P0-projektforslag til diskrete dynamiske systemer

I gymnasiet er vækstmodeller formuleret som differentialligninger: Hvis væksten er proportional med funktionsværdien, kan vi opstille ligningen $f'(t) = af(t)$ og vi kan løse den og få $f(t) = ke^{at}$. Det er en model med *kontinuert tid* - vi kender $f(t)$ for alle t. I mange virkelige problemer giver det bedre mening at sige, at værdien kun er kendt *diskret* - vi måler en gang om måneden, om året, i timen,... De tilhørende ligninger for vækst kaldes differensligninger.

I dette projekt skal I undersøge differensligninger, der altså minder om differentialligninger, blot hvor parametren er *diskret*. Denne umiddelbare lille forskel viser sig at have stor indflydelse på løsningernes natur.

1 Indledning

Mange af de størrelser, som fx økonomer eller biologer betragter (indkomst, forbrug, opsparing, populationer,...) bestemmes til faste tidsintervaller, dvs. faste diskrete tidspunkter som hver dag, hver uge, hvert kvartal eller hvert år. Et særkende for disse systemer er altså, at tiden er **diskret** i modsætning til kontinuert, hvor tiden vil kunne variere vilkårligt. At systemet er **dynamisk** vil sige, at det udvikler sig over tiden, i modsætning til et statisk system, der pr. definition ikke ændrer sig.

Hvis man kender størrelsen af fx indkomsten dette år, hvordan kan man bruge denne information til at prædiktere (dvs., forudsige) indkomsten næste år, eller tilsvarende hvis man kender størrelsen af torskepopulationen dette år, hvordan kan man bruge denne information til at prædiktere populationens størrelse de næste fire år?

Ligninger der relaterer sådanne størrelser til sig selv, men til forskellige tidspunkter kaldes differensligninger.

2 Første ordens differensligninger

Lad $t = 0, 1, 2, \ldots$ angive forskellige diskrete tidsperioder. Man kalder $t = 0$ for *begyndelsesperioden.* Hvis $x(t)$ er en funktion defineret for $t = 0, 1, 2, \ldots$, benytter man ofte skrivemåden $x_0, x_1, x_2, \ldots$ til at betegne $x(0), x(1), x(2), \ldots$, og generelt skriver man x_t for $x(t)$.

En første ordens differensligning i x_t kan sædvanligvis skrives på formen

$$x_{t+1} = f(x_t), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Værdierne, der fremkommer ved evaluering af x_{t+1} for $t = 0, 1, \ldots$ kaldes for **stien** eller **banen** for x_t. Den er en første ordens ligning, fordi den relaterer værdien af en funktion i periode $t + 1$ til værdien af den samme funktion i den forrige periode t. Altså afhænger værdien af x_{t+1} kun af værdien ét skridt tidligere. Generelt afhænger en k'te ordens differensligning af de k forrige værdier, hvilket kan skrives som $x_{t+1} = f\left(x_t, x_{t-1}, \ldots, x_{t-(k-1)}\right)$. I dette projekt kigges kun på første ordens differensligninger.

Det er fx interessant at kigge på, om man kan skrive x_{t+1} ved hjælp af x_0 og $t + 1$ i stedet for x_t. Ofte refererer man til x_0 som en **begyndelsesbetingelse**. Det er også interessant at kunne udtale sig om, hvordan løsningen $x(t)$ til en differensligning vil opføre sig, når t varieres, hvilket naturligvis afhænger af f.

Et vigtigt specialtilfælde er en første ordens **lineær** differensligning, hvor f er en lineær funktion, dens ligning kan skrives på formen

$$x_{t+1} = ax_t + b_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

hvor a er en konstant og b_t er en kendt funktion af tiden.

Bemærk at (1) lige så godt kunne skrives som

$$x_t = ax_{t-1} + b_{t-1}, \qquad t = 1, 2, 3, \ldots,$$

eller

$$x_{n+1} = ax_n + b_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Navnet på variablene har altså ingen betydning.

2.1 Eksempel

Et simpelt eksempel på differensligning (1) er

$$x_{t+1} = \frac{1}{2}x_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

hvor $a = \frac{1}{2}$ og $b_t = 0$ for alle t. Det ses, at

$$\begin{aligned}
x_{t+1} &= \frac{1}{2}x_t \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x_{t-1}\right) \quad \text{fordi } x_t = \frac{1}{2}x_{t-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 x_{t-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}x_{t-2}\right) \quad \text{fordi } x_{t-1} = \frac{1}{2}x_{t-2} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^3 x_{t-2} \\
&\;\vdots \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} x_{t-(t+1-1)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} x_0.
\end{aligned}$$

Dette kaldes løsningen til differensligningen (2). Så hvis man har x_0, kan man nemt finde x_{t+1} for alle t.

