
Registrering af fald og sporing af demente

Demente og forsvinden

P2-rapport
Gruppe A405b

Aalborg Universitet
Matematik-Teknologi



Matematik – Teknologi
Aalborg Universitet
<http://www.aau.dk>

AALBORG UNIVERSITET STUDENTERRAPPORT

Titel:

Registrering af fald og sporing af demente

Tema:

Numeriske metoder inden for teknologi

Projektperiode:

Forårssemestret 2016

Projektgruppe:

A405b

Deltager(e):

Frederik Appel Vardinghus-Nielsen
Jonas Villadsen
Mads Kristensen
Peter Løfqvist Henriksen
Thomas Kjems

Vejleder(e):

Jan Østergaard
Kirsten Krogh Hansen

Oplagstal: 3**Sidetal:** 102**Afleveringsdato:**

24. maj 2016

Rapportens indhold er frit tilgængeligt, men offentliggørelse (med kildeangivelse) må kun ske efter aftale med forfatterne.

Abstract:

This report deals with locating elderly with dementia, who have gone missing and/or have fallen outside of their residence. Following this, the paper has described mathematics on GPS, IMU low-pass filtering and correlation analysis. Proceeding these theories experiments were conducted to determine reliability and validity of the GPS receiver and IMU leading to experimentation regarding patterns of movement - specifically whether it is possible to distinguish a falling movement from normal patterns of movement. The experiments on movement patterns concluded through mutual correlation, that these are possible to tell apart, and that low-pass filtering enabled optimization of the algorithm, making the calculation of correlations faster. It is further shown through experimentation that the GPS has a degree of precision satisfactory of roughly estimating the position of a person. It is concluded, that the presented theories can be utilised in the making of the discussed system, but that the process of correlation and detection of possible falls can be refined as the inclusion of more movement patterns would lead to a better degree of precision for the algorithm.

Forord

Dette projekt er udarbejdet af projektgruppen Mattek2a405b på 2. semester af Matematik-teknologi-uddannelsen på Aalborg Universitet i forårshalvåret 2016. Projektgruppen har bestået af fem gruppemedlemmer med Jan Østergaard som hovedvejleder og Kirsten Krogh Hansen som bivejleder.

Kildehenvisninger i denne rapport sker gennem Harvardmetoden. Hvis der optræder figurer eller tabeller uden henvisninger, er det gruppen selv, som har udarbejdet dem.

Rapporten er indholdsmæssigt opdelt således, at $\frac{1}{3}$ fokuserer på matematiske og numeriske aspekter, mens $\frac{2}{3}$ fokuserer på teknologiske aspekter.

Aalborg University, 6. juni 2016

Thomas Kjems
<tkjems15@student.aau.dk>

Peter Løfqvist Henriksen
<plhe15@student.aau.dk>

Jonas Villadsen
<jvill14@student.aau.dk>

Mads Kristensen
<mkr15@student.aau.dk>

Frederik Appel Vardinghus-Nielsen
<fvardi15@student.aau.dk>

Symbol-vejledning

Symbol	Betydning
◦	Grader
<i>LSB</i>	Least significant bit
rad	Radianer
DD	Decimal degrees
X ↓	Decimering med faktor X

Indhold

1 Problemanalyse	2
1.1 Initierende problem	2
1.2 Demens	2
1.3 Problematikker bag teknologisk løsning	4
1.3.1 Dansk lovgivning i forhold til sporing af demente	4
1.3.2 Etiske problematikker	4
1.4 Problemformulering	7
1.5 Metode	7
2 Teori	8
2.1 Inertisensorer	8
2.1.1 Introduktion til accelerometer	8
2.1.2 Introduktion til gyroskop	9
2.2 Inertial measurement unit	10
2.2.1 Koordinattransformation	11
2.2.2 Fejlkilder ved inertial measurement unit	11
2.2.3 Kalibrering	13
2.3 Global Positioning System - GPS	14
2.3.1 Introduktion til GPS	14
2.3.2 GPS Struktur	15
2.3.3 Trilateration	16
2.3.4 Pseudoafstand	16
2.3.5 Geografiske koordinater	17
2.3.6 Fejlkilder ved GPS	18
2.4 Matematik	21
2.4.1 Koordinattransformation	21
2.4.2 Afstand mellem punkter på en kugles	23
2.4.3 Numerisk integration	27
2.4.4 Taylorpolynomiet	31
2.4.5 Komplekse tal	32
2.4.6 Fouriertransformation	33
2.4.7 Korrelation	37
2.5 Filtrerteori	37
2.5.1 FIR filter	37
2.5.2 Design af filter	43
2.6 Sampling	44

