az alábbi, az eredetivel ekvivalens megfogalmazás adódik.

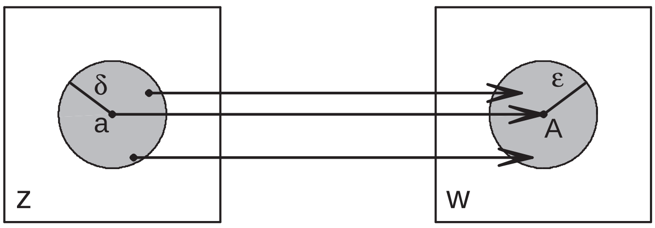
Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{K}_2$ függvénynek az $a \in H' \subseteq \mathbb{K}_1$ pontban a $A \in \mathbb{K}_2$* ***szám a határtértéke****, ha minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha $0 < |x - a| < \delta$ és $x \in H$, akkor $|f(x) - A| < \epsilon$.*

A határérték a $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2 = \mathbb{R}$ speciális esetben — vagyis valós változós, valós értékű függvényekre — a függvény grafikonját felhasználva a következőképpen szemléltethető . Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszerben az $y = A$ egyenletű egyenesre szimmetrikusan egy teszőleges szélességű S „sávot”. Ekkor létezik olyan, az $x = a$ egyenletű egyenesre szimmetrikus T sáv, hogy az f függvény grafikonjának T-be eső $\{(x, f(x)) : x \in H \cap T\}$ része az $(a, f(a))$ pont kivételével az S „sávba” esik.



2.1. ábra

A $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2 = \mathbb{C}$ esetben — vagyis komplex változós, komplex értékű függvényeket tekintve — az $L_a(f) = A$ szemléletesen szólva a következőt jelenti: a komplex számsík minden a-hoz „elég közel eső”, a-tól különböző H-beli pontjának f által létesített képe az A-hoz „elég közel esik”. Ezt szemléltetjük az alábbi ábrán.



2.2. ábra

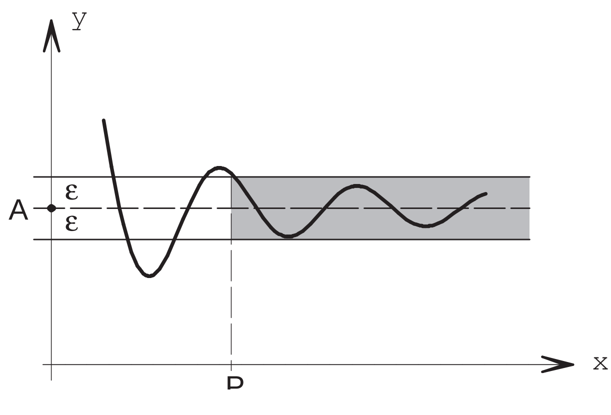
Az ún. **végtelenben vett határértékek** közül az alábbi esetet szemléltetjük. Tegyük fel, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény $H \subseteq \mathbb{R}$ értelmezési tartománya felülről nem korlátos. Ekkor $+\infty$ a H-nak torlódási pontja, következésképpen felvethető, hogy f-nek van-e határértéke a $+\infty$-ben ? Az általános értelmezést erre az esetre alkalmazva adódik az alábbi

Definíció. *Tegyük fel, hogy a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz felülről nem korlátos. Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$ függvénynek a $+\infty$-ben $A \in \overline{\mathbb{R}}$ a határértéke, ha bármely $\epsilon > 0$ számhoz létezik a $+\infty$-nek olyan $K_\delta(+\infty)$ környezete, hogy ha $x \in H \cap K_\delta(+\infty)$, akkor $f(x) \in K_\epsilon(A)$. A $+\infty$ környezeteire más jelölést használva ez ekvivalens a következővel:*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists P > 0 \; \forall x \in H, \; x > P \; : \; f(x) \in K_\epsilon(A).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ebből az értelmezésből a $H = \mathbb{N}$ speciális estben visszakapjuk a természetes számok halmazán értelmezett függvény, azaz a sorozat határértékének a definícióját.

Az $L_{+\infty}(f)$ határértéket — valós értékű függvényekre szorítkozva — a végesben vett véges hatértékhez hasonlóan szemléltethetjük. Vegyünk fel a derékszögű koordinátarendszerben az $y = A$ egyenletű egyenesre szimmetrikusan egy 2ϵ szélességű sávot. Ehhez létezik olyan P szám, hogy a függvény grafikonjának az $\{(x, f(x)) \colon x \in H, x > P\}$ része a fenti sávba esik.



2.3. ábra

A *sign* függvénynek a 0 pontban nincs határértéke (lásd az alábbi megjegyzés 7. pontját). Véve azonban ennek a függvénynek akár a $(0, +\infty)$, akár a $(-\infty, 0)$ intervallumra vonatkozó leszűkítését, olyan függvényeket kapunk, amelyeknek már van határértékük a 0 pontban. Ezt úgy szoktuk szavakban kifejezni, hogy a *sign* **függvénynek a** 0 **pontban létezik a jobb- és a baloldali határértéke**. Ezzel az ún. egyoldali határértékkel kapcsolatos az alábbi

Definíció. *Legyen $f : H \to \mathbb{K}$ ($H \subseteq \mathbb{R}$) egy valós változós függvény és tegyük fel, hogy az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ elem a $H_a^+ := H \cap (a, +\infty)$ halmaz torlódási pontja. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen létezik* ***jobboldali határértéke****, ha f-nek a H_a^+ halmazra vonatkozó leszűkítésének létezik határértéke az a pontban. Az f függvény a helyen vett jobb oldali határértékét az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim_{a+} f, \quad \lim_{x \to a+} f(x), \quad f(a+), \quad L_{a+}(f).$$

A fenti definícióban a H_a^+ halmazt a $H_a^- := H \cap (-\infty, a)$ halmazzal cserélve fel megkaphatjuk az a **helyen vett baloldali határérték** értelmezését. Magát a baloldali határértéket a

$$\lim_{a-} f, \quad \lim_{x \to a-} f(x), \quad f(a-), \quad L_{a-}(f)$$

szimbólumok valamelyikével jelöljük.

Tegyük fel, hogy az $a \in \mathbb{R}$ szám a H_a^+ és a H_a^- halmaznak is torlódási pontja. Egyszerűen belátható (lásd a 6. feladatot), hogy ilyenkor f-nek az a helyen akkor és csak akkor van határértéke, ha f-nek a-ban létezik a jobb- és baloldali határértéke, és $f(a+) = f(a-) = L_a(f)$.

Megjegyzések

1. A természettudományokban és a technikában gyakran élnek a következő szóhasználattal: „$f(x)$ tetszésszerinti hibával megközelíti az A-t, ha x elég közel van a a-hoz" vagy „$f(x)$ kicsit tér el az A-tól, ha x kicsit tér el a a-tól", stb. Ezek a matematika nyelvén mind azt jelentik, hogy az f függvényneknek az a pontban A a határértéke.
2. Ha $A \in \mathbb{K}_2$, akkor azt szoktuk mondani, hogy f-nek az a helyen véges a határértéke. Ha $A = +\infty, -\infty$ vagy $A = \infty$, akkor azt mondjuk, hogy f-nek az a helyen vett határértéke nem véges.
3. A határérték további speciális eseteinek részletezésétől eltekintünk. Ezek az általános definícióból az előzőekhez hasonlóan megkaphatók.
4. Vizsgáljuk az $f(x) := c$ ($x \in \mathbb{K}_1$) **konstans függvény határértékét**, ahol $c \in \mathbb{K}_2$ rögzített szám. Könnyen belátható, hogy bármely $a \in \mathbb{K}_1$ pontban $L_a(f) = c$. Valóban, mivel ebben az esetben minden $x \in \mathbb{K}_1$ ponban $|f(x) - c| = 0$, azért — az (1) definíciót alapul véve — az ottani feltétel minden $\epsilon > 0$ esetén bármely $\delta > 0$ választás mellett fennáll.
5. A $g(x) := x$ ($x \in \mathbb{K}$) **identikus leképezésnek bármely** $a \in \mathbb{K}'$ **pontban létezik határértéke** és $L_a(g) = a$. Valóban tetszőleges $\epsilon > 0$ estén például az $\epsilon = \delta$ választás mellett nyilván
$$\forall x \in K_\delta(a) \setminus \{a\} : g(x) = x \in K_\epsilon(a).$$
Ez pontosan azt jelenti, hogy $L_a(g) = a$.
6. A $h(x) := 1/x$ ($x \in \mathbb{R}, x \neq 0$) függvényre $L_{+\infty}(h) = L_{-\infty}(h) = 0$. Valóban a $+\infty$ helyre szorítkozva vegyük figyelembe, hogy bármely $\epsilon > 0$ szám esetén a $0 < 1/x < \epsilon$ és az $x > 1/\epsilon$

egyenlőtlenségek egymással ekvivalensek. Ez azt jelenti, hogy például az $\epsilon = \delta$ választás mellett minden $x \in K_\delta(+\infty) = (1/\epsilon, +\infty)$ pontban $h(x) = 1/x \in K_\epsilon(0)$. Ezzel megmutattuk, hogy $L_{+\infty}(h) = 0$. Az állítás másik része hasonlóan igazolható.

7. A valós *sign* **függvénynek a** 0 **helyen nincs határértéke**. Valóban vegyük figyelembe, hogy a szóban forgó függvény értékkészlete az $R = \{+1, -1, 0\}$ halmaz. Az $\overline{\mathbb{R}}$ egyetlen R-hez nem tartozó A eleme sem lehet határértéke a *sign* függvénynek, hiszen minden ilyen A-nak van olyan környezete, amely egyetlen függvényértéket sem tartalmaz. Ha viszont $A \in R$, akkor például $\epsilon = 1/2$ választás esetén bármely $\delta > 0$ számot véve a $K_\delta(0)$ környezetnek mindig van olyan $x \neq 0$ pontja, hogy $\operatorname{sign}(x) \notin K\epsilon(A)$. Ezzel megmutattuk, hogy nincs olyan $A \in \overline{\mathbb{R}}$ elem, amely eleget tenne a határérték definíciójában megfogalmazott feltételeknek.

2.3. Átviteli elv

Már a bevezetésben említettük, hogy a függvény határértéke kapcsolatba hozható a sorozat határértékével. Erre vonatkozik az alábbi állítás.

Átviteli elv. *Az $f : H \to \mathbb{K}_2$ ($H \subseteq \mathbb{K}_1$) függvénynek az $a \in H'$ pontban akkor és csak akkor $A \in \overline{\mathbb{K}}_2$ a határértéke, ha bármely olyan $(x_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatra, amelyre*

$$x_n \in H, \quad x_n \neq a \ (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a, \tag{3}$$

a függvényértékek $(f(x_n), n \in \mathbb{N})$ sorozatának is van határértéke és

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A. \tag{4}$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha $L_a(f) = A$, akkor minden, a (3) feltételnek eleget tevő $(x_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatra (4) teljesül. Az $L_a(f) = A$ definíciója szerint

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in K_\delta(a) \cap H, \ x \neq a \ : \ f(x) \in K_\epsilon(A). \tag{5}$$

Mivel az $(x_n, n \in \mathbb{N})$ sorozat határártéke a, azért erre a sorozatra — ϵ helyett δ-ra — felírva a sorozat határértékének definícióját azt kapjuk, hogy

$$\exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ : \ x_n \in K_\delta(a).$$

Következésképpen (5) alapján

$$\forall n \geq N \ : \ f(x_n) \in K_\epsilon(A).$$

Összefoglalva tehát azt kaptuk, hogy

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq \mathbb{N} \; : \; f(x_n) \in K_\epsilon(A),$$

s ezzel a bizonyítandó $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ állítást igazoltuk.

Megfordítva, most megmutatjuk, hogy ha minden, a (3) feltételnek eleget tevő sorozatra a függvényértékek sorozatának $A \in \overline{\mathbb{K}}_2$ a határértéke, akkor az f függvénynek az a helyen van határértéke, és az A-val egyenlő. A tétel állításával ellentétben tegyük fel, hogy $L_a(f) = A$ nem teljesül. Ez részletesen szólva a következőt jelenti:

$$\exists \epsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x \in H \cap K_\delta(a), \; x \neq a \; : \; f(x) \notin K_\epsilon(A). \tag{6}$$

Ezt az állítást $\delta_n := 1/(n+1)$ $(n \in \mathbb{N})$ esetén alkalmazva és az ehhez a δ-hoz létező (6) tulajdonságú elemet x_n-nel jelölve azt kapjuk, hogy

$$\exists \epsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in H \cap K_{\delta_n}(a), \; x_n \neq a \; : \; f(x_n) \notin K_\epsilon(A).$$

Mivel $x_n \in K_{\delta_n}(a)$ $(n \in \mathbb{N})$ és $(\delta_n, n \in \mathbb{N})$ zérussorozat, azért $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, ugyanakkor $f(x_n) \notin K_\epsilon(A)$ $(n \in \mathbb{N})$ miatt az $(f(x_n), n \in \mathbb{N})$ sorozatnak nem lehet A a határértéke. Ezzel egy olyan $(x_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot kaptunk, amelyre (3) teljesül és (4) nyilván nem teljesül, s így ellentmondásra jutottunk. □

2.4. Műveletek határértékekkel

Az átviteli elv segítségével a sorozatok határértékére vonatkozó, korábban megismert tételeket átfogalmazhatjuk függvény határértékekre.

Legyen $H \subseteq \mathbb{K}_1$ és $a \in \overline{\mathbb{K}}_1$ a H halmaz torlódási pontja. Tegyük fel, hogy az $f : H \to \mathbb{K}_2$ és a $g : H \to \mathbb{K}_2$ függvénynek az a pontban van határértéke. Ekkor fennáll az alábbi

3. Tétel. *Ha*

$$L_a(f) = A, \qquad L_a(g) = B,$$

akkor

$$\begin{aligned} &a) \quad L_a(f+g) = A + B, \\ &b) \quad L_a(fg) = AB, \\ &c) \quad L_a\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{A}{B} \end{aligned}$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló műveleteknek van értelme.

Bizonyítás. Legyen $(x_n, n \in \mathbb{N})$ olyan számsorozat, amelyre a (3) feltétel teljesül. Ekkor az átvitelei elv alapján

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A, \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = B.$$

A sorozatok határérékére vonatkozó tételt felhasználva (lásd [A1], 2.8. pont 12. Tételét) azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \big(f(x_n) + g(x_n)\big) = A + B,\\
&\lim_{n\to\infty} \big(f(x_n)g(x_n)\big) = AB,\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B}.
\end{aligned}$$

Minthogy ezek az egyenlőségek bármely, a (3) feltételt kielégítő sorozatra fennállnak, azért az átviteli elv ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy valóban léteznek a $L_a(f+g)$, $L_a(fg)$, $L_a(f/g)$ határértékek, és azok a tételben megadott értékekkel egyenlők. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. $\square$

A határérték és a $\leq$, illetve $<$ reláció kapcsolatára vonatkozik az alábbi állítás.

1. **Következmény.** *Tegyük fel, hogy az $f, g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvényeknek az $a \in (\alpha, \beta)$ helyen létezik a határértéke.*

i) Ha $f(x) \leqq g(x) \quad (x \in (\alpha, \beta))$, akkor $L_a(f) \leqq L_a(g)$.

ii) Ha $L_a(f) < L_a(g)$, akkor a-nak van olyan $K_r(a)$ környezete, hogy $f(x) < g(x)$, ha $x \in K_r(a)$.

Bizonyítás. A ii) igazolásához írjuk fel a határérték definícióját. Ekkor az $\epsilon := (L_a(g) - L_a(f))/2$ számhoz létezik olyan $r > 0$ szám, hogy minden $x \in K_r(a)$ pontban a bizonyítandó

$$L_a(f) - \epsilon < f(x) < L_a(f) + \epsilon = L_a(g) - \epsilon < g(x) < L_a(g) + \epsilon$$

egyenlőtlenség teljesül.

Az i) rész a ii)-ből indirekt bizonyítással egyszerűen következik. $\square$

Mivel a jobb- és bal oldali hatérértéket a függvény alkalmasan vett leszűkítésének határértékeként értelmeztük, azért az átviteli elv és a most igazolt műveleti szabályok — értelemszerű módosításokkal — az egyoldali határértékekre is érvényesek.

A monoton sorozatok határtékére vonatkozó tétel megfelelője érvényes a monoton függvényekre. **A monotonitás fogalmát a valós változós, valós értékű függvények körében vezetjük be.**

Definíció. *Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon értelmezett függvény. Akkor mondjuk, hogy az f* ***függvény monoton növekedő****, ha bármely $x_1, x_2 \in H$ pontpárra $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leqq f(x_2)$ teljesül. Ha a most megfogalmazott feltételben az egyenlőséget nem engedjük meg, azaz ha*

$$\forall x_1, x_2 \in H,\ x_1 < x_2 \ :\ f(x_1) < f(x_2),$$

akkor azt mondjuk, hogy az f ***szigorúan monoton növekedő.***

A fenti értelmezésben a függvényértékekre vonatkozó egyenlőtlenség irányát megváltoztatva eljutunk a monoton fogyó függvény fogalmához.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{R}$* ***függvény monoton fogyó****, ha*

$$\forall x_1, x_2 \in H,\ x_1 < x_2 \ :\ f(x_1) \geq f(x_2).$$

Ha ehelyett

$$\forall x_1, x_2 \in H,\ x_1 < x_2 \ :\ f(x_1) > f(x_2),$$

akkor az f függvényt ***szigorúan monoton fogyónak*** *nevezzük.*

A monoton növő és monoton fogyó függvényeket — közös elnevezést használva — **monoton függvényeknek** nevezzük.

Az egyenlőtlenségre vonatkozó elemi tulajdonságokból következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ számra $0 < x_1 < x_2$ esetén $x_1^n < x_2^n$ teljesül. Ez — a most bevezetett fogalmat használva — azt jelenti, hogy az

$$f(x) := x^n \quad (x \geq 0)$$

függvények minden $n \in \mathbb{N}^*$ kitevő esetén **szigorúan monoton növekedők.**

Monoton függvények egyoldali határértékeinek létezésére vonatkozik az alábbi állítás.

4. Tétel *Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ monoton függvény és tegyük fel, hogy az $a \in [-\infty, +\infty)$ pont a $H \cap (a, +\infty)$ halmaznak torlódási pontja. Ekkor f-nek létezik a jobb oldali határértéke és*

$$f(a+) = \inf\{f(x) : x \in H, x > a\},$$

ha f monoton növekedő, illetve

$$f(a+) = \sup\{f(x) : x \in H, x > a\},$$

ha f monoton fogyó.

Bizonyítás. Az állításnak csak a monoton növekedő függvényekre vonatkozó részét igazoljuk. A másik fele hasonlóan látható be.

Legyen $A := \inf\{f(x) : x \in H, x > a\}$. Az alsó határ értelmezése alapján egyrészt minden $x \in H, x > a$ esetén $f(x) \geq A$, másrészt

$$\forall M > A \ \exists x_1 \in H, x_1 > a \ : \ f(x_1) > M.$$

Mivel f monoton növekedő, azért a fentiek alapján

$$A \leqq f(x) < M \quad (a < x < x_1).$$

Ezzel beláttuk, hogy A bármely $K_\epsilon(A)$ környezetéhez van a-nak olyan $\delta > 0$ sugarú környezete, hogy minden $x \in K_\delta(a) \cap H, x > a$ pontban $f(x) \in K_\epsilon(A)$ teljesül. Ezzel az állítást bebizonyítottuk. □

A most igazolt tételből — a bal- és jobboldali határérték szerepét felcserélve — adódik a következő

5. Tétel *Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ monoton függvény és tegyük fel, hogy az $a \in (-\infty, +\infty]$ pont a $H \cap (-\infty, a)$ halmaznak torlódási pontja. Ekkor f-nek létezik a baloldali határértéke és*

$$f(a-) = \sup\{f(x) : x \in H, x < a\},$$

ha f monoton növekedő,

$$f(a-) = \inf\{f(x) : x \in H, x < a\},$$

ha f monoton fogyó.

Ez a tétel az előzőhöz hasonlóan igazolható.

2.5. Nevezetes határértékek

Ebben a pontban megvizsgálunk néhány függvényosztályt határérték szempontjából. A valós és komplex esetet együtt tárgyalva polinomokkal, racionális függvényekkel, valamint hatványsorok összegfüggvényével foglalkozunk. Ezzel összhangban $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ típusú függvényeknek valamely $\alpha \in \overline{\mathbb{K}}$ helyen vett határértékének, illetve — valós esetben — az egyoldali határérték létezésének kérdésével foglalkozunk.

2.5.1. Polinom határértéke

Először véges helyen vett határártékeket vizsgálunk. Legyenek $a_0, a_1, \cdots, a_n$ adott valós vagy komplex számok. Megmutatjuk, hogy a

$$P(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad (z \in \mathbb{K})$$

polinomnak **minden** $\alpha \in \mathbb{K}$ **helyen létezik határértéke és az** $P(\alpha)$**-val egyenlő**:

$$L_\alpha(P) = P(\alpha).$$

Valóban, az előző pont 4. és 5. megjegyzése szerint a konstans függvénynek és az identikus leképezésnek létezik határértéke az α helyen és az az α helyen felvett függvényértékkel egyenlő. A szorzatfüggvény hatérértékére vonatkozó állításból következik, hogy az

$$f_k(z) := a_k z^k \quad (z \in \mathbb{K},\ k = 0, 1, \cdots, n)$$

függvényeknek létezik az α helyen hatérértéke és az $f_k(\alpha)$-val egyenlő. Végül az összegfüggvény határértékére vonatkozó állítás alapján

$$L_\alpha(P) = \sum_{k=0}^{n} L_\alpha(f_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = P(\alpha).$$

A végtelen helyen vett határérték kérdésére a következő pontban visszatérünk.

2.5.2. Racionális függvény határértéke

Legyen P és Q polinom, ahol Q nem a zérus polinom. Jelölje Λ a Q zérushelyeinek halmazát. A hányadosfüggvény határértékére vonatkozó állítás alapján **minden, a** Q **zérushelyeitől különböző** $\alpha \in \mathbb{K}$ **helyen** P/Q**-nak létezik határértéke és**

$$L_\alpha\Big(\frac{P}{Q}\Big) = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} \quad (\alpha \notin \Lambda).$$

Ha α a Q polinomnak zérushelye, akkor — figyelembe véve a Q gyöktényezős felbontását — a szóban forgó polinom felírható

$$Q(z) = (z-\alpha)^r S(z) \quad (z \in \mathbb{K})$$

alakban, ahol $r \in \mathbb{N}^*$ és az S polinom nem tűnik el az α helyen. A P/Q racionális függvényre tehát

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{(z-\alpha)^r}\frac{P(z)}{S(z)} \quad (z \in \mathbb{K} \setminus \Lambda)$$

teljesül. Mivel a P/S függvénynek létezik határértéke az α helyen, azért elegendő az

$$r_{\alpha,n}(z) := \frac{1}{(z-\alpha)^n} \quad (z \in \mathbb{K} \setminus \{\alpha\})$$

függvény határértékét vizsgálni. Egyszerűen — például az átviteli elv alapján — igazolható, hogy

$$L_\alpha(r_{\alpha,n}) = \infty \quad (\mathbb{K} = \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}^*), \qquad L_\alpha(r_{\alpha,n}) = +\infty$$
$$(\mathbb{K} = \mathbb{R},\ n = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*).$$

Páratlan n esetén nem létezik a szóban forgó valós függvény határértéke. Ugyancsak az átviteli elv alkalmazásával adódik, hogy ebben az esetben létezik viszont a jobb- és baloldali határérték és

$$L_{\alpha+}(r_{\alpha,n}) = +\infty \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R}, n = 2k+1, k \in \mathbb{N}^*),$$
$$L_{\alpha-}(r_{\alpha,n}) = -\infty \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R}, n = 2k+1, k \in \mathbb{N}^*).$$

A **végtelenben vett határérték** vizsgálatához célszerű először a

$$h_n(z) := z^n \quad (z \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{Z})$$

hatványfüggvényekkel foglalkozni. Ha $n < 0$, akkor a h_n függvénynek komplex esetben a ∞-ben, valós esetben pedig a $+\infty, -\infty$ helyeken a határtéke 0. Ha $n = 0$, akkor az említett helyeken 1 a határérték. Áttérve az $n \in \mathbb{N}^*$ esetek vizsgálatára könnyen igazolható, hogy komplex esetben

$$L_\infty(h_n) = \infty \quad (\mathbb{K} = \mathbb{C}),$$

valós esetben pedig

$$L_{+\infty}(h_n) = +\infty \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R}), \qquad L_{-\infty}(h_n) = (-1)^n(+\infty) \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R}).$$

Az általános eset vizsgálatához írjuk fel a racionális függvényt

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0} = z^{n-m}\frac{a_n + \cdots + a_1/z^{n-1} + a_0/z^n}{b_m + \cdots + b_1/z^{m-1} + b_0/z^m} =:$$
$$= z^{n-m}R(z) \quad (z \in \mathbb{K} \setminus (Z \cup \{0\}))$$

alakban, ahol $b_m \neq 0$. A h_n hatványfüggvények határértékére vonatkozó, előbb említett állítások alapján nyilvánvaló, hogy a fenti racionális függvénynek minden nem véges helyen létezik határértéke és az a_n/b_m-mel egyenlő. Ezt és a h_{n-m} hatértékére vonatkozó állítást felhasználva megkaphatjuk a racionális függvény határértékét.

2.5.3. Analitikus függvény határértéke

Emlékeztetünk arra, hogy a $H \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazon értelmezett $f : H \to \mathbb{K}$ függvényt analitikusnak nevezzük, ha bármely $\alpha \in H$ pontnak van olyan $K_r(\alpha)$ környezete, amelyben f előállítható hatványsor összegfüggvényeként, azaz

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n \quad (z \in K_r(\alpha)).$$

Ilyen függvényekre fennáll a

6. Tétel *Legyen f egy $H \subseteq \mathbb{K}$ nyílt halmazon értelmezett analitikus függvény. Ekkor minden $\alpha \in H$ pontban f-nek létezik határértéke és*

$$L_\alpha(f) = f(\alpha).$$

Bizonyítás. Legyen $r_1 < r$. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $M > 0$ szám, amellyel minden $z \in K_{r_1}(\alpha)$ pontban

$$|f(z) - f(\alpha)| \leqq M|z-\alpha| \quad (z \in K_{r_1}) \tag{7}$$

teljesül. Innen — például az átviteli elv alapján — az állítás már következik.

A (7) egyenlőtlenség igazolásához vegyük figyelembe, hogy az 1.3. pont 4. Következménye alapján minden $r_1 < r$ esetén

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r_1^{k-1} =: M < \infty.$$

Ezt és az $a_0 = f(\alpha)$ egyenlőséget felhasználva azt kapjuk, hogy minden $z \in K_{r_1}(\alpha)$ pontban érvényes az alábbi becslés:

$$|f(z) - f(\alpha)| \leqq |z-\alpha| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||z-\alpha|^{k-1} \leqq M|z-\alpha|.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

A most igazolt tételből következik, hogy az *exp*, *sin*, *cos*, *sinh*, *cosh* függvényeknek minden $\mathbb{C}$-beli pontban létezik határértéke és az a pontbeli függvényértékkel egyenlő.

Az előbb alkalmazott gondolatmenettel könnyen bebizonyítható az 1.2. pont 2. Következményének a megfelelője polinom helyett analitikus függvényre.

2. Következmény. *Tegyük fel, hogy az f függvény a $K_r(\alpha)$ $(r > 0)$ környezet minden α-tól különböző z pontjában egy másik hatványsor összegfüggvényeként is előállítható, azaz*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-\alpha)^n \quad (z \in K_r(\alpha)). \tag{8}$$

Ekkor

$$a_n = b_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Valóban az előző tétel bizonyítása alapján $a_0 = b_0 = f(\alpha)$. Ezt felhasználva (8)-ból $(z-\alpha)$-val való osztás után azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-\alpha)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-\alpha)^{n-1} \quad (z \in K_r(\alpha), z \neq \alpha).$$

A bal- és a jobb oldalon egy-egy $K_r(\alpha)$ környezetben konvergens hatványsor összegfüggvénye áll. Mivel ezek — a $z = \alpha$ pont kivételével — a $z \in K_r(\alpha)$ pontokban egyenlők, azért α-ban vett határértékük is megegyezik. Ismét alkalmazva az előző tételt $a_1 = b_1$ adódik.

Ezt az eljárást folytatva a bizonyítandó állítást kapjuk.

2.6. Feladatok

Az alábbi feladatokban szereplő függvények értelmezési tartományát külön nem tüntettük fel. Ez definíció szerint $\mathbb{R}$-nek az a legtágabb részhalmaza, amelyen a szóban forgó műveleteknek, illetve függvényeknek van értelme.

1. Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x},\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x+1}{x-4},$$
$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2},\qquad d)\ \lim_{x\to \infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1},$$
$$e)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2},\qquad f)\ \lim_{x\to +\infty}\Big(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{1}{x^3-3x+2}\Big).$$

2. Határozzzuk meg az alábbi jobb-, illetve baloldali határértékeket:

$$a)\ \lim_{x\to 1-}\frac{x-1}{|x-1|},\qquad b)\ \lim_{x\to 2-}\frac{x}{x-2},$$
$$c)\ \lim_{x\to 1+}\frac{x-1}{|x-1|},\qquad d)\ \lim_{x\to 2+}\frac{x}{x-2}.$$

3. Legyen $m, n \in \mathbb{N}$. Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}\quad (n\in\mathbb{N}),\qquad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}\quad (m,n\in\mathbb{N}),$$
$$c)\ \lim_{x\to 1}\Big(\frac{n}{1-x^n}-\frac{m}{1-x^m}\Big)\quad (m,n\in\mathbb{N}).$$

4. Legyen $\operatorname{tg} x := \sin x/\cos x$, $\operatorname{ctg} x := \cos x/\sin x$. Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x},\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2},$$
$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}\quad (a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0),\qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\operatorname{ctg} ax}\quad (a\in\mathbb{R}, a\neq 0),$$
$$e)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3},$$
$$f)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x},$$
$$g)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)+\sin(a-x)-2\sin a}{x^2},$$
$$h)\ \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\Big),\qquad i)\ \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\Big).$$

5. Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

a)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \exp x,$	*b*)	$\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x,$
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \cosh x$	*d*)	$\lim\limits_{x\to-\infty} \cosh x,$
e)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \sinh x,$	*f*)	$\lim\limits_{x\to-\infty} \sinh x$
g)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sinh x}{\cosh x},$	*h*)	$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sinh x}{\cosh x},$
i)	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sinh x}{x^3+x^4},$	*j*)	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - 1 - x^2/2}{x^4+3x^5},$
k)	$\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{1}{x} - \dfrac{\cosh x}{\sinh x}),$	*ℓ*)	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(\alpha x)-\exp(\beta x)}{x} \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{R}),$
m)	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp x - \exp(-x) - 2x}{x-\sin x},$		
n)	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(\alpha x)-\exp(\beta x)}{\sin(\alpha x)-\sin(\beta x)}.$		

6. Tegyük fel, hogy az $a\in\mathbb{R}$ pont az $(a,+\infty)\cap H$ és a $(-\infty,a)\cap H$ halmazok mindegyikének torlódási pontja. Igazoljuk, hogy az $f:H\to\mathbb{K}$ függvénynek az $a\in H'$ pontban akkor és csak akkor van határértéke, ha léteznek az $f(a+)$ és $f(a-)$ egyoldali határértékek és

$$f(a+) = f(a-) = \lim_{x\to a} f(x).$$

7. Legyenek $a_0, a_1, \cdots, a_n$ és $b_0, b_1, \cdots, b_m$ adott valós számok, ahol $m,n\in\mathbb{N}$ és $a_n\neq 0, b_m\neq 0$. Határozzuk meg a

$$P(x) := a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad Q(x) := b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \quad (x\in\mathbb{R})$$

polinomokkal képzett alábbi hatérértékeket:

a)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \lvert P(x)\rvert,$	*b*)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)},$
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	*d*)	$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\lvert P(x)\rvert}{\lvert Q(x)\rvert},$
e)	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)}.$		

8. Legyenek $a_0, a_1, \cdots, a_n$ és $b_0, b_1, \cdots, b_m$ adott komplex számok, ahol $m,n\in\mathbb{N}$ és $a_n\neq 0, b_m\neq 0$. Határozzuk meg a

$$P(z) := a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n, \quad Q(z) := b_0 + b_1z + \cdots + b_mz^m \quad (z\in\mathbb{C})$$

komplex változós polinomokkal képzett alábbi határértékeket:

a) $\lim_{z\to\infty} P(z)$,

b) $\lim_{z\to a} \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ $\quad (a \in \mathbb{C},\ Q(a) \neq 0)$,

c) $\lim_{z\to a} \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ $\quad (a \in \mathbb{C},\ Q(a) = 0,\ P(a) \neq 0)$

d) $\lim_{x\to a} \dfrac{|P(x)|}{|Q(x)|}$,

e) $\lim_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

9. Határozzuk meg az alábbi $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ típusú függvények határértékét:

a) $f(z) := |z| \quad (z \in \mathbb{C})$, *b)* $f(z) := \mathrm{re}\,(z) \quad (z \in \mathbb{C})$,
c) $f(z) := \mathrm{im}\,(z) \quad (z \in \mathbb{C})$, *d)* $f(z) := \arg(z) \quad (z \in \mathbb{C})$.

10. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvényeknek értelmezési tartományuk melyik torlódási pontjában van határértéke:

a) $f(x) := \mathrm{int}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$,

b) $f(x) := x - \mathrm{int}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$,

c) $f(x) := x + \mathrm{int}(x^2) \quad (x \in \mathbb{R})$,

d) $f(x) := x\,\mathrm{int}\big(\dfrac{1}{x}\big) \quad (x \in \mathbb{R})$,

e) $f(x) := \begin{cases} 1, & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0, & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \end{cases}$

f) $f(x) := \begin{cases} 1/q, & (x = p/q \in \mathbb{Q}, (p,q) = 1, p \geq 0, q > 0), \\ 0, & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x > 0), \end{cases}$

ahol (p,q) jelenti a p és a q természetes számok legnagyobb közös osztóját.

11. Igazoljuk, hogy a $H \subseteq \mathbb{K}$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha komplementere nyilt halmaz.

