# Opgave 242

e16g3113

October 31, 2016

**Opgave 242** Lad $f : ]a, \infty[$ og $g : ]b, \infty[$ være to reelle funktioner, således $g(x) \in ]a, \infty[$ for $x \in ]b, \infty[$. Bevis, at hvis $g(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ og $f(x) \to c$ for $x \to \infty$, så gælder $f(g(x)) \to c$ for $x \to \infty$ (uanset om $c \in \mathbb{R}$ eller $c = \pm\infty$)

*Proof.* Begge funktioner er defineret i nærheden af $\infty$, hvilket betyder, at der eksisterer et positivt $R$, som opfylder, at et $x \in \mathbb{R}$ er større end dette $R$, som er indeholdt i definitionsmængden for $f$ eller $f$. Skrevet med kvantorer:

$$\exists R_1 > 0 : \{x \in \mathbb{R} \mid x > R_1\} \subseteq D_f \tag{1}$$

og

$$\exists R_2 > 0 : \{y \in \mathbb{R} \mid x > R_2\} \subseteq D_g \tag{2}$$

Da $f(x) \to c$ for $x \to \infty$, så gælder:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : x > M \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon \tag{3}$$

Ved at bruge samme $M$ fås:

$$\exists N > 0 : y > N \Rightarrow g(y) > M \tag{4}$$

Det skal altså vises, at:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 : g(y) > M \Rightarrow |f(g(x)) - c| < \varepsilon \tag{5}$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da $g(x) \subseteq D_f$, fås altså $f(g(x)) : D_g \to V_f$ . Der kan altså findes et $M$, som afparerer dette $\varepsilon$, og dertil kan der findes et $N$, som

opfylder at $g(y) > M$.
Substituér $x$ med $g(y)$ i ligning (3), og deraf fås:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 : y > N \Rightarrow |f(g(y)) - c| < \varepsilon \tag{6}$$

Dermed er tilfældet for de reelle tal bevist, og næst skal det bevises for $c = \pm\infty$ Lad $K \in \mathbb{R}$ være givet. Det vides at $g(y) \to \infty$ for $y \to \infty$. Så gælder det ifølge definition 4.18 at:

$$\forall M > 0 \exists N > 0 : y > N \Rightarrow g(y) > M \tag{7}$$

Det vides også, at $f(x) \to \infty$ for $x \to \infty$, hvilket vil sige:

$$\exists M > 0 : x > M \Rightarrow f(x) > K \tag{8}$$

Når:

$$x > N \Rightarrow g(y) > M \Rightarrow f(g(y)) > K \tag{9}$$

$\blacksquare$