Indhold	1
2.6.1 Nyquist–Shannon samplingteorem	44
2.6.2 Aliasering	45
2.6.3 Kvantisering	46
2.6.4 Resampling	46
2.7 Hardware	47
2.7.1 Arduino	47
2.7.2 GY-87	47
2.7.3 GY-GPS6MV2 GPS Module	48
2.7.4 SparkFun OpenLog	49
3 Verificering af sensorer	50
3.1 Verificering af gyroskop	51
3.2 Verificering af accelerometer	56
3.2.1 Forsøg i hånden	56
3.2.2 Forsøg med luftpuedeskinne	58
4 Forsøg	62
4.1 Fald forsøg	65
4.2 Forsøg med gang og løb	71
4.3 Buk forsøg	73
4.4 Hop forsøg	75
4.5 Fejlkilder IMU	77
4.5.1 Korrelationsanalyser	77
4.6 GPS forsøg	82
4.7 Fejlkilder GPS	85
4.8 Diskussion	87
4.8.1 IMU	87
4.8.2 GPS	89
5 Vurdering	91
5.0.1 GPS	91
5.0.2 IMU	91
5.1 Algoritme (løsningspseudokode)	93
6 Konklusion	94
6.1 Perspektivering	95
7 Bilag	96
7.1 Indhold på CD	97
Litteratur	98

1 | Problemanalyse

I dette kapitel lægges der, gennem en problemanalyse, en retning for projektet, og der vil heraf blive udledt en problemformulering. Dette gøres ved at opstille et initierende problem, som derefter analyseres, hvilket giver anledning til problemformuleringen. Til sidst i kapitlet redegøres der for metoden anvendt i projektet.

1.1 Initierende problem

Alzheimer's Disease International anslår i samarbejde med *Danmarks Statistik* antallet af ældre over 60 år med demens i Danmark til at være knap 84.000. Der sker hvert år mere end 1.000 efterlysninger af demente, og de demente, som bliver væk, er i risiko for at komme til skade grundet manglende evne til at finde hjem og/eller skadelige fald [Nationalt Videnscenter for Demens, 2016b]. I kommende afsnit undersøges omfanget af dette problem, og der redegøres for et forslag til en løsning.

1.2 Demens

Demens er en betegnelse for en række symptomer, som blandt andet inkluderer ringere hukommelse og nedsatte kognitive evner [Alzheimer's Association, 2016a]. Disse symptomer medføres som regel af en eller flere hjernesygdomme. Den mest udbredte form for hjernesygdom, som medfører demens, er Alzheimers sygdom, efterfulgt af vaskulær demens, som er en følge af hjerteanfald. Alzheimers er årsagen til 60-80% af alle tilfælde af demens og er hyppigst hos ældre over 65 år [Alzheimer's Society, 2016]. Der findes ingen kur mod sygdommen og ligeledes heller ingen kendt behandling, som kan halte symptomernes fremskridt [Alzheimer's Association, 2016a].

