Inferens for beta
Tidligere:
$$\hat{\beta}(Y) \sim \mathcal{N}_k(\beta, \sigma^2(X^TX)^{-1}), \qquad \text{ukendt } \sigma^2$$
Antag:
$$Y \sim \mathcal{N}_n(X\beta, \sigma^2 I), \qquad X \text{ har fuld rang}$$
Notation:

- $d_j = (X^TX)^{-1}$
- b_j er j'te element af $\hat{\beta} = (X^X)^{-1}X^Ty$
- $\hat{\sigma}^2 = \|y - Hy\|^2/(n-k)$

Betragt hypotesen $H_0 : B_j = B_{0_j}$. Så er
$$t_j(Y; B_{0_j}) := \frac{\hat{\beta}_j(Y) - B_{0_j}}{\sqrt{d_j\hat{\sigma}^2(Y)}} \sim t(n-k)$$
og p-værdien er givet ved
$$P(y; B_{0_j}) = P(|t_j(Y; B_{0_j})|) \geq |t_j(y; B_{0_j})|$$
Et $1-\alpha$-konfidensinterval for B_j er givet ved
$$\hat{\beta}_j(y) \pm t_{1-\alpha/2}(n-k)\sqrt{d_j\hat{\sigma}^2(y)}$$

Bevis
Bemærk:
$$\begin{aligned}
&\hat{\beta}(Y) \sim \mathcal{N}_k(\beta, \sigma^2(X^TX)^{-1}) && \Rightarrow \\
&\hat{\beta}_j(Y) \sim \mathcal{N}(\beta_j, \sigma^2 d_j) && \Rightarrow \\
&\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\sigma^2 d_j}} \sim \mathcal{N}(0,1)
\end{aligned}$$
og
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{n-k}\chi^2(n-k)$$
Derfor
$$t_j(Y; B_{0_j}) = \frac{(B_j(Y) - B_{0_j})/\sqrt{\sigma^2 d_j}}{\sqrt{d_j\hat{\sigma}^2(Y)/\sqrt{\sigma^2 d_j}}}$$

Tælleren er standardnormalfordelt mens nævneren er χ^2-fordelt. Altså fås en t-fordeling:

$$\sim t(n-k)$$

Prædiktion

Lad $Y \sim \mathcal{N}_n(X\beta, \sigma^2 I)$, og X have fuld rang. Antag, at vi har observeret data $Y = y$ og ud fra det udregnet $\hat{\beta}(y)$ og $\hat{\sigma}^2$. Vi vil prædiktere Y_{n+1} (ukendt) for en kendt x_{n+1}. Vi prædikterer via MLE, dvs

$$\hat{Y}_{n+1}(y) = x_{n+1}^T \hat{\beta}(y)$$

Bemærk: $\hat{Y}_{n+1}$ kaldes en prædiktor.

Da

$$\hat{\beta}(Y) \sim \mathcal{N}_k(\beta, \sigma^2 (X^T X)^{-1})$$

så

$$\hat{Y}_{n+1} \sim \mathcal{N}(x_{n+1}^T \beta, \sigma^2 x_{n+1}^T (X^T X)^{-1} x_{n+1})$$

som er uafhængig af $Y_{n+1} \sim \mathcal{N}(x_{n+1}^T \beta, \sigma^2)$. Derfor

$$Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 (1 + x_{n+1}^T (X^T X)^{-1} x_{n+1})$$

Da $\hat{\sigma}^2(Y)$ er uafhængig af $\hat{\beta}(Y)$, så er $\hat{\sigma}^2(Y)$ uafhængig af $Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}(Y)$. Dvs

$$\begin{aligned}
T &= \frac{Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(Y)(1 + x_{n+1}^T (X^T X)^{-1} x_{n+1}}} \\
&= \frac{(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1} / \sqrt{\sigma^2 (1 + x_{n+1} (X^T X)^{-1} x_{n+1}}}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(Y)/\sigma^2}} \\
&\sim t(n-k)
\end{aligned}$$

Med sandsynlighed $1-\alpha$ ligger Y_{n+1} i intervallet

$$\hat{Y}_{n+1}(Y) \pm t_{1-\alpha}(n-k) \sqrt{\hat{\sigma}^2(Y)(1 + x_{n+1}^T (X^T X)^{-1} x_{n+1}}.$$

Indsættes $Y = y$ så kaldes dette et $(1-\alpha)$-prædiktionsinterval for Y_{n+1}.