3. Folytonos függvények

Az előző pontban a határértékkel kapcsolatban vizsgált függvények többségénél a határérték a függvénynek a tekintett helyen vett helyettesítési értékével egyenlő. Az ilyen tulajdonságú függvényeket folytonos függvényeknek nevezzük. A természettudományokban (pl. a kémiában, a fizikában és a műszaki tudományokban) a jelenségek leírására használt függvények többsége folytonos.

Ebben a pontban folytonos függvények néhány nevezetes tulajdonságát ismertetjük. Az előző ponthoz hasonlóan — ahol csak lehet — együtt tárgyaljuk a különböző típusú függvényekre vonatkozó eseteket. Itt is általában $\mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ típusú függvényeket vizsgálunk, ahol $\mathbb{K}_1$ és $\mathbb{K}_2$ egymástól függetlenül a valós vagy a komplex számok halmazát jelöli.

3.1. Függvények folytonossága

Legyen $H \subseteq \mathbb{K}_1$ és $f : H \to \mathbb{K}_2$ a H halmazon értelmezett függvény.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az f függvény az $a \in H$ pontban folytonos, ha*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in K_\delta(a) \cap H \; : \; |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Ezt az értelmezést összevetve a határérték definíciójával adódik, hogy az f ***függvény az értelmezési tartományának egy torlódási pontjában akkor és csak akkor folytonos, ha ott van határértéke, és az egyenlő a szóban forgó helyen felvett helyettesítési értékkel.*** A definíció alapján nyilvánvaló továbbá, hogy az ***értelmezési tartományának izolált pontjaiban a függvény folytonos.***

A határértékre vonatkozó átviteli elv — a folytonosság most említett megfogalmazását felhasználva — folytonos függvényekkel kapcsolatban is alkalmazható.

Folytonosságra vonatkozó átviteli elv. *Az $f : H \to \mathbb{K}_2$ függvény az $a \in H$ pontban akkor és csak akkor folytonos, ha minden olyan $x_n \in H$ $(n \in \mathbb{N})$ pontsorozatra, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ teljesül, a függvényértékek sorozatára fennáll a következő:*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

A pontbeli folytonosság mellett használni fogjuk a halmazra vonatkozó folytonosságot is. Ezzel kapcsolatos az alábbi

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy a H halmazon értelmezett f függvény H valamely $K \subseteq H$* **részhalmazán folytonos**, *ha f a K halmaz minden pontjában folytonos. Speciálisan, ha f értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, akkor azt mondjuk, hogy f* **folytonos**.

A $H \subseteq \mathbb{K}_1$ halmazon értelmezett $\mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ típusú ***folytonos függvények halmazát*** a $\mathcal{C}(H, \mathbb{K}_2)$ vagy gyakran az egyszerűbb $\mathcal{C}(H)$ szimbólummal fogjuk jelölni. Az előző pontban megmutattuk, hogy a polinomoknak, a racionális függvényeknek értelmezési tartományuk minden pontjában, a hatványsorok összegfüggvényeinek pedig a konvergenciakörük vagy intervallumuk belső pontjaiban létezik határértéke, és az a függvény helyettesítési értékével egyenlő. A szóban forgó függvények tehát az említett helyeken folytonosak.

A korábban vizsgált *sign* függvénynek a 0 pontban, az *int* függvénynek pedig a $\mathbb{Z}$ pontjaiban nem létezik a határértéke, következésképpen ezek az említett helyeken ***nem folytonosak***.

Definíció. *Ha az $f : H \to \mathbb{K}_2$ függvény valamely $a \in H$ pontban nem folytonos, akkor azt mondjuk, hogy f-nek az a* **helyen szakadása van**, *magát az a pontot pedig az f* **függvény szakadási helyének** *nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy ha f az értelmezési tartományának egy a pontjában nem folytonos, akkor f-nek vagy nem létezik az a helyen határértéke, vagy ha létezik, akkor $L_a(f) \neq f(a)$. Ez utóbbi esetben azt szoktuk mondani, hogy f-nek az a helyen ***megszüntethető szakadása*** van. Az elnevezés arra utal, hogy az f értelmezését módosítva — az a-beli függvényértéket $L_a(f)$-nek véve — az a pontban folytonos függvényt kapunk. Az

$$f(x) := \begin{cases} x, & (x \in \mathbb{R},\ x \neq 0), \\ 1, & (x = 0) \end{cases}$$

utasítással értelmezett függvénynek a 0 helyen megszüntethető szakadása van.

Valós változós függvények körében a szakadásnak egy másik típusát is szokás bevezetni. Ezzel kapcsolatos az alábbi

> Definíció. *Akkor mondjuk, hogy a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon értelmezett függvénynek az $a \in H$ pontban* **ugrása** *van, ha léteznek az $f(a-)$, $f(a+)$ egyoldali határértékek és $f(a-) \neq f(a+)$. Az $|f(a-) - f(a+)|$ számot az f függvény a* **pontbeli ugrásának** *nevezzük.*

A megszüntethető szakadást és az ugrást ***elsőfajú szakadásnak***, az egyéb szakadást ***másodfajú szakadásnak*** nevezzük.

Az előző pontban bebizonyítottuk, hogy bármely $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ ***monoton függvénynek*** minden $x \in (\alpha, \beta)$ pontban létezik jobb- és baloldali határértéke. Minthogy $f(x)$ az $f(x+)$ és $f(x-)$ közé esik, azért monoton függvénynek nem lehet megszüntethető szakadása, és nyilván minden szakadása elsőfajú. Az (α, β) intervallumon értelmezett monoton függvények tehát vagy folytonosak, vagy ugrásuk van.

Valós változós függvények körében szokás értelmezni az egyoldali folytonosság fogalmát.

> Definíció. *Akkor mondjuk, hogy a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmazon értelmezett $f : H \to \mathbb{K}_2$ függvény az a helyen* **jobbról folytonos**, *ha f-nek a $H \cap [a, +\infty)$ halmazra vonatkozó leszűkítése folytonos a-ban. Ha f-nek a $H \cap (-\infty, a]$ halmazra vonatkozó leszűkítése folytonos a-ban, akkor azt mondjuk, hogy f az a helyen* **balról folytonos**.

A fenti értelmezés alapján nyilvánvaló, hogy ha a a $H \cap [a, +\infty)$ halmaznak izolált pontja, akkor f jobbról folytonos a-ban. Az $a \in \big[H \cap (a, +\infty)\big]'$ esetben viszont f pontosan akkor jobbról folytonos a-ban, ha létezik az $f(a+)$ jobboldali határérték és $f(a) = f(a+)$. Hasonló állítás fogalmazható meg a baloldali határértékre.

A *sign* függvénynek a 0 pontban ugrása van, itt sem balról, sem jobbról nem folytonos. Az *int* függvénynek a $\mathbb{Z}$ pontjaiban ugrása van. Mivel $a \in \mathbb{Z}$ esetén $\operatorname{int}(a+) = \operatorname{int}(a)$, azért az *int* függvény a $\mathbb{Z}$ pontjaiban jobbról folytonos. A továbbiakban többször hivatkozunk az alábbi, un. ***Dirichlet függvényre***. Legyen

$$D(x) := \begin{cases} 1, & (x \in \mathbb{Q}), \\ 0, & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$

Ennek a függvénynek minden $x \in \mathbb{R}$ pontban másodfajú szakadása van.

3.2. Műveletek folytonos függvényekkel

A határérték és a folytonosság kapcsolatát, valamint a határértékre vonatkozó műveleti szabályokat felhasználva könnyen igazolható az alábbi állítás.

1. Tétel. *Bármely $f, g \in \mathcal{C}(H, \mathbb{K})$ függvényre és $\lambda \in \mathbb{K}$ számra*

$$f + g,\ \lambda f,\ fg \in \mathcal{C}(H, \mathbb{K}).$$

Ha ezen túlmenően a g függvény nem tűnik el a H halmazon, akkor $f/g \in \mathcal{C}(H, \mathbb{K})$.

Bizonyítás. A tételt a folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján igazoljuk. Legyen $a \in H$ és tekintsünk egy olyan $(x_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot, amelyre $x_n \in H$ $(n \in \mathbb{N})$ és $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ teljesül. Ekkor az átviteli elv alapján

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a), \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a).$$

Felhasználva a határértékre vonatkozó műveleti szabályokat (lásd [A1], 2.5. pont, 6.Tétel) azt kapjuk, hogy léteznek az alábbi határértékek és

$$\lim_{n\to\infty} \big(f + g\big)(x_n) = f(a) + g(a), \quad \lim_{n\to\infty} \big(\lambda f\big)(x_n) = \lambda f(a),$$
$$\lim_{n\to\infty} \big(fg\big)(x_n) = f(a)g(a),$$

továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{f}{g}\Big)(x_n) = \frac{f(a)}{g(a)},$$

feltéve, hogy az utóbbi esetben $g(a) \neq 0$. Innen — ismét alkalmazva az említett átviteli elvet — következik, hogy az $f+g, \lambda f, fg, f/g$ függvények az $a \in H$ pontban folytonosak. Minthogy ez minden $a \in H$ pontban érvényes, azért a szóban forgó függvények a H halmazon folytonosak. □

A most igazolt tétel szerint az algebrai műveletek nem vezetnek ki a folytonos függvények köréből. Megmutatjuk, hogy a folytonos függvények osztálya a közvetett függvény képzés műveletére nézve is zárt. Erre vonatkozik az alábbi

2. Tétel. *Legyen $H \subseteq \mathbb{K}_1, K \subseteq \mathbb{K}_2$, és tegyük fel, hogy az $f : H \to K$ függvény folytonos az $a \in H$ pontban, a $g : K \to \mathbb{K}_3$ függvény pedig folytonos az $f(a)$ pontban. Ekkor a $g \circ f$ közvetett függvény is folytonos az a helyen.*

Bizonyítás. A folytonosságra vonatkozó átviteli elvet alkalmazva tekintsünk egy olyan $x_n \in H$ $(n \in \mathbb{N})$ pontsorozatot, amelyre $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ teljesül. Megmutatjuk, hogy a függvényértékek sorozatára fennáll a következő:

$$\lim_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g\big(f(x_n)\big) = g\big(f(a)\big). \tag{1}$$

Valóban, az f függvénynek $a \in H$ pontbeli folytonossága alapján az átviteli elvet felhasználva azt kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. A g függvénynek az

$f(a) \in K$ pontbeli folytonosságát figyelembe véve, és ismét alkalmazva az átviteli elvet (1) következik. Ezzel a közvetett függvény folytonosságát igazoltuk. □

Megjegyzések

1. Az 1. Tételben igazolt állításból következik, hogy a $\mathcal{C}(H, \mathbb{K})$ $(H \subseteq \mathbb{K})$ függvényosztály a függvények körében szokásos összeadás, számmal való szorzás és függvényszorzás müveletekre nézve **kommutatív algebrát alkot**. (A definíciót illetően lásd az [A1] Függelékét). A $h_0(x) := x^0 = 1\,(x \in H)$ konstans függvény nyilván folytonos és bármely $f \in \mathcal{C}(H, \mathbb{K})$

   $$fh_0 = f,$$

   azaz a h_0 függvény a szóban forgó algebra **egységeleme**.
2. A 2. Tételben bevezetett jelöléseket használva a tétel állítása alapján nyilvánvaló, hogy ha $f \in \mathcal{C}(H, \mathbb{K}_2)$, $g \in \mathcal{C}(K, \mathbb{K}_3)$, akkor $g \circ f \in \mathcal{C}(H, \mathbb{K}_3)$.

3.3. Folytonos függvények tulajdonságai

Az alábbiakban ismertetjük folytonos függvények néhány alapvető tulajdonságát. Ezek egyik része olyan folytonos függvényekkel kapcsolatos, amelyek értelmezési tartománya ***korlátos és zárt halmaz***. Ilyen halmazokkal van összefüggésben az alábbi

> Definíció. *Akkor mondjuk, hogy valamely $H \subset \mathbb{K}$ halmaz* ***kompakt****, ha bármely, H elemeiből alkotott pontsorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amelynek határértéke is H-hoz tartozik.*

Egyszerűen igazolható az alábbi

> **3. Tétel.** *A $H \subset \mathbb{K}$ halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. i) Tegyük fel először, hogy H kompakt, és mutassuk meg, hogy akkor H zárt. Tekintsünk egy H-beli elemekből alkotott konvergens $(x_n, n \in \mathbb{N})$ sorozatot és jelölje α a határértékét. Minthogy ennek minden részsorozatának is α a határértéke, azért — a kompaktság definíciója alapján — az α is H-hoz tartozik. Ezzel beláttuk, hogy H az elemeiből alkotott konvergens sorozatok határértékét is tartalmazza, azaz H zárt (lásd 2.1. pont, 2. Tétel).

H korlátosságát indirekt módon igazoljuk. Ha H nem volna korlátos, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz létezne olyan $x_n \in H$ elem, hogy $|x_n| > n$. Ennek a sorozatnak, nincs konvergens részsorozata, mert egyetlen részsorozata sem korlátos. Ez ellentmond annak, hogy H kompakt.

ii) Legyen most H korlátos és zárt halmaz, és tekintsünk egy H elemeiből alkotott sorozatot. A korlátosságból a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel alapján következik, hogy ennek van konvergens részsorozata. Mivel H zárt, határértéke H-hoz tartozik. Ezzel megmutattuk, hogy H kompakt. $\square$

A követező négy alapvető tétel kompakt halmazon értelmezett folytonos függvényekre vonatkozik.

3.3.1. Weierstrass tétele

A továbbiakban többször felhasználjuk az alábbi állítást és annak következményeit.

4. Tétel. *Ha $H \subset \mathbb{K}_1$ kompakt halmaz és $f : H \to \mathbb{K}_2$ folytonos függvény, akkor f* **értékészlete kompakt**.

Bizonyítás. Legyen $K := \{f(x) : x \in H\}$ az f függvény értékkészlete. A K kompaktságának igazolásához megmutatjuk, hogy minden $y_n \in K$ $(n \in \mathbb{N})$ K-beli sorozatnak van olyan $(y_{\nu_n}, n \in \mathbb{N})$ konvergens részsorozata, amelynek határértéke K-hoz tartozik.

Mivel az $y_n \in K$ $(n \in \mathbb{N})$ pontok az értékkészlethez tartoznak, azért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $x_n \in H$, hogy $f(x_n) = y_n$. Mivel a H halmaz kompakt és $x_n \in H$ $(n \in \mathbb{N})$, azért ennek a sorozatnak létezik olyan $(x_{\nu_n}, n \in \mathbb{N})$ konvergens részsorozata, amelynek határértékére $a := \lim_{n\to\infty} x_{\nu_n} \in H$ teljesül. Figyelembe véve f-nek a-beli folytonosságát és alkalmazva az átviteli elvet azt kapjuk, hogy az $(y_{\nu_n}, n \in \mathbb{N})$ részsorozatnak létezik határértéke és

$$\lim_{n\to\infty} y_{\nu_n} = \lim_{n\to\infty} f(x_{\nu_n}) = f(a) \in K.$$

Ezzel beláttuk, hogy K valóban kompakt. $\square$

A most igazolt tételt gyakran a következő formában szokták megfogalmazni: ***Kompakt halmaz folytonos képe kompakt.***

Minthogy bármely kompakt halmaz egyben korlátos, azért a most igazolt tétel alapján adódik az

1. Következmény. *Kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény korlátos.*

Az alábbiakban megfogalmazzuk a 4. tétel egy másik fontos következményét. Ehhez felhasználjuk az alábbi fogalmakat.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy a valós értékű $f : H \to \mathbb{R}$* **függvénynek van maximuma**, *ha értékkészletének van maximuma. Más szóval létezik olyan $x^* \in H$ hely, amelyre*

$$f(x) \leqq f(x^*) \quad (x \in H)$$

teljesül. Ha az f értékkészletének van minimuma, azaz ha létezik olyan $x_* \in H$ elem, amelyre

$$f(x_*) \leqq f(x) \quad (x \in H)$$

teljesül, akkor azt mondjuk az f **függvénynek van minimuma**. *Az értelmezési tartomány x^* pontját* **maximumhelynek**, *az x_* elemet* **minimumhelynek**, *az $f(x^*)$ számot* **a függvény maximumának**, *$f(x_*)$-et pedig* **a függvény minimumának** *nevezzük.*

A maximumot és minimumot közös néven ***szélsőértékeknek*** nevezzük. Folytonos függvények szélsőértékeivel kapcsolatos az alábbi

Weierstrass-tétel. *Kompakt halmazon értelmezett valós értékű folytonos függvénynek van maximuma és minimuma.*

Bizonyítás. Valóban, az 4. Tétel alapján az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény értékkészlete $\mathbb{R}$-nek egy kompakt, tehát korlátos és zárt részhalmaza. Legyen M az f értékkészletének felső határa. Ekkor a felső határ értelmezése alapján minden $n \in \mathbb{N}^*$ számhoz létezik az értékkészletnek olyan y_n eleme, amelyre

$$M - \frac{1}{n} < y_n \leqq M \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

teljesül. Innen nyilvánvaló, hogy $\lim_{n\to\infty} y_n = M$, és az értékkészlet kompaktsága miatt M is az értékkészlethez tartozik. Ezzel megmutattuk, hogy M az f függvény maximuma.

A minimumra vonatkozó állítás hasonlóan igazolható. □

Megjegyezzük, hogy a ***4. Tétel feltételei közül egyik sem hagyható el***. Legyen ugyanis

$$\begin{aligned}
&f_1(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in H_1 := [0, +\infty)),\\
&f_2(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in H_2 := (1, 2)),\\
&f_3(x) := x \quad (x \in (-1, 1)), \quad f_3(-1) := f_3(1) := 0 \quad (H_3 := [-1, 1]).
\end{aligned}$$

Ekkor f_1 a H_1 zárt, de nem korlátos, f_2 a H_2 korlátos, de nem zárt halmazon folytonos, és nyilvánvalóan sem H_1 sem H_2 nem kompakt. Mivel az f_1 értékkészlete

$(0, 1]$, azért f_1-nek nincs minimuma és mivel az f_2 értékkészlete $(1/2, 1)$, azért f_2-nek nincsenek szélsőértékei. Az f_3 értelmezési tartománya kompakt, de f_3 nem folytonos. Az f_3 értékkészlete $(-1, 1)$, s ezért f-nek sincsenek szélsőértékei.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a szóban forgó tétel feltételei ***elégségesek***, de nem szükségesek. Ez másként fogalmazva azt jelenti, hogy szélsőérték akkor is létezhet, ha az említett feltételek közül egyik sem teljesül. Vegyük pl. a Dirichlet-féle függvényt, amelynek értelmezési tartománya nem kompakt, és a függvény sehol sem folytonos (lásd a 3.1. pont végét). Ugyanakkor a Dirichlet függvénynek létezik a maximuma és minimuma.

3.3.2. Egyenletes folytonosság

Kompakt halmazon folytonos függvényeknek egy másik fontos tulajdonsága az ***egyenletes folytonosság*** fogalmával kapcsolatos. E fogalom bevezetése előtt emlékeztetünk a folytonosság értelmezésére. A $H \subseteq \mathbb{K}_1$ halmazon értelmezett függvény folytonossága — a H minden x pontjában felírva a folytonosság definícióját — a következőt jelenti:

$$\forall x \in H \ \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in H, \ |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Az itt szereplő δ szám általában függ x-től és ϵ-tól. Ha például $f(x) := 1/x$ $(x \in H := (0, 1))$, akkor adott ϵ és $x \in H$ esetén — az f monotonitását figyelembe véve — könnyen megadható az a legnagyobb δ szám, amelyre a fenti feltétel teljesül. Nevezetesen, a szóban forgó δ-ra

$$\frac{1}{x} + \epsilon = \frac{1}{x - \delta}, \quad \text{azaz} \quad \delta = \frac{\epsilon x^2}{1 + \epsilon x}.$$

Innen látható, hogy $x \to 0$ esetén — rögzített ϵ mellett — δ tart 0-hoz. Ha ezzel szemben minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik olyan — x-től független, univerzális — pozitív δ, amelyre $x, y \in H$, $|x - y| < \delta$ estén $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény a H ***halmazon egyenletesen folytonos.*** Logikai jelöléseket használva ezt az alábbi, ezzel ekvivalens formában is megfogalmazhatjuk.

> Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az f függvény értelmezési tartományának valamely H részhalmazán* **egyenletesen folytonos**, *ha*
>
> (2) $$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in H, \ |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Ezt, és a folytonosság definícióját egybevetve adódik, hogy ***a H halmazon egyenletesen folytonos függvény a H minden pontjában folytonos.*** Megfordítva, a H-n folytonos függvény nem szüségképpen egyenletesen folytonos a

H-n. Az előbb értelmezett $f(x) := 1/x$ $(x \in (0,1))$ függvény folytonos, de nem egyenletesen folytonos a $H = (0,1)$ halmazon. Ekkor ugyanis létezik olyan $\epsilon > 0$ (pl. $\epsilon = 1/2$), amelyhez nem található olyan δ, amelyre (2) teljesülne. Ugyanis bármely $\delta > 0$ esetén létezik olyan $x, y \in (0,1)$ amelyre $|x - y| < \delta$, ugyanakkor $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$. Valóban válasszunk egy pozitív δ-t és legyen $n > 1/\delta, n > 2$. Ekkor az

$$x = \frac{1}{n}, \quad y = \frac{1}{n-1}$$

$(0,1)$-beli pontokra

$$|x - y| = \frac{1}{n(n-1)} < \frac{1}{n} < \delta, \quad |f(x) - f(y)| = 1 > \epsilon,$$

ami az állítás bizonyítását jelenti.

Megmutatjuk, hogy ha H kompakt és f folytonos a H-n, akkor ezen a halmazon az f függvény szükségképpen egyenletesen folytonos.

Az egyenletes folytonosság tétele. *Legyen $H \subset \mathbb{K}_1$ kompakt halmaz és $f : H \to \mathbb{K}_2$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos a H halmazon.*

Bizonyítás. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy f nem egyenletesen folytonos a H-n. Ez — a (2) állítás tagadását felírva — a következőt jelenti:

$$\exists \epsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in H, \ |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \epsilon.$$

Ezt az állítást $\delta = 1/n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ esetén alkalmazva azt kapjuk, hogy van olyan $\epsilon > 0$ és olyan $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$ és $(y_n, n \in \mathbb{N}^*)$ számsorozat, amelyre

$$(3) \qquad x_n, y_n \in H, \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

teljesül. Minthogy a H halmaz kompakt, azért az $(x_n, n \in \mathbb{N}^*)$ sorozatnak van olyan $(x_{\nu_n}, n \in \mathbb{N})$ konvergens részsorozata, amelynek $x^* := \lim_{n\to\infty} x_{\nu_n}$ határértéke a H halmazhoz tartozik. Az

$$|y_{\nu_n} - x^*| \leqq |y_{\nu_n} - x_{\nu_n}| + |x_{\nu_n} - x^*| \leqq \frac{1}{\nu_n} + |x_{\nu_n} - x^*| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

egyenlőtlenség alapján nyilvánvaló, hogy $(y_{\nu_n}, n \in \mathbb{N}^*)$ is konvergens és határértéke x^*. Felhasználva az f függvény x^*-beli folytonosságát — az átviteli elv alapján — azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{\nu_n}) = f(x^*), \quad \lim_{n\to\infty} f(y_{\nu_n}) = f(x^*),$$

következésképpen
$$\lim_{n\to\infty}\big(f(x_{\nu_n})-f(y_{\nu_n})\big)=0.$$
Ez nyilván ellentmond a (3)-ból adódó
$$|f(x_{\nu_n})-f(y_{\nu_n})|\geq\epsilon$$
feltételnek. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

3.3.3. Az inverz függvény folytonossága

Legyen $H_1\subset\mathbb{K}_1, H_2\subset\mathbb{K}_2$ és tegyük fel, hogy $f:H_1\to H_2$ egy kölcsönösen egyértelmű leképezés a H_1 és H_2 halmazok között. Ekkor f-nek létezik inverze. Az f függvény folytonossága önmagában nem garantálja inverzének folytonosságát. Ha azonban f értelmezési tartománya kompakt és f folytonos, akkor inverze is folytonos.

> 5. Tétel. *Ha $H_1\subset\mathbb{K}_1$ kompakt halmaz és $f:H_1\to H_2\subset\mathbb{K}_2$ folytonos bijekció, akkor az f függvény $f^{-1}:H_2\to H_1$ inverze is folytonos.*

Bizonyítás. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy f^{-1} nem folytonos. Ekkor — a folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján — létezik olyan $y^*\in H_2$ pont és egy ehhez konvergáló H_2-beli $(y_n,n\in\mathbb{N})$ sorozat, amelyre az $(f^{-1}(y_n),n\in\mathbb{N})$ sorozat nem tart az $x^*:=f^{-1}(y^*)$ számhoz. Következésképpen, létezik olyan $\delta>0$ szám, hogy az $x_n:=f^{-1}(y_n)\,(n\in\mathbb{N})$ sorozatnak végtelen sok tagja van a $K_\delta(x^*)$ környezeten kívül. Mivel H_1 kompakt, azért a szóban forgó sorozatnak van olyan $(x_{\nu_n},n\in\mathbb{N})$ konvergens részsorozata, amelynek minden tagja — következésképpen x_* határértéke is — az említett környezeten kívül esik, azaz
$$|x_{\nu_n}-x^*|\geq\delta,\quad \lim_{n\to\infty}x_{\nu_n}=x_*,\quad |x_*-x^*|\geq\delta>0,$$
s ezért nyilvánvalóan $x_*\neq x^*$.

Az f függvény x_* pontbeli folytonossága alapján — ismét csak az átviteli elvet használva — azt kapjuk, hogy
$$\lim_{n\to\infty}f(x_{\nu_n})=\lim_{n\to\infty}y_{\nu_n}=f(x_*).$$
Másrészt a kiindulás szerint $y_n\to y^*$, ha $n\to\infty$, következésképpen a most tekintett részsorozat határértékére
$$\lim_{n\to\infty}y_{\nu_n}=y^*=f(x^*)$$

adódik. Ezzel azt kaptuk, hogy

$$x_* \neq x^*, \quad \text{ugyanakkor} \quad f(x_*) = f(x^*),$$

s ez nyilván ellentmond annak, hogy f bijektív leképezés. Ezzel a tételt igazoltuk.
□

Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ egy intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ egy kölcsönösen egyértelmű leképezés. Az 5. Tétel alapján ennek bármely korlátos és zárt intervallumra vonatkozó leszűkítésének inverze folytonos. Innen már egyszerűen adódik a

2. Következmény. *Bármely, intervallumon értelmezett folytonos, kölcsönösen egyértelmű leképezés inverze folytonos.*

3.3.4. Bolzano tétele

Folytonos függvények egy további alapvető tulajdonságát fogalmazzuk meg az alábbi tételben. Az előző tételekben azt tettük fel, hogy a folytonos függvények értelmezési tartománya kompakt halmaz. Az alábbi állítás olyan függvényekre vonatkozik, amelyek értelmezési tartománya $\mathbb{R}$-beli (véges vagy végtelen, nyílt, zárt vagy félig nyílt) intervallum.

Bolzano-tétel. *Tegyük fel, hogy az $I \subseteq \mathbb{R}$ intervullomon értelmezett $f : I \to \mathbb{R}$ valós függvény folytonos. Ekkor f értékkészletének bármely két eleme közé eső értéket felveszi, azaz véve bármely két $a, b \in I$ ($a < b$) helyen az $y_1 = f(a), y_2 = f(b)$ függvényértékeket és egy y_1 és y_2 közé eső y valós számot, létezik olyan (a, b)-beli x, amelyre $f(x) = y$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f(a) < f(b)$ és legyen $f(a) < y < f(b)$. Az $f(b) > f(a)$ eset hasonlóan tárgyalható. Rekurzióval olyan $[a_n, b_n]\,(n \in \mathbb{N})$ intervallumsorozatot definiálunk, amelyre az alábbiak teljesülnek:

$$i) \quad [a_0, b_0] := [a, b], \qquad)ii) \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbb{N}),$$
$$iii) \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad iv) \quad f(a_n) \leqq y \leqq f(b_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A Cantor-féle axiómából (lásd [A1], 1.2. pont) és iii)-ból következik, hogy a szóban forgó intervallumsorozatnak egyetlen közös pontja van, amelyet x-szel jelölünk. Megmutatjuk, hogy erre $f(x) = y$ teljesül.

Valóban, minthogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x,$$

azért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv, a határérték monotonitására vonatkozó tétel (lásd [A1], 2.5. pont 8. Tétel), valamint a iv) feltétel alapján

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqq y \leqq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x),$$

ahonnan $f(x) = y$ következik.

Rekurziót használva tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ számra az $[a_n, b_n]$ intervallumot már definiáltuk és fennáll ii)-iv). Legyen

$$c_n := \frac{a_n + b_n}{2}$$

a szóban forgó intervallum felezéspontja és értelmezzük az $(n+1)$-edik intervallumot a következők szerint:

$$\begin{aligned} [a_{n+1}, b_{n+1}] &= [a_n, c_n], \quad \text{ha} \quad f(c_n) > y, \\ [a_{n+1}, b_{n+1}] &= [c_n, b_n], \quad \text{ha} \quad f(c_n) \leqq y. \end{aligned}$$

Ekkor

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

és továbbra is fennáll az

$$f(a_{n+1}) \leqq y \leqq f(b_{n+1})$$

egyenlőtlenség. Ezzel megmutattuk, hogy az így szerkesztett intervallumsorozat valóban rendelkezik az előírt tulajdonságokkal. □

A Bolzano-tételből egyszerűen adódik az alábbi

3. Következmény. *Bármely, intervallumon értelmezett nem konstans, folytonos függvény értékkészlete intervallum.*

Bizonyítás. Valóban, legyen α az értékkészlet alsó, β az értékkészlet felső határa. Megmutatjuk, hogy az (α, β) intervallum minden pontja az értékkészlethez tartozik. Minthogy α-nál kisebb és β-nál nagyobb eleme nincs az értékkészletnek, azért innen az állítás már következik.

Legyen $y \in (\alpha, \beta)$. Ekkor az α és β számok definíciója alapján létezik az értelmezési tartománynak olyan a és b pontja, hogy

$$\alpha \leqq f(a) < y < f(b) \leqq \beta.$$

Alkalmazva a Bolzano-tételt azt kapjuk, hogy az értelmezési tartományban létezik olyan x pont , amelyre $f(x) = y$, következésképpen y eleme az értékkészletnek. □

A 3. Következmény röviden így fogalmazható meg: ***intervallum folytonos képe intervallum.***

Megjegyezzük, hogy a Bolzano-tétel két feltétele közül egyik sem hagyható el. A *sign* függvény — amely nem folytonos — felveszi a 0 és 1 értéket, de nem vesz fel egyetlen 0 és 1 közé eső értéket sem.

Legyen $H := (0,1) \cup (1,2)$, és értelmezzük az f függvényt az alábbi módon:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \in (0,1), \\ 1, & \text{ha} \quad x \in (1,2). \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy f folytonos, de egyetlen 0 és 1 közé eső értéket nem vesz fel. Ez a példa azt mutatja, hogy ha a folytonos függvény értelmezési tartománya ***nem intervallum***, akkor a függvény kihagyhat értékeket.

A most említett két feltétel elégséges, de nyilván nem szükséges ahhoz, hogy a függvény bármely két értéke közé eső értékeket felvegye.

Megjegyzések

1. A Bolzano-tétel bizonyításában használt módszert **intervallumfelezési eljárásnak** nevezik. Az algoritmus felhasználható az $y = f(x)$ egyenlet x_0 megoldásának közelítő kiszámítására. Az eljárás során szerkesztett $(a_n, n \in \mathbb{N})$ sorozattal közelítve x_0-at, az n-edik lépésben elkövetett hibára
$$|a_n - x_0| \leqq \frac{b-a}{2^n}$$
adódik.
2. A most ismertetett algoritmus alapján készült az alábbi, *QBASIC* nyelven írt *BOLZ* nevű szubrutin, amellyel az $FF(x) = y$ egyenlet x megoldását határozhatjuk meg az (a,b) intervallumban. A szubrutin olyan y valós számhoz keresi az x-et, amely az $FF(a)$ és $FF(b)$ értékek közé esik. Ha az y paraméter nem tesz eleget ennek a feltételnek, akkor a *jel* paraméter értéke 0. Ellenkező esetben a *jel* a lépések számát adja. Az x értékét *eps* pontossággal kapjuk.
3. A szubrutint az $FF(x) = \cos(x)$ függvényre alkalmaztuk $a = 0, b = 2$ és $y = 0$ esetén. Ismeretes (lásd később a 4.4.1. pontot), hogy $\cos(0) = 1$, $\cos(2) < 0$, és a szóban forgó függvény ebben az intervallumban szigorúan monoton fogyó, következésképpen itt egyetlen zérushelye van, a $\pi/2$ szám. Dupla pontosságú aritmetikát használva a $\cos(x)$ értékét hatványsorából számítottuk ki, és az alábbi eredményeket kaptuk:

$a_0 = 0,$	$b_0 = 2$
$a_1 = 1.5,$	$b_1 = 2$
$a_2 = 1.5,$	$b_2 = 1.75$
$a_3 = 1.5,$	$b_3 = 1.625$
....	
$a_{40} = 1.570796326794897...,$	$b_{40} = 1.570796326794897...$

4. A szóban forgó szubtutin a következő:

```
SUB  BOLZ (a, b, x, y, jel)
    jel = 0 : eps = E − 20
    xa = a : xb = b : ya = FF(xa) : yb = FF(xb) : h = b − a
    IF ya < yb THEN
        IF ya < y AND y < yb THEN
            DO WHILE h >= eps
                xc = (xa + xb)/2
                IF FF(xc) > y THEN
                    xb = xc
                ELSE
                    xa = xc
                END IF
                h = h/2 : jel = jel + 1
            LOOP
            x = xa
        END IF
    ELSEIF ya > yb THEN
        IF ya > y AND y > yb THEN
            DO WHILE h >= eps
                xc = (xa + xb)/2
                IF FF(xc) <= y THEN
                    xb = xc
                ELSE
                    xa = xc
                END IF
                h = h/2 : jel = jel + 1
            LOOP
            x = xa
        END IF
    END IF
END SUB
```

3.4. Exponenciális- és logaritmusfüggvények

A természetes alapú exponenciális függvényt — valós és komplex esetben is — hatványsorával értelmeztük. Ebben a pontban a ***valós exponenciális*** függvénnyel foglalkozunk megmutatva, hogy létezik inverze. Ezt felhasználva bevezetjük az a-alapú exponenciális- és logaritmusfüggvényt, és értelmezzük a hatvány fogalmát tetszőleges valós kitevő esetén.