Der sker hvert år over 1000 eftersøgninger af demente i Danmark [Information, 2014] som følge af deres vildfarende, hvorved der menes, at de ikke kan finde hjem eller glemmer, at de skal hjem. Uover denne tendens til vildfarende blandt demente, har ældre, og specielt ældre med demens, også langt større tendens til at falde med eventuelle fysiske skader til følge, da deres kognitive og motoriske evner er nedsatte [Videnscenterfordemens, 2016]. Cirka en tredjedel af ældre over 65 år falder mindst én gang pr. år, og af disse falder cirka halvdelen gentagne gange. Cirka 10% af faldende fører til alvorlige skader [sundhed.dk, 2015]. Hvis ældre falder og kommer til skade, kan der gå længe, før hjælpen kommer, hvis ingen ved hvor de

befinder sig. Dette kan være endnu værre for demente, som farer vild, da ingen ved, hvor personen er, og personen ikke nødvendigvis selv er i stand til at tilkalde hjælp.

Omsorg til demente medvirker ofte til psykologisk belastning hos pårørende og eventuelle plejemedhjælpere. Tilstanden af demente vides aldrig med sikkerhed, hvilket kan resultere i, at pårørende kan føle sig nødsaget til konstant at tjekke op på vedkommende. Pårørende vil samtidig altid have i baghovedet, at den demente er i risiko for at blive væk, hvilket blot forøger belastningen [Nationalt Videnscenter for Demens, 2016b]. Demente udgør også en samfundsmæssig belastning, da omkostninger i form af "*udgifter til plejeboliger, dagtilbud, hjemmehjælp [og] hjemmesygeplejerske*" [Nationalt Videnscenter for Demens, 2016a], værende de centrale udgifter, udgør op mod 24 mia. danske kroner årligt, hvilket er et direkte resultat af sygdommen [Nationalt Videnscenter for Demens, 2016a]. I forbindelse med at demente bliver væk, koster det omtrent 4000kr./time for en politi helikopter med observatør, mens en større redningshelikopter kan løbe op på 27.000-72.000kr./time [Syd, 2011]. Taget de mange efterlysninger af dementa i betragtning, vil demente altså forårsage høje omkostninger for samfundet. Det står heraf klart, at penge kan spares på området, specielt hvis søgetiden nedsættes [Information, 2014].

Der er adskillige muligheder for at forhindre demente i at blive væk. Disse inkluderer bl.a. at planlægge aktiviteter for den demente, hvilket holder dem beskæftiget, og sørge for at de ikke mangler noget, men også at camouflere låse og gemme nøgler [Alzheimer's Association, 2016b]. Sidstnævnte løsninger er voldsomme restriktioner af friheden til at bevæge sig omkring. Dette kan forårsage frustration og frygt hos den indelukkede, da personen ikke nødvendigvis forstår, hvorfor vedkommende er låst inde [Spencer, 2015]. Denne løsning er derfor ikke ønskværdig, og der er altså grundlag for at finde på en bedre.

En mulig løsning kunne være påsætningen af en enhed med diverse sensorer på den demente. Dette åbner op for flere muligheder, herunder at være i stand til automatisk at underrette pårørende, hvis den demente bevæger sig uden for et givet område [Comfort Zone Check-In, 2016]. Det vil også være muligt at registrere bevægelsesmønstre, som afviger fra det normale ved hjælp af en algoritme - dette kunne være abnorme bevægelser som et fald.

1.3 Problematikker bag teknologisk løsning

Når det kommer til implementeringen af en teknologisk løsning som GPS i forbindelse med ældre diagnosticeret med demens, skal der gøres overvejelser på det etiske såvel som på det lovmaessige plan. Disse problematikker vil blive belyst her.

1.3.1 Dansk lovgivning i forhold til sporing af demente

Som følge af lempelser i den danske servicelovgivning, gældende fra 2010, kan ældre uden samtykke blive udstyret med GPS. I forhold til paragraf 124 stk. 3, der fremgår af serviceloven LBK nr 1284 af 17/11/2015, betragtes det derfor ikke som magtanvendelse, hvis der anvendes en GPS-løsning i forbindelse med demente, der er til fare for sig selv eller sine omgivelser. Grundet denne lempelse i lovgivningen er selskaber som Safecall trådt til. Løsninger der omfatter GPS til ældre, der bliver væk, er derfor ikke et juridisk problem i tilfælde, hvor det drejer sig om demente, der er til fare for sig selv [Retsinformation, 2009].