Forslag:

- Simulér stien for forskellige første ordens lineære differensligninger (dvs. for forskellige koefficienter a og b_t). Prøv fx for $(a, b_t) \in \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1, 0), (2, 0)\right\}$ og find selv på flere. I kan i første omgang fx benytte onlineværktøjet på `http://math.bu.edu/DYSYS/applets/linear-web.html`. I forventes dog også at lære at simulere systemet i matematik-software, som f.eks. MATLAB, Python eller Maple. MATLAB bruges også i lineær algebra kurset og I kan læse mere om det her: `http://www.first.math.aau.dk/matlab-center/screencasts/`

- Forsøg at sige noget generelt om opførslen af differensligningen (1) baseret på værdien af koefficienterne a og b_t.

- Udtryk x_{t+1} i (1) udelukkende ved x_0 og $t+1$ for valget $b_t = b \neq 0$ for alle t, altså hvor b er en konstant (et reelt tal) bortset fra 0.

- Overvej om der er flere løsninger til (2) (og (1) generelt) – udover ved at bruge forskellige begyndelsesbetingelser.

3 Projektemner

I dette afsnit præsenteres en række eksempler på, hvad man i P0-projektet kan kigge nærmere på.

Økonomiske modeller

3.1 En multiplikator-accelerator model for økonomisk vækst

Lad Y_t betegne nationalindkomst, I_t de totale investeringer og S_t den totale opsparing – altsammen i periode t. Antag at opsparingen er proportional med nationalindkomsten, og at investeringer er proportional med ændringer i indkomsten fra periode t til $t+1$. Så har man, for $t = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha Y_t \\ I_{t+1} &= \beta(Y_{t+1} - Y_t) \\ S_t &= I_t. \end{aligned}$$

Den sidste ligning ovenfor er en ligevægtsbetingelse, at opsparing er lig med investeringer i hver periode. α og β er positive konstanter, og man antager, at $\beta > \alpha > 0$.

Forslag:

- Find en differensligning, der bestemmer stien for Y_t givet initialindkomsten Y_0, og løs denne differensligning.
- Simulér/tegn stien for forskellige værdier af α, β og Y_0 og forsøg at fortolke resultaterne.
- Undersøg, hvad værdien af α og β har af betydning for, hvordan løsninger til differensligningen opfører sig; at undersøge kan både være at sige noget eksakt ved hjælp af matematiske argumenter og at simulere og se på opførslen.

3.2 En diskret vækstmodel

Lad P_t være en økonomisk pris (fx en aktiekurs) til tid t, som vi interesserer os for. Når man opskriver en dynamisk model for udviklingen i prisen har det i den økonomiske teori vist sig at være en fordel at bruge logaritmen til prisen, kaldet log-pris $p_t = \ln(P_t)$:

$$p_{t+1} = ap_t + b_t. \tag{3}$$

Her bruges variablene b_t, $t = 0, 1, 2, \dots$ til at beskrive en form for tilfældig variation i prisen. Ændringen i log-pris betegnes $r_{t+1} = p_{t+1} - p_t$ og kaldes log-afkast. Det kan vises at log-afkastet tilnæmelsesvist er lig med vækstprocenten (også kaldet afkastet) givet ved

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1.$$

Forslag:

- Brug logaritmeregnereglerne og standardresultatet
$$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1 \text{ for } x \to 0,$$
til at vise $r_t \approx R_t$ (når R_t ikke er for stor) som nævnt ovenfor.

- Simulér/tegn stien for forskellige værdier af a og p_0 samt tilfældige tal $b_0, b_1, b_2, \ldots$ og forsøg at fortolke resultaterne.

- Undersøg, hvad værdien af a har af betydning for, hvordan differensligningen opfører sig; at undersøge kan både være at sige noget eksakt ved hjælp af matematiske argumenter og at simulere og se på opførslen.

- Tegn grafen for en rigtig aktiekurs (fx Novo Nordisk) og se om den diskrete dynamiske model ovenfor kan opføre sig på en lignende måde. (Husk at omregne log-pris til pris når I sammenligner stier fra modellen med den rigtige aktiekurs.)

- Hvordan ser det ud hvis man direkte bruger prisen i stedet for log-prisen i den diskrete dynamiske model (dvs. hvis p erstattes med P i (3) ovenfor).