Az e számot az

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

egyenlőséggel értelmeztük. Innen nyilvánvaló, hogy $2 < e < 3$ (lásd a 21. Feladatot). Az alábbi állítás alapján indokolt, hogy az e számot az exp függvény alapjának nevezzük.

6. Tétel. *Bármely $x \in \mathbb{Q}$ racionális számra*

$$\exp(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{Q}). \tag{4}$$

Bizonyítás. Az e értelmezése alapján $\exp(1) = e$. Az (4) egyenlőség igazolásához felhasználjuk az exponenciális függvény

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{5}$$

függvényegyenletét. Innen teljes indukcióval adódik, hogy

$$\exp(x_1+x_2 + \cdots + x_n) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2) \cdots \exp(x_n) \\ (x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*). \tag{6}$$

Ezt $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ esetén alkalmazva

$$\exp(n) = \big(\exp(1)\big)^n = e^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

adódik. Ismét csak az (5) függvényegyenlet alapján

$$\exp(n) \cdot \exp(-n) = \exp(n - n) = \exp(0) = 1,$$

következésképpen

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezzel megmutattuk, hogy (4) a $\mathbb{Z}$ minden elemére fennáll.

Az (6) azonosságból $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1/n$ választás mellett

$$\exp(1) = \big(\exp(\frac{1}{n})\big)^n$$

adódik, ahonnan

$$\exp(\frac{1}{n}) = \sqrt[n]{\exp(1)} = e^{1/n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

következik. A (6) azonosságot $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 1/n$ esetén alkalmazva és a most igazolt egyenlőséget felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\exp(\frac{m}{n}) = \big(\exp(\frac{1}{n})\big)^m = e^{m/n}.$$

Végül (5)-ből — az eddigiekhez hasonló meggondolásokkal —

$$\exp(-\frac{m}{n}) = e^{-\frac{m}{n}} \quad (m, n \in \mathbb{N}^*)$$

következik, s ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

Az exponenciális függvény inverzének értelmezéséhez felhasználjuk a

$$\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \lim_{n\to\infty} e^n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \exp(-n) = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$$

egyenlőségeket. Minthogy az $\mathbb{R}$ intervallumon értelmezett függvény értékkészlete — a 3. Következmény alapján — intervallum, azért az *exp* függvény értékkészlete $(0, +\infty)$.

Egyszerűen igazolható, hogy az exponenciális függvény szigorúan monoton növő. Valóban, az exponenciális függvény értelmezése alapján minden $\alpha > 0$ számra $\exp(\alpha) > 1$. Következésképpen $x_1 < x_2$ esetén az (5) azonosságot felhasználva

$$\exp(x_2) = \exp(x_2 - x_1)\,\exp(x_1) > \exp(x_1) \quad (x_1, x_1 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2)$$

adódik.

Az elmondottakból következik, hogy az exponenciális függvénynek létezik az inverze, amelynek értelmezési tartománya a $(0, +\infty)$ intervallum, értékkészlete pedig $(-\infty, +\infty)$.

> Definíció. *A valós exponenciális függvény inverzét logaritmusfüggvénynek nevezzük és az* ln *vagy a* log *szimbólummal jelöljük.*

Az *ln* függvénynek az x helyen felvett értékét a szokásos $\ln(x)$ helyett gyakran az $\ln x$ szimbólummal jelöljük. A logaritmusfüggvény értelmezése és az exponenciális függvény tulajdonságai alapján egyszerűen igazolható az alábbi állítás, amelyben a logaritmusfüggvény legfontosabb tulajdonságait foglaltuk össze.

7. Tétel. *Az*

$$i) \quad \ln : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$$

szigorúan monoton növő folytonos függvény, amelyre

$$i) \quad \ln(1) = 0, \quad \lim_{x\to+0} \ln(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty,$$
$$ii) \quad \exp(\ln x) = x \quad (x > 0), \qquad \ln(\exp x) = x \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$iii) \quad \ln(x_1\, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \quad (x_1, x_2 > 0).$$

Bizonyítás. Az i) és ii) tulajdonság az *ln* értelmezéséből következik. Mivel az exponenciális függvény szigorúan monoton növő, azért a iii) azonosság azzal ekvivalens, hogy

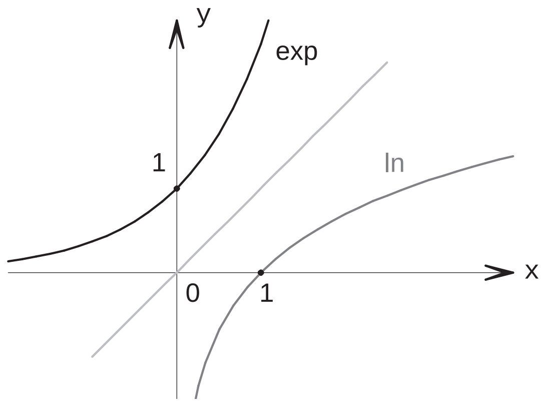
$$\exp\big(\ln(x_1\, x_2)\big) = \exp(\ln x_1 + \ln x_2) \quad (x_1, x_2 > 0).$$

Az egyenlőség bal oldalán ii) alapján x_1x_2 áll, jobb oldala pedig — az exponenciális függvény egyenletét, valamint ii)-öt felhasználva — felírható

$$\exp(\ln x_1 + \ln x_2) = \exp(\ln x_1)\exp(\ln x_2) = x_1x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)$$

alakban. Ezzel a iii) azonosságot igazoltuk. □

A iii) azonosságot a ***logaritmusfüggvény függvényegyenletének*** nevezik. Az alábbi ábrán az exponenciális és logaritmus függvényt egy koordinátarendszerben szemléltetjük.



1. ábra

A hatványozás műveletét — kiindulva pozitív egész kitevőkből — kiterjesztettük egész, majd racionális kitevőre. Nevezetesen $n \in \mathbb{N}^*$ esetén a^n definíció szerint a-nak önmagával vett n-szeres szorzatával egyenlő. Negatív egész és a 0 kitevőre az

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad a^0 := 1$$

értelmezés szerint terjesztettük ki. Racionális kitevő esetén pedig — a gyök fogalmát felhasználva — a hatványt az

$$a^{n/m} := \left(\sqrt[m]{a}\right)^n, \quad a^{-n/m} := \frac{1}{a^{n/m}} \quad (m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N})$$

szerint értelmeztük (lásd [A1], 1.3.pont).

A kiterjesztést folytatva a logaritmus- és az exponenciális függvényt felhasználva bevezetjük az

$$\exp_a(b) := \exp(b \ln a) \quad (b \in \mathbb{R}, a > 0)$$

függvényt. Minthogy $\ln 1 = 0$ és $\exp 0 = 1$, azért a fenti értelmezésből valamint a 7. Tétel ii) azonossága alapján

$$\exp_1(b) = 1, \quad \exp_a(0) = 1, \quad \exp_a(1) = a \quad (b \in \mathbb{R}, b > 0)$$

adódik. Ebből kiindulva — szórol-szóra ugyanúgy mint a 6. Tételben — igazolható, hogy minden $r \in \mathbb{Q}$ racionális számra

$$\exp_a(r) = a^r \quad (a > 0).$$

Ennek alapján kézenfekfő az $a > 0$ szám b kitevőjű hatványát valós kitevőkre az alábbiak szerint kiterjeszteni.

Definíció. *Legyen $a > 0$ és $b \in \mathbb{R}$. Az a szám b kitevőjű hatványát az*

$$a^b := \exp_a(b) := \exp(b \ \ln \ a)$$

utasítással értelmezzük.

Most megmutatjuk, hogy az így kitejesztett hatványokra is fennállnak az ezzel kapcsolatban ismert azonosságok.

8. Tétel. *Bármely a, a_1, a_2 pozitív valós és b, b_1, b_2 valós számokra*

$$i)\quad a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad 1^b = 1,$$
$$ii)\quad a^{b_1}a^{b_2} = a^{b_1+b_2}, \quad a^{-b} = \frac{1}{a^b},$$
$$iii)\quad \big(a^{b_1}\big)^{b_2} = a^{b_1b_2},$$
$$iv)\quad (a_1a_2)^b = a_1^b a_2^b, \quad \Big(\frac{a_1}{a_2}\Big)^b = \frac{a_1^b}{a_2^b}.$$

Bizonyítás. Az i) állítást már beláttuk, a ii) pedig az *exp* függvényegyenletéből következik:

$$a^{b_1}a^{b_2} = \exp(b_1 \ln a)\exp(b_2 \ln a) = \exp\big((b_1 + b_2)\ln a\big) = a^{b_1+b_2}.$$

Az állítás második része pedig

$$a^b a^{-b} = a^0 = 1$$

alapján adódik.

A iii) azonosság igazolásához vezessük be a

$$c := a^{b_1} = \exp(b_1 \ln a)$$

jelölést. Ekkor a 7. Tétel ii) azonossága alapján

$$\ln c = \ln\big(\exp(b_1 \ln a)\big) = b_1 \ln a.$$

Ezt és hatvány értelmezését felhasználva

$$\big(a^{b_1}\big)^{b_2} = c^{b_2} = \exp(b_2 \ln c) = \exp(b_2b_1 \ln a) = a^{b_1b_2}$$

következik.

Végül a iv) azonosság a logaritmus- és az exponenciális függvény függvényegyenletéből következik:

$$(a_1a_2)^b = \exp\big(b\ln(a_1a_2)\big) = \exp\big(b(\ln a_1 + \ln a_2)\big) =$$
$$= \exp(b \ln a_1)\exp(b \ln a_2) = {a_1}^b{a_2}^b.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

Definíció. *Legyen $\mu \in \mathbb{R}$. A*

$$h_\mu(x) := x^\mu \quad (x > 0)$$

utasítással értelmezett $h_\mu : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ függvényt μ kitevőjű hatványfüggvénynek nevezzük.

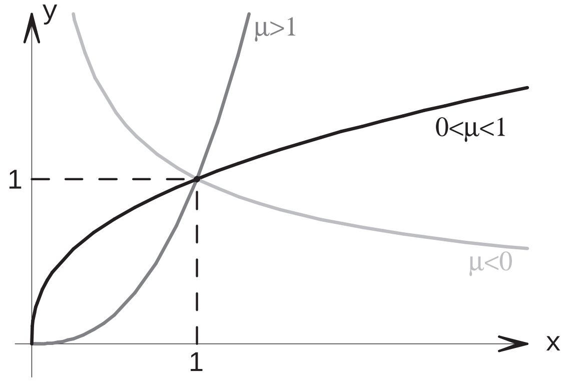
Az *exp* és az *ln* függvény tulajdonságai alapján az $x^\mu := \exp(\mu \ln x)$ $(x > 0)$ értelmezést felhasználva következik, hogy h_μ folytonos, monoton függvény. Egyszerűen belátható, hogy h_μ szigorúan monoton növő, ha $\mu > 0$ és szigorúan monoton fogyó, ha $\mu < 0$, továbbá

i) $h_0(x) = 1 \quad (x > 0)$,

ii) $\lim\limits_{x\to+0} x^\mu = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^\mu = +\infty \quad (\mu > 0)$,

iii) $\lim\limits_{x\to+0} x^\mu = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^\mu = 0 \quad (\mu < 0)$.

A h_μ hatványfüggvény grafikonját a μ kitevő különböző értékei mellett az alábbi ábrán szemléltetjük.



2. ábra

Most bevezetjük az a-alapú exponenciális függvényt.

Definíció. *Legyen $a > 0$. Az*

$$\exp_a(x) := a^x := \exp(x \ln a) \quad (x \in \mathbb{R})$$

utasítással értelmezett $\exp_a : (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty)$ függvényt a- **alapú exponenciális függvénynek** *nevezzük.*

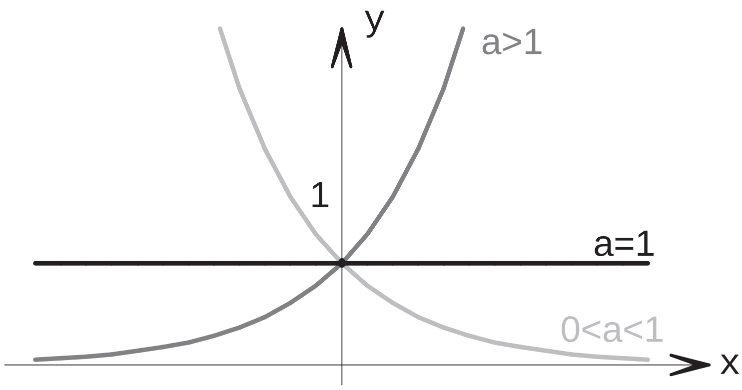
Minthogy az exp_a függvény a természtes alapú exponenciális függvényből a független változó lineáris transzformációjával kapható, azért az alább felsorolt tulajdonságok közvetlenül adódnak az exp függvény megfelelő tulajdonságaiból.

Az exp_a függvény folytonos,
szigorúan monoton növő, ha $a > 1$,
szigorúan monoton fogyó, ha $0 < a < 1$,

i) $\exp_e = \exp, \quad \exp_a(0) = 1, \quad \exp_a(1) = a \quad (a > 0),$

ii) $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y), \quad \exp_a(-x) = \dfrac{1}{\exp_a(x)} \quad (a > 0, x, y \in \mathbb{R}).$

Az exp_a függvény grafikonját az $a > 0$ paraméter különböző értékei mellett az alábbi ábrán szemléltetjük.



3. ábra

Minthogy $a > 0, a \neq 1$ esetén az exp_a függvény szigorúan monoton, azért létezik inverze.

Definíció. *Legyen $a > 0, a \neq 1$. Az $\exp_a$ függvény inverzét a-**alapú logaritmusfüggvénynek** nevezzük és a $\log_a$ szimbólummal jelöljük.*

Az értelmezés alapján nyilvánvaló, hogy $\log_a : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ szigorúan monoton, folytonos függvény, amely az ln-nel kifejezhető. Nevezetesen

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (x > 0). \tag{7}$$

Valóban, ez az egyenlőség az exp_a szigorú monotonitása miatt, ekvivalens az alábbival:

$$\exp_a\big(\log_a(x)\big) = \exp_a\big(\frac{\ln x}{\ln a}\big). \quad (x > 0).$$

A bal oldal — a függvény és inverze közti kapcsolat alapján — x-szel egyenlő. A jobb oldalra — az exp_a értelmezése és az imént említett azonosság alapján —

$$\exp_a\big(\frac{\ln x}{\ln a}\big) = \exp\big(\ln a \frac{\ln x}{\ln a}\big) = \exp(\ln x) = x$$

adódik.

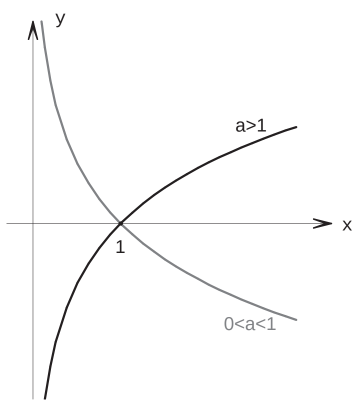
A (7) azonosság figyelembe vételével az ln tulajdonságai alapján adódnak a log_a $(a > 0, a \neq 1)$ függvényekre vonatkozó következő állítások.

A $\log_a : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ függvény folytonos,
szigorúan monoton növő, ha $a > 1$,
szigorúan monoton fogyó, ha $0 < a < 1$,

$$\begin{aligned}
&i) \quad \log_e = \ln, \quad \log_a(1) = 0, \quad \log_a(a) = 1,\\
&ii) \quad a^{\log_a x} = x \quad (x > 0), \qquad \log_a(a^x) = x \quad (x \in \mathbb{R}),\\
&iii) \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad (x, y > 0),\\
&iv) \quad \log_a(x^y) = y \log_a x \quad (x > 0, y \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1),\\
&v) \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (a, b, x > 0, a \neq 1, b \neq 1).
\end{aligned}$$

(lásd a 22. feladatot.)

A $\log_a$ függvény grafikonját szemléltetjük az alábbi ábrán .



4. ábra

3.5. Feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi függvények határértékét:

a) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$, *b)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$, *d)* $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$, *f)* $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$,

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\big(\sqrt{1+x^2}-x\big)$, *h)* $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{2/3}\big(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\big)$,

i) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln^2 x$, *j)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \big((x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}\big)$.

2. Határozzuk meg az alábbi függvények szakadási helyeit és azok fajtáit:

a) $f(x) := \begin{cases} n & (n \leqq x < n, n\in\mathbb{N}), \\ -n & (-n \leqq x < -n+1, n\in\mathbb{N}^*). \end{cases}$

b) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}, & (x\in\mathbb{R}, x\neq 2, x\neq 5), \\ 0, & (x\in\{2,5\}. \end{cases}$

c) $f(x) := \operatorname{int}(x^2) \qquad (x\in\mathbb{R}).$

d) $f(x) := \begin{cases} x^3, & (x\in\mathbb{Q}), \\ x, & (x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}). \end{cases}$

f) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & (x=\dfrac{p}{q},\ q\in\mathbb{N}^*, p\in\mathbb{Z}, (p,q)=1), \\ 0, & (x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}). \end{cases}$

3. Hol folytonosak az alábbi $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ függvények ?

a) $f(z) := \operatorname{abs}(z) \quad (z\in\mathbb{C})$, *b)* $f(z) := \arg(z) \quad (z\in\mathbb{C})$,

c) $f(z) := \operatorname{re}(z) \quad (z\in\mathbb{C})$, *d)* $f(z) := \operatorname{im}(z) \quad (z\in\mathbb{C})$.

e) $f(z) := \begin{cases} \dfrac{z^2-1}{z-1}, & (z\in\mathbb{C}, z\neq 1), \\ 2, & (z=1). \end{cases}$

f) $f(z) := \begin{cases} \exp(1/z), & (z\in\mathbb{C}, z\neq 0), \\ 0, & (z=0). \end{cases}$

g) $f(z) := \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, & (z\in\mathbb{C}, z\neq 0), \\ 1, & (z=0). \end{cases}$

4. Határozzuk meg az alábbi valós függvények szakadási helyeit:

$$a)\quad f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & (x \in \mathbb{R}, x \neq 2), \\ A, & (x = 2). \end{cases}$$

$$b)\quad f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2}, & (x \in \mathbb{R}, x \neq -1), \\ 10, & (x = -1). \end{cases}$$

$$c)\quad f(x) := \begin{cases} |\dfrac{\sin x}{x}|, & (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ 1, & (x = 0). \end{cases}$$

$$d)\quad f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ 1, & (x = 0). \end{cases}$$

$$e)\quad f(x) := \begin{cases} x\sin(1/x), & (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ 0, & (x = 0). \end{cases}$$

$$f)\quad f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ 0, & (x = 0). \end{cases}$$

$$g)\quad f(x) := \sqrt{x} - \operatorname{int}\big(\sqrt{x}\big) \quad (x >= 0).$$

$$h)\quad f(x) := x\operatorname{int}\big(\frac{1}{x}\big) \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0).$$

$$i)\quad f(x) := \begin{cases} e^{-1/x}, & (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ 1, & (x = 0). \end{cases}$$

$$j)\quad f(x) := (-1)^{int(x^2)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

5. Folytonosak-e az alábbi valós függvények ?

$$a)\quad f(x) := \begin{cases} 2x, & (0 \leqq x \leqq 1), \\ 2-x, & (1 < x \leqq 2). \end{cases}$$

$$b)\quad f(x) := \begin{cases} e^x, & (x < 0), \\ a+x, & (x \geq 0). \end{cases}$$

$$c)\quad f(x) := \begin{cases} x, & (|x| \leqq 1), \\ 1, & (|x| > 1). \end{cases}$$

6. Tegyük fel, hogy az f és g függvénynek az α helyen szakadása van. Lehet-e folytonos az $f+g, f-g, f/g, f^2$ függvény az α helyen ?

7. Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos, a g függvénynek szakadása van az α helyen. Lehet-e $f+g, fg, f/g, f^2$ folytonos az α helyen ?

8. Tegyük fel, hogy az $f : H \to K$ függvénynek az $\alpha \in H$ helyen, a $g : K \to \mathbb{R}$ függvénynek pedig az $f(\alpha) \in K$ helyen van szakadása. Lehet-e folytonos a $g \circ f$ függvény az α helyen ?

9. Vizsgáljuk az alábbi, f és g függvényekből képzett $f \circ g$ és $g \circ f$ közvetett függvény folytonosságát.

$$\begin{aligned}
&a)\quad f(x) := \operatorname{sign}(x),\ g(x) := 1 + x^2 \quad (x \in \mathbb{R}),\\
&b)\quad f(x) := \operatorname{sign}(x),\ g(x) := x(1 - x^2) \quad (x \in \mathbb{R}).\\
&c)\quad f(x) := \operatorname{sign}(x),\ g(x) := 1 + x - \operatorname{int}(x) \quad (x \in \mathbb{R}).\\
&d)\quad f(x) := \begin{cases} x, & (0 < x \leqq 1),\\ 2 - x, & (1 < x < 2),\end{cases}\\
&\qquad g(x) := \begin{cases} x, & (x \in \mathbb{Q}),\\ 2 - x, & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).\end{cases}
\end{aligned}$$

10. Tegyük fel, hogy az $f, g : H \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak. Igazoljuk, hogy ekkor az alábbi F, G függvények is folytonosak.

$$\begin{aligned}
&a)\quad F(x) := |f(x)| \quad (x \in H),\\
&b)\quad F_c(x) := \begin{cases} -c, & (x \in H, f(x) < -c),\\ f(x), & (x \in H, |f(x)| \leqq c),\\ c, & (x \in H, f(x) > c),\end{cases}\\
&c)\quad F(x) := \min\{f(x), g(x)\} \quad (x \in H),\\
&d)\quad G(x) := \max\{f(x), g(x)\} \quad (x \in H).
\end{aligned}$$

11. Írjuk fel az alábbi függvények inverzét:

$$\begin{aligned}
&a)\quad f(x) := \frac{ax + b}{cx + d} \quad (x \in \mathbb{R},\ ad - bc \neq 0),\\
&b)\quad f(x) := x + \operatorname{int}(x) \quad (x \in \mathbb{R}),\\
&c)\quad f(x) := \begin{cases} x, & (x \in \mathbb{Q}),\\ -x, & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).\end{cases}
\end{aligned}$$

12. Igazoljuk, hogy az
$$f(x) := (1 + x^2)\operatorname{sign}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$
szakadásos függvény inverze folytonos.

13. Tegyük fel, hogy az $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos és f-nek létezik véges határértéke a $+\infty$-ben. Igazoljuk, hogy f egyenletesen folytonos a $[0, +\infty)$ intervallumon.

14. Egyenletesen folytonosak-e az alábbi függvények a feltüntetett halmazokon ?

$$a)\quad f(x) := x^2 \quad (x \in (-a, a),\ a \in \mathbb{R}), \qquad b)\quad f(x) := \ln x \quad (x \in (0,1)),$$
$$c)\quad f(x) := \frac{x}{4-x^2} \quad (x \in [-1,1]), \qquad d)\quad f(x) := \sqrt{x} \quad (x \in [1,+\infty)).$$

15. Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény *folytonossági modulusát* az

$$\omega_f(\delta) := \sup\{|f(s) - f(t)| : s, t \in [a, b],\ |s - t| \leqq \delta\} \quad (\delta \geq 0)$$

utasítással értelmezzük. Igazoljuk, hogy az $\omega_f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ függvény monoton növő és

$$\lim_{\delta \to 0+} \omega_f(\delta) = 0.$$

16. Igazoljuk, hogy minden páratlan fokú, valós együtthatós polinomnak van valós gyöke.

17. Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény monoton és minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső értéket felvesz. Igazoljuk, hogy ekkor f folytonos.

18. Tegyük fel, hogy $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $n \in \mathbb{N}^*$ és $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a, b)$. igazoljuk, hogy van olyan $\xi \in (a, b)$, amelyre

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

19. Igazoljuk, hogy az $x^3 - 3x + 1 = 0$ egyenletnek van valós gyöke az $(1, 2)$ intervallumban. Számítsuk ki a gyök közelítő értékét 10^{-2} pontossággal.

20. Értelmezzük az alábbi függvényeket a 0 pontban úgy, hogy ott folytonosak legyenek.

$$a)\quad f(x) := \frac{(1+x)^n - 1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}),$$
$$b)\quad f(x) := \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0),$$
$$c)\quad f(x) := e^x - e^{-x}x \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0),$$
$$d)\quad f(x) := x^2 \sin(1/x) \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0).$$

21. Igazoljuk, hogy

$$2 < e < 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 3.$$

Megjegyzés: Az e számot pl. a $MATHEMATICA$ vagy a $MAPLE$ programcsomagot felhasználva lehet nagyon nagy pontossággal megkapni. Az e szám 40 tizedesjegy pontosságra:

$$e = 2.7182818284590452353602874713526624977572\cdots$$

23. Igazoljuk az alábbi azonosságokat:

$$a) \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

$$b) \quad \log_a x^y = y \log_a x \quad (a, b, x > 0, a \neq 1, b \neq 1, y \in \mathbb{R}).$$

4. Differenciálható függvények

A matemetikai analízis egyik alapvető fogalma a differenciálhányados vagy derivált. A deriváltat nemcsak a matematikán belül, hanem számos természettudományban és a technikában is széleskörűen felhasználják. Több fontos fizikai, kémiai vagy gazdasági fogalmat a derivált seg´ itségével lehet pontosan leírni.

Ebben a pontban ismertetjük a deriválttal kapcsolatos alapvető fogalmakat, a vele való számolás szabályait és bemutatjuk néhány alkalmazását. Az eddig követett módszert folytatva, ahol az lehetséges, együtt tárgyaljuk a valós és a komplex esetet. A differenciálhatóságot általában az értelmezési tartomány belső pontjaiban vizsgáljuk. Ezzel kapcsolatos az alábbi

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az a pont a $H \subseteq \mathbb{K}$* ***halmaz belső pontja****, ha létezik a-nak olyan $K_r(a)$ környezete, hogy $K_r(a) \subseteq H$.*

4.1. A derivált értelmezése

Legyen $H \subseteq \mathbb{K}_1$, és $f : H \to \mathbb{K}_2$ a H halmazon értelmezett függvény és tegyük fel, hogy a a H halmaz belső pontja. A derivált értelmezéséhez célszerű bevezetni az alábbi függvényt.

Definíció. *A*

$$(\Delta_a f)(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \in H \setminus \{a\})$$

utasítással értelmezett függvényt f a pontbeli ***differenciahányadosának****, vagy* ***különbségi hányadosának*** *nevezzük.*

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a $\Delta_a f$ különbségi hányados nincs értelmezve az a pontban.

Az f jelentésétől függően a különbségi hányadosnak is lehet geometriai vagy fizikai jelentést tulajdonítani. Legyen pl. $H := (\alpha, \beta)$, és tekintsük az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ valós függvény grafikonját. A grafikon $(a, f(a))$ és $(x, f(x))$ pontjait összekötő egyenest a grafikon szóban forgó pontjain áthaladó **szelőjének** nevezzük.

A $(\Delta_a f)(x)$ szám ennek a szelőnek az **iránytangense**.

A fizikában a különbségi hányadost az átlagsebesség értelmezéséhez használják fel. Ha az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ leképezés valamely egyenesvonalú mozgás **út-idő függvénye**, akkor a $(\Delta_a f)(x)$ szám az a és x **időpontok közti átlagsebességet** jelenti.

A határértéket felhasználva bevezetjük a differenciálhányados fogalmát.

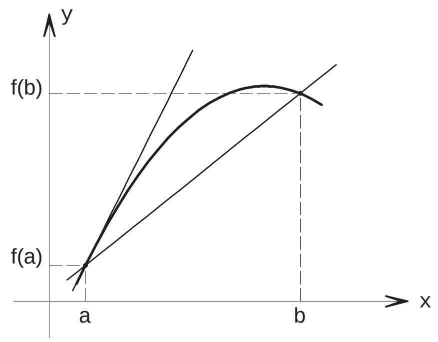
Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az f függvény az $a \in H$ belső pontban* ***differenciálható****, ha a $\Delta_a f$ különbségi hányadosnak létezik az a pontban véges határértéke. A szóban forgó határértéket az f függvény a pontbeli* ***differenciálhányadosának*** *vagy* ***deriváltjának*** *nevezzük és az*

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_a \Delta_a f.$$

vagy a $\dfrac{df}{dx}(a)$ szimbólumok valamelyikével jelöljük.

Kiindulva a különbségi hányados geometriai jelentéséből az érintő fogalmát így célszerű bevezetni.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $(a, f(a))$ pontjában* ***van érintője****, ha az f függvény az a pontban differenciálható. Az $(a, f(a)) \in \mathbb{R}^2$ ponton áthaladó $f'(a)$ iránytangensű egyenest az f grafikonjának a abszcisszájú pontjához tartozó* ***érintőjének*** *nevezzük.*



1. ábra

Az említett átlagsebességnek $x \to a$ esetén vett határértékét az a időpontban vett **pillanatnyi sebességnek** szokás nevezni. Ez — felhasználva a derivált fogalmát — ekvivalens módon a következő formában fogalmazható meg: az $a \in (\alpha, \beta)$ időpontban differenciálható $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ **út-idő függvény** $f'(a)$ **deriváltját a**

mozgás a **pontbeli pillanatnyi sebességének nevezzük**.

A derivált és a határérték értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy ha f differenciálható az a pontban, akkor f-nek bármely $K_\rho(a)$ környezetre vonatkozó leszűkítése is differenciálható a-ban és a leszűkített függvénynek a-beli deriváltja egyenlő $f'(a)$-val.

A differenciálhatóság és a folytonosság kapcsolatára vonatkozik az alábbi

1. Tétel. *Ha $f : H \to \mathbb{K}_2$ differenciálható az $a \in H$ pontban, akkor f folytonos a-ban*

Bizonyítás. A feltétel szerint a $\Delta_a f$ függvénynek az a helyen létezik véges határértéke, következésképpen a-nak van olyan környezete, amelyben $\Delta_a f$ korlátos, azaz létezik olyan $M \geq 0$ és $r > 0$ szám, hogy

$$\frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} \leqq M \quad (x \in K_r(a)).$$

Ebben a környezetben fennáll az

$$|f(x) - f(a)| \leqq M|x - a| \quad (x \in K_r(a))$$

egyenlőtlenség. Innen — pl. az átviteli elv alapján — nyilvánvaló, hogy f-nek a-ban létezik határértéke és $\lim_a f = f(a)$. $\square$

Megjegyezzük, hogy a most igazolt állítás megfordítása nem igaz. Léteznek olyan függvények, amelyek folytonosak de nem differenciálhatók. Ilyen pl. az $f(x) := \mathrm{abs}\,(x) := |x| \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény $a = 0$ esetén. Valóban, ennek az a pontbeli különbségi hányadosa

$$(\Delta_0 f)(x) = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \mathrm{sign}(x) \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0).$$

Minthogy a *sign* függvénynek a 0 helyen nincs határértéke, azért az *abs* függvény a 0 pontban nem differenciálható.

Könnyen igazolható, hogy az *abs* függvény a 0-tól különböző helyeken differenciálható, továbbá $f'(a) = 1$, ha $a > 0$ és $f'(a) = -1$, ha $a < 0$. Megjegyezzük, hogy létezik olyan $\mathbb{R}$-en értelmezett, mindenütt folytonos függvény, amely $\mathbb{R}$ egyetlen pontjában sem differenciálható (lásd pl. [3], 88. oldal).

A most vizsgált példában a 0 pontbeli különbségi hányadosnak nincs ugyan határértéke, de létezik jobb-és baloldali határártéke. Ilyenkor azt mondjuk, hogy ennek a függvénynek a 0 pontban van jobb- és baloldali deriváltja.

Ezzel kapcsolatos az alábbi

Definíció. *Legyen $a \in H \subseteq \mathbb{R}$, $f : H \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy van olyan $(a-h, a]$ $(h > 0)$ intervallum, amelyre $(a-h, a] \subseteq H$. Ha a $\Delta_a f$ különbségi hányadosnak létezik az a helyen a bal oldali határértéke, akkor azt mondjuk, hogy f az a helyen* ***balról differenciálható*** *és a*

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

baloldali határtártéket f a-beli baloldali deriváltjának nevezzük és az $f'_-(a)$ szimbólummal jelöljük.

A fenti értelmezésben a baloldali határérték helyett jobboldali határértéket véve a **jobboldali derivált** fogalmához jutunk. Az a pontbeli jobboldali deriváltat az $f'_+(a)$ szimbólummal jelöljük. Azt, hogy az f függvénynek az a pontban létezik a baloldali deriváltja — geometriai szóhasználattal élve — úgy szokás kifejezni, hogy f **grafikonjának létezik a baloldali félérintője**. Nyilvánvaló, hogy f akkor és csak akkor differenciálható a-ban, ha létezik a bal- és jobboldali deriváltja és $f'_-(a) = f'_+(a) = f'(a)$.

4.1.1. Példák

Az alábbiakban felsorolunk néhány függvényt, amelyek deriváltja közvetlenül a definíció alapján kiszámítható.

1. A **konstans függvény** mindenütt differenciálható és deriváltja 0. Valóban legyen $c \in \mathbb{K}_2$. Az $f(x) := c$ $(x \in \mathbb{K}_1)$ függvény $a(\in \mathbb{K}_1)$ pontbeli különbségi hányadosa
$$\Delta_a(x) := \frac{c - c}{x - a} = 0 \quad (x \in \mathbb{K}_1, x \neq a).$$
Következésképpen ennek határértéke az a helyen 0.

2. A $\mathbb{K}_1$ **indentikus leképezése** minden $a \in \mathbb{K}_1$ pontban differenciálható és deriváltja 1-gyel egyenlő. Az $f(x) := x$ $(x \in \mathbb{K}_1)$ függvény különbségi hányadosa ugyanis
$$\Delta_a(x) := \frac{x - a}{x - a} = 1 \quad (x \in \mathbb{K}_1, x \neq a).$$
Innen következik, hogy a különbségi hányados határértéke az a helyen 1.

3. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az $f(x) := x^n$ $(x \in \mathbb{K}_1)$ **hatványfüggvény mindenütt differenciálható** és $f'(a) = na^{n-1}$ $(a \in \mathbb{K}_1)$. A szóban forgó függvény a pontbeli különbségi hányadosa
$$(\Delta_a f)(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1} \quad (x \in \mathbb{K}_1, x \neq a).$$

A jobb oldalon álló polinom határértéke az a pontban az a-beli helyettesítési értékkel egyenlő. Ezért

$$\lim_a \Delta_a f = a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1} + a^{n-1} = na^{n-1}.$$

4. Hasonlóan adódik, hogy bármely $x_0 \in \mathbb{K}_1$ esetén az

$$f(x) := (x - x_0)^n \; (x \in \mathbb{K}_1)$$

függvény is mindenütt differenciálható, és minden $a \in \mathbb{K}_1$ pontban

$$f'(a) = n(a - x_0)^{n-1}.$$

Bizonyos esetekben célszerű a differenciálhatóságnak az alábbi, eredetivel ekvivalens átfogalmazását használni. Ez a definició — amint azt látni fogjuk — minden nehézség nélkül átvihető többváltozós függvényekre.

2. Tétel. *Az $f : H \to \mathbb{K}_2$ függvény a $H \subseteq \mathbb{K}_1$ halmaz a belső pontjában akkor és csak akkor differenciálható, ha létezik olyan $A \in \mathbb{K}_2$ szám és olyan $\epsilon : H \to \mathbb{K}_2$ a-ban folytonos függvény, amelyre $\epsilon(a) = 0$, és amellyel a függvény megváltozása felírható a következő alakban:*

$$f(x) - f(a) = A(x - a) + (x - a)\epsilon(x) \quad (x \in H). \tag{1}$$

Az A szám az f függvény a-beli deriváltjával egyenlő.

Bizonyítás. i) Tegyük fel először, hogy f differenciálható az a pontban és legyen $A := f'(a)$. Értelmezzük az ϵ függvényt a következőképpen:

$$\epsilon(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - A, & (x \in H,\ x \neq a), \\ 0, & (x = a). \end{cases}$$

Ekkor az ϵ függvénynek az a helyen a határértéke 0, következésképpen folytonos a-ban. E definícióból átrendezéssel adódik a kívánt alak.

ii) Most induljunk ki abból, hogy f megváltozása felírható az (1) alakban. Innen $(x - a)$-val való osztás után azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - A = \epsilon(x) \quad (x \in H,\ x \neq a).$$

Minthogy $\lim_a \epsilon = 0$, azért az f függvény különbségi hányadosának valóban van határértéke és $f'(a) = A$. $\square$

A differenciálhatóság most ismertetett átfogalmazásában az $x - a = h$ helyettesítést alkalmazva

$$f(a+h) - f(a) = Ah + h\epsilon(a+h) = Ah + \eta(h) \quad (|h| < r)$$

adódik minden olyan $r > 0$ számra, amelyre $K_r(a) \subseteq H$. Ez azt jelenti, hogy a függvény $f(a+h) - f(a)$ megváltozása a h változó egy homogén lineáris függvényének és az η függvénynek az összegeként állítható elő, ahol η kicsi a lineáris függvényhez képest abban az értelemben, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{\eta(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \epsilon(a+h) = 0.$$

Az $\ell(h) := Ah$ $(h \in \mathbb{K}_1)$ lineáris függvényt az f differenciálható függvény a **pontbeli differenciáljának** nevezzük és a $d_a f$ szimbólummal jelöljük.

Az említett példákban vizsgált függvényekből kiindulva — az algebrai műveletek véges számú alkalmazásával — a racionális függvényekhez jutunk. Ezek deriváltját az — algebrai műveleteket és a deriválást összekapcsoló — ún. differenciálási szabályok ismeretében kiszámíthatjuk.

4.1.2. Differenciálási szabályok.

Az **összeg-, szorzat- és hányadosfüggvény deriváltjára** vonatkozik az alábbi állítás.

3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f, g : H \to \mathbb{K}_2$ függvények differenciálhatók a H halmaz a belső pontjában. Ekkor $f+g$, fg és $g(a) \neq 0$ esetén f/g is differenciálható a-ban és*

$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= f'(a) + g'(a),\\
(fg)'(a) &= f(a)g'(a) + f'(a)g(a),\\
(f/g)'(a) &= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.
\end{aligned}$$

Bizonyítás. i) Az $f + g$ függvény a-hoz tartozó különbségi hányadosa az $x \in H$, $x \neq a$ helyen egyszerű átalakítás után felírható a

$$(\Delta_a(f+g))(x) = \frac{f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

alakban. Az összegfüggvény határértékére vonatkozó tétel alapján a $\Delta_a(f + g)$ különbségi hányadosnak van határértéke az a helyen, és az az $f'(a)+g'(a)$ számmal egyenlő.

ii) A szorzatra vonatkozó állítás igazolásához írjuk fel az fg a-hoz tartozó különbségi hányadosát az $x \in H, x \neq a$ helyen a

$$(\Delta_a(fg))(x) = \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

alakban. Az 1. Tétel alapján f folytonos a-ban, következésképpen f-nek létezik határértéke a-ban és az $f(a)$-val egyenlő. A szorzat- és összegfüggvény határértékére vonatkozó tétel alapján a szorzat különbségi hányadosának létezik határértéke az a helyen és

$$\begin{aligned}\lim_a \Delta_a(fg) &= \lim_a f \lim_a \frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a) \lim_a \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \\ &= f(a)g'(a) + g(a)f'(a).\end{aligned}$$

iii) A hányadosra vonatkozó állítást először az $f(x) := 1$ $(x \in H)$ speciális esetre igazoljuk. Az $1/g$ függvénynek az $a \in H$ ponthoz tartozó különbségi hányadosa a következőképpen írható fel

$$\frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(a)}}{x-a} = -\frac{1}{g(x)g(a)}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \qquad (x \in H,\ x \neq a).$$

Felhasználva a szorzat- és a hányadosfüggvény határértékére vonatkozó tételt, valamint a g függvény a-beli folytonosságát azt kapjuk, hogy a szóban forgó különbségi hányadosnak létezik az a pontban a határértéke és

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{1}{g(a)}\left(\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}\right)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

A most igazolt speciális esetet a szorzatfüggvény deriválási szabályával kombinálva adódik az általános eset:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f\frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \\ &= f'(a)\frac{1}{g(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.\end{aligned}$$

Ezzel a tételt igazoltuk. $\square$.

A konstans függvény és a szorzat deriválási szabályát felhasználva adódik, hogy bármely $\lambda \in \mathbb{K}_2$ számra f-fel együtt λf is differenciálható a-ban és

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$

A 3. Tételben két tag összegére, ill. két tényező szorzatára bizonyított állítások teljes indukcióval kiterjeszthetők véges sok tag összegére és véges sok tényező szorzatára. Nevezetesen, ha $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ és az $f_1, f_2, \cdots, f_n : H \to \mathbb{K}_2$ függvények mindegyike differenciálható az $a \in H$ pontban, akkor az

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n, \quad f_1 f_2 \cdots f_n$$

függvények is differnciálhatók az a pontban és

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)'(a) &= f_1'(a) + f_1'(a) + \cdots + f_n'(a),\\ (f_1 f_2 \cdots f_n)'(a) &= f_1'(a) f_2(a) \cdots f_n(a) + \\ &\quad + f_1(a) f_2'(a) \cdots f_n(a) + \cdots + f_1(a) f_2(a) \cdots f_n'(a).\end{aligned}$$

A 3.Tétel és az ahhoz fűzött megjegyzések a derivált helyett az **egyoldali deriváltakra** is fennállnak, s ezek szórol-szóra ugyanúgy igazolhatók.
A pontbeli differenciálhatóságot célszerű kiterjeszteni.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy a $H \subset \mathbb{K}_1$ **nyílt halmazon** értelmezett $f : H \to \mathbb{K}_2$ függvény a H **halmazon** differenciálható, ha annak minden pontjában differenciálható. Ilyenkor a H-n értelmezett*

$$H \ni x \to f'(x) \in \mathbb{K}_2$$

*függvényt f **deriváltfüggvényének** vagy **deriváltjának** nevezzük.*

A továbbiakban néha a zárt intervallumon való differenciálhatóságot is használni fogjuk a következő értelemben: Az $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ függvényt differenciálhatónak nevezzük az $[\alpha, \beta]$ intervallumon, ha f differenciálható az intervallum belső pontjaiban továbbá, ha α-ban jobbról, β-ban balról differenciálható. A H halmazon differenciálható $f : H \to \mathbb{K}$ típusú függvények öszességét a $\mathcal{D}(H, \mathbb{K})$, vagy — ha ez nem okoz félreértést — az egyszerűbb $\mathcal{D}(H)$ szimbólummal fogjuk jelölni.

A most igazolt differenciálási szabályok alapján következik, hogy a polinomok mindenütt, a racionális függvények pedig értelmezési tartományuk minden pontjában differenciálhatók. Továbbá, ha az n-edfokú P polinom

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad (x \in \mathbb{K}_1)$$

alakú, akkor deriváltja a következő — tagonkénti deriválással kapott — polinom:

$$P'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} \quad (x \in \mathbb{K}_1).$$

Az

$$f(x) := x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (x \in \mathbb{K}_1,\ x \neq 0,\ n \in \mathbb{N})$$

függvény deriváltja a hányados differenciálási szabálya alapján

$$f'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1} \quad (x \in \mathbb{K}_1,\ x \neq 0).$$

Ezt a 3. példában szereplő eredménnyel egybevetve kapjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{Z}$ egész kitevőre

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad (x \in \mathbb{K}_1,\ x \neq 0,\ n \in \mathbb{Z}).$$

Megmutatjuk, hogy a hatványsorok összegfüggvényei is differenciálhatók és a differenciálhányados tagonkénti deriválással adódik. Legyen f egy x_0 középpontú, $R > 0$ konvergenciasugárral rendelkező hatványsor összegfüggvénye:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (x \in K_R(x_0)). \tag{2}$$

4. Tétel. *A (2)-ben értelmezett f függvény minden $a \in K_R(x_0)$ pontban differenciálható és*

$$f'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(a - x_0)^{n-1}. \tag{3}$$

Bizonyítás. Legyen $0 < r < R - |a - x_0|$. Ismeretes, hogy az f a $K_r(a)$ környezetben előállítható egy a középpontú hatványsor összegeként, azaz

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x - a)^k \quad (x \in K_r(a)), \tag{4}$$

ahol az A_k együtthatók az eredeti hatványsorból alkotott alábbi végtelen sorok összegeként adhatók meg (lásd 1.3. pont 4. Tétel):

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n(a - x_0)^{n-k} \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{5}$$

Ezt az előállítást felhasználva írjuk fel az f függvény a pontbeli különbségi hányadosát. Minthogy (4) alapján $f(a) = A_0$, azért

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(x) - A_0}{x - a} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x - a)^{k-1} \quad (x \in K_r(a),\ x \neq a). \tag{6}$$

A jobb oldalon álló végtelen sort (4)-ből az A_0 szám levonása után $(x-a)$-val való osztással kaptuk, következésképpen ez is konvergens minden $x \in K_r(a)$ pontban. Minthogy a hatványsor összegfüggvénye folytonos a konvergenciaközéppontban, azért az $\Delta_a f$ különbségi hányadosnak létezik a-ban határértéke, és az a (6) jobb oldalán álló hatványsor a-ban felvett értékével, azaz A_1-gyel egyenlő. Felhasználva az (5) egyenlőséget azt kapjuk, hogy

$$\lim_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (a-x_0)^{n-1},$$

s ezzel a tételt igazoltuk. □

A most igazolt tételből következik, hogy az *exp*, *sin*, *cos*, *sinh* és *cosh* függvények minden $x \in \mathbb{K}$ pontban differenciálhatók, és deriváltjuk a most igazolt tétel alapján hatványsoruk tagonkénti differenciálásával kapható:

$$\begin{aligned}
\exp'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{1}{n!}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} = \exp(x),\\
\sin'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(2n+1)\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \cos(x),\\
\cos'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2n\frac{1}{(2n)!}x^{2n-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} = -\sin(x),\\
\sinh'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n} = \cosh(x),\\
\cosh'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2n\frac{1}{(2n)!}x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} = \sinh(x).
\end{aligned}$$

Ezzel bebizonyítottuk az alábbi állítást:

1. Következmény. *A valós és a komplex exp, sin, cos, sinh, cosh függvények mindenütt differenciálhatók, és*

$$\begin{aligned}
&\exp'(x) = \exp(x), \quad \sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x),\\
&sinh'(x) = cosh(x), \quad cosh'(x) = sinh(x) \quad (x \in \mathbb{K}).
\end{aligned}$$

4.1.3. A közvetett függvény deriváltja

Nemcsak az algebrai műveletek, hanem a közvetett függvény képzés sem vezet ki a differenciálható függvények köréből. Jelölje $\mathbb{K}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ a valós vagy a komplex számok halmazát, és legyen $H \subseteq \mathbb{K}_1, K \subseteq \mathbb{K}_2$ két nem üres halmaz. A továbbiakban az

$$f : H \to K, \quad g : K \to \mathbb{K}_2$$

függvényekből képzett $g \circ f$ közvetett függvény differenciálhatóságát vizsgáljuk. Erre vonatkozik az

5. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f : H \to \mathbb{K}_2$ függvény differenciálható az $a \in H$ belső pontban, továbbá legyen $f(a)$ a K-nak belső pontja és tegyük fel, hogy g differenciálható az $f(a)$ pontban. Ekkor $g \circ f$ is differciálható a-ban és*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a $g\circ f$ függvény $(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)$ megváltozása felírható

$$(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) = g'(f(a))f'(a)(x - a) + \epsilon(x)(x - a) \quad (x \in H)$$

alakban, ahol $\epsilon : H \to \mathbb{K}_3$ egy olyan a-ban folytonos függvény, amelyre $\epsilon(a) = 0$. Ez a 2. Tétel alapján ekvivalens a bizonyítandó állítással.

Az f függvény a pontbeli differenciálhatósága pontosan azt jelenti, hogy létezik olyan $\epsilon_1 : H \to K$, a-ban folytonos függvény, amelyre $\epsilon_1(a) = 0$ és

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \epsilon_1(x)(x - a) \quad (x \in H).$$

Az g függvény $b := f(a)$ pontbeli differenciálhatósága azzal ekvivalens, hogy létezik olyan $\epsilon_2 : K \to \mathbb{K}_3$, b-ben folytonos függvény, amelyre $\epsilon_2(b) = 0$ és

$$g(y) - g(b) = g'(b)(y - b) + \epsilon_2(y)(y - b) \quad (y \in K).$$

Ennek alapján az $y = f(x)$ jelölést használva a közvetett függvény megváltozása felírható a következő alakban:

$$\begin{aligned} g(f(x)) - g(f(a)) &= g'(b)(f(x) - f(a)) + \epsilon_2(f(x))(f(x) - f(a)) = \\ &= g'(b)(x - a) + \epsilon(x)(x - a), \end{aligned}$$

ahol

$$\epsilon(x) := g'(b)\epsilon_1(x) + \epsilon_2(f(x))(f'(a) + \epsilon_1(x)) \quad (x \in H).$$

Az ϵ_1, ϵ_2 és ϵ értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy $\epsilon(a) = 0$ továbbá az f a-pontbeli folytonossága, valamint a közvetett függvény folytonossága alapján ϵ is folytonos az a helyen. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

A most igazolt tételből következik, hogy ha $f \in \mathcal{D}(H, K)$ és $g \in \mathcal{D}(K, \mathbb{K}_3)$, akkor $g \circ f \in \mathcal{D}(H, \mathbb{K}_3)$ és

$$(g \circ f)' = f' \; g' \circ f.$$

Ezt a formulát **láncszabálynak** is szokás nevezni. Ennek alapján kiszámíthatjuk pl. a

$$h(x) := (x^2 + 1)^{100} \quad (x \in \mathbb{K})$$

függvény deriváltját. A h függvény az

$$f(x) := x^2 + 1 \quad (x \in \mathbb{K}), \qquad g(y) := y^{100} \quad (y \in \mathbb{K})$$

függvények kompoziciója: $h = g \circ f$. Minthogy

$$f'(x) = 2x \quad (x \in \mathbb{K}), \qquad g'(y) = 100y^{99} \quad (y \in \mathbb{K}),$$

azért a láncszabály szerint

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = 100(1 + x^2)^{99} 2x \quad (x \in \mathbb{K}).$$

A közvetett függvény deriválási szabályából következik, hogy az

$$\exp_a(x) := \exp(x \ln a) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény differenciálható és

$$\exp_a'(x) := \ln a \; \exp(x \ln a) = \ln a \; \exp_a(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

4.1.4. Az inverz függvény deriváltja

Az inverz függvény deriválási szabályának megfogalmazásában intervallumon értelmezett, folytonos valós függvényekből indulunk ki. Az általános esetben fellépő problémákkal kapcsolatban a pont végén tett megjegyzésre utalunk.

6. Tétel. *Legyen $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ szigotúan monoton, folytonos függvény. Ha f differenciálható az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban és $f'(a) \neq 0$, akkor az f függvény $\varphi := f^{-1}$ inverze is differenciálható a $b := f(a)$ helyen és*

$$\varphi'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{7}$$

A (7) igazolásához legyen $(y_n, n \in \mathbb{N})$ egy, az f értékkészletéből vett b-hez konvergáló sorozat és vezessük be az $x_n := \varphi(y_n)\,(n \in \mathbb{N})$ jelölést. Ekkor $\varphi(b) = a$ és $f(x_n) = y_n$ $(n \in \mathbb{N})$, továbbá az inverz függvény folytonosságára vonatkozó 3.3. pont 2. Következmény alapján

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = \varphi(b) = a.$$

Ezeket felhasználva a φ függvény b-pontbeli különbségi hányadosa kifejezhető az f a-beli különbségi hányadosával:

$$\frac{\varphi(y_n) - \varphi(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Innen az átviteli elv és a hányados határértékére vonatkozó szabály alapján, $f'(a) \neq 0$ figyelembevételével következik, hogy a φ függvény differenciálható a b pontban és

$$\varphi'(b) = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(y_n) - \varphi(b)}{y_n - b} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Ezzel a tételt igazoltuk. □

A most igazolt formulában az a helyett az $a = \varphi(b) = f^{-1}(b)$ számot írva

(8) $$\varphi'(b) = \frac{1}{f'(\varphi(b))}$$

adódik.

Alkalmazzuk az inverz függvény deriváltjára most igazolt tételt a (valós) logaritmusfüggvényre, azaz legyen $f := \exp$, $\varphi := \ln$ és $b := \exp(a) > 0$, ahol $a \in \mathbb{R}$. Minthogy $\exp'(a) = \exp(a) > 0$, azért az ln függvény minden $b > 0$ helyen differenciálható és (8) alapján

$$\ln'(b) = \frac{1}{\exp(\ln(b))} = \frac{1}{b} \quad (b > 0).$$

A most levezetett deriválási szabályból tetszőleges $a > 0$ alap esetén megkaphatjuk a

$$\log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad (x > 0)$$

függvény deriváltját:

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x\ln(a)} \quad (x > 0).$$

Legyen $\mu > 0$. A h_μ hatványfüggvény kifejezhető az ln függvénnyel :

$$h_\mu(x) := x^\mu = \exp(\mu \ln(x)) \quad (x > 0).$$

Ezt és a közvetett függvény differenciálási szabályát felhsználva azt kapjuk, hogy h_μ minden $x > 0$ pontban differenciálható és

$$h'_\mu(x) = \exp(\mu \ln(x))\frac{\mu}{x} = \mu x^{\mu-1} \quad (x > 0).$$

Ezzel megmutattuk, hogy a hatványfüggvény korábban egész kitevőkre igazolt deriválási szabálya ugyanolyan alakú tetszőleges valós kitevő esetén.

Az *ln* függvény differenciálási szabályát felhsználva igazoljuk az alábbi, határértékre vonatkozó állítást, amely az exponenciális függvénynek egy újabb előállí tását adja. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ valós számra

$$\lim_{s\to\infty}\left(1+\frac{x}{s}\right)^s = \lim_{s\to-\infty}\left(1+\frac{x}{s}\right)^s = \exp(x). \tag{9}$$

Az *ln* függvény folytonossága alalpján a fenti állítás ekvivalens azzal, hogy bármely $s_n \to \infty$ vagy $s_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$ számsorozatra:

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x}{s_n}\right)^{s_n} = x.$$

Bevezetve a $h_n = x/s_n$ jelölést, a szóban forgó sorozat felírható

$$\ln(1+h_n)^{x/h_n} = x\frac{\ln(1+h_n) - \ln(1)}{h_n}$$

alakban. A jobb oldalon az $x \ln(t)\,(t > 0)$ függvény 1 helyen vett különbségi hányadosa áll. Minthogy $h_n \to 0$, ha $n \to \infty$, azért

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+h_n\right)^{x/h_n} = x\ln'(1) = x,$$

s ezzel az (9) egyenlőséget igazoltuk. Speciálisan az $x = 1$ esetben az e szám következő előállítását kapjuk:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e. \tag{10}$$

4.2. Lokális szélsőérték

Már eddig is több, olyan függvényre vonatkozó ún. **lokális tulajdonsággal** találkoztunk, amelyben a függvénynek egy pont környezetében felvett értékei játszanak szerepet. Ilyen pl. a (belső pontban való) differenciálhatóság. Ez a tulajdonság megmarad, ha az eredeti függvény helyett annak a szóban forgó pont bármely környezetére vonatkozó leszűkítését tekintjük.

Ebben a pontban intervallumon értelmezett valós függvényeket vizsgálunk. Az ilyen függvényekre korábban értelmezett monotonitás mellet célszerű bevezetni ennek a fogalomnak egy lokális változatát.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in (\alpha, \beta)$ **pontban növekvő**, ha a-nak van olyan $K_r(a) \subseteq (\alpha, \beta)$ környezete, hogy*

$$
\begin{aligned}
& f(x) \leqq f(a), \text{ ha } a-r<x<a, \quad \text{és} \\
& f(a) \leqq f(x), \text{ ha } a<x<a+r.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Ha a-nak van olyan $K_r(a) \subseteq (\alpha, \beta)$ környezete, amelynek minden $x \in K_r(a)$ pontjában

$$f(x) \geq f(a), \text{ ha } a-r<x<a, \quad \text{és} \quad f(a) \geq f(x) \text{ ha } a<x<a+r$$

*teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az a **pontban fogyó**.*

*Ha a fenti értelmezésben a függvényértékekre vonatkozó feltétel a $\leq$ egyenlőtlenségek helyett a $<$ relációval, a $\geq$ helyett pedig a $>$ relációval teljesülnek, akkor f-et az a helyen **szigorúan növekedőnek**, ill. **szigorúan fogyónak nevezzük.***

A pontban való növekedés és fogyás nyilván lokális tulajdonság. Ezt azzal is szokás hangsúlyozni, hogy az előbb említett szóhasználat mellett azt is mondjuk, hogy az f függvény az a ***pontban lokálisan növekedő***, illetve ***lokálisan fogyó***.

A fenti értelmezést egybevetve a monoton függvény definíciójával nyilvánvaló, hogy **a monoton növekedő függvények** az értelmezési tartományuk minden pontjában **lokálisan növekedők**. Vannak viszont olyan függvények, amelyek valamely pontban növekedők, de ennek a pontnak egyetlen környezetében sem monoton növekedők. Ilyen pl. az

$$f(x) := \begin{cases} x, & (x \in \mathbb{Q}), \\ 2x, & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

függvény, amely a 0 pontban szigorúan növekedő, ugyanakkor az $\mathbb{R}$ semmilyen részintervallumában sem monoton.

A szélsőértéknek egy lokális változatát fogalmazzuk meg az alábbi értelmezésben.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban* ***lokális maxima van****, ha létezik az a-nak olyan $K_r(a) \subseteq (\alpha, \beta)$ környezete, hogy*

$$f(a) \geq f(x), \quad \text{ha} \quad x \in K_r(a).$$

Ha az a pontnak van olyan $K_r(a) \subseteq (\alpha, \beta)$ környezete, amelynek minden ponjában

$$f(a) \leqq f(x) \quad (x \in K_r(a))$$

teljesül, akkor azt monjuk, hogy az f függvénynek az a helyen ***lokális minimuma van****.*

A lokális maximumot és lokális minimumot **lokális szélsőértékeknek** nevezzük. A korábban bevezetett maximumot és minimumot — elnevezésben is megkülönböztetve a lokális szélsőértékektől — néha **abszolút maximumnak és abszolút minimumnak** is nevezik.

A derivált segítségével jellemezhetjük a függvények most értelmezett lokális tulajdonságait. Erre vonatkozik a

7. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban.*

i) Ha f az a-ban nő, akkor $f'(a) \geq 0$, ha f az a-ban csökken, akkor $f'(a) \leqq 0$.

ii) Ha $f'(a) > 0$, akkor az f függvény az a pontban szigorúan nő, ha pedig $f'(a) < 0$, akkor f az a-ban szigorúan fogy.

Bizonyítás. i) Ha f az a pontban nő, akkor a-nak van olyan $K_r(a)$ környezete, amelyben (11) teljesül. Innen következik, hogy

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \quad (x \in K_r(a),\ x \neq a).$$

Ezt felhasználva a 2.4. pont 1. Következménye alapján azt kapjuk, hogy

$$f'(a) = \lim_a \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

A lokális fogyásra vonatkozó állítás hasonlóan igazolható.

ii) Most tegyük fel, hogy $f'(a) > 0$. Ekkor a 2.4. pont 1. Következménye alapján létezik olyan $K_r(a)$ környezet, amelynek minden pontjában

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \quad (x \in K_r(a),\ x \neq a).$$

Innen következik, hogy

$$f(x) > f(a), \quad \text{ha} \quad x > a, \quad \text{és} \quad f(x) < f(a), \quad \text{ha} \quad x < a.$$

Ezzel megmutattuk, hogy az f függvény az a pontban szigorúan nő. Az állítás második része hasonlóan igazolható. □

Megjegyezzük, hogy a 7. Tétel i) része nem pontos megfordítása ii)-nek. Az

$$(12) \qquad f(x) := x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény a 0 pontban szigorúan nő, ugyanakkor $f'(0) = 0$. Ez a példa azt mutatja, hogy még az a pontbeli **szigorú növekedésből sem következik**, hogy $f'(a) > 0$.

A lokális szélsőérték és a derivált kapcsolatára vonatkozik az alábbi

> 8. Tétel. *Ha az $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in (\alpha, \beta)$ pontban differenciálható és itt lokális szélsőértéke van, akkor $f'(a) = 0$.*

Bizonyítás. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $f'(a) \neq 0$. Ekkor a 7. Tétel alapján $f'(a) > 0$ esetén az f függvény az a pontban szigorúan nő, $f'(a) < 0$ esetén pedig az f függvény az a pontban szigorúan fogy. Következésképpen f-nek nem lehet lokális szélsőértéke a-ban. A kapott ellentmondással az állítást igazoltuk. □

A most bizonyított tétel szerint az $f'(a) = 0$ **feltétel szükséges, de** — amint arról könnyen meggyőződhetünk — **nem elégséges** ahhoz, hogy f-nek a-ban lokális szélsőértéke legyen. Ez utóbbit a (12) alatt értelmezett f függvény példája mutatja. Ez ugyanis a 0 pontban szigorúan nő, ugyanakkor $f'(0) = 0$.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a 8. Tétel az a-ban **differenciálható** függvényekre vonatkozik, s ezért pl. az *abs* függvényre nem alkalmazható. Ennek a függvénynek a 0 helyen minimuma van, de ebben a pontban nem differenciálható.

4.3. A differenciálszámítás középérték-tételei

Ebben a pontban bebizonyítunk három alapvető tételt, amelyeket a későbbiek során gyakran felhasználunk.

> Rolle-tétel. *Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ **zárt** intervallumban, differenciálható az (a, b) **nyílt** intervallumban és $f(a) = f(b)$. Ekkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$ hely, ahol $f'(\xi) = 0$.*

Bizonyítás. A feltétel szerint az f függvény az $[a,b]$ kompakt halmazon folytonos. Weierstrass tétele alapján f-nek van abszolút maximuma és abszolút minimuma. Legyenek ezek

$$M := \max\{f(x) : x \in [a,b]\}, \quad m := \min\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Ha $M = m$, akkor f állandó, s ilyenkor az f deriváltja az (a,b) minden pontjában eltűnik.

Ha $m < M$, akkor $f(a) = f(b)$ miatt a függvény a M és m számok közül legalább az egyiket az (a,b) intervallum valamely ξ belső pontjában veszi fel. Következésképpen f-nek a ξ helyen lokális szélsőértéke van. A 8. Tétel alapján $f'(\xi) = 0$. □

A most igazolt tételből közvetlenül adódik az alábbi

Következmény. *Ha $f \in \mathcal{C}[a,b] \cap \mathcal{D}(a,b)$ és $f'(x) \neq 0$, ha $x \in (a,b)$, akkor $f(a) \neq f(b)$.*

A Rolle-tétel általánosítása az alábbi

Cauchy-tétel. *Tegyük fel, hogy az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ és $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $[a,b]$ **zárt** intervallumban és differenciálhatók az (a,b) **nyílt** intervallumban, továbbá $g'(x) \neq 0$, ha $x \in (a,b)$. Ekkor van olyan $\xi \in (a,b)$ hely, hogy*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Bizonyítás. A feltételek alapján a Következményt felhasználva adódik, hogy $g(a) \neq g(b)$, s ezért a bal oldalon álló tört nevezője nem 0.

Az állítás igazolásához vezessük be a

$$F(x) := f(x) - \lambda g(x) \quad (x \in [a,b])$$

függvényt, ahol a $\lambda \in \mathbb{R}$ számot úgy választjuk, hogy F kielégítse a Rolle-tétel feltételeit. Nyilvánvaló, hogy $F \in \mathcal{C}[a,b]$ és $F \in \mathcal{D}(a,b)$. Az $F(a) = F(b)$ feltétel azzal ekvivalens, hogy

$$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b),$$

azaz

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

A Rolle-tételt az F függvényre alkalmazva azt kapjuk, hogy létezik olyan $\xi \in (a,b)$ hely, ahol

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \lambda g'(\xi).$$

Innen az

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

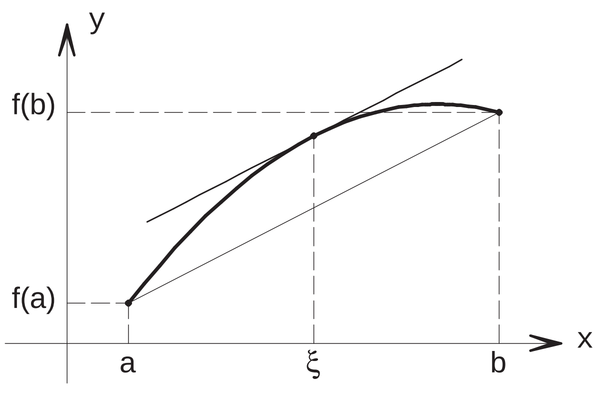
bizonyítandó állítás következik. □

A most igazolt tételből a $g(x) := x$ $(x \in (a, b))$ speciális esetben adódik a

> Lagrange-tétel. *Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $[a, b]$* ***zárt*** *intervallumban és differenciálható az (a, b)* ***nyílt*** *intervallumban, akkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$ hely, hogy*
>
> $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

A Lagrange-tételből az $f(a) = f(b)$ speciális esetben visszakapjuk a Rolle-tételt.

A Lagrange-tétel állítása — geometriailag fogalmazva — azt jelenti, hogy az f grafikonjának van olyan pontja, amelyben az érintő párhuzamos az $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ végpontokat összekötő szelővel.



2. ábra

Az említett tétel — figyelembe véve a benne szereplő fogalmak fizikai jelentését — úgy is interpretálható, hogy mindig van az átlagsebességgel egyenlő pillanatnyi sebesség.

A most bizonyított három tételt a **differenciálszámítás középérték-tételeinek** nevezzük. Az ezekben szereplő feltételek egyike sem hagyható el.

Az $f(x) := |x|$ $(x \in [-1, 1])$ függvény az $f \in \mathcal{D}[-1, 1]$ feltételnek nem tesz eleget. A $g(x) := 0$ $(-1 \leqq x < 1)$, $g(1) := 1$ utasítással értelmezett függvény nem folytonos az 1 helyen. Nyilvánvaló sem f-re, sem g-re nem teljesül a Lagrange-tétel állítása, ugyanis minden $\xi \in (-1, 1)$ pontban, ahol a derivált létezik

$$\frac{f(1) - f(-1)}{2} = 0 \neq f'(\xi) \in \{1, -1\}, \quad \frac{g(1) - g(-1)}{2} = 1 \neq g'(\xi) = 0.$$

A Lagrange-féle középértéktételből közvetelenül adódik az alábbi

9. Tétel. *Legyen $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény.*

i) Az f akkor és csak akkor monoton növekedő, ha minden $x \in (\alpha, \beta)$ pontban $f'(x) \geq 0$.

ii) Az f akkor és csak akkor monoton fogyó , ha minden $x \in (\alpha, \beta)$ pontban $f'(x) \leq 0$.

iii) Az f akkor és csak akkor konstans, ha minden $x \in (\alpha, \beta)$ pontban $f'(x) = 0$.

Bizonyítás. Ha f monoton növő, akkor f minden $x \in (\alpha, \beta)$ pontban lokálisan nő, következésképpen a 7. Tétel alapján $f'(x) \geq 0$.

Megfordítva, most induljunk ki abból, hogy $f'(x) \geq 0\,(x \in (\alpha, \beta))$. Legyen $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ és alkalmazzuk a Lagrange-féle középérték-tételt az f függvény $[x_1, x_2]$ intervallumra vonatkozó leszűkítésére. Ennek alapján alkalmas $\xi \in (\alpha, \beta)$ számmal fennáll az

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

egyenlőség. Minthogy f' nemnegatív, azért innen azt kapjuk, hogy minden, az értelmezési tartományba eső $x_1 < x_2$ pontpárra $f(x_1) \leqq f(x_2)$.