1.3.2 Etiske problematikker

Jævnfør afsnit 1.3.1 modstrider GPS-sporing af demente ikke loven, men det er stadig nødvendigt at belyse de etiske aspekter ved sporing af demente. Da overvågningen er den centrale problemstilling, udgør dilemmaet omsorg kontra kontrol fokusområdet for den etiske del i projektet. Udover denne kan problemet også betragtes med hensigt på, hvorvidt løsningerne kan stoles på og hvorvidt problemet kan betragtes mere generelt i forbindelse med universelle etiske problemstillinger. Her vil der blive diskuteret *konsekvensetik* og *pligtetik*.

Konsekvensetik arbejder ud fra den overbevisning, at rigtigheden af en handling udelukkende afhænger af dens konsekvenser. En populær talemåde, som udtrykker dette, er at *målet helliger midlet*. Kan en handling, som gør forkert, gøre mere rigtigt end den gør forkert, er den i konsekvensetikkens optik en god handling [Hagen, 1995]. Dette er relevant, hvis der menes, at det er en uetisk og dermed en forkert handling at overvåge demente, da handlingen dermed kun kan vurderes som værende god, hvis resultatet, at de demente er i sikkerhed, og de pårørende føler sig mere trykke, er mere rigtigt, end at overvågningen er forkert.

Pligtetik arbejder ud fra det såkaldte *kategoriske imperativ* [Hagen, 1995], som er den overbevisning, at en handling kun er rigtig, såfremt den er universelt rigtigt - at den kan påføres alle tilfælde af den pågældende problemstilling. Populært sagt skal man *behandle andre som man selv vil behandles* [Hagen, 1995]. Filosoffen Immanuel Kant (1724-1804), som tænkte i lignende baner, mente gennem sin pligtetik, at det kun er det sindelag eller den pligtfølelse, der ligger til grund for en

handling, som giver handlingen moralsk værdi [Hagen, 1995]. Kant mente desuden gennem sit praktiske imperativ, at mennesket er et mål i sig selv og aldrig må være et middel - en handling, som er forkert mod et menneske, kan altså ikke være rigtig [Hagen, 1995]. I forbindelse med overvågning af demente, er dette relevant, da overvågningen kan menes at være en handling, som gør forkert mod den demente. Det rejser desuden spørgsmålet om, hvorvidt man selv ville overvåges ved eventuel demens.

Omsorg kontra kontrol

I forbindelse med de etiske problemstillinger vedrørende omsorg kontra kontrol, i forhold til overvågning af demente, mener Christine E. Swane, kultursociolog, ph.d og direktør i Ensomme Gamles Værn og medlem af ekspertpanelet på etik.dk, at GPS er et ekstra sikkerhedsværn [etik.dk, 2012]. Hertil kan det argumenteres, at sporing af demente viser omsorg, da det muliggør at finde de ældre i tide, hvis uheldet hænder, og de bliver væk.

Alzheimerforeningen opfordrer heraf plejehjem til at udstyre demente med GPS, så snart der ses symptomer på demens [Alzheimer foreningen, 2014]. Som yderligere opbakning til brugen af GPS har YouGov foretaget en undersøgelse blandt befolkningen, der viser at 90% af de adspurgte, mente det er en god idé at påføre demente GPS [Danmarks Radio, 2012]. Der er dog stadig det modargument, at for meget overvågning strider mod den fundamentale ret til privatliv. Dette er ofte dét synspunkt, befolkningen er bange for, netop at staten vil holde dem i et jerngreb og slå ned på alt afvigende adfærd. Denne forståelse af overvågning gør, at spørgsmålet om etik og overvågning er præget af to lejre - de som mener, at overvågning er overgreb, og de som mener, at det kan være godt, hvis det er nødvendigt eller påkrævet [Lauritsen, 2014].