Metoder fra anvendt matematik

3.3 Newton-Raphsons metode

I har lært at finde rødder (eller nulpunkter) for funktioner, fx i andengradspolynomier $f(x) = ax^2+bx+c$. Men hvordan mon man finder rødder i funktioner, hvor man ikke bare har en nem og simpel formel? Og hvad tror I der sker, når I får lommeregneren til at finde rødder?

En måde at finde rødder på er ved at gøre det symbolsk som fx formlen for rødderne i et andengradspolynomium. En anden måde at gøre det på, er at gøre det numerisk, dvs. man går direkte efter at finde den numeriske værdi af rødderne.

Et eksempel på en numerisk metode til at finde rødder på, er Newton-Raphsons metode, opkaldt efter Isaac Newton og Joseph Raphson. Metoden stammer fra 1600-tallet.

Newtons metode kan udtrykkes ved differensligningen
$$x_{t+1} = x_t - \frac{f(x_t)}{f'(x_t)}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$
hvor f er den funktion, man gerne vil finde nulpunket for, og f' er den afledede af f.

Forslag:

- Hvilket mere præcist navn har ligning (4)? Er den lineær? Hvilken orden?

- Hvorfor er det at finde nulpunkter interessant?

- Find kvadratroden af 1400 ved at lave 5 iterationer af (4) med forskellige startværdier. Forsøg at tegne alle iterationerne for mindst én af startværdierne. Tjek nøjagtigheden i forhold til lommeregnerens resultat.

- Nogle funktioner har mere end ét nulpunkt. Hvordan finder man mere end ét nulpunkt ved hjælp af Newton-Raphsons metode?

- Kan Newton-Raphsons metode fejle? I så fald: hvornår og hvorfor? (Hvilken betydning har startværdien x_0? Virker metoden for alle valg af f?)

- Undersøg nøjagtigheden af metoden.

3.4 Eulers metode

Der findes en meget omfattende teori for differentialligninger. Det er dog uheldigvis langt fra alle differentialligninger man kan angive en eksakt løsning til. I mange tilfælde må man stille sig tilfreds med at benytte numeriske løsningsmetoder som kan give en tilnærmet løsning. Vi betragter her differentialligningen af første orden

$$y' = g(x, y), \tag{5}$$

med en tilhørende begyndelsesbetingelse $y(x_0) = y_0$. Den vigtige entydighedssætning for differentialligninger siger, at hvis funktionen på højre side i (5) har nogle tilstrækkeligt pæne egenskaber, så findes der en entydig bestemt løsning $y = f(x)$ til (5) som opfylder at $y(x_0) = y_0$.

I Eulers metode bestemmer vi tilnærmede værdier $y_1, y_2, \ldots$ for funktionsværdierne $f(x_1), f(x_2), \ldots$ hvor x-værdierne er valgt ved at gå i faste skridt $h > 0$ fra x_0. Bemærk, at tangentlinjen i (x_0, y_0) til grafen for løsning til (5) med $y(x_0) = y_0$ har hældning givet ved den kendte størrelse $g(x_0, y_0)$. Denne tangentlinje benyttes nu i processen til finde en tilnærmelse til $f(x_1)$. Tangentlinjen i (x_1, y_1) til grafen for løsning til (5) med $y(x_1) = y_1$ benyttes dernæst til at bestemme tilnærmelsen til $f(x_2)$ og så fremdeles. Det giver følgende ligninger

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n + hg(x_n, y_n) \\ x_{n+1} &= x_n + h. \end{cases}$$

Forslag:

- Hvorfor er løsninger til differentialligninger interessante? Hvorfor løser man ikke bare differentialligninger eksakt?

- Redegør for den geometriske intuition, der danner baggrund for Eulers metode.

- Afprøv metoden på ligningen $y' = 2y$, hvor $y(0) = 1$. Eksperimenter med forskellige skridtlængder h. Sammenlign med den eksakte løsning til ligningen. Afhænger afvigelsen fra den eksakte løsning af h?

- Afprøv metoden på andre differentialligninger, hvor I ligeledes kan finde eksakte løsninger.

- Kan man gøre h vilkårlig lille, eller kan noget gå galt?

4 Materiale

I kan finde mere materiale i semesterrummet på Moodle, hvor dette oplæg også findes i elektronisk udgave.

5 Vejledere

E. Susanne Christensen (susanne@math.aau.dk)
Robert Jacobsen (robert@math.aau.dk)
Rasmus Waagepetersen (rw@math.aau.dk)
Søren B. Vilsen (svilsen@math.aau.dk)
Thomas Hvolby (thomas@math.aau.dk).
Mikkel H. Brynildsen (mikkelhb@math.aau.dk).