A monoton fogyó függvényekre vonatkozó állítás ugyanígy igazolható.

Minthogy f pontosan akkor konstans, ha egyszerre monoton növekedő és monoton fogyó, azért iii) következik i)-ből és ii)-ből. □

A deriváltfüggvény egy érdekes tulajdonságát fogalmazzuk meg az alábbi állításban.

Darboux-tétel. *Legyen $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ differenciálható, $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ és $f'(x_1) \neq f'(x_2)$. Ekkor minden $f'(x_1)$ és $f'(x_2)$ közé eső c számhoz létezik olyan $\xi \in (x_1, x_2)$ hely, amelyre $f'(\xi) = c$.*

Bizonyítás. Vezessük be az $F(x) := f(x) - cx$ $(x \in (\alpha, \beta))$ függvényt. A F függvény is differenciálható és deiváltja $F' = f' - c$. Megmutatjuk, hogy F-nek az (x_1, x_2) intervallumban van lokális szélsőértéke. ξ-vel jelölve F-nek egy ilyen szélsőértékhelyét, a 8. Tétel alapján ebben a pontban $F'(\xi) = f'(\xi) - c = 0$.

A lokális szélsőérték létezésének igazolásához induljunk ki pl. abból, hogy

$$f'(x_1) < c < f'(x_2). \tag{13}$$

Minthogy az F függvény $[x_1, x_2]$-re vonatkozó leszűkítése folytonos, azért a Weierstrass-tétel alapján F-nek az $[x_1, x_2]$ zárt intervallumban van abszolút maximuma és abszolút minimuma. A (13) feltételből

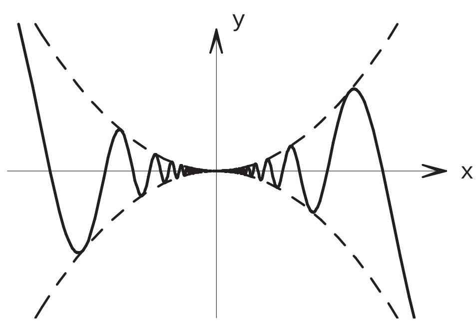
$$F'(x_1) = f'(x_1) - c < 0, \quad F'(x_2) = f'(x_2) - c > 0$$

következik. Innen — a 7. Tétel alapján — azt kapjuk, hogy F az x_1 pontban szigorúan fogy, az x_2 pontban pedig szigorúan nő, következésképpen ezek egyike sem lehet abszolút minimumhely. F-nek a minimumhelye tehát valóban az (x_1, x_2) egy belső pontja. □

A most igazolt tétellel kapcsolatban szokás a következő fogalmat bevezetni. Akkor mondjuk, hogy a $g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ **függvény Darboux-tulajdonságú**, ha minden olyan $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ helyhez, amelyre $g(x_1) \neq g(x_2)$ és minden $g(x_1)$ és $g(x_2)$ közé eső c számhoz létezik olyan $\xi \in (x_1, x_2)$ szám, hogy $g(\xi) = c$. E szóhasználattal élve a Bolzano-tétel pontosan azt fejezi ki, hogy a — nyilt intervallumon értelmezett — folytonos függvények Darboux-tulajdonságúak. A Darboux-tétel pedig a következőképpen fogalmazható meg: Minden nyílt intervallumon értelmezett, differenciálható függvény deriváltja Darboux-tulajdonságú.

Ha valamely $g \in \mathcal{D}(\alpha, \beta)$ függvény deriváltja folytonos, akkor — a Bolzano-tétel alapján — g' deriváltja Darboux-tulajdonságú. A fenti tétel szerint g' akkor is Darboux-tulajdonságú, ha g' nem folytonos. Ilyen függvény például a következő:

$$g(x) := \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ 0, & (x = 0). \end{cases}$$



3. ábra

A közvetett függvény differenciálási szabálya alapján g minden 0-tól különböző helyen deriválható és

$$g'(x) = -\cos \frac{1}{x} + 2x \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

A 0 pontban való differenciálhatóságot a definició alapján igazolhatjuk. A g függvény 0 pontbeli különbségi hányadosára

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} \to 0, \quad \text{ha} \quad x \to 0$$

teljesül. Ezzel megmutattuk, hogy g a 0 pontban is differenciálható és $g'(0) = 0$. Egyszerűen igazolható (lásd a következő pont végén ismertetett példát), hogy g'-nek a 0-ban nincs sem bal-, sem jobboldali határértéke, azaz g-nek másodfajú szakadása van a 0-ban. Ezzel összefüggésben megjegyezzük, hogy a **Darboux-tulajdonságú függvényeknek nem lehet elsőfajú szakadása** (lásd a 22. Feladatot).

4.4. Néhány elemi függvény inverze

Ebben a pontban kiegészítjük a *sin*, *cos*, *sinh* és *cosh* függvényekről mondottakat. Vizsgáljuk ezek invertálhatóságának kérdését, és ezek hányadosaként bevezetjük a *tg*, *ctg*, *tgh* és *ctgh* függvényeket.

Az invertálhatósággal kapcsolatban emlékeztetünk arra, hogy minden intervallumon értelmezett, szigorúan monoton függvénynek van inverze. Ha ezenkívül a függvény még folytonos is, akkor inverze is folytonos.

4.4.1. A trigonometrikus függvények néhány tulajdonsága

Először is bebizonyítjuk a *cos* függvény zérushelyeire vonatkozó alábbi állítást.

1. Segédtétel. *A cos függvénynek a* $(0, 2)$ *intervallumban pontosan egy zérushelye van.*

Bizonyítás. Az állítás igazolásához megmutatjuk, hogy a *cos* függvény a $[0, 2]$ inervallumban szigorúan monoton fogyó, valamint $\cos(0) > 0$ és $\cos(2) < 0$. Minthogy a *cos* függvény folytonos, innen a Bolzano-tétel alapján az állítás már következik.

A valós *cos* függvény értelmezéséből követekezik, hogy minden $x \in [0, 2]$ pontban

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x^2}{3 \cdot 4}\right) - \frac{x^6}{6!}\left(1 - \frac{x^2}{7 \cdot 8}\right) + \cdots < \\ &< 1 - \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12}\right).\end{aligned}$$

Innen nyilvánvaló, hogy
$$\cos 0 = 1 > 0 > -\frac{1}{3} = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) \geq \cos 2.$$
Mivel $\cos'(x) = -\sin(x)$ és
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{14}$$
$$= x\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right) + \cdots > 0,$$
ha $0 < x < \sqrt{6}$, azért a *cos* függvény a $[0,2]$ intervallumban valóban szigorúan monoton fogy. □

A most igazolt állítás alapján bevezetjük a π számot.

Definíció. *π-vel jelöljük azt a valós számot, amelynek felére*
$$0 < \frac{\pi}{2} < 2, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0$$
teljesül.

A *sin* és *cos* addiciós képleteiből egyszerűen következik az alábbi

10. Tétel. *Minden $z \in \mathbb{C}$ komplex számra*
$$\sin(z + 2\pi) = \sin(z), \qquad \cos(z + 2\pi) = \cos(z). \tag{15}$$
2π az a legkisebb pozitív szám, amelyre a (15) egyenlőség minden $z \in \mathbb{C}$ számra teljesül.

Bizonyítás. A négyzetes összefüggés alapján
$$\sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2} = \sin^2\frac{\pi}{2} + 0 = 1.$$
Mivel (14) alapján $\sin(\pi/2) > 0$, azért $\sin(\pi/2) = 1$. Ezt figyelembe véve az addiciós képletek alapján azt kapjuk, hogy
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \mp x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x \mp \cos\frac{\pi}{2}\sin x = \cos x, \tag{16}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \mp x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x \pm \sin\frac{\pi}{2}\sin x = \pm\sin x.$$
Innen következik:
$$\sin(\pi + x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, \tag{17}$$
$$\cos(\pi + x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x,$$
$$\sin(2\pi + x) = \sin\left(\pi + (\pi + x)\right) = -\sin\left(\pi + x\right) = \sin x,$$
$$\cos(2\pi + x) = \cos\left(\pi + (\pi + x)\right) = -\cos\left(\pi + x\right) = \cos x.$$

Ezzel az állítás első részét igazoltuk.

A második rész igazolásához tegyük fel, hogy — az állítással ellentétben — létezik olyan $0 < h < 2\pi$ szám, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\sin(x+h) = \sin(x) \tag{18}$$

teljesül. Innen — véve az $x = 0$ számot — $\sin h = 0$ következik. A (16) és (17) azonosságok alapján nyilvánvaló, hogy $\sin \pi = 0$ és $\sin h \neq 0$, ha $h \in (0, 2\pi)$ és $h \neq \pi$. Mivel $\sin(\pi/2) = 1$, valamint $\sin(3\pi/2) = -1$, azért (18) a $h = \pi$ esetén $x = \pi/2$ mellett nem áll fenn.

Hasonlóan mutatható meg, hogy $0 < h < 2\pi$ esetén a $\cos(x+h) = \cos x$ egyenlőség sem állhat fenn minden $x \in \mathbb{C}$ számra. $\square$

Egyszerűen igazolható, hogy

$$\begin{aligned} \sin x = 0, &\quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ \cos x = 0, &\quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

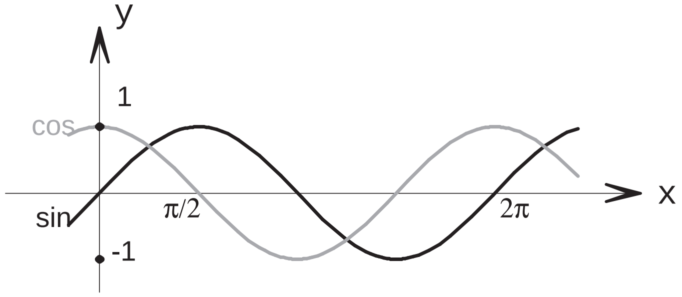
A most igazolt tétellel kapcsolatos az alábbi fogalom.

Definíció. *Legyen $H \subseteq \mathbb{K}$. Akkor mondjuk, hogy az $f : H \to \mathbb{K}$ függvény* ***periodikus****, ha létezik olyan 0-tól különböző $p \in \mathbb{K}$ szám, hogy minden $x \in H$ elemre*

$$x + p \in H \quad \text{és} \quad f(x) = f(x+p).$$

A p számot a ***függvény periódusának****, magát az f-et pedig* ***p-szerint periodikus függvénynek*** *nevezzük.*

A 10. Tételben — a most bevezetett fogalmat használva — azt igazoltuk, hogy a komplex *sin* és *cos* függvény 2π-szerint periodikus. Az alábbi ábrán szemléltetjük a valós *sin* és *cos* függvényt.



4. ábra

A
$$\sin(n\pi) = (-1)^n \quad (n \in \mathbb{Z})$$
egyenlőség alapján következik, hogy az
$$f(x) := \cos\frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq 0)$$
függvénynek a 0-ban nincs határértéke. Valóban, legyen $x_n := 1/(n\pi)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Ekkor nyilván
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{és} \quad f(x_n) = (-1)^n \quad (n \in \mathbb{N}),$$
s ezért — az átviteli elv alapján — f-nek a 0-ban nincs határértéke.

4.4.2. A tangens- és a kotangensfüggvény

A *sin* és *cos* függvényből kiindulva bevezetjük az alábbi függvényeket.

Definíció. *A*
$$tg(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad (x \in D_{tg} := \mathbb{R} \setminus \{(k+1/2)\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$$
$$ctg(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad (x \in D_{ctg} := \mathbb{R} \setminus \{k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$$
utasítással értelmezett tg és ctg függvényt valós ***tangens-*** *és* ***kotangensfüggvénynek*** *nevezzük.*

Ebből az értelmezésből — felhasználva a hányadosfüggvény és a trigonometrikus függvények differenciálási szabályát — következik, hogy a tg és ctg függvény értelmezési tartományuk minden x pontjában differenciálható és

(19)
$$\frac{d}{dx}\mathrm{tg}(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2(x),$$
$$\frac{d}{dx}\mathrm{ctg}(x) = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \mathrm{ctg}^2(x)).$$

A *sin* és *cos* függvény korábban igazolt tulajdonságait felhasználva egyszerűen adódnak a következő állítások:

a) a tg és ctg páratlan függvény, azaz
$$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}(x) \quad (x \in D_{tg}), \qquad \mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}(x) \quad (x \in D_{ctg}).$$

b) A *tg* és *ctg* függvények egymásból eltolással származtathatók:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{ctg}(x)\quad (x\in D_{ctg}),\qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{ctg}(x)\quad (x\in D_{ctg}).$$

c) A *tg* és *ctg* függvény π szerint periodikus.

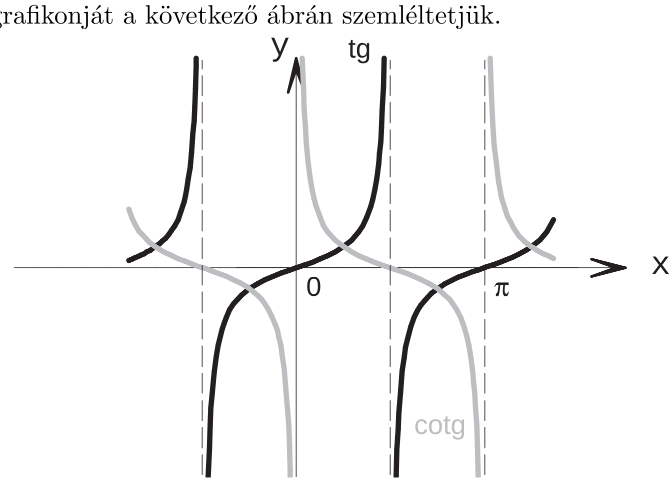
d) A *tg* függvény a $(-\pi/2,\pi/2)$ intervallumban szigorúan monoton növő és

$$\lim_{x\to-\pi/2+}\operatorname{tg}(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to\pi/2-}\operatorname{tg}(x)=+\infty.$$

e) A *ctg* függvény a $(0,\pi)$ intervallumban szigorúan monoton fogyó és

$$\lim_{x\to0+}\operatorname{ctg}(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to\pi-}\operatorname{ctg}(x)=-\infty.$$

A *sin*, *cos*, *tg* és *ctg* függvényeket **trigonometrikus függvényeknek** nevezzük. A két utóbbi grafikonját a következő ábrán szemléltetjük.



5. ábra

4.4.3. A trigonometrikus függvények inverze

A *sin*, *cos*, *tg* és *ctg* függvények periodikusak, következésképpen értékkészletük minden elemét végtelen sokszor felveszik. Ezért ezeknek a függvényeknek nyilván nincs inverzük. Alkalmasan vett leszűkítésük azonban már invertálhatók. Az alábbiakban a szóban forgó függvények valós változatából kiindulva kiválasztjuk ezeknek egy-egy szigorúan monoton szakaszát és megvizsgáljuk az ezekből invertálással kapott függvények tulajdonságait.

Definíció. *i) A sin függvény $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumra vonatkozó leszűkítésének inverzét* ***árkusz szinusz*** *függvénynek nevezzük és az arcsin szimbólummal jelöljük.*

ii) A cos függvény $[0, \pi]$ intervallumra vonatkozó leszűkítésének inverzét ***árkusz koszinusz*** *függvénynek nevezzük és az arccos szimbólummal jelöljük.*

iii) A tg függvény $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumra vonatkozó leszűkítésének inverzét ***árkusz tangens****, a ctg függvény $(0, \pi)$-re vonatkozó leszűkítésének inverzét pedig* ***árkusz kotangens*** *függvénynek nevezzük és ezeket az arctg és arcctg szimbólummal jelöljük.*

Mivel a *sin* függvény a $[-\pi/2, \pi/2]$ intervallumban szigorúna monoton növő és $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$, ha $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, azért az *arcsin* függvény is szigorúan monoton növő, folytonos függvény, amely differenciálható a $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumban. Deriváltját — az inverz függvény (8) deriválási szabályát felhasználva — a következőképpen kaphatjuk meg:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \quad (x \in (-1, 1)).$$

A négyzetes össefüggés alapján az utóbbi függvény nevezője a következőképpen írható fel:

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\mathrm{arsin}(x))} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Ezzel beláttuk, hogy

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (x \in (-1, 1)).$$

Az alábbiakban összefoglaljuk az *arcsin*, *arccos*, *arctg* és *arcctg* függvények legfontosabb tulajdonságait.

a) D_f-fel jelölve az f függvény értelmezési tartományát, R_f-fel pedig értékkészletét fennáll a következő:

$$\begin{aligned}
D_{arcsin} &= [-1, 1], & R_{arcsin} &= \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\
D_{arccos} &= [-1, 1], & R_{arccos} &= [0, \pi], \\
D_{arctg} &= (-\infty, \infty), & R_{arctg} &= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\
D_{arcctg} &= (-\infty, \infty), & R_{arcctg} &= (0, \pi).
\end{aligned}$$

b) E függvények és inverzük közti kapcsolat az alábbi formában írható fel:

$$\begin{aligned}
&\sin(\arcsin(x)) = x \quad (x \in [-1,1]), && \arcsin(\sin(x)) = x \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right),\\
&\cos(\arccos(x)) = x \quad (x \in [-1,1]), && \arccos(\cos(x)) = x \quad (x \in [0,\pi]),\\
&\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}(x)) = x \quad (x \in (-\infty,\infty)), && \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(x)) = x \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right),\\
&\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}(x)) = x \quad (x \in (-\infty,\infty)), && \mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}(x)) = x \quad (x \in (0,\pi)).
\end{aligned}$$

c) Az *arcsin*, *arccos*, *arctg* és *arcctg* függvények folytonosak, továbbá

$$\begin{aligned}
\arccos(x) &= \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \quad (x \in [-1,1]),\\
\mathrm{arcctg}(x) &= \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(x) \quad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

d) Az *arcsin* és az *arctg* függvény szigorúan monoton növő, az *arccos* és az *arcctg* függvény szigorúan monoton fogyó.

e) Az *arcsin*, *arccos*, *arctg* és *arcctg* függvények értelmezési tartományuk belső pontjaiban differenciálhatók és

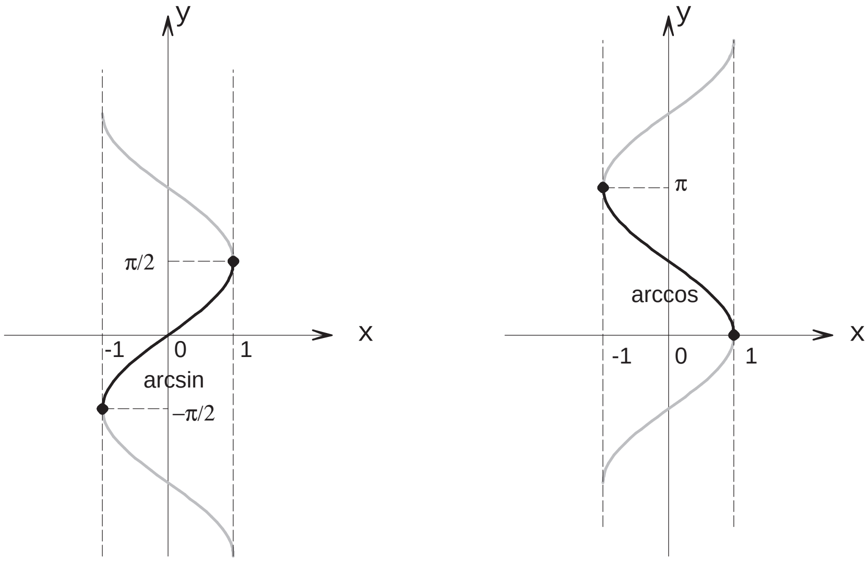
$$\begin{aligned}
\arcsin'(x) = -\arccos'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1,1)),\\
\mathrm{arctg}'(x) = -\mathrm{arcctg}'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Az *arctg* függvény deriváltja — az inverz függvény differenciálási szabályát és (19) alapján — a következőképpen adódik:

$$\mathrm{arctg}'(x) = \frac{1}{\mathrm{tg}'(\mathrm{arctg}(x))} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

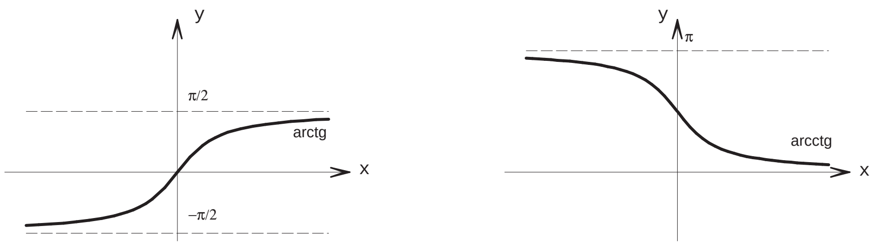
A most értelmezett *arcsin*, *arccos*, *arctg* és *arcctg* függvényeket **ciklometrikus függvényeknek** nevezzük. A *sin*, *cos*, stb. függvények egy másik, szigorúan monoton ágából kiindulva invertálással a most kapott ciklometrikus függvényektől különböző, de azokból egyszerűen származtatható függvényeket kapunk. Ezeket az *arcsin*, *arccos*, stb. **mellékágainak**, míg magukat a ciklometrikus függvényeket **főágnak** szokás nevezni.

Az alábbi ábrákon szemléltetjük az *arcsin* és *arctg* függvények grafikonját. A grafikonon szaggatott vonallal szemléltetjük az *arcsin* két mellékágát is.



6. ábra

Az *arctg* és az *arcctg* függvények grafikonja:



7. ábra

4.4.4. A hiperbolikus függvények inverze

A *cosh* és *sinh* függvényeket hatványsoruk segítségével értelmeztük:

$$\sinh(x) := x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cosh(x) := 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

E definíció alapján nyilvánvaló, hogy

$$\cosh(x) > 1 \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \sinh(x) > 0 \quad (x > 0),$$
$$\sinh(x) = -\sinh(-x) < 0 \quad (x < 0).$$

Mivel $\sinh' = \cosh$ és $\cosh' = \sinh$, azért a most mondottakból következik, hogy a *sinh* függvény az $\mathbb{R}$-en, a *cosh* függvény a $[0, \infty)$ intervallumon szigorúan monoton növekedő. A

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

összefüggés alapján nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{x\to-\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to+\infty} \cosh(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \sinh(x) = +\infty.$$

Innen következik, hogy

$$R_{sinh} = \mathbb{R}, \quad R_{cosh} = [1, \infty).$$

Definíció. *A sinh függvény inverzét* ***área szinusz hiperbolikusz*** *függvénynek, a cosh függvény* $[0, \infty)$ *intervallumra vonatkozó leszűkítésének inverzét* ***área koszinusz hiberbolikusz*** *függvénynek nevezzük és ezeket az arsinh és arcosh szimbólumokkal jelöljük.*

A fenti értelmezésből — felhasználva az inverz függvényre korábban igazolt tételeket — egyszerűen adódnak a következő állítások:
a) Az *arsinh* és *arcosh* függvények értelmezési tartománya, illetve értékkészlete:

$$D_{arsinh} = \mathbb{R}, \quad D_{arcosh} = [1, \infty), \quad R_{arsinh} = \mathbb{R}, \quad R_{arcosh} = [0, \infty).$$

b) Az eredi és az inverz függvény közti kapcsolatot felírva

$$\sinh(\operatorname{arsinh}(x)) = \operatorname{arsinh}(\sinh(x)) = x, \quad \operatorname{arcosh}(\cosh(x)) = x \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$\cosh(\operatorname{arcosh}(x)) = x \quad (x \in ([1, \infty)).$$

adódik.
c) Az *arsinh* és *arcosh* függvények folytonosak és monoton növekedőek.
d) Az *arsinh* és az *arcosh* függvény differenciálható és

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arsinh}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1).$$

e) Az *arsinh* és az *arcosh* függvény kifejezhető a logaritmus és a négyzetgyök függvény segítségével:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad (x \geq 1).$$

Az *e*) alatti azonosságok a következőképpen igazolhatók. Induljunk ki az

$$x = \sinh(\operatorname{arsinh}(x)) = \frac{e^{\operatorname{arsinh}(x)} - e^{-\operatorname{arsinh}(x)}}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

azonosságból. Bevezetve a $t := e^{\operatorname{arsinh}(x)}$ jelölést — átrendezés után — t-re a következő másodfokú egyenlet adódik:

$$t^2 - 2tx - 1 = 0.$$

Mivel $t > 0$, a gyökképletben az ennek megfelelő megoldást felírva

$$t = e^{\operatorname{arsinh}(x)} = x + \sqrt{x^2+1}$$

adódik. A fenti helyett az

$$x = \cosh(\operatorname{arcosh}(x)) = \frac{e^{\operatorname{arcosh}(x)} + e^{-\operatorname{arcosh}(x)}}{2} \quad (x > 1)$$

azonosságból kiindulva az állítás második része ugyanúgy igazolható. A *d*)-ben felírt deriválási szabály — pl. a most igazolt azonosságok és a láncszabály alapján — egyszerű számolással adódik.

Az előzőek mintájára bevezetjük *tgh* és *ctgh* függvényeket.

Definíció. *A*

$$tgh(x) := \frac{sinh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$ctgh(x) := \frac{cosh(x)}{sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (x \in \mathbb{R},\, x \neq 0)$$

utasítással értelmezett tgh és ctgh függvényeket ***tangens hiperbolikusz-****, illetve* ***kotangens hiperbolikusz függvénynek*** *nevezzük.*

A fenti értelmezések alapján nyilvánvaló, hogy

a) $D_{tgh} = \mathbb{R}, \quad R_{tgh} = (-1, 1),$
$D_{ctgh} = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad R_{ctgh} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$

b) a $\mathrm{tgh} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ függvény szigorúan növő.

c) $\mathrm{tgh}(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ctgh}(x)} \quad (x \in \mathbb{R},\, x \neq 0), \quad \mathrm{tgh}(-x) = -\mathrm{tgh}(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{tgh}(x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{tgh}(x) = 1.$

e) $\mathrm{tgh}'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)} \quad (x \in \mathbb{R}),$

$\mathrm{ctgh}'(x) = -\dfrac{1}{\sinh^2(x)} \quad (x \in \mathbb{R},\, x \neq 0).$

Definíció. *A tgh függvény inverzét* ***área tangens hiperbolikusz*** *függvénynek nevezzük és az artgh szimbólummal jelöljük.*

Az értelmezés alapján nyilvánvaló, hogy
a) Az *artgh* függvény folytonos és

$$D_{artgh} = (-1, 1), \quad R_{artgh} = \mathbb{R}.$$

b) Az *artgh* függvény szigorúan monoton növő.
c) Az *artgh* függvény mindenütt differnciálható és

$$\mathrm{artgh}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}, \quad (x \in (-1, 1)).$$

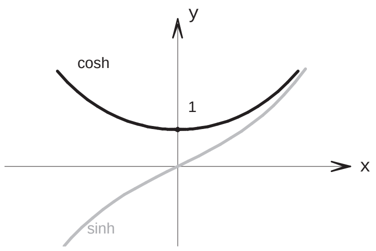
d) Az *artgh* függvény kifejezhető a logaritmus függvény segítségével:

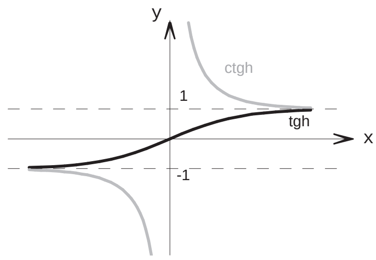
$$\mathrm{artgh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \quad (x \in (-1, 1)).$$

Ez utóbbi azonosság az

$$x = \operatorname{tgh}(\operatorname{artgh}(x)) = \frac{e^{\operatorname{artgh}(x)} - e^{-\operatorname{artgh}(x)}}{e^{\operatorname{artgh}(x)} + e^{-\operatorname{artgh}(x)}} \quad (x \in (-1,1))$$

alapján egyszerűen igazolható, a *tgh* differenciálási szabálya pedig *d*)-ből a láncszabály alapján levezethető. Az alábbi ábrákon a *sinh*, *cosh*, *tgh* és *ctgh* függvények grafikonját szemléltetjük.





8. ábra

4.5. Feladatok

1. Legyen $f(x) = \sqrt{x}$ $(x > 0)$. Határozzuk meg az $f'(3)$ és $f'(10)$ értékeket.
2. Legyen $f(x) = x^3 + ax^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Milyen x pontban teljesül az $f'(x) = f(x)$ feltétel ?
3. Legyen $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ és $g(x) := 1/x$ $(x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$. Határozzuk meg az f és g metszéspontjában az f és g érintőjének hajlásszögét.
4. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények a feltüntetett helyeken nem differenciálhatók:

   a) $f(x) := \sqrt[3]{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), a = 0,$ *b*) $f(x) := |x - 1| \quad (x \in \mathbb{R}), a = 1,$
   c) $f(x) := |\cos(x)| \quad (x \in \mathbb{R}), a = \pi/2.$

5. Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények értelmezési tartományuk melyik pontjában differenciálhatók, és határozzuk meg deriváltjukat.

   a) $f(x) := |x| \quad (x \in \mathbb{R}),$ *b*) $f(x) =: x|x| \quad (x \in \mathbb{R}),$
   c) $f(x) := \ln|x| \quad (x \in \mathbb{R},\, x \neq 0),$
   d) $f(x) := \begin{cases} 1 - x, & (x < 0), \\ e^{-x}, & (x \geq 0), \end{cases}$
   e) $f(x) := \begin{cases} x + x^2, & (x < 0), \\ x - x^2, & (x \geq 0). \end{cases}$

6. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját:

a) $f(x) := ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{C})$,

b) $f(x) := \dfrac{2x+3}{x^2-5x+5} \quad (x \in \mathbb{R})$,

c) $f(x) := \dfrac{ax+b}{cx-d} \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq d/c)$,

d) $f(x) := x^2\sqrt[3]{x^2} \quad (x \in\in \mathbb{R})$,

e) $f(x) := \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \quad (x > 0)$,

f) $f(x) := \dfrac{x}{2} + \ln(2\sqrt{x}) \quad (x > 0)$.

7. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját:

a) $f(x) := \operatorname{tg}(x) - \operatorname{ctg}(x) \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq k\pi/2\ (k \in \mathbb{Z}))$,

b) $f(x) := \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \quad (x \in \mathbb{R},\ \sin x \neq \cos x)$,

c) $f(x) := \dfrac{(1+x^2)\operatorname{arctg}(x) - x}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

8. Számítsuk ki az alábbi valós függvények deriváltját. A függvények értelmezési tartománya az $\mathbb{R}$-nek az a legtágabb részhalmaza, amelyen a kijelölt utasítá-

soknak van értelme.

a) $f(x) := \operatorname{ctg}(x) - \operatorname{ctg}(\pi/4)$, *b)* $f(x) = \sin^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

c) $f(x) := \sin(x^2 - 5x + 1) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, *d)* $f(x) := xe^x + x$,

e) $f(x) := \arcsin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, *f)* $f(x) := \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$,

g) $f(x) := 5e^{-x^2}$, *h)* $f(x) := \ln(\sin(x))$,

i) $f(x) := \ln(x+1) + \ln(\sqrt{x+1})$,

j) $f(x) := x\sin(2^x)$, *k)* $f(x) := \ln^2 x - \ln(\ln x)$,

ℓ) $f(t) := (2t+1)\sqrt{3t+2}\sqrt[3]{3t+3}$, *m)* $f(x) := \log_2(3^x + 5)$,

n) $f(y) := \left(\dfrac{2+3y^n}{2-3y^n}\right)^m$, *o)* $f(x) := \arcsin\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)$,

p) $f(x) := \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x\sin(\pi/4)}{1-x\cos(\pi/4)}\right)$, *r)* $f(x) := e^{\sin^2 x}$,

s) $f(x) := \sqrt{x^2+1} - \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$, *t)* $f(t) := e^t \cos t$,

u) $f(x) := \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{\operatorname{tg}(x/2) + 2 - \sqrt{3}}{\operatorname{tg}(x/2) + 2 + \sqrt{3}}\right)$, *v)* $f(x) := \operatorname{arctg}(\ln x)$,

w) $f(x) := \operatorname{arcosh}(\ln x)$, *x)* $f(x) := \operatorname{artgh}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$,

y) $f(x) := \operatorname{tgh}(x^2+1) + \operatorname{ctgh}(x^2-1)$,

z) $f(x) := \operatorname{arcosh}(\cos x)$.

9. Igazoljuk, hogy az alább felsorolt függvények deriváltjai kielégítik a felírt egyenletet:

a) $f(x) := \dfrac{1}{1+x+\ln x}$; $xf'(x) = f(x)\,(f(x)\ln x - 1) \quad (x > 0)$,

b) $f(x) := xe^{-\frac{x^2}{2}}$; $xf'(x) := (1-x^2)f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$.

10. Számítsuk ki az alábbi valós függvények deriváltját.

   a) $f(x) := x^x \quad (x > 0)$, *b*) $f(x) = x^{x^x} \quad (x > 0)$,
   c) $f(x) := x^{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$, *d*) $f(x) := (\cos x)^{\sin x} \quad (0 < x < \pi/2)$,
   e) $f(x) := x^{\sin x} \quad (x > 0)$, *f*) $f(x) := x^{x^2} \quad (x > 0)$,
   g) $f(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, *h*) $f(x) := x^{1/x} \quad (x > 0)$,
   i) $f(x) := (\operatorname{arctg}(x))^x \quad (x > 0)$, *j*) $f(x) := (\ln x)^x \quad (x > 1)$.

11. Legyen $f(x) := x(x+1)(x+2)(x+3)$ $(x \in \mathbb{R})$. Igazoljuk, hogy az $f'(x) = 0$ egyenletnek három valós gyöke van.

12. Igazoljuk, hogy azn $e^x = x + 1$ egyenletnek a 0 számon kívül nincs más valós gyöke.

13. Határozzuk meg az (a, b) intervallumnak azt a ξ pontját, amelyben az $f(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény grafikonjának érintője párhuzamos az $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ pontokat összekötő szelővel.

14. Legyen $f(x) := x^2 + 2$, $g(x) := x^3 - 1$ $(x \in [1, 2])$. Határozzuk meg azt a $\xi \in (1, 2)$ pontot, amelyre

$$\frac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

   teljesül.