De som er imod overvågning kan, rent pligtetisk, argumentere for at indførslen af denne overvågning over for demente retfærdiggør brugen af overvågning over for den resterende befolkning. Desuden gøres der ondt mod et andet menneske, hvilket ikke er acceptabelt. En konsekvensetiker vil derimod ikke have noget imod indførslen af overvågning, da positionsangivelsen på demente ældre medfører tryghed for de pårørende og personalet omkring den demente ældre - handlingen vil gøre mere godt end ondt.

Ud over disse to lejre kan der også være en vis skepsis mod teknologiske løsninger, grundet manglende tillid til dem. Det er ikke svært at forestille sig, at en pårørende ikke vil have, at et dement familiemedlems sikkerhed ligger udelukkende i hænderne på et teknologisk instrument.

Løsningsforslag

For at ansatte på plejehjem ikke skal spore demente kontinuerligt, hvilket kan være ubehageligt for den demente, kan der introduceres diverse sensorer til det formål at registrere den dementes bevægelser mere præcist end en GPS-modtager. Med disse kan det lade sig gøre kun at overvåge personen i specialetilfælde ved abnorme bevægelsesmønstre og således undgå den kontinuerlige overvågning, og dermed øge friheden af den demente og glæde pligtetikken. En sådan sensor kaldes IMU. Derved kan GPS-løsningen suppleres, så apparatet slår alarm hos plejehjemmet i tilfælde af dementes forsvinden eller skadelige fald. Behovet for konstant overvågning af demente vil således mindskes for plejehjemmet. Det kan bidrage til større grad af frihed for demente i deres færden, da deres position ikke hele tiden skal overvåges af ansatte, når de forlader plejehjemmet. I denne forstand betragtes en GPS løsning, der kun videregiver informationer til en person bag en skærm, når det er nødvendigt. Dette vil medføre en løsning, som kun afgiver informationer til plejepersonalet, hvis demente er i fare og samtidig en måde, at beskrive hvor alvorlig situationen er ved brug af IMU, da det heraf er muligt for apparatet at videregive informationer, om hvor hårdt den ældre demente er faldet, om personen i det hele taget ligger ned, og/eller hvor lang tid vedkommende har ligget ned.

Der findes på nuværende tidspunkt en del lignende produkter på markedet [Hjælpemiddelbasen, 2016], der kan spore demente. Der er dog den ulempe ved dem, at selvom de angiver positionen for den demente ældre, angiver disse løsninger som oftest ikke om personen ligger ned eller er faldet. Faldet kan i sig selv være skadeligt, mens det også kan være en følge af ubehag hos den demente. Derfor vil en kombination af et system, der mäter fald, og et system der nøjagtigt kan angive positionen, være en løsning på problemet. Ud over dette kan løsningen yderligere udspécificeres til kun at angive position, hvis det måles, at personen går for langt væk eller ligger ned, hvilket, som diskuteret i afsnit 1.3.2, kan lette krænkelsen af den ældres privatliv, da de således vil blive sporet mindst muligt.

Siden det lovmæssigt er tilladt at spore demente, såfremt omstændighederne påkræver det, og de etiske problemstillinger afhænger af de deltagende parter, og hvorvidt man mener løsningen gør mere godt end dårligt, anskues udviklingen af omtalte overvågningssystem ikke som problematisk. Ydermere er det i sidste ende op til de pårørende, hvorvidt den demente skal overvåges - dette kan afgøres gennem en af ovennævnte metoder - denne beslutning ligger altså uden for projektets rammer.

1.4 Problemformulering

På baggrund af foregående problemanalyse udformes nedenstående problemformulering.

Hvert år efterlyses over 1.000 demente i Danmark, og af disse kommer flere til skade som følge af fald. Det ønskes derfor at udvikle et system, som kan spore demente og advare plejehjem, hvis der registreres eventuelle skadelige fald.