15. Milyen intervallumon monotonok az alábbi függvények ?

   a) $f(x) := 1 - 4x - 4x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$, *b*) $f(x) = x^2(x - 3) \quad (x \in \mathbb{R})$,
   c) $f(x) := \frac{x}{x - 2} \quad (x \in \mathbb{R})$, *d*) $f(x) := \frac{x}{x^2 - 6x - 16} \quad (x \in \mathbb{R})$,
   e) $f(x) := (x - 3)\sqrt{x} \quad (x > 0)$, *f*) $f(x) := 2e^{x^2 - 4x} \quad (x \in \mathbb{R})$,
   g) $f(x) := e^{\frac{1}{x-a}} \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq a)$, *h*) $f(x) := x \ln x \quad (x > 0)$,
   i) $f(x) := \frac{e^x}{x} \quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq 0)$, *j*) $f(x) := xe^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

16. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékhelyeit.

$$
\begin{aligned}
&a) \quad f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \quad (x \in \mathbb{R}),\\
&b) \quad f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5 \quad (x \in \mathbb{R}),\\
&c) \quad f(x) := x^2(x-12)^2 \quad (x \in \mathbb{R}),\\
&d) \quad f(x) := 2\cos(x/2) + 3\cos(x/3) \quad (x \in \mathbb{R}),\\
&e) \quad f(x) := x - \ln(1+x) \quad (x > -1),\\
&f) \quad f(x) := x\ln^2 x \quad (x > 0),\\
&g) \quad f(x) := xe^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}),\\
&h) \quad f(x) := \frac{(x-2)(8-x)}{x^2} \quad (x \in \mathbb{R},\, x \neq 0).
\end{aligned}
$$

17. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket.

$$
\begin{aligned}
&a) \quad x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (x > 0),\\
&b) \quad e^x > 1 + x \quad (x \in \mathbb{R},\, x \neq 0),\\
&c) \quad x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \quad (x > 0),\\
&d) \quad \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x \in \mathbb{R},\, x \neq 0).
\end{aligned}
$$

18. Határozzuk meg az alábbi függvények abszolút maximumát és minimumát.

$$
\begin{aligned}
&a) \quad f(x) := \frac{x}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),\\
&b) \quad f(x) = x^3 \quad (x \in [-1,3]),\\
&c) \quad f(x) := \sin^4 x + \cos^4 x \quad (x \in \mathbb{R}),\\
&d) \quad f(x) := 22x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad (x \in [-1,5]),\\
&e) \quad f(x) := 22x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad (x \in [-10,12]).
\end{aligned}
$$

19. Igazoljuk az alábbi azonosságokat.

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x < 1),\\
&b) \quad -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1 < x < 1),\\
&c) \quad \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad (-1 < x < 1),\\
&d) \quad \operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad (-1 < x < 1).
\end{aligned}
$$

20. Mutassuk meg, hogy az alábbi $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ típusú függvények nem differenciálhatók.

$$a)\quad f(z) := \mathrm{re}(z) \quad (z \in \mathbb{C}), \qquad b)\quad f(z) := \mathrm{im}(z) \quad (z \in \mathbb{C}),$$
$$c)\quad f(z) := |z| \quad (z \in \mathbb{C}), \qquad d)\quad f(z) := \arg(z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

21. Igazoljuk, hogy az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény akkor és csak akkor szigorúan monoton növő, ha minden $x \in (a, b)$ pontban $f'(x) \geq 0$ és az f' az (a, b) egyetlen részintervallumában sem azonosan 0.
22. Igazoljuk, hogy Darboux tulajdonságú függvényeknek nem lehet elsőfajú szakadása.

5. A differenciálszámítás néhány alkalmazása

Ebben a fejezetben — a deriválttal összefüggésben — néhány új fogalmat vezetünk be, továbbá bemutatjuk a differenciálszámítás néhány alkalmazását. Többek között megmutatjuk, hogyan lehet a differenciálszámítást határértékek kiszámítására és szélsőérték feladatok megoldására felhasználni. A differenciálszámítás felhasználható függvények geometriai vizsgálatára. A deriváltra épül a térgörbe érintőjének fogalma.

5.1. L'Hospital szabály

A hányados határértékére vonatkozó tételben feltettük, hogy a nevező határértéke nem nulla. Ha a számláló határértéke 0, a nevezőé pedig nem 0, akkor a hányadosnak nyilván nincs véges határértéke. Ha a számláló és a nevező határértéke egyaránt 0, akkor az említett tétel alapján nem lehet a határértéket kiszámítani. Ezekben az esetekben — amikor a hányados ún. **határozatlan** vagy 0/0 **alakú kifejezés** — alkalmazható az alábbi **L'Hospital-szabály** néven ismert állítás.

1. L'Hospital szabály. *Legyen* $-\infty \leqq a < b < \infty$ *és tegyük fel, hogy az* $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ *függvények differenciálhatók, továbbá* $g'(x) \neq 0$, *ha* $x \in (a,b)$. *Ha*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0 \tag{1}$$

és ha létezik a $\lim_{a+} f'/g'$ *(véges vagy végtelen) határérték, akkor az* f/g *függvénynek is van jobboldali határértéke az* a *helyen és*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{2}$$

Bizonyítás. i) Vizsgáljuk először az $a > -\infty$ esetet. Legyen $f(a) := f(b) := 0$ és vezessük be a

$$(3) \qquad A := \lim_{a+} \frac{f'}{g'}$$

jelölést. Az átviteli elvet alkalmazva megmutatjuk, hogy minden a-hoz konvergáló $a < x_n < b$ $(n \in \mathbb{N})$ számsorozatra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = A.$$

Minthogy $f, g \in \mathcal{C}[a, x_n]$ és $f, g \in \mathcal{D}(a, x_n)$, továbbá $g'(x) \neq 0$, ha $x \in (a, b)$, azért erre a függvénypárra az $[a, x_n]$ intervallumban teljesülnek a Cauchy-tétel feltételei. A szóban forgó tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy létezik olyan $\xi_n \in (a, x_n)$ hely, amelyre

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Minthogy $\lim_{n\to\infty} \xi_n = a$, azért innen — ismét csak az átviteli elv és (3) alapján — (2) már következik.

ii) Ha $a = -\infty$, válasszunk olyan $y_0 \in \mathbb{R}$ és $c > 0$ számot, amelyekre $\beta := y_0 - 1/c < b$ teljesül és vezessük be a

$$\varphi(y) := y_0 - \frac{1}{y} \quad (0 < y < c)$$

függvényt, amely a $(0, c)$ intervallumot a $(-\infty, \beta)$ intervallumra képezi (kölcsönösen egyértelműen). A $(0, c)$ intervallumon értelmezett $F := f \circ \varphi$, $G := g \circ \varphi$ függvényekre — az $a = 0$ pontot véve — alkalmazható a tétel már igazolt i) változata. Valóban — pl. az átviteli elv alapján —

$$\lim_{0+} F = \lim_{0+} G = 0,$$

továbbá a közvetett függvény differenciálási szabálya alapján

$$(4) \qquad F'(y) = \frac{1}{y^2} f'(\varphi(y)), \quad G'(y) = \frac{1}{y^2} g'(\varphi(y)), \quad (y \in (0, c)).$$

Innen és a (3) alatti határérék létezéséből — ismét az átviteli elv alapján — következik, hogy

$$\lim_{0+} \frac{F'}{G'} = \lim_{0+} \frac{f' \circ \varphi}{g' \circ \varphi} = \lim_{-\infty} \frac{f'}{g'}.$$

Alkalmazva a tétel már igazolt i) változatát azt kapjuk, hogy létezik a $\lim_{0+} F/G$ határérték és arra

$$(5) \qquad \lim_{0+} \frac{F}{G} = \lim_{0+} \frac{F'}{G'} = \lim_{-\infty} \frac{f'}{g'}$$

teljesül. Az átviteli elv alapján a $\lim_{-\infty} f/g$ és $\lim_{0+} F/G$ hatértékek egyszerre léteznek vagy nem léteznek és az első esetben a két határérték egyenlő. Következésképpen (5) alapján az f/g függvénynek is létezik a határértéke a $-\infty$ helyen és arra fennáll (2). □

Nyilvánvaló, hogy hasonló állítás érvényes a baloldali határértékre is. A most vizsgált eset mellett gyakran előfordulnak az ún. ∞/∞ **típusú határozatlan kifejezések**. Ezekre vonatkozik a

2. L'Hospital szabály. *Legyen $-\infty \leqq a < b < \infty$ és tegyük fel, hogy az $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók, továbbá $g'(x) \neq 0$, ha $x \in (a, b)$. Ha*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = \infty \tag{6}$$

és ha létezik a $\lim_{a+} f'/g'$ (véges vagy végtelen) határérték, akkor az f/g függvénynek is van jobboldali határértéke az a helyen és

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bizonyítás. i) A (3)-ban bevezetett jelölést használva először tegyük fel, hogy A **véges**. A (3) és (6) feltételből következik, hogy létezik olyan $\beta \in (a, b)$ szám, hogy $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, ha $x \in (a, \beta]$ és f'/g' korlátos ugyanebben az intervallumban.

A (3) határérték definíciója alapján minden $\epsilon > 0$ számhoz létezik olyan $(a, \alpha) \subseteq (a, \beta)$ intervallum, hogy ennek minden pontjában

$$\left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - A \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad (y \in (a, \alpha)) \tag{7}$$

teljesül. Rögzítsük az α számot és az

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \frac{g(\alpha)}{g(x)}} \quad (x \in (a, \alpha))$$

azonosságból kiindulva vezessük be a

$$T(x) := \frac{1 - \frac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \frac{f(\alpha)}{f(x)}} \quad (x \in (a, \alpha))$$

függvényt. Ezt a jelölést felhasználva és az $[x, \alpha] \subset (a, \beta)$ intervallumban alkalmazva a Cauchy-tételt azt kapjuk, hogy létezik olyan $\xi_x \in (x, \alpha)$ pont, amelyben

$$\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1}{T(x)} \quad (x \in (a, \beta)).$$

Innen

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}\,T(x) = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} + \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}\,(T(x)-1) \tag{8}$$

következik.

A (6) feltételből és a T értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy $\lim_{a+} T = 1$. Minthogy az f'/g' függvény korlátos az (a, α) intervallumban, azért a (8) jobb oldalán a második tagnak a jobboldali határértéke 0 az a-ban. Következésképpen létezik olyan $(a, \gamma) \subseteq (a, \alpha)$ intervallum, amelyben

$$\left|\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}\,(T(x)-1)\right| < \frac{\epsilon}{2} \quad (x \in (a, \gamma))$$

teljesül. Ezt és a (7) egyenlőtlenséget felhasználva (8) alapján

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \leqq \left|\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - A\right| + \left|\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}\,(T(x)-1)\right| < \epsilon \quad (x \in (a, \gamma))$$

következik. Ezzel véges A esetén megmutattuk, hogy

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

ii) Ha $A = \infty$, akkor — a fenti bizonyítás gondolatmenetét követve — (7) helyett a következőt írhatjuk. A

$$\lim_{a+} \frac{f'}{g'} = \infty, \quad \lim_{a+} T = 1$$

feltételekből következik, hogy minden $P > 0$ számhoz létezik olyan $(a, \alpha) \subset (a, \beta)$ intervallum, hogy ennek minden pontjában

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| > 2P, \quad |T(x)| > \frac{1}{2} \quad (x \in (a, \alpha))$$

teljesül. Ezt felhasználva (8) alapján

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}\right| |T(x)| \geq 2P\frac{1}{2} = P \quad (x \in (a, \alpha)).$$

Ezzel $a = \infty$ esetén is igazoltuk a tételt. $\square$

Megjegyzések

1. Az 1. és 2. tételben a jobboldali határértéket baloldali határértékkel helyettesítve a baloldali határértékre vonatkozó L'Hospital-szabályokat kapjuk. Ezek hasonlóan igazolhatók, mint a szóban forgó tételek.
2. Az egyoldali határértékek és a határérték kapcsolatából kiindulva könnyen megfogalmazható a **határértékre vonatkozó L'Hospital-szabály**.
3. A most vizsgált $0/0$ és ∞/∞ típusú határozatlan kifejezések mellett gyakran előfordulnak ún. $0 \cdot \infty$ **típusú határozatlan kifejezések**. Ez az elnevezés olyan $\lim_{a+} fg$ határértékre vonatkozik, amelyben $\lim_{a+} f = 0$ és $\lim_{a+} g = \infty$. Az $fg = f/(1/g)$ vagy az $fg = g/(1/f)$ átalakítást alkalmazva ez a határérték visszavezethető a $0/0$, illetve a ∞/∞ típusra.
4. Az g helyett a $-g$ függvényre alaklamazva a L'Hopital-szabályt, kiszámíthatjuk az $\infty/(-\infty)$, illetve $0 \cdot (-\infty)$ típusú határozatlan kifejezések határértékét.
5. Legyen
$$f(x) := (1+x)^n - 1, \quad g(x) := x \quad (x \in \mathbb{R}).$$
Ekkor $\lim_0 f = \lim_0 g = 0$. Minthogy
$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{n(1+x)^{n-1}}{1} = n,$$
azért
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n.$$
6. Legyen
$$f(x) := x^n, \quad g(x) := \ln x \quad (x > 0)$$
és vizsgáljuk az fg függvény jobboldali határértékét a 0 pontban. Az $f(x)g(x) = \ln x/x^{-n}$ átalakítás után ∞/∞ típusú határozatlan kifejezést kapunk. Minthogy
$$\lim_{x\to 0+} \frac{g'(x)}{(1/f)'(x)} = -\lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{nx^{-n-1}} = -\frac{1}{n} \lim_{x\to 0+} x^n = 0,$$
azért
$$\lim_{x\to 0+} x^n \ln x = 0.$$
7. Legyen
$$f(x) := x^x, \quad (x > 0)$$
és vizsgáljuk az f függvény jobboldali határértékét a 0 pontban. Az x^x értelmezése alapján
$$x^x = e^{x \ln x} \quad (x > 0).$$
Minthogy $\lim_{x\to 0+} x \ln x = 0$, azért
$$\lim_{x\to 0+} x^x = 1.$$

5.2. Többször differnciálható függvények

Ebben a pontban bevezetjük a magasabbrendű deriváltakat és bemutatjuk ezek néhány alkalmazását. Legyen $H \subset \mathbb{K}_1$ nyílt halmaz és $f : H \to \mathbb{K}_2$ differnciálható függvény.

> Definíció. *Ha az* $f \in \mathcal{D}(H, \mathbb{K}_2)$ *függvény* f' *deriváltja differenciálható az* $a \in H$ *pontban, akkor azt mondjuk, hogy* f ***kétszer differenciálható*** a*-ban. Az*
> $$f''(a) := (f')'(a)$$
> *számot az* f ***függvény*** a ***pontbeli második deriváltjának*** *nevezzük.*

Az elsőrendű derivált mintájára értelmezhetjük a másodrendű deriváltat. Nevezetesen, tegyük fel,hogy az f függvény minden $x \in H$ pontban kétszer differnciálható. Ekkor az $H \ni x \to f''(x) \in \mathbb{K}_2$ utasítással értelmezett függvényt az f **második deriváltjának** nevezzük. Ehhez hasonlón — az f függvény $f^{(n)}$ szimbólummal jelölt n-edik deriváltjából kiindulva — rekurzióval értelmezhetjük az $(n+1)$-edik deriváltat:

$$f^{(n+1)}(a) := \left(f^{(n)}\right)'(a) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Emelett gyakran használjuk az

$$\frac{d^n f}{dx^n}(a) := f^{(n)}(a)$$

jelölést. A H nyílt halmazon értelmezett $f : H \to \mathbb{K}_2$ típusú n-szer differenciálható függvények összességét a $\mathcal{D}^n(H, \mathbb{K}_2)$ vagy — ha ez nem okoz félreértést — az egyszerűbb $\mathcal{D}^n(H)$ szimbólummal jelöljük. Ezenkívül célszerű még a 0-adik deriváltra az $f^{(0)} := f$ értelmezést bevezetni. Ha az $f : H \to \mathbb{K}_2$ függvénynek minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra létezik az n-edik deriváltja, akkor azt mondjuk, hogy az f **akárhányszor** vagy **végtelen sokszor** differenciálható és az ilyen tulajdonságú függvények összességét a $\mathcal{D}^\infty(H, \mathbb{K}_2)$ vagy a $\mathcal{D}^\infty(H)$ szimbólumok valamelyikével jelöljük.

Az n-edrendű derivált értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy bármely $f, g \in \mathcal{D}^n(H, \mathbb{K}_2)$ függvényre és minden $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}_2$ számpárra

$$\lambda_1 f + \lambda_2 g \in \mathcal{D}^n(H, \mathbb{K}_2) \quad \text{és} \quad (\lambda_1 f + \lambda_2 g)^{(n)} = \lambda_1 f^{(n)} + \lambda_2 g^{(n)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A szorzat függvény n-edik deriváltjára vonatkozik az alábbi

Leibniz-féle szabály. *Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra és bármely két $f, g \in \mathcal{D}^n(H)$ függvény szorzatára $fg \in \mathcal{D}^n(H)$ és*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}. \tag{9}$$

Bizonyítás. Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk. Az $n = 0$ esetben a 0-adik derivált definíciója alapján az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy (9) fennáll n-re és ebből kiindulva igazoljuk n helyett $(n+1)$-re. Az indukciós feltetételt és a szorzat deriválási szabályát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= \left((fg)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n+1-k)}.\end{aligned}$$

Ha az első összegben a $k = i$ a másodikban pedig a $k = i - 1$ jelölést vezetjük be, akkor innen

$$(fg)^{(n+1)} = \binom{n}{0} f g^{(n+1)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}\right) f^{(i)} g^{(n+1-i)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g$$

következik. Felhasználva a binomiális együtthatókra vonatkozó

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

azonosságot a bizonyítandó

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f^{(i)} g^{(n+1-i)}$$

állítást kapjuk. □

Mivel bármely polinom deriváltja is polinom, azért a polinomok akárhányszor differenciálhatók, továbbá ha P n-edfokú polinom, akkor

$$P^{(n+1)} = P^{(n+2)} = \cdots = 0.$$

Minthogy minden f racionális függvény f' deriváltja is racionális és $D_f = D_{f'}$, azért a racionális függvények is akárhányszor differenciálhatók. Az *exp*, *sin*, *cos*, *sinh*, *cosh* függvények differenciálási szabálya alapján nyilvánvaló, hogy ezek is akárhányszor differenciálhatók. Megmutatjuk, hogy ugyanez fennáll bármely analitikus függvényre. Tegyük fel, hogy az f függvény az $K_R(x_0)$ környezetben előállítható hatványsor összegfüggvényeként, azaz

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \quad (x \in U := K_R(x_0)), \tag{10}$$

ahol a hatványsor

$$R := \limsup_k \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \tag{11}$$

konvergenciasugara pozitív. Ekkor fennáll az

1. Tétel. *A (10) alatt értelmezett f függvény akárhányszor differnciálható és n-edik deriváltjára minden $x \in K_R(x_0)$ pontban*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k (x-x_0)^{k-n} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{12}$$

teljesül.

Bizonyítás. A 4.1. pont 4.Tétel alapján $f \in \mathcal{D}(U)$ és

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(x-x_0)^{k-1} \quad (x \in K_R(x_0)). \tag{13}$$

Az f' függvény maga is egy hatványsor öszegfüggvénye, emelynek konvergenciasugara nyilván megegyezik az

$$\sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x-x_0)^k = (x-x_0) f'(x)$$

hatványsor konvergencisugarával, azaz az

$$R_1 := \frac{1}{\limsup_k \sqrt[k]{k|a_k|}}$$

számmal. Minthogy

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1,$$

azért

$$R_1 := \frac{1}{\limsup_k \sqrt[k]{k|a_k|}} = \frac{1}{\limsup_k \sqrt[k]{|a_k|}} = R.$$

Az említett 4.1. pont 4. Tételt f helyett f'-re alkalmazva azt kapjuk, hogy f' is differenciálható és deriváltja (13)-ból tagonkénti deriválással adódik:

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2} \quad (x \in K_R(x_0)).$$

Ezt a gondolatmenetet n-szer megismételve a bizonyítandó allítást kapjuk. □

5.3. Taylor formula

Az 1. Tételben igazolt (12) formulát az $x = x_0$ pontban felírva adódik az

1. Következmény. *A (10) hatványsor összegfüggvénye és együtthatói között az alábbi kapcsolat áll fenn:*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{14}$$

Ebből a formulából kiindulva minden $f \in \mathcal{D}^\infty(U)$ függvényhez egy hatványsort rendelünk.

Definíció. *Legyen $a \in U$, ahol $U \subseteq \mathbb{K}_1$ nyílt halmaz és $f \in \mathcal{D}^\infty(U, \mathbb{K}_2)$. A*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

*hatványsort az f függvény a helyhez tartozó **Taylor-sorának**, a sor n-edik részletösszegét, azaz a*

$$(T_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

*polinomot az f függvény a ponthoz tartozó n-edik **Taylor-polinomjának** nevezzük.*

Az f függvény $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát az f **MacLaurin-sorának** nevezik.

Az 1. Következményben megfogalmazott állítás — a most bevezetett szóhasználattal élve — pontosan azt jelenti, hogy **hogy minden konvergens hatványsor összegfüggvényének Taylor-sorával egyenlő**.

A továbbiakban — kiindulva valamely $U := K_R(a) \subset \mathbb{R}$ környezetben akárhányszor differenciálható f **valós függvényből** — azt vizsgáljuk, hogy f előállítható-e U-ban konvergens hatványsor összegfüggvényeként. Az előbbi megjegyzés szerint, ha ilyen előállítás létezik, akkor a szóban forgó sor szükségképpen az f Taylor-sora. Ezt figyelembe véve nyilvánvaló, hogy az $f \in \mathcal{D}(U, \mathbb{R})$ függvény akkor és csak akkor állítható elő hatványsor összegfüggvényeként, ha az

$$(R_n f)(x) := f(x) - (T_n f)(x) \quad (x \in K_R(a),\, n \in \mathbb{N})$$

különbségek sorozata minden $x \in K_R(a)$ pontban 0-hoz tart. Az alábbiakban az R_n különbséget egy jól kezelhető alakban állítjuk elő. Erre vonatkozik a

> Taylor-formula. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $K_R(a) \subset \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy az $f : K_R(a) \to \mathbb{R}$ függvény $(n+1)$-szer differenciálható a $K_R(a)$-ban. Ekkor minden $x \in K_R(a)$ ponthoz létezik olyan a és x közé eső ξ_x szám, hogy az $(R_n f)(x)$ különbség felírható a következő alakban:*

$$(R_n f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x > a$. Az $x < a$ eset hasonlóan vizsgálható. Az egyszerűbb

$$T_n := T_n f, \quad R_n := R_n f \quad (n \in \mathbb{N})$$

jelölést használva és a (14) összefüggést $x_0 = a$ esetén a T_n polinomra felírva

$$T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad R_n^{(k)}(a) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

adódik. Alkalmazzuk az

$$F(t) := R_n(t), \quad G(t) := (t-a)^{n+1} \quad (t \in K_R(a))$$

függvényekre — az $[a, x]$ intervallumot alapul véve — a Cauchy-tételt. Eszerint létezik olyan $\xi_1 \in (a, x)$ hely, hogy

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}.$$

Minthogy

$$F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a) = 0 \quad (k = 0, 1, \cdots, n),$$

azért a fenti gontolatmenetet az $F^{(k)}, G^{(k)}$ függvénypárokra megismételve azt kapjuk, hogy minden $k = 1, 2, \cdots, n$ esetén létezik olyan $\xi_{k+1} \in (a, \xi_k)$, hogy

$$\frac{F^{(k)}(\xi_k)}{G^{(k)}(\xi_k)} = \frac{F^{(k)}(\xi_k) - F^{(k)}(a)}{G^{(k)}(\xi_k) - G^{(k)}(a)} = \frac{F^{(k+1)}(\xi_{k+1})}{G^{(k+1)}(\xi_{k+1})}.$$

Ezeket az egyenlőségeket egyebevetve

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = \cdots = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.$$

A T_n n-edfokú polinom $(n+1)$-edik deriváltja 0, a G függvény $(n+1)$-edik deriváltjára pedig nyilván $G^{(n+1)}(t) = (n+1)!$ $(t \in K_R(a))$. Ezt figyelembe véve

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

adódik. Bevezetve a $\xi_x := \xi_{n+1}$ jelölést, a bizonyítandó állítást kapjuk. □

A Taylor-formula jobb oldalán álló függvényt **Lagrange-féle maradéktagnak** nevezik. Ismeretes, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Ezt figyelembe véve adódik az alábbi

2. Következmény. *Legyen $f \in \mathcal{D}^\infty(U,\mathbb{R})$ és tegyük fel, hogy létezik olyan $M > 0$ szám, amelyre*

$$|f^{(n)}(x)| \leqq M \quad (x \in U,\, n \in \mathbb{N}). \tag{15}$$

Ekkor minden $x \in U = K_R(a)$ pontban $\lim_{n\to\infty}(R_n f)(x) = 0$, következésképpen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in K_R(a)).$$

Megjegyzések

1. A 2. Következményben megadott (15) feltétel **elégséges** de nem szüksérges ahhoz, hogy az f-et Taylor sora előállítsa.
2. A Taylor-formula felhasználható az $R_n f$ maradéktag becslésére. A *sin* függvényre alkalmazva a Taylor-formulát

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| = \left|\frac{\sin^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} x^{2n+2}\right| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

3. Ha valamely függvény akárhányszor differnciálható a $K_R(a)$ környezetben, akkor tekinthetjük a függvény a-hoz tartozó Taylor sorát. Előfordulhat, hogy a Taylor-sor az a ponton kívül seholsem konvergens. Van olyan függvény is, amelynek Taylor sora **mindenütt konvergens,**

de nem a függvényhez. Mivel az első esetre csak bonyolult konstrukcióval lehet példát adni, ezért ennek ismertetésétől itt eltekintünk. A második estre az alábbi függvény szolgáltat példát. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2}, & (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ 0, & (x = 0). \end{cases}$$

Bebizonyítható (lásd a .. feladatot), hogy $f \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R})$ és $f^{(n)}(0) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Ebből következik, hogy az f Taylor-sorának minden együtthatója 0, s ezért az mindenütt konvergens és összege a 0 függvény, amely nyilván nem egyenlő f-fel.

4. Itt hívjuk fel a figyelmet egy, a valós és komplex változós függvények közötti **lényeges különbségre**. Nyilvánvaló, hogy valós függvény egyszeri differenciálhatóságából nem következik kétszeri differnciálhatósága. Erre példa a következő függvény:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & (x \leqq 0), \\ x^2, & (x > 0). \end{cases}$$

Könnyen beléthatő, hogy f differenciálható és

$$f'(x) := \begin{cases} 0, & (x \leqq 0), \\ 2x, & (x > 0). \end{cases}$$

Innen következik, hogy f' a 0 pontban már nem differenciálható. Annál inkább meglepő az alábbi állítás, amelyet bizonyítás nélkül közlünk: Legyen $K_R(a) \subset \mathbb{C}$. Ha az $f : K_R(a) \to \mathbb{C}$ **komplex változós függvény egyszer differenciálható, akkor akárhányszor differenciálható és** a $K_R(a)$ környezetben az f **előállítható Taylor-sorának összegfüggvényeként**, azaz

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k \quad (z \in K_R(a)).$$

5.4. Konvex és konkáv függvények

Ebben a pontban a differenciálszámítás egy újabb, geometriai alklamazását mutatjuk be. A matematikában de pl. az optikában is használják a **konvexitás** fogalmát. Ennek értelmezése előtt ezzel kapcsolatban bevezetünk egy fogalmat.

Definíció. *Az $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorok*

$$\alpha x + \beta y \quad (0 \leqq \alpha, \beta \leqq 1,\ \alpha + \beta = 1)$$

alakú lineáris kombinációit ***konvex kombinációknak*** *nevezzük.*

Az $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektorok konvex kombinációi nyilván

$$\lambda x + (1-\lambda)y = y + \lambda(x-y) \quad (0 \leq \lambda \leqq 1)$$

alakban is felírhatók. Ebből a felírásból látható, hogy $n = 1, 2, 3$ esetén a fenti lineáris kombinációk összessége az x és az y **pontokat összekötő szakasszal** egyenlő. Ebből kiindulva — geometriai szóhasználattal élve — a szóban forgó halmazt $n > 3$ esetén is **szakasznak nevezzük**.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy a $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz konvex, ha a H bármely két pontját összekötő szakaszát tartalmazza, azaz minden $x, y \in H$ pontra és $0 \leq \lambda \leqq 1$ számra $\lambda x + (1-\lambda)y \in H$ teljesül.*

A fenti értelmezés alapján nyilvánvaló, hogy **konvex halmazok közös része konvex** továbbá az $\mathbb{R}$ konvex részhalmazai az $\mathbb{R}$-beli **intervallumok** (lásd a 12. Feladatot). A monoton függvények mellett fontos szerepet játszanak a **konvex** és **konkáv** függvények.

Definíció. *Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz és $f : H \to \mathbb{R}$ a H halmazon értelmezett valós függvény. Akkor mondjuk, hogy az f* ***függvény konvex****, ha minden $x, y \in H$ pontpárra és ezek bármely $\lambda x + (1-\lambda)y$ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ konvex kombinációira*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{16}$$

Ha bármely $\lambda x + (1-\lambda)y \in H$ konvex kombinációra

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f ***konkáv****. Ha a fenti egyenlőtlenségekben az egyenlőséget kizárjuk, a* ***szigorúan konvex****, ill.* ***szigorúan konkáv*** *függvény fogalmát kapjuk.*

A továbbiakban csak $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú konvex és konkáv függvényekkel foglalkozunk. Az $\mathbb{R}$-beli konvex halmazok említett jellemzéséből kiindulva intervallumon értelmezett valós függvényeket vizsgálunk. Mindenekelőtt a konvexitás egy geometriai átfogalmazását adjuk.

Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ az $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett konvex függvény. Kiindulva az $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ pontpárból írjuk fel a (16) egyenlőtlenséget az $x \in (x_1, x_2)$ pontban. Az x szám az

$$\alpha := \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \beta := \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

nemnegatív, $\alpha + \beta = 1$ feltételnek eleget tevő együtthatókkal előállítható az $x_1$és x_2 számok konvex kombinációjaként:

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2.$$

E jelöléseket felhasználva (16) átírható a következő, (16)-tal ekvivalens alakba:

$$\begin{aligned}(17)\qquad f(x) \leqq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) = \\ = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2) + f(x_2).\end{aligned}$$

Ezt az egyenlőtlenséget geometriailag interpretálva azt kapjuk, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex, ha bármely $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén az f **grafikonjának** $\{(x, f(x)) : x \in (x_1, x_2)\}$ **része nincs az** $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ **pontokat összekötő szakasz felett**. Ehhez hasonlóan szemléltethető a konkáv, illetve a szigorúan konvex és szigorúan konkáv függvény fogalma.

Egy további jellemzést fogalmazunk meg az alábbi állításban.

2. Tétel. *Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex, ha tetszőleges $x_1 < y_1$, $y_2 < x_2$ I-beli pontokra*

$$(18)\qquad \frac{f(x_1) - f(y_1)}{x_1 - y_1} \leqq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqq \frac{f(x_2) - f(y_2)}{x_2 - y_2}$$

teljesül. Az f akkor és csak akkor szigorúan konvex, ha a (17) állítás a $\leqq$ helyett a $<$ relációval áll fenn.

A (18) állításban a $\leqq$ jelet a $\geq$, ill. a $>$ relációval felcserélve a konkávitással, ill. a szigorú konkávitással ekvivalens feltételt kapunk.

Bizonyítás. i) Tegyük fel először, hogy f konvex. Ekkor az $(x_1, f(x_1))$ és az $(x_2, f(x_2))$ pontokat összekötő húrra az y_1 és az y_2 pontban felírva a (18) feltételt

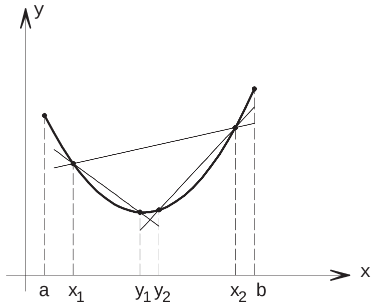
$$\begin{aligned} f(y_1) &\leqq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(y_1 - x_1) + f(x_1), \\ f(y_2) &\leqq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(y_2 - x_2) + f(x_2) \end{aligned}$$

adódik. Innen $y_1 - x_1 > 0$ és $y_2 - x_2 < 0$ figyelembevételével egyszerű átalakítás után adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

ii) Most induljunk ki abból, hogy tetszőleges $x_1 < y_1, y_2 < x_2$ I-beli pontokra fennáll a (18) egyenlőtlenség. Ekkor $y_1 = y_2 = x$ választás mellett (18)-ból azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

ahonnan az (16)-tal ekvivalens (17) egyenlőség egyszerű átalakítással következik. A szigorúan konvex, ill. a konkáv függvényekre vonatkozó állítás hasonlóan igazolható. □



1. ábra

Differenciálható függvények esetén a derivált felhasználható a konvexitás jellemzésére. Erre vonatkozik a

3. Tétel. *Az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény akkor és csak akkor konvex, ha f'* ***monoton növekedő****, és akkor és csak akkor szigorúan konvex, ha f'* ***szigorúan momoton növekedő****. Az f függvény pontosan akkor konkáv, ha f'* ***monoton fogyó****, és pontosan akkor szigorúan konkáv, ha f'* ***szigorúan monoton fogyó****.*

Bizonyítás. i) Tegyük fel először, hogy f konvex és tekintsük az (a, b) intervallum két tetszőleges $x_1 < x_2$ pontját. Ekkor az előbb igazolt 2. Tétel alapján minden $x_1 < y_1, y_2 < x_2$ esetén fennáll a (18) egyenlőtlenség. Ebből $y_1 \to x_1$ és $y_2 \to x_2$ határátmenettel az

$$f'(x_1) = \lim_{y_1 \to x_1} \frac{f(x_1) - f(y_1)}{x_1 - y_1} \leqq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqq \lim_{y_2 \to x_2} \frac{f(x_2) - f(y_2)}{x_2 - y_2} = f'(x_2)$$

bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

ii) Most tegyük fel, hogy f' monoton növő és tekintsünk két (a, b)-beli $x_1 < x_2$ pontot. Vezessük be az

$$\ell(x) := f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad r(x) := f(x) - \ell(x) \quad (x \in (a, b))$$

függvényeket. Az r értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy $r(x_1) = r(x_2) = 0$. Minthogy ℓ lineáris függvény és f differenciálható, azért r is differenciálható és

$$r' = f' - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Az r függvényre az $[x_1, x_2]$ intervallumban — a most mondottak alapján — teljesülnek a Rolle-tétel feltételei, következésképpen van olyan $\xi \in (x_1, x_2)$ hely, amelyre $r'(\xi) = 0$. Minthogy f' monoton növő és r' ettől csak konstansban különbözik, azért r' is monoton növő, következésképpen

$$r'(x) \leqq 0 \quad (x_1 \leqq x < \xi), \qquad r'(x) \geq 0 \quad (\xi < x \leqq x_2).$$

Innen következik, hogy r az $[x_1, \xi]$ intervallumban monoton fogyó, a $[\xi, x_2]$ intervallumban pedig monoton növő. Mivel $r(x_1) = r(x_2) = 0$, azért az $[x_1, \xi]$, $[\xi, x_2]$ intervallumok mindegyikén $r(x) \leqq 0$. Összefoglalva tehát azt kaptuk, hogy az $[x_1, x_2]$ intervallum minden x pontjában $r(x) \leqq 0$, vagy — ami ezzel ekvivalens —

$$f(x) \leqq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Ezzel megmutattuk, hogy f konvex.

iii) Ha f' szigorúan monoton növő, akkor a bizonyítás ii) részében a $\leqq$ relációt a $<$ relációval cserélve fel, adódik a szigorúan konvex esetre vonatkozó állítás első része.

Ha f szigorúan konvex, akkor f' — a most bizonyítottak alapján — monoton növekedő. Megmutatjuk, hogy minden $x_1 < x_2$ (a, b)-beli pontpárra $f(x_1) < f(x_2)$. Ellenkező esetben ugyanis f' konstans, következésképpen f lineáris volna az $[x_1, x_2]$ intervallumban. Ez viszont nyilván ellentmond annak, hogy f szigorúan konvex.

A konkáv függvényekre vonatkozó állítás hasonlóan igazolható. □

A most igazolt tételt a monoton függvények deriváltjára vonatkozó állítással kombinálva adódik az

3. Következmény. *i) Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{D}^2(a, b)$. Az f függvény akkor és csak akkor konvex, ha minden $x \in (a, b)$ pontnan $f''(x) \geq 0$.*

ii) Ha $f \in \mathcal{D}^2(a, b)$ és minden $x \in (a, b)$ pontban $f''(x) > 0$, akkor f szigorúan konvex.

A továbbiakban többször felhasználjuk a következő fogalmat.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvény az $x_0 \in (a, b)$ pontban jelet vált, ha $f(x_0) = 0$ és ha létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy*

i) $f(x) < 0 \quad (x \in (x_0 - \delta, x_0)), \qquad f(x) > 0 \quad (x \in (x_0, x_0 + \delta)),$

vagy

ii) $f(x) > 0 \quad (x \in (x_0 - \delta, x_0)), \qquad f(x) < 0 \quad (x \in (x_0, x_0 + \delta)).$

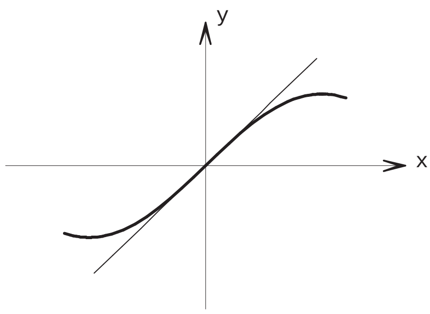
Az i) esetben azt szoktuk mondani, hogy az f **negatívból pozitívba** a ii) esetben pedig **pozitívból negatívba megy át**.

Definíció. *Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Akkor mondhatjuk, hogy az $x_0 \in (a,b)$ hely f-nek* ***inflexiós pontja****, ha a*

$$\varphi(x) := f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) \quad (x \in (a,b))$$

függvény az x_0 pontban előjelet vált.

A most bevezetett fogalomnak a geonetriai tartalma a következő: Ha pl. a φ függvény negatívból pozitívba megy át, akkor van olyan $\delta > 0$ szám, hogy az f grafikonjának $\{(x, f(x)) : x \in (x_0 - \delta, x_0)\}$ része az x_0-beli érintő alatt, a grafikon $\{(x, f(x)) : x \in (x_0, x_0+\delta)\}$ része pedig a szóban forgó érintő felett van. Egyszerűen belátható, hogy ha az $f \in \mathcal{D}(a,b)$ függvény az (a, x_0) intervallumban konvex, az (x_0, b) intervallumban pedig konkáv (vagy megfordítva), akkor az x_0 pont az f-nek inflexiós helye. Például a sin függvény a $(-\pi/2, 0)$ intervallumban konvex, a $(0, \pi/2)$ intervallumban konkáv, azért a sin függvénynek a 0 inflexiós pontja.



2. ábra

Az intervallumra vonatkozó konvexitás mellet ennek az alábbi lokális változatát is szokás értelmezni.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény az $x_0 \in (a,b)$ pontban* ***lokálisan konvex****, ha létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy az x_0 δ-sugarú környezetének minden pontjában*

$$f(x) \leqq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))$$

teljesül. Ha ez az egyenlőtlenség a $\leqq$ helyett a $\geq$ relációval teljesül, akkor azt mondjuk, hogy f az x_0 pontban ***lokálisan konkáv****.*

E definició geometriai tartalma a következő: Az f grafikonjának $\{(x, f(x)) : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}$ része az x_0 pontbeli érintő felett van. A most bevezetett fogalmat egybevetve az intervallumra vonatkozó konvexitással nyilvánvaló, hogy valamely nyílt intervallumon konvex függvény annak minden pontjában lokálisan konvex. A most megfogalmazott állítás megfordításával kapcsolatban a 13. feladatra utalunk.

5.5. Függvénydiszkusszió

Korábban bebizonyítottuk, hogy az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differnciálható függvénynek az x_0 pontban szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$. Ebben a pontban lokális szélsőértékre vonatkozó **elégséges feltételt** adunk.

> 4. Tétel. *Ha f' az $x_0 \in (a, b)$ pontban jelet vált, akkor f-nek az x_0 helyen lokális szélsőértéke van. Ha f' az x_0-ban negatívból pozitívba megy át, akkor f-nek x_0-ban minimuma van, ha pedig pozitívből negatívba megy át, akkor x_0 maximum hely.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f' az x_0 pontban negatívból pozitívba megy át. Ekkor van olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$f'(x) \leqq 0, \quad \text{ha} \quad x_0 - \delta < x < x_0 \quad \text{és} \quad f'(x) \geq 0, \quad \text{ha} \quad x_0 < x < x_0 + \delta.$$

Innen következik, hogy f az $(x_0 - \delta, x_0]$ intervallumban monoton fogyó, az $[x_0, x_0 + \delta)$ intervallumban pedig monoton növő, következésképpen f-nek az x_0 helyen valóban lokális minimuma van.

Az állítás második része hasonlóan igazolható. $\square$

A most igazolt tételből közvetlenül adódik az alábbi

> 4. Következmény. *Ha az $x_0 \in (a, b)$ pontban kétszer differenciálható $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvényre $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) \neq 0$, akkor f-nek az x_0 helyen lokális szélsőértéke van. Ha $f''(x_0) > 0$, akkor x_0 lokális minimumhely, ha pedig $f''(x_0) < 0$, akkor x_0 lokális maximumhely.*

Valóban, ha $f''(x_0) > 0$, akkor a 4.2. pont 7. Tétel alapján f' az x_0 pontban szigorúan nő. Mivel $f'(x_0) = 0$, azért f' az x_0-ban negatívból pozitívba megy át. Ezért az előző tétel alapján x_0 minimumhely. A másik eset hasonlóan igazolható.

Többször differenciálható függvény esetében a magasabberendű derivált és a szélsőérték kapcsolatára vonatkozik az alábbi

5. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ függvény az $x_0\in(a,b)$ pontban n-szer differenciálható, ahol $n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}$ és legyen*

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Az f függvénynek akkor és csak akkor van lokális szélsőértéke az x_0 helyen, ha n páros. Ekkor $f^{(n)}(x_0)>0$ esetén az x_0 lokális minimumhely, $f^{(n)}(x_0)<0$ esetén pedig lokális maximumhely.

Bizonyítás. Az $f^{(n)}(x_0)>0$ feltételből következik, hogy az $f^{(n-1)}$ az x_0 pontban (szigorúan) növekedő, s mivel $f^{(n-1)}(x_0)=0$ azért az f^{n-1} függvény itt negatívból pozitívba megy át. Következésképpen van olyan $\delta>0$ szám, hogy az $f^{(n-2)}$ függvény az $(x_0-\delta,x_0]$ intervallumban monoton fogyó, az $[x_0,x_0+\delta)$ intervallumban pedig monoton növekedő. Mivel $f^{(n-2)}(x_0)=0$, azért innen adódik, hogy az $f^{(n-2)}$ függvény az $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ intervalumban — az x_0 helyet kivéve — pozitív, következésképpen $f^{(n-3)}$ szigorúan növekedő ebben az intervallumban.

Ezt a gondolatmenetet $f^{(n-1)}$ helyett $f^{(n-3)}$-ra megismételve azt kapjuk, hogy az $f^{(n-1)},f^{(n-3)},f^{(n-5)},\cdots$ függvények az x_0 pontban szigorúan növekednek, az $f^{(n-2)},f^{(n-4)},f^{(n-6)},\cdots$ függvényeknek pedig az x_0 helyen minimuma van.

A mondottakból következik, hogy páros n esetén az x_0 lokális minimumhely, páratlan n esetén pedig az f függvény az x_0 helyen szigorúan növekedő, következésképpen itt nem lehet szélsőértéke.

Az $f^{(n)}(x_0)<0$ esetben az előzőhöz hasonlóan igazolható az állítás. □

A következő tételben az inflexiós pont létezésére vonatkozóan adunk egy szükséges és egy elégsés feltételt.

6. Tétel. *Legyen $f:(a,b)\to\mathbb{R}$.*

i) Ha f kétszer folytonosan differenciálható és ha f-nek az $x_0\in(a,b)$ hely inflexiós pontja, akkor $f''(x_0)=0$.

ii) Ha f háromszor folytonosan differenciálható és az $x_0\in(a,b)$ pontban $f''(x_0)=0$ továbbá $f^{(3)}(x_0)\neq 0$, akkor x_0 az f-nek inflexiós pontja.

Bizonyítás. i) Az állítással ellentétében tegyük fel, hogy $f''(x_0)\neq 0$. Az f'' folytonosságából következik, hogy x_0-nak van olyan $K_r(x_0)$ környezete, amelyben f'' állandó előjelű. A Taylor-formula alapján az inflexiós pont definíciójában szereplő φ függvény a következőképpen írható fel:

$$\varphi(x):=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=\frac{f''(\xi_x)}{2}(x-x_0)^2\quad(x\in K_r(x_0)),$$

ahol $\xi_x \in K_r(x_0)$. Innen nyilvánvaló, hogy a φ függvény a $K_r(x_0)$ környezetben állandó előjelű, következésképpen x_0 nem lehet inflexiós pont.

ii) Az $f^{(3)}$ folytonosságából következik, hogy x_0-nak van olyan $K_r(x_0)$ környezete, amelyben $f^{(3)}$ állandó előjelű. A Taylor-formulát $n = 2$ esetén alkalmazva és az $f''(x_0) = 0$ feltételt figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$\varphi(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 =$$
$$= \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!}(x - x_0)^3 \quad (x \in K_r(x_0)),$$

ahol $\xi_x \in K_r(x_0)$. Minthogy a jobb oldalon álló függvény az x_0 pontban jelet vált, azért ugyanez igaz a φ-re is, következésképpen x_0 valóban inflexiós pont. $\square$

Bizonyos $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények esetében szokás a $+\infty$-ben és a $-\infty$-ben vett érintő, más szóval **aszimptota** fogalmát értelmezni.

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek a $+\infty$-ben **van aszimptotája**, ha létezik olyan $\ell(x) := ax + b$ $(x \in \mathbb{R})$ lineáris függvény, amelyre*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - \ell(x)) = 0.$$

Az ℓ grafikonját az f $+\infty$-ben vett aszimptotájának nevezzük.

A fenti értelmezésből egyszerűen következik, hogy f-nek akkor és csak akkor van aszimptotája, ha léteznek az

$$a := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b := \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)$$

határértékek és az aszimptota definíciójában szereplő lineáris függvény: $\ell(x) = ax + b$ $(x \in \mathbb{R})$.

A fenti értelmezésben $f : (-\infty, a) \to \mathbb{R}$ típusú függvényekből kiindulva és a $+\infty$ helyen vett határértéket a $-\infty$-beli határértékkel felcserélve megkapjuk a $-\infty$-ben vett aszimptota definícióját.

Az eddig ismertetett tételek alapján választ tudunk adni azokra a kérdésekre, amelyeket $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények grafikonjával kapcsolatban szokás feltenni. Az ilyen típusú függvények diszkusszióján — elsősorban — az alábbi kérdések megválaszolását értjük:

1. Vannak-e a függvénynek abszolút és lokális maximum és minimum helyei ?
2. A függvény értelmezési tartománya felbontható-e olyan intervallumokra, amelyekben a függvény monoton ?

3. A függvény értelmezési tartománya felbontható-e olyan intervallumokra, amelyekben a függvény konvex, ill. konkáv ?
4. Vannak-e a függvénynek zérushelyei és inflexiós pontjai ?
5. A függvény értelmezési tartományának torlódási pontjaiban létezik-e a határértéke ?
6. Vannak-e a függvénynek aszimptotái ?

Az következő két példán bemutatjuk a függvénydiszkusszió most vázolt menetét.

1. Példa

Legyen

$$f(x) := \frac{x(x^2+1)}{x^2-1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}).$$

i) Nyilvánvaló, hogy f páratlan, azaz $f(-x) = -f(x)$ $(x \in D_f)$. Ezért a függvény vizsgálatánál elég a $[0,\infty) \setminus \{1\}$ halmazra szorítkozni. Először is írjuk fel az f deriváltját:

$$f'(x) = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2} \quad (x \in D_f).$$

Az f'-nek egyetlen pozitív zérushelye van, nevezetesen $x_1 := \sqrt{2+\sqrt{5}}$. Ennek alapján az f' a $[0,x_1)$ és az (x_1,∞) intervallumon állandó előjelű. Magát az előjelet — például a szóban forgó függvénynek egy-egy értét véve — könnyen megkaphatjuk. Ennek alapján $f'(x) > 0$, ha $x > x_1$ és $f'(x) < 0$, ha $x \in [0,x_1)$, $x \neq 1$. Az f függvény tehát a $[0,1)$ és $(1,x_1]$ intervallumokon szigorúan monoton fogyó, az $[x_1,\infty)$ intervallumban pedig szigorúan monoton növő. Az x_1 helyen az f-nek lokális minimuma van

ii) Az f második deriváltja:

$$f''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \quad (x \in D_f).$$

Minthogy az x^2+3 tényező mindig pozitív az f'' előjele könnyen megállapítható:

$$f''(x) < 0, \quad \text{ha} \quad x \in (0,1), \qquad f''(x) > 0, \quad \text{ha} \quad x > 1, \qquad \text{és} \quad f''(0) = 1.$$

Innen következik, hogy f a $(0,1)$-ben konvex az $(1,\infty)$ intervallumban pedig konkáv. Mivel f'' a 0 pontban előjelet vált, azért itt inflexiós pontja van. Az inflexiós pontban az érintő iránytangense $f'(0) = -1$.

iii) Minthogy f folytonos a D_f minden pontjában, azért ezekben a határérték a függvényértékkel egyenlő. Az értelmezési tartománynak a D_f pontjaitól különböző torlódási pontjaiban a függvény határértéke:

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

iv) Mivel

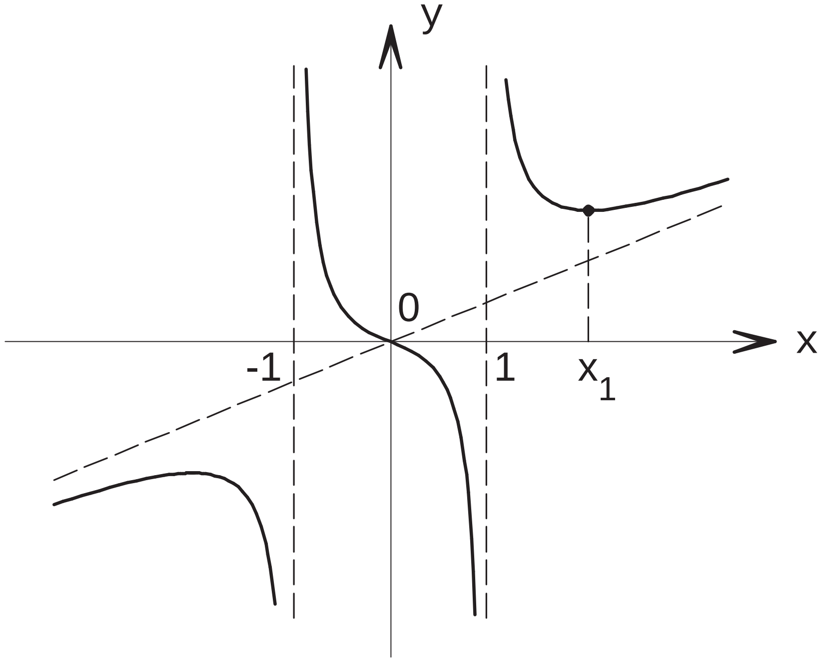
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1, \quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=0,$$

azért f-nek a $+\infty$-ben van aszimptotája és $\ell(x)=x$ $(x\in\mathbb{R})$.

Az eddig tett megállapításokat az alábbi táblázatban összegeztük:

x	$x=0$	$x\in(0,1)$	$x\in(1,x_1)$	$x=x_1$	$x\in(x_1,+\infty)$
$f'(x)$	-1	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	0	$-$	$+$	$+$	$+$
f	fogyó		fogyó	min.	növekedő
f	infl.	konkáv	konvex		

Az f grafikonját a következő ábrán szemléltetjük:



3. ábra

2. Példa
Ábrázoljuk az

$$f(x) := e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

i) Az f függvény deriváltjai a következők:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \quad f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

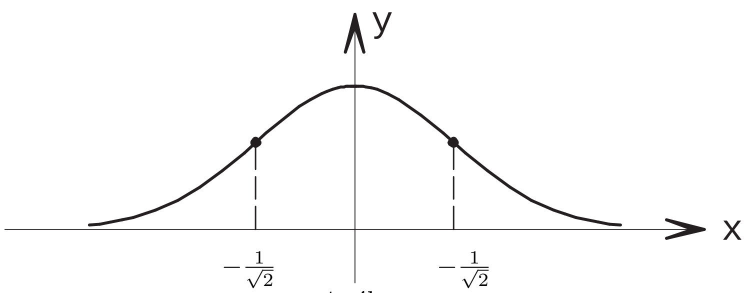
Nyilvánvaló, hogy

$$\begin{aligned} &f'(x) > 0, \quad \text{ha} \quad x < 0, \qquad f'(x) < 0, \quad \text{ha} \quad x > 0 \\ &f''(x) > 0, \quad \text{ha} \quad -\xi < x < \xi := 1/\sqrt{2}, \\ &f''(x) < 0, \quad \text{ha} \quad x \in (-\infty, -\xi) \cup (\xi, \infty) \end{aligned}$$

Ezek alapján az f grafikonjáról a következőket állapíthatjuk meg:

x	$x \in (-\infty, -\xi)$	$x = \xi$	$x \in (-\xi, 0)$	$x = 0$	$x \in (0, \xi)$	$x = \xi$	$x \in (\xi, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$\sqrt{2}\mathrm{e}^{-1/2}$	$+$	0	$-$	$-\sqrt{2}\mathrm{e}^{-1/2}$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$+$			0	$-$
f	növekedő			max.	fogyó		
f	konvex	infl.	konkáv			infl.	konvex

A fentiek figyelembevételével az f grafikonját az alábbiakban szemléltetjük:



4. ábra

5.6. Térgörbe érintője

Ebben a pontban — a differenciálszámítás újabb alkalmazásaként — térgörbék érintőjét értelmezzük. Térgörbék megadásához és térbeli mozgások matematikai leírásához $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ típusú függvényeket használunk. Ebben a pontban — e feladatot általánosítva — $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ típusú függvényeket vizsgálunk, ahol $n \geq 1$ és $n \in \mathbb{N}$.

Legyen $f : I \to \mathbb{R}^n$ egy $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett, $\mathbb{R}^n$-beli értékeket felvevő (más szóval vektor érékű) függvény. Ezzel minden $x \in I$ számhoz egy $f(x) \in \mathbb{R}^n$ vektort rendeltünk. Jelöljük $f_k(x)$-szel ennek k-adik koordinátáját, ahol $k = 1, 2, \cdots, n$. Ekkor

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) \quad (x \in I).$$

A most értelmezet $I \ni x \to f_k(x) \in \mathbb{R}$ valós értékű függvényt az f k-adik **koordináta függvényének** nevezzük. Magát az f függvényt — feltüntetve koordináta függvényeit — gyakran az

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

szimbólummal jelöljük.

Az eddig $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvényekkel kapcsolatban bevezetett fogalmak, mint például a folytonosság, a differenciálhatóság, stb. könyen átvihetők $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ típusú függvényekre. Legyen $\mathcal{F}(I)$ az I intervallumon definiált valós függvényeknek egy osztálya. Értelmezzük az $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ a következőképpen.

> Definíció. *Az $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ szimbólummal jelöljük azoknak az $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ függvényeknek az összességét, amelyek koordináta függvényeire*
>
> $$f_k \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$
>
> *teljesül.*

Ezzel összhangban vezetjük be az I intervallumon értelemzett **folytonos, differenciálható, folytonosan differenciálható** vektor értékű függvények foglmát és ezekre a

$$\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n), \quad \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n), \quad \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$$

jelölést használjuk. Az

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_n) \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$$

függvényből képzett

$$f' = (f_1', f_2', \cdots, f_n')$$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ típusú függvényt az f **deriváltjának** nevezzük.

Az
$$f(t) := (\cos t, \sin t, 2t) \quad (t \in \mathbb{R})$$
folytonosan differenciálható és
$$f'(t) = (-\sin t, \cos t, 2) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

A most bevezetett függvények segitségével leírhatók — a geometriában fontos — görbék következő osztálya. Ehhez — mint már korábban is — jelölje θ az $\mathbb{R}^n$ nullvektorát:
$$\theta := (0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Definíció. *Akkor mondjuk, hogy az $\mathbb{R}^n$ valamely Γ részhalmaza* ***sima elemi görbe****, ha létezik olyan $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ véges zárt intervallum és olyan* ***folytonosan differnciálható*** *$f : I \to \Gamma$ bijekció, amelynek deriváltjára*

$$f'(t) \neq \theta \quad (t \in I) \tag{19}$$

teljesül.

Ha létezik olyan $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ () tulajdonságú függvény, amelyre
$$f(\alpha) = f(\beta), \quad f : [\alpha, \beta) \to \Gamma \setminus \{f(\beta)\} \quad \text{bijekció},$$
akkor azt mondjuk, hogy Γ sima **zárt** *elemi görbe. Az f függvényt a szóban forgó* ***görbék paraméteres előállításának*** *nevezzük.*

1. Példa

Egyszerűen igazolható (lásd a 31. Feladatot), hogy a
$$\Gamma := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \in \mathbb{R}^2$$
síkbeli egységkör egy sima zárt elemi görbe és
$$f(t) := (\cos t, \sin t) \quad (t \in [0, 2\pi])$$
ennek egy paraméteres előállítása.

2. Példa

Bármely folytonosan differenciálható **függvény grafikonja** sima elemi görbe. Valóban, ha $\varphi \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ egy ilyen függvény, akkor az

$$f(x) := (x, \varphi(x)) \quad (x \in [\alpha, \beta] \tag{20}$$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ típusú függvény a φ grafikonjának egy kívánt tulajdonságú paraméterezése.

3. Példa

Az $x, y \in \mathbb{R}^n$ **pontokat összekötő szakasz**, amelyet az 5.4. pontban vezettünk be, szintén sima elemi görbe. Valóban a szakasz definíciója alapján az

$$f(t) = tx + (1-t)y = y + t(x-y) \quad (t \in [0,1])$$

függvény ennek egy kívánt tulajdonságú paraméteres előállítása.

4. Példa

Az $\mathbb{R}^n$-beli egyeneseket $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ típusú lineáris függvényekkel értelmezzük. Legyen $a, b \in \mathbb{R}^n$ és $b \neq \theta$. Az

$$\{a + bt : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$$

halmazt $\mathbb{R}^n$-beli **egyenesnek** nevezzük.

Most bevezetjük a sima elemi görbe érintőjének fogalmát.

Definíció. *Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ egy sima elemi görbe, $f : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ ennek egy paraméterezése és $t_0 \in [\alpha, \beta]$. A*

$$\gamma := \{f(t_0) + tf'(t_0) : t \in \mathbb{R}\}$$

*egyenest a Γ $f(t_0)$ **pontbeli érintőjének** nevezzük.*

A fenti definíció alapján nyilvánvaló, hogy a Γ $f(t_0)$ pontja a γ érintőnek is pontja. Ezt úgy szoktuk kifejezni, hogy a γ érintő áthalad az $f(t_0)$ ponton.

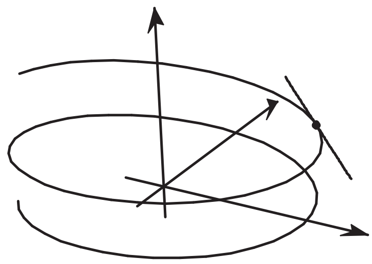
5. Példa

A korábban már vizsgált

$$f(t) := (\cos t, \sin t, 2t) \in \mathbb{R}^3 \quad (t \in \mathbb{R})$$

függvény értékészlete, az ún. **csavarvonal**, egy sima elemi görbe. Ennek valamely $f(t_0)$ pontján áthaladó érintőjének egy paraméteres előállítása

$$(\cos t_0 - t \sin t_0, \sin t_0 + t \cos t_0, 2t_0 + 2t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$



5. ábra

6. Példa

Most vizsgáljuk a $\varphi \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ függvény grafikonjának érintőjét. Kiindulva a grafikon (20) paraméteres előállításából a x_0 pontbeli érintőre az

$$\{(x_0+t, f(x_0)+tf'(x_0)) : t \in \mathbb{R}\}$$

előállítás adódik. Ez összhangban van a grafikon érintőjének korábbi értelmezésével.

Megjegyzések

1. A görbék paraméteres előállítása nem egyértelmű. Ha pl. $f : [\alpha,\beta] \to \Gamma$ a Γ sima elemi görbe egy paramáterezése, és ha $\varphi : [\alpha_1,\beta_1] \to [\alpha,\beta]$ egy olyan folytonosan differenciálhato bijekció, amelynek deriváltja seholsem tűnik el, akkor az $g := f \circ \varphi : [\alpha_1,\beta_1] \to \Gamma$ függvény nyilván szintén egy — az f-től különböző — paraméterezése Γ-nak.
2. Mivel a görbéknek több különböző paraméterezése is lehetséges, egy-egy fogalommal kapcsolatban célszerű megvizsgálni, hogy az csak a görbétől vagy annak — esetlegesen választott — paraméterezésétől is függ. A geometriai fogalmaktól szokás azt megkivánni, hogy ne függjenek a paraméterezéstől.
3. Az érintő fenti definíciója megfelel a geometriai fogalmakkal kapcsolatban most megfogalmazott követelményeknek. Nevezetesen megmutatható (lásd a 32. feladatot) ha $f : [\alpha,\beta] \to \Gamma$ és $g : [\alpha_1,\beta_1] \to \Gamma$ ugyanannak a görbének két paraméterezése, és $f(t_0) = g(s_0)$, akkor van olyan $\lambda \neq 0$ szám, hogy $f'(t_0) = \lambda g'(s_0)$ következésképpen

$$\{f(t_0)+tf'(t_0) : t \in \mathbb{R}\} = \{g(s_0)+sf'(s_0) : s \in \mathbb{R}\}$$

Innen következik, hogy az érintő nem függ a paraméteres előállítástól, hanem csak a Γ görbától.

5.7. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) := x^\alpha \quad (x \in (0,\infty),\ \alpha > 1), \qquad g(x) := \exp(x) \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$h(x) := x \ln x \quad (x \in (0,\infty))$$

függvények konvexek.

2. Igazoljuk, hogy az

$$f(x) := x^\alpha \quad (x \in (0,\infty),\ 0 < \alpha < 1), \qquad g(x) := \ln x \quad (x \in (0,\infty))$$

függvények konkávok.

3. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$a)\quad \left(\frac{x+y}{2}\right)^n < \frac{x^n+y^n}{2} \qquad (x,y>0,\ x\neq y,\ n>1),$$
$$b)\quad \exp\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{\exp(x)+\exp(y)}{2} \qquad (x,y\in\mathbb{R},\ x\neq y),$$
$$c)\quad (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) < x\ln x + y\ln y \qquad (x,y>0,\ x\neq y),$$
$$d)\quad x^{\lambda_1}y^{\lambda_2} \leqq \lambda_1 x + \lambda_2 y \qquad (\lambda_1\geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1+\lambda_2=1,\ x,y>0).$$

4. Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

$$a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cosh(x)-\cos x}{x^2}, \qquad b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg} x - 1}{x^2},$$
$$c)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x}, \qquad d)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2},$$
$$e)\quad \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}, \qquad f)\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} \quad (a>0),$$
$$g)\quad \lim_{x\to 0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x, \qquad h)\quad \lim_{x\to 1-}\ln x\cdot\ln(1-x),$$
$$i)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} \quad (\alpha>0), \qquad j)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{ax}} \quad (a>0, n>0),$$
$$k)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}, \qquad \ell)\quad \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-0.1x},$$
$$m)\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^{1/x})-e}{x}, \qquad n)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\lg x}}{(\ln x)^x}.$$

5. Írjuk fel a $P(x) := 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ polinomot $x + 1$ hatványai szerint.
6. Írjuk fel az alábbi f függvények adott a helyhez tartozó

$$(T_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

n-edik Taylor-polinomját:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad f(x) := \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} \quad (n=3, a=0),\\
&b) \quad f(x) := \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} \quad (n=3, a=0),\\
&c) \quad f(x) := e^{2x-x^2} \quad (n=5, a=0),\\
&d) \quad f(x) := \sin(\sin x) \quad (n=3, a=0),\\
&e) \quad f(x) := \ln\frac{\sin x}{x} \quad (n=6, a=0),\\
&f) \quad f(x) := \sqrt{x} \quad (n=3, a=1),\\
&g) \quad f(x) := x^x - 1 \quad (n=3, a=0).
\end{aligned}
$$

7. Milyen pontossággal teljesülnek az alábbi közelítő egyenlőségek az adott intervallumban ?

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \qquad (|x| \leqq \frac{1}{2}),\\
&b) \quad \mathrm{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} \qquad (|x| \leqq 0.1),\\
&c) \quad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad (|x| \leqq 0.2),\\
&d) \quad \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \qquad (0 \leqq x \leqq 1),\\
&e) \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \qquad (|x| \leqq 0.2).
\end{aligned}
$$

8. Igazoljuk, hogy

$$\left| \sqrt[n]{a^n + x} - a - \frac{x}{na^{n-1}} \right| \leqq \frac{n-1}{2n^2} \frac{x^2}{a^{2n-1}},$$

ha $n \geq 2$, $a > 0, x > 0$.

9. A Taylor-formula felhasználásával határozzuk meg az alábbi számokat adott r pontossággal:

$a)$ e $(r = 10^{-9})$, $b)$ $\sin 1^\circ$ $(r = 10^{-8})$, $c)$ $\cos 9^\circ$ $(r = 10^{-5})$,
$d)$ $\sqrt{5}$ $(r = 10^{-5})$, $b)$ $\lg 11$ $(r = 10^{-5})$, $c)$ $\ln 1.2$ $(r = 10^{-3})$.

10. Készítsünk olyan programot, amelyekkel az alábbi függvények értéke adott pontosságra meghatározhatók:

a) sin, *b*) cos, *c*) exp,
d) ln, *b*) arc tg

11. Legyen
$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \in \mathbb{R},\ x \neq 0), \\ 0, & (x = 0). \end{cases}$$
i) Teljes indukciót használva igazoljuk, hogy minden n természetes számra
$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0),$$
ahol P_n egy polinom.
ii) Ennek alapján mutassuk meg, hogy $f \in \mathcal{D}^\infty(\mathbb{R})$ és $f^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$.

12. Igazoljuk, hogy a $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz akkor és csak akkor konvex, ha intervallum.

13. Legyen
$$f(x) := \begin{cases} x^2(2 + \sin 1/x) & (x \in \mathbb{R}, x \neq 0), \\ 0, & (x = 0). \end{cases}$$
Igazoljuk, hogy f lokálisan konvex a 0 pontban, de nem konvex egyetlen 0-át tartalmazó intervallumban sem.

14. A Taylor-formula alkalmazásával határozzuk meg az alábbi határértékeket.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$,

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$,

c) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{3/2} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$,

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \left((x^3 - x^2 + \frac{x}{2})e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1}\right)$,

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} \quad (a > 0)$,

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$,

g) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$,

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^2}$.