Hvorledes kan et system baseret på Global Positioning System (GPS) og inertial measurement unit (IMU) udvikles til at registrere fald og vildfaren hos en dement?

1.5 Metode

Metoden til at besvare problemformuleringen redegøres for i dette afsnit.

For at kunne benytte GPS og IMU som andet end en blackbox, tilegnes først tilstrækkelig teoretisk indsigt i disse systemer. Der er blevet købt en Arduino og tilhørende sensorer, som benyttes til dataopsampling, og det undersøges, hvorledes sammenspiellet mellem teori og hardware forholder sig. Dette muliggør udførelsen af eksperimenter til at oplyse hvilke muligheder og/eller begrænsninger, GPS og IMU måtte besidde. Heriblandt implementeres et filter, da dataopsamlingen forventes at indeholde støj. I en kombination af resultaterne og ønskede funktionalitet, udvikles en algoritme som indeholder parametre til at kunne spore og registrere fald. Algoritmen valideres ved hjælp af en dataopsamling. Til sidst vurderes og konkluderes der på dataopsamling i forhold til problemformuleringen og fremsatte samfundsmæssige aspekter.

2 | Teori

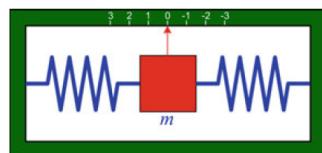
Dette kapitel har til formål at beskrive den nødvendige teoretiske baggrund, for brugen af navigationsteknologien GPS og anvendelse af et IMU system, samt at redegøre for brugen af en Arduino-enhed. Endvidere dannes her det nødvendige matematiske grundlag, for bearbejdningen af den information, der fås fra GPS og IMU.

2.1 Inertisensorer

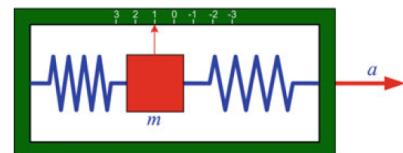
I dette afsnit forklares teorien bag de forskellige bevægelsessensorer, og det teoretiske grundlag, der skal til, før man kan benytte bevægelsessensorer og lave databehandling af resultaterne, som fås fra disse.

2.1.1 Introduktion til accelerometer

Et accelerometer er, som navnet hentyder, et instrument, som mäter acceleration. Accelerometeret består sædvanligvis af en masse forbundet til en omsluttende kasse med to fjedre. Denne masse kan bevæge sig langs én akse inden i den omsluttende kasse. Accelerometret mäter acceleration langs aksen, som er parallel med den akse, massen i kassen kan bevæge sig langs. Når accelerometeret bevæges i retning parallel med aksen forskydes massen i kassen proportionalt med accelerationen i modsatte retning. Denne forskydning mäles som acceleration har enheden $\frac{m}{s^2}$. Princippet kan ses på figurerne 2.1 og 2.2.



Figur 2.1: Accelerometer som ikke mäter en acceleration [Noureldin et al., 2013].



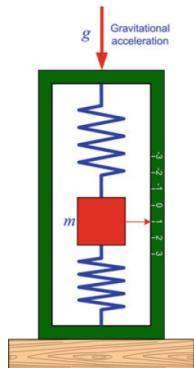
Figur 2.2: Accelerometer som mäter en acceleration på -1 g [Noureldin et al., 2013].

Accelerometeret mäter egenacceleration, hvilket vil sige, at det mäter acceleration i forhold til frit fald. Ligning 2.1 viser hvordan denne beregnes.

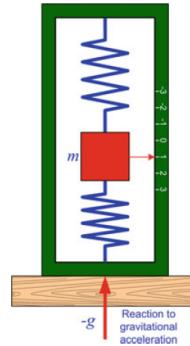
$$f = a - g \quad (2.1)$$

Hvor

f er egenacceleration



Figur 2.3: Stillestående accelerometer, som mäter en egenacceleration på -1 g . Tyngdeaccelerationen er vist med en pil som en positiv acceleration [Noureldin et al., 2013].



Figur 2.4: Stillestående accelerometer, som mäter en egenacceleration på -1 g . Egenaccelerationen er vist med en pil som en negativ acceleration [Noureldin et al., 2013].

a er acceleration

g er tyngdeacceleration

Altså vil et stillestående accelerometer, som mäter vertikal acceleration, måle en egenacceleration på $-9.82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ grundet tyngdekraften [Edwards, 2014]. Dette ses på figur 2.3 og 2.4.

Da et accelerometer kun mäter acceleration langs én akse, er det nødvendigt at gøre brug af flere accelerometre for at mæle acceleration i flere retninger. Hvis tre accelerometre arrangeres således, at ingen af dem mæler accelerationer i parallelle retninger, vil arrangementet kunne mæle acceleration i alle retninger.

2.1.2 Introduktion til gyroskop

Et gyroskop er et objekt, der kan mæle rotationen om sig selv, for at beregne denne rotation bruges enten Coriolis effekten eller en vibrerende masse til at udregne vinkler for elektroniske gyroskoper. Der er to forskellige slags elektroniske gyroskoper - de der giver vinkelpositionen, og de der giver vinkelhastigheden som output. Det er afhængigt af om gyroskopet er af slagsen *rate sensing* eller *rate integrating* [Noureldin et al., 2013].

Der er en del ulemper ved at basere et målesystem på IMU-sensorer. Mere specifikt for et gyroskop som er *rate sensing*. Den fejl der optræder under *rate sensing* sker, når der foretages numerisk integration af data for at få vinkelpositionen. Hvis gyroskopet sampler langsommere end vinkelhastigheden ændrer sig, vil det ikke være muligt at opfange vinkelskiftet. Det betyder, at når der integreres, kan der potentielt set introduceres fejl, som akkumuleres over tid, hvorfor fejlen kaldes at et gyroskop driver. Derfor er det vigtigt at vælge en passende samplerate, i forhold

til det man skal bruge gyroskopet til [de Maele, 2012].

Et gyroskop giver værdier i $\frac{\circ}{s}$ eller \circ , afhængigt af om det er *rate sensing* eller *rate integrating*. I det første tilfælde kan man blot integrere informationen for at få en vinkel [de Maele, 2012].

$$\theta(t) = \int_0^{\tau} \theta'(t) dt \approx \sum_{i=0}^{\tau} \theta'(t_i) T_s \quad (2.2)$$

Det tredje led i ligning 2.2 skal bruges, når man benytter sig af en samplet løsning til at approksimere vinkler, grundet at man får et endeligt antal målinger fra gyroskopet. Konstanten T_s er samplingsperiode.

Når et gyroskop sampler information, er det relativt til en *inertialramme*. Derfor er det legemets vinkel relativ til *inertialrammen*. Da et gyroskop bliver påvirket af jordens rotation og krumning, vil det påvirke, den information man får. Hvis man ønsker præcise målinger, skal der tages højde for dette. Det gøres ved at lægge de forskellige vinkler sammen.

$$\omega_{ib}^b = \omega_{ie}^b + \omega_{en}^b + \omega_{nb}^b \quad (2.3)$$

ω_{ib}^b er legemets vinkel relativ til *inertial ramme*

ω_{ie}^b er *inertial ramme* relativ til rotationen af jorden, *Earth-centeret fixed frame*, *ECEF* eller *e-frame*

ω_{nb}^b er legemets vinkel relativ til *navigations-frame*

Dette projekt er afgrænset til kun at arbejde med ω_{nb}^b . Dette skyldes, at de resterende rammer er uden betydning i forbindelse med de undersøgelser, der foretages i forbindelse med dette projekts problemstillinger. Derfor siges det, at ligning 2.4 gælder.

$$\omega_{ib}^b \approx \omega_{nb}^b \quad (2.4)$$

2.2 Inertial measurement unit

Et inertial measurement unit (IMU) er et system, som består af et accelerometer og et gyroskop og en computer, som kan foretage de nødvendige beregninger ud fra målinger fra de to sensorer, til at bestemmer orientering, og position ud fra begyndelsesværdier.

Som beskrevet i afsnit 2.1.1 og 2.1.2 kan accelerometere og gyroskoper begge give information hvorledes disse og dermed legemet, som de er monteret på, bevæger sig. Begge sensorer giver information, som kan integreres og differentieres således, at der opnås forskellige informationer om legemets bevægelse i rummet. Kombineres disse to slags informationer, kan systemets position udtrykkes

2.2.1 Koordinattransformation

Der findes to forskellige slags IMU - et **fast monteret system** og et **gimbalstabiliseret system** [Noureldin et al., 2013].

Et fast monteret system roterer med legemet, hvis bevægelse det måler, og hedder altså fast monteret netop fordi, systemet er fast monteret på legemet og ikke kan bevæge sig uafhængigt af legemet. Systemet er mekanisk simpelt, og fylder mindre end et gimbalstabiliseret system.

Et gimbalstabiliseret system er ophængt i mindst tre gimbalringe, således det kan rotere i alle retninger uafhængigt af legemet, som gimbalringene er monteret på. Systemet tager altså højde for legemets rotation ved at modvirke dette ved hjælp af impulsmomentet. Et gimbalstabiliseret system giver mere præcise målinger end et fast monteret system, dog med en konsekvens i form af øget mekanisk kompleksitet og størrelse.

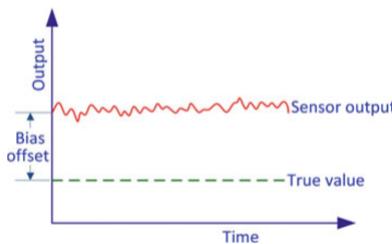
I projektet anvendes et fast monteret system, og derfor forklares kun teorien omhandlende dette system. Et fast monteret kræver en virtuel rotation af accelerometrenes akser, da det er fast monteret og dette indtroduceres i afsnit 2.4.1.

2.2.2 Fejlkilder ved inertial measurement unit

Når man benytter sig af bevægelsessensorer, er der en del fejlkilder, som man skal være opmærksom på eksisterer. Nogle kan reduceres gennem software. Andre som producenten af sensorerne har forårsaget gennem en uperfekt produktion, kan man ikke tage højde for, men være opmærksom på eksisterer [Noureldin et al., 2013].

Offset-0g

En offset fejl er en fejkilde, som forekommer i henholdsvis accelerometre og gyroskop. Et offset er defineret til at være *outputværdien*, når der ikke er noget *input*. På figur 2.5 ses en illustration af et offset. Hvis man kender den værdi, som svarer



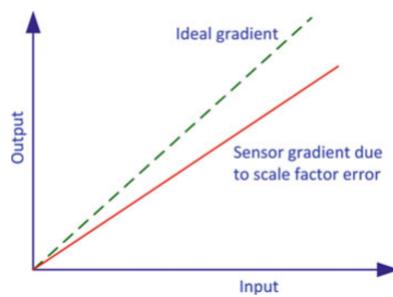
Figur 2.5: Offset illustreret, [Noureldin et al., 2013]

til *True Value 0g*, på figur 2.5, er det muligt at tage højde for det offset, der bliver

målt af sensorerne, da det netop er muligt at kalibrere det væk [Tuck, 2010]. Der er mange parametre, der har indvirkning på et offset så som montering af accelerometeret, temperatur og ældet udstyr. Derfor vil det være nødvendigt at kalibrere ens udstyr, hver gang det bliver benyttet.

Skaleringsfejl

Skaleringsfejlen forekommer i accelerometre og gyroskoper. Fejlen bliver introduceret, når en bevægelsessensor mäter værdier og skalerer dets output proportionalt i forhold til det