15. Diszkutáljuk az alábbi függvényeket:

$a)$ $f(x) := 3x - x^3 \quad (x \in \mathbb{R}),$ $b)$ $f(x) := 1 + x^2 - \dfrac{x^4}{2} \quad (x \in \mathbb{R}),$

$c)$ $f(x) := \dfrac{2 - x^2}{1 + x^4} \quad (x \in \mathbb{R}),$ $d)$ $f(x) := (x+1)(x-2)^2 \quad (x \in \mathbb{R}),$

$e)$ $f(x) := x \ln x \quad (x > 0),$ $f)$ $f(x) := \dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2} \quad (x \neq -1, 1),$

$g)$ $f(x) := \dfrac{\ln x}{x} \quad (x > 0),$ $h)$ $f(x) := \sin^4 x + \cos^4 x \quad (x \in \mathbb{R}),$

$i)$ $f(x) := x + e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R}),$ $j)$ $f(x) := (1 + x^2)e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$

$k)$ $f(x) := e^{2x - x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$ $\ell)$ $f(x) := \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6} \quad (x \neq 2, 3),$

$m)$ $f(x) := x^x \quad (x > 0),$ $n)$ $f(x) := \sin x + \cos^2 x \quad (x \in \mathbb{R}),$

$o)$ $f(x) := xe^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$ $p)$ $f(x) := \dfrac{\sin x}{2 + \cos x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

16. Határozzuk meg azt a legnagyobb területű derékszögű háromszöget, amelynek átfogója c, befogóinak összege a.
17. Adott alkotójú kúpok közül határozzuk meg a maximális térfogatút.
18. Adott R sugarú gömbök közül keressük meg azt, amelyiknek a térfogata maximális.
19. Tekintsünk egy v kezdősebességgel ferdén elhajított testet. Határozzuk meg, hogy a vizszinteshez viszonyitva milyen α szög alatt kell elhajítani, hogy a maximális távolságban érje el újból a vizszintest.
20. Adjuk meg az R sugarú gömbbe írható maximális térfogatú henger adatait.
21. Egy 4 méter szélességű torony alján 2 méter magas ajtó van. Bevihető-e a toronyba a 8 méter hosszú létra ?
22. Valaki egy gyalogút A pontjából egy ettöl a, a gyalogúttól b távolságra lévő B pontjába akar a legrövidebb idő alatt eljutni. Mikor térjen le a gyalogútról, ha ott másfélszer olyan gyorsan halad, mint az utat szegélyező terepen?
23. Adott az $y^2 = 2px$ egyenletű parabola, ahol $p > 0$. Határozzuk meg a parabola tengelyére merőleges alapú parabola szeletbe beírható legnagyobb területű téglalapot, ha a parabola szelet alapjának a csúcstól mért távolsága h.
24. Mekkora R külső ellenálláson keresztül zárjuk az e elektromotoros erejű és r belső ellenállású galvánelemet, hogy a külső ellenállás folytán keletkező I^2R Joule-féle energia maximális legyen ?
25. Adott az
$$f(x) := \frac{x^2 + 2ax + b}{x^2 + 2cx + d} \quad (x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2cx + d \neq 0)$$

függvény, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ valós számok. Határozzuk meg az a, b, c és d értékeket úgy, hogy a függvénynek az $x = -1$ pontban 2-vel egyenlő maximuma, az $x = 1$ pontban pedig 4-gyel egyenlő minimuma legyen.

26. Vízszintes síkon álló függőleges falú tartályban m magasságig víz van. A tartály falában a víz szintje alatt x mélységben lukat ütve — a Toricelli-féle törvény alapján — a kiáramló víz sebessége $\sqrt{2gx}$, ahol g a gravitációs állandó. Az x milyen értéke mellett jut el a vízsugár a legmesszebbre ?
27. Három darab a szélességű deszkalapból készítsünk trapéz keresztmetszetű vályút. Milyen α szög alatt hajoljanak az oldallapok, hogy a vályú keresztmetszete, azaz a trapéz területe, maximális legyen ?
28. Osszuk fel a 4-et két részre úgy, hogy az egyik rész négyzetének és a másik rész köbének összege maximális legyen .
29. Adjuk meg az alábbi görbék egy paraméteres előállítását.

$$\begin{aligned}
&a) \quad \Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 2px\} \quad (p > 0),\\
&b) \quad \Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\} \quad (a, b \in \mathbb{R}),\\
&c) \quad \Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\} \quad (a \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

30. Írjuk fel az alábbi, paraméteresen adott görbék érintőjét a $t_0 \in \mathbb{R}$ helyhez tartozó pontban.

$$\begin{aligned}
&a) \quad x(t) = a\cos t, \quad y(t) = b\sin t \quad (t \in \mathbb{R}),\\
&b) \quad x(t) = a(t - \cos t), \quad y(t) = a(1 - \sin t) \quad (t \in \mathbb{R}),\\
&c) \quad x(t) = a\cos t + t\sin t, \quad y(t) = a\sin t - t\cos t \quad (t \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

31. ....
32. ....

6. Függelék

Ebben a pontban bebizonyítunk néhány, az előző pontokban már megfogalmazott és felhasznált alapvető tételt.

6.1. Az algebra alaptétele

Az 1.2. pontban bizonyítás nélkül közöltük az alábbi állítást és annak néhány következményét.

> Az algebra alaptétele. *Bármely nem konstans komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke.*

Bizonyítás. Legyen

$$P(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad (z \in \mathbb{C}),$$

ahol n pozitív egész, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ komplex számok és $a_n \neq 0$. Megmutatjuk, hogy az

$$f(z) := |P(z)| \quad (z \in \mathbb{C})$$

$\mathbb{C}$ -n értelmezett valós függvénynek **van minimuma és** f — s ezzel együtt nyilván P is — **a minimumhelyen eltünik**.

A minimum létezésének igazolásához legyen

$$m := \inf\{f(z) : z \in \mathbb{C}\}.$$

Minthogy a P polinom határértéke a ∞-ben $+\infty$ (lásd 2.5.2. pont), azért van olyan $R > 0$ szám, hogy

$$f(z) > m \quad \text{ha} \quad |z| > R \quad \text{és} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Innen következik, hogy az f függvény $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ kompakt halmazra vonatkozó leszűkítésének is m az infimuma. A Weierstrass-tétel alapján van olyan $z_0 \in \mathbb{C}$ hely, amelyre $f(z_0) = m$, azaz z_0 az f függvény minimum helye.

Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $f(z_0) > 0$. Ebből az indirekt feltételből kiindulva megmutatjuk, hogy létezik olyan $z_1 \in \mathbb{C}$ hely, amelyre $f(z_1) < f(z_0)$. Ez nyilván ellentmond annak, hogy z_0 minimum hely.

A mondott tulajdonságú z_1 hely létezésének igazolásához írjuk fel a P polinomot $z - z_0$ hatványai szerint:

$$P(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots + b_n(z - z_0)^n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Minthogy P nem konstans polinom, azért létezik olyan k index, amelyre $1 \leq k \leq n$ és

$$b_k \neq 0 \quad \text{és} \quad b_j = 0 \quad (0 < j < k).$$

Innen következik, hogy a P polinom minden $z \in \mathbb{C}$ pontban felírható

$$P(z) = b_0 + b_k(z-z_0)^k + b_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \cdots + b_n(z-z_0)^n = b_0 + (z-z_0)^k \left(b_k + P_1(z)\right)$$

alakban, ahol P_1 egy z_0 pontban eltünő polinom. Minthogy P_1 folytonos, azért a z_0 pontban 0 a határértéke. Az $\epsilon = |b_k|/2$ számmal felírva a határérték definícióját azt kapjuk, hogy létezik olyan $r > 0$ szám, hogy

$$(1) \qquad |P_1(z)| < \frac{|b_k|}{2} \quad (z \in K_r(z_0)).$$

Most megmutatjuk, hogy a z_0 pontból kiindulva és alkalmas irányba elmozdulva az f értéke csökken. Ehhez írjuk fel a b_0, b_k és $z - z_0$ komplex számokat polárkoordinátás alakban:

$$b_0 = \rho_0 e^{i\alpha_0}, \quad b_k = \rho_k e^{i\alpha_k}, \quad z - z_0 = te^{i\varphi} \quad (\rho_0 > 0, \rho_k > 0, t \geq 0).$$

Ekkor a $P(z)$ első két tagja

$$b_0 + b_k(z - z_0)^k = \rho_0 e^{i\alpha_0} + \rho_k e^{i\alpha_k} t^k e^{ik\varphi}$$

alakú. Válasszuk meg a φ argumentumot úgy, hogy a második tag szignuma az első tag szignumának -1-szerese legyen, azaz

$$(2) \qquad e^{i(\alpha_k + k\varphi)} = -e^{i\alpha_0} = e^{i(\alpha_0 + \pi)}$$

teljesüljön. Ha pl.

$$\varphi = \frac{\alpha_0 - \alpha_k + \pi}{k},$$

akkor (2) fennáll. Ilyen választás mellett

$$P(z) = e^{i\alpha_0} \left(\rho_0 - \rho_k t^k + e^{i(k\varphi - \alpha_0)} t^k P_1(z)\right),$$

ahol $z = z_0 + te^{i\varphi}$. Innen — áttérve az abszolút értékre — a

$$(3) \qquad |P(z)| \leq |\rho_0 - \rho_k t^k| + t^k |P_1(z)| \quad (z - z_0 = te^{i\varphi} \in \mathbb{C})$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Válasszuk egy olyan t számot, amelyre

$$0 < t < 1, \; t < r, \; \rho_0 - \rho_k t^k > 0$$

teljesül és legyen $z_1 = z_0 + te^{i\varphi}$. Ilyen t-re (1) és (3) alapján

$$|P(z_1)| \le |\rho_0 - \rho_k t^k| + \frac{1}{2}\rho_k t^k \le \rho_0 - \frac{1}{2}\rho_k t^k < \rho_0 = |P(z_0)|.$$

Ezzel az állítást igazoltuk. □

Az algebra alaptételéből egyszerűen következik a polinomok gyöktényezős előállítására vonatkozó alábbi

1. Tétel. *Minden*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad (z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*)$$

komplex együtthatós polinom $a_n \ne 0$ *esetén alkalmas* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ *komplex számokkal felírható*

$$P(z) = a_n(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n) \quad (z \in \mathbb{C}) \tag{4}$$

alakban.

Bizonyítás. Az algebra alaptétele alapján a P polinomnak van legalább egy komplex gyöke. Legyen λ_1 a P polinomnak egy zérushelye. Ekkor

$$P(z) = P(z) - P(\lambda_1) = a_1(z - \lambda_1) + a_2(z^2 - \lambda_1^2) + \cdots + a_n(z^n - \lambda_1^n). \tag{5}$$

Felhasználva a

$$z^k - \lambda_1^k = (z - \lambda_1)(z^{k-1} + z^{k-2}\lambda_1 + \cdots + z\lambda_1^{k-2} + \lambda_1^{k-1})$$

azonosságot és a (4) minden tagjából a $z - \lambda_1$ tényezőt kiemelve a P polinom felírható

$$P(z) = (z - \lambda_1)P_1(z) \quad (z \in \mathbb{C})$$

alakban, ahol P_1 egy pontosan $(n-1)$-edfokú polinom. Ha $n - 1 > 0$, akkor a most ismertetett gondolatmenetet P helyett P_1-re megismételve azt kapjuk, hogy létezik olyan $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ szám és olyan $(n-2)$-edfokú P_2 polinom, hogy

$$P(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)P_2(z) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Ezt az eljárást folytatva végül azt kapjuk, hogy léteznek olyan $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ komplex számok, amelyekkel

$$P(z) = c(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n) \quad (z \in \mathbb{C})$$

teljesül. Innen — összehasonlítva a bal és jobb oldalon álló polinomok n-edik deriváltját — $c = a_n$ következik. □

A (4) előállításban ugyanaz a gyöktényező többször is előfordulhat. Az azonos gyöktényezőket összevonva adódik, hogy léteznek olyan **páronként különböző** $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ és $m_1, \cdots, m_s \in \mathbb{N}^*$ számok, hogy

$$(6) \qquad P(z) = c_n(z-\lambda_1)^{m_1} \cdots (z-\lambda_j)^{m_j} \cdots (z-\lambda_s)^{m_s} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Egyszerűen igazolható, hogy a (6) gyöktényezős előállítás — a tényezők sorrendjét nem számítva — egyértelmű. Az $m_j \in \mathbb{N}^*$ számot a λ_j **gyök multiplicitásának** nevezzük. Nyilvánvaló, hogy

$$(7) \qquad m_1 + \cdots + m_s = n.$$

A derivált és a zérushelyek multiplicitásának kapcsolatára vonatkozik az alábbi

2. Tétel. *Legyen $m \in \mathbb{N}^*$ és P egy komplex együtthatós polinom. A $\lambda \in \mathbb{C}$ szám akkor és csak akkor m-szeres multiplicitású gyöke P-nek, ha*

$$(8) \qquad P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0, \quad P^{(m)}(\lambda) \neq 0.$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy λ m-szeres gyöke P-nek. Ekkor a (6) gyöktényezős előállításból kiindulva P felírható

$$(9) \qquad P(z) = (z-\lambda)^m Q(z) \quad (z \in \mathbb{C}),$$

alakban, ahol Q olyan polinom, amelyre $Q(\lambda) \neq 0$. A Q polinomot $z-\lambda$ hatványai szerint felírva

$$Q(z) = (z-\lambda)^m(b_0 + b_1(z-\lambda) + \cdots + b_r(z-\lambda)^r) \quad (z \in \mathbb{R})$$

adódik, ahol $b_0 = Q(\lambda) \neq 0$. Innen — Q együtthatóit összehasonlítva Taylor-polinomjának együtthatóival — (8) következik.

Megfordítva most tegyük fel, hogy a P polinomra (8) teljesül. Minthogy P egyenlő a λ-hoz tartozó n-edik Taylor-polinomjával, azért

$$P(z) = \frac{P^{(m)}(\lambda)}{m!}(z-\lambda)^n + \cdots + \frac{P^{(n)}(\lambda)}{n!}(z-\lambda)^n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Innen látható, hogy a P polinom (9) alakú és $Q(\lambda) \neq 0$, következésképpen λ valóban m-szeres gyök . □

A gyök és multiplicitásának fogalmát analitikus függvényekkel kapcsolatban is szokás használni. Legyen f az $U \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmazon értelmezett analitikus függvény és tegyük fel, hogy a $\lambda \in H$ komplex szám az f-nek zérushelye. Az f a λ körül Taylor-sorba fejthető. Ha f nem azonosan 0, akkor m-mel jelölve az első nullától különböző tag együtthatójának indexét

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = \cdots = f^{(m-1)}(\lambda) = 0, \quad f^{(m)}(\lambda) \neq 0$$

teljesül. Ilyenkor — a polinomokra bevezetett fogalommal összhangban — az m számot a λ **gyök multiplicitásának** nevezzük.

6.2. Interpoláció

A gyakorlatban számos jelenséget valós vagy komplex függvényekkel írunk le. Ezeknek a függvényeknek az értékeit azonban általában csak néhány pontban ismerjük. Ilyenkor a függvényt azzal a legalacsonyabb fokszámú polinommal szokás helyettesíteni, amely az adott helyeken ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint a függvény. Ilyen polinomok előállításával kapcsolatos az alábbi

3. Tétel. *Legyen f a $H \subseteq \mathbb{K}$ halmazon értelmezett $\mathbb{K}$-ba képező függvény és $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in H$ páronként különböző számok. Ekkor egyetlen olyan $(n-1)$-edfokú P polinom létezik, amelynek együtthatói $\mathbb{K}$-beliek és amelyre*

(10) $$P(\lambda_1) = f(\lambda_1),\ P(\lambda_2) = f(\lambda_2),\ \cdots,\ P(\lambda_n) = f(\lambda_n)$$

teljesül.

Bizonyítás. A P polinomot az $\ell_k \in \mathcal{P}_{n-1}\,(k = 1, 2, \cdots, n)$ ún. **Lagrange-féle alappolinomok** segítségével állítjuk elő, ahol az ℓ_k polinomok az alábbi feltételeknek tesznek eleget:

$$\ell_k(\lambda_j) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad j = k \\ 0, & \text{ha} \quad j \neq k, (j = 1, 2, \cdots, n). \end{cases}$$

Minthogy e feltétel szerint az ℓ_k-nak minden λ_j $(j = 1, \cdots, n,\ j \neq k)$ szám zérushelye, azért ez a polinom

$$\ell_k(z) = c_k \prod_{j=1, j\neq k}^{n} (z - \lambda_j) \quad (z \in \mathbb{C})$$

alakú, ahol $c_k \in \mathbb{K}$. Az $\ell_k(\lambda_k) = 1$ feltétel alapján a c_k meghatározható és az alappolinomokra az

(11) $$\ell_k(z) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{z - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j} \quad (z \in \mathbb{C},\ k = 1, 2, \cdots, n)$$

előállítás adódik.

A (9) feltételeknek eleget tevő P polinom előállítható az alappolinomok alábbi lineáris kombinációjaként:

$$P(z) = f(\lambda_1)\ell_1(z) + f(\lambda_2)\ell_2(z) + \cdots + f(\lambda_n)\ell_n(z) \quad (z \in \mathbb{K}).$$

Valóban, minthogy a másodiktól kezdve mindegyik tag eltűnik a λ_1 helyen, azért $P(\lambda_1) = f(\lambda_1)\ell_1(z) = f(\lambda_1)$. Hasonlóan adódik a (10) állításnak a többi része is.

Az egyértelműség egyszerűen következik az algebra alaptételéből. Tegyük fel ugyanis, hogy a $P_1 \in \mathcal{P}_{n-1}$ és a $P_2 \in \mathcal{P}_{n-1}$ is eleget tesz a (10) feltételnek. Ekkor ezek $P := P_1 - P_2 \in \mathcal{P}_{n-1}$ különbségére nyilván

$$P(\lambda_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

teljesül, vagyis az $(n-1)$-edfokú P polinomnak n különböző gyöke van. Innen $P(z) = 0$ $(z \in \mathbb{K})$, azaz $P_1 = P_2$ következik. □

Az adott $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ számokat **interpolációs alappontoknak**, a (10) feltételt kielégítő P polinomot az f függvény $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ **alappontokhoz tartozó Lagrange-féle interpolációs polinomjának** vagy röviden **Lagrange-polinomjának** nevezzük és az $L_n f$ szimbólummal jelöljük.

Bevezetve az

$$\omega_n(z) := \prod_{j=1}^{n}(z - \lambda_j) \quad (z \in \mathbb{K})$$

n-edfokú polinomot az alappolinomok felírhatók

$$\ell_k(z) = \frac{\omega_n(z)}{(z - \lambda_k)\omega_n'(\lambda_k)} \quad (z \in \mathbb{K}, z \neq \lambda_k, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{12}$$

alakban. Valóban, a szorzat deriválási szabálya alapján (lásd 4.1.2. pont) az ω_n' olyan n-tagú összegként írható fel, amelynek első tagja az $\omega_n(z)$-ből a $(z - \lambda_1)$ tényező elhagyásával, stb. $\cdots$, az n-edik tagja a $(z - \lambda_n)$ tényező elhagyásával adódik. Ezt az azonosságot $z = \lambda_k$ esetén felírva

$$\omega_n'(\lambda_k) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} (\lambda_k - \lambda_j) \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

következik. Ezt és (11)-et figyelembe véve (12) azonnal következik.

Valós esetben, vagyis amikor $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ és $H := (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ az $f - L_n f$ eltérés — a Taylor formulához hasonlóan — egy jól kezelhető alakban adható meg. Erre vonatkozika a

Lagrange-formula. *Tegyük fel, hogy az $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ függvény n-szer differenciálható és legyen*

$$a < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < b.$$

Ekkor minden $x \in (a,b)$ ponthoz létezik olyan $\xi_x \in (a,b)$, hogy

$$f(x) - (L_n f)(x) = \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}\omega_n(x). \tag{13}$$

Bizonyítás. Minthogy a (10) egyenlőség $x = \lambda_k$ esetén (minden $\xi_x \in (a,b)$ választás mellett) fennáll, elegendő a formulát az $(a,b) \setminus \{\lambda_j : j = 1,2,\cdots,n\}$ halmaz pontjaira igazolni. Rögzítsünk egy ilyen x pontot és vezessük be az

$$F(t) := f(t) - (L_n f)(t) - K_x\omega_n(t) \quad (t \in (a,b))$$

függvényt, ahol a $K_x \in \mathbb{K}$ számot úgy választjuk, hogy $F(x) = 0$ teljesüljön. Minthogy $\omega_n(x) \neq 0$, azért ilyen K_x egyértelműen létezik. Ekkor az ω_n definíciója és (10) alapján

$$F(\lambda_k) = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,n).$$

Ez azt jelenti, hogy az F eltűnik n egymáshoz csatlakozó (a,b)-beli intervallum végpontjaiban. A Rolle-tétel alapján az F' eltűnik a szóban forgó intervallumok mindegyikének valamely belső pontjában. Ezek a belső pontok $(n-1)$ egymáshoz csatlakozó intervallumot alkotnak, amelyek végpontjaiban az F' eltűnik. Az F'-re az említett intervallumokon ismét alkalmazva a Rolle-tételt azt kapjuk, hogy ezek mindegyikének van olyan belső pontja, amelyben az F'' eltűnik.

Ezt az eljárást folytatva végül azt kapjuk, hogy létezik olyan részintervallum az (a,b)-ben, amelynek végpontjaiban az $F^{(n-1)}$ eltűnik. Végül erre alkalmazva a Rolle-tételt olyan $\xi_x \in (a,b)$ hely létezésére tudunk következtetni, amelyben $F^{(n)}(\xi_x) = 0$. Minthogy az $L_n f \in \mathcal{P}_{n-1}$ polinom n-edik deriváltja 0 és az ω_n n-edfokú polinom n-edik deriváltja $n!$, azért

$$0 = F^{(n)}(\xi_x) = f^{(n)}(\xi_x) - K_x n!, \quad \text{azaz} \quad K_x = \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!}.$$

Innen — a $F(x) = 0$ feltételt és a F definícióját figyelembe véve — a bizonyítandó állítás már következik. $\square$

A Lagrange-polinom és a Taylor-polinom egy közös általánosításához az alábbi feladat kapcsán juthatunk el.

Legyenek $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_s \in \mathbb{K}$ adott, páronként különböző csomópontok és m_1, $m_2, \cdots, m_s \in \mathbb{N}^*$, valamint

$$\begin{array}{l} y_{1,0},\ y_{1,1},\ \cdots,\ y_{1,m_1-1} \\ y_{2,0},\ y_{2,1},\ \cdots,\ y_{2,m_2-1} \\ \vdots \\ y_{s,0},\ y_{s,1},\ \cdots,\ y_{s,m_s-1} \end{array}$$

adott $\mathbb{K}$-beli számok. Legyen továbbá

$$n := m_1 + m_2 + \cdots + m_s.$$

Keressük azt a $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$ polinomot, amelyre

$$Q^{(j)}(\sigma_k) = y_{k,j} \quad (k = 1, 2, \cdots s,\ j = 0, 1, \cdots, m_k - 1) \tag{14}$$

teljesül.

Most bebizonyítjuk a 3. Tétel következő általánosítását.

4. Tétel. *Egyetlen olyan $(n-1)$-edfokú Q polinom létezik, amelyre a (14) feltétel teljesül.*

Bizonyítás. Az egyértelműség — a 3. Tétel bizonyításához hasonlóan — az algebra alaptételének egyszerű következménye.

A Q létezése — bizonyos lineáris algebrai ismeretekre támaszkodva — az unicitás alapján egyszerűen igazolható. Legyen ugyanis

$$Q(z) := c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1} z^{n-1} \quad (z \in \mathbb{K}).$$

A (14) feltételt felírva az n-számú $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ együtthatóra egy n egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kapunk. Minthogy az unicitás miatt a homogén egyenletnek egyetlen megoldása — a triviális megoldás — létezik, azért a szóban forgó egyenletrendszer determinánsa nem nulla. Következésképpen a (14) feltétellel ekvivalens lineáris egyenletrendszer minden jobb oldal esetén egyértelműen megoldható. □

A most megfogalmazott feladat Q megoldását az adott csomópontkhoz és adott $y_{k,j}$ adatokhoz tartozó **Hermite-féle interpolációs polinomnak** nevezzük.

A most ismertetett feladat helyett néha az alábbit szokás megfogalmazni. Legyen $H \subseteq \mathbb{K}$ olyan nyílt halmaz, amely tartalmazza a $\sigma_j\ (j = 1, \cdots, s)$ pontokat és jelölje m az $m_j - 1\ (j = 1, \cdots, s.)$ számok maximumát. Az adott m-szer differenciálható $f : H \to \mathbb{K}$ függvényhez keresünk olyan $Q \in \mathcal{P}_{n-1}$ polinomot, amelyre

$$Q^{(j)}(\lambda_k) = f^{(j)}(\lambda_k) \quad (j = 0, 1, \cdots, m_k - 1,\ k = 1, 2, \cdots, s) \tag{15}$$

teljesül.

A 4. Tételt az $y_{k,j} := Q^{(j)}(\lambda_k)$ $(j = 0, 1, \cdots, m_k - 1,\ k = 1, 2, \cdots, s)$ adatokra alkalmazva azt kapjuk, hogy ennek a feladatnak pontosan egy megoldása létezik, és ezt a $H_n f$ szimbólummal fogjuk jelölni. Az unicitás alapján nyilvánvaló, hogy

$$H_n f = f, \quad \text{ha} \quad f \in \mathcal{P}_{n-1}. \tag{16}$$

A $H_n f$ polinomot — a Lagrange-féle interpolációs polinomhoz hasonlóan — felírhatjuk az ún. **Hermite-féle alappolinomok** lineáris kombinációjaként. Legyen ugyanis $r \in \{1, 2, \cdots, s\}$, $i \in \{0, 1, \cdots, m_r - 1\}$ és jelölje $h_{r,i} \in \mathcal{P}_{n-1}$ az alábbi interpolációs feladat megoldása:

$$h_{r,i}^{(j)}(\sigma_k) = \delta_{rk}\delta_{ij} \quad (k = 1, 2, \cdots, s,\ j = 0, 1, \cdots, m_k - 1), \tag{17}$$

ahol δ_{rk} a Kronecker-féle szimbólum, azaz $\delta_{rk} = 1$, ha $r = k$ és $\delta_{rk} = 0$, ha $r \neq k$.

A $h_{r,i}$ definíciójából következik, hogy $k \neq r$ esetén σ_k a $h_{r,i}$ polinomnak m_k multiplicitású gyöke, σ_r pedig i-szeres gyöke ennek a polinomnak. Innen nyilvánvaló, hogy a $h_{r,i}$ polinom

$$h_{r,i}(z) = R_{r,i}(z) \prod_{k=1, k\neq r}^{s} (z - \sigma_k)^{m_k} \quad (z \in \mathbb{K}), \tag{18}$$

alakú, ahol

$$R_{r,i}(z) = \sum_{j=i}^{m_r-1} b_{r,i}^{(j)} (z - \sigma_r)^j \quad (z \in \mathbb{K})$$

és a $b_{r,i}^{(j)} \in \mathbb{K}$ $(j = i, i+1, \cdots, m_r - 1)$ számok (17) alapján a $k = r, j = i, i + 1, \cdots, m_r - 1$ eseteknek megfelelő feltételből adódnak.

Bevezetve az

$$\Omega_n(z) := \prod_{k=1}^{s} (z - \sigma_k)^{m_k} \quad (z \in \mathbb{K}) \tag{19}$$

n-edfokú polinomot a $h_{r,i}$ a következő alakban írhatók fel:

$$h_{r,i}(z) = \Omega_n(z) \left(\frac{b_{r,i}^{(m_r-1)}}{z - \sigma_r} + \frac{b_{r,i}^{(m_r-2)}}{(z - \sigma_r)^2} + \cdots + \frac{b_{r,i}^{(i)}}{(z - \sigma_r)^{m_r - i}} \right) \quad (z \in \mathbb{K}). \tag{20}$$

Ezekkel a $H_n f$ a következőképpen állítható elő:

$$H_n f = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_k-1} f^{(j)}(\sigma_k) h_{k,j}. \tag{21}$$

Könnyen belátható, hogy az $m_1 = m_2 = \cdots = m_s$, $s = n$ speciális esetben $H_n f$ a $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ alappontokhoz tartozó Lagrange-féle interpolációs polinommal egyenlő. Ha viszont $s = 1$, következésképpen $n = m_1$, akkor $H_n f$ az f függvény σ_1 helyhez tartozó n-edik Taylor-féle polinomjával egyenlő.

6.3. Racionális függvények felbontása

Az Hermite-féle interpolációval kapcsolatban igazolt állítást felhasználva egyszerűen bebizonyítható az 1.2. pont 2. Tétele. Induljunk ki a P/Q valódi racionális függvényből és tegyük fel, hogy a nevező gyöktényezős felbontása

$$Q(z) = \prod_{k=1}^{s} (z - \sigma_k)^{m_k} \quad (z \in \mathbb{K})$$

alakú, ahol a σ_k gyökök páronként különbözők. Legyen $n := m_1 + \cdots + m_s$. Ekkor $P \in \mathcal{P}_{n-1}$, s ezért ennek a $\sigma_k\,(k = 1, \cdots, s)$ és az $m_k\,(k = 1, \cdots, s)$ adatok által meghatározott Hermite-féle interpolációs polinomjára (16) és (21) alapján

$$P(z) = (H_n P)(z) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_k-1} P^{(j)}(\sigma_k) h_{k,j}(z) \quad (z \in \mathbb{K})$$

teljesül. A (19), (20) és $\Omega_n = Q$ figyelembevételével

$$P(z) = Q(z) \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_k-1} P^{(j)}(\sigma_k) \left(\frac{b_{k,j}^{(m_k-1)}}{z - \sigma_k} + \frac{b_{k,j}^{(m_k-2)}}{(z - \sigma_k)^2} + \cdots + \frac{b_{k,j}^{(j)}}{(z - \sigma_k)^{m_k - j}} \right)$$

következik. Innen látható, hogy P/Q előállítható az

$$r_{\sigma_k,j}(z) := \frac{1}{(z - \sigma_k)^j} \quad (k = 1, \cdots, s,\ j = 1, \cdots, m_k)$$

függvények lineáris kombinációjaként, s ezzel a 1.2. pont 2. Tételét bebizonyítottuk. □

Ha P és Q valós együtthatós polinomok, akkor a P/Q racionális függvénynek létezik ún. **valós parciális felbontása**. Ekkor ugyanis minden komplex gyökkel együtt annak komplex konjugáltja is gyök, mégpedig ugyanazzal a multiplicitással. Könnyen belátható, hogy ilyenkor a P/Q parciális felbontásában az $r_{\sigma_k,j}$ és $r_{\bar{\sigma}_k,j}$ tagok együtthatói egymás komplex konjugáltjai. Ezek összege

$$\begin{aligned} R_{\sigma_k,j}(x) &:= A_{k,j} r_{\sigma_k,j}(x) + \bar{A}_{k,j} r_{\bar{\sigma}_k,j}(x) = \\ &= \frac{A_{k,j}(x - \bar{\sigma}_k)^j + \bar{A}_{k,j}(x - \sigma_k)^j}{[(x - \bar{\sigma}_k)(x - \bar{\sigma}_k)]^j} = \frac{S_{k,j}(x)}{(x^2 + px + q)^j} \end{aligned}$$

alakú, ahol a nevezőben nyilvánvalón valós együtthatós polinom áll. Egyszerű meggondolással adódik, hogy az $S_{k,j} \in \mathcal{P}_j$ polinom együtthatói is valósak.

Legyen $s(x) := x^2 + px + q$ $(x \in \mathbb{R})$ és osszuk el az $S_{k,j}$ polinomot s-sel. A hányadost q_0-lal az elsőfokú maradékot r_0-lal jelölve fennáll a következő:

$$S_{k,j} = sq_0 + r_0.$$

Az eljárást q_0-ra megismételve és a hányadost q_1-gyel a maradékot r_1-gyel jelölve azt kapjuk, hogy

$$S_{k,j} = sq_0 + r_0 = s(sq_1 + r_1) + r_0 = r_0 + r_1 s + q_1 s^2.$$

Ezt algoritmust folytatva olyan q_k polinomsorozatot kapunk, amelyben a tagok fokszáma szigorúan fogy. Következésképpen van olyan $i \in \mathbb{N}$, hogy $S_{k,j}$ felírható

$$S_{k,j} = r_0 + r_1 s + \cdots + r_i s^i,$$

alakban, ahol $r_0, r_1, \cdots, r_i$ lineáris függvények. Ezt felhasználva az $R_{k,j}$-re a következő előállítás adódik:

$$R_{k,j} = \frac{q_0}{s^j} + \frac{q_1}{s^{j-1}} + \cdots + \frac{q_i}{s^{j-i}}.$$

Végül a parciális felbontásban véve a valós gyökök járulékát a következő állítás adódik.

5.Tetel *Legyen*

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{\ell} (x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^{n_j} \quad (x \in \mathbb{R})$$

a valós együtthatós Q polinomnak egy felbontása, ahol a tényezők páronként különbözők és együtthatóik valósak. Legyen továbbá P/Q egy valódi racionális függvény. Ekkor léteznek olyan

$$A_{i,j} \ (i = 1, \cdots, k,\ j = 1, \cdots, m_i) \quad \textit{és}$$
$$B_{i,j}, C_{i,j} \ (i = 1, \cdots, \ell,\ j = 1, \cdots, n_i)$$

valós számok, amelyekkel a P/Q felírható

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{i,j}}{(x - \lambda_i)^j} + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{B_{i,j} x + C_{i,j}}{(x^2 + \alpha_i x + \beta_i)^j} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Irodalom

Javasolt irodalom

1. *Leindler L. – Schipp F.* Amalízis I. Egységes jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1976
2. *Pál J. – Schipp F. – Simon P.* Amalízis II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1976
3. *Rudin W..* A matematikai amalízis alapjai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
4. *Szőkefalvi–Nagy B.* Valós függvények és függvénysorok. Egyetemi tankönyv, 3. kiadás, Budapest, 1965
4. *Szőkefalvi–Nagy B.* Komplex függvénytan. Egységes jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 19xx

A sorozatban megjelent kötetetek

1. *Kamarás Lajos,* Matematikai bevezetés. JPTE Pécs, 1994
2. *Fehér János,* Számelmélet. JPTE Pécs, 1994
3. *Schipp Ferenc,* Analízis I. JPTE Pécs, 1994
4. *Stachó László,* Geometria. JPTE Pécs, 1994
5. *Hetyei Gábor,* Kombinatórika és gráfelmélet. JPTE Pécs, 1995
6. *Székelyhidi László,* Valószínűségszámítás és matematikai statisztika. JPTE Pécs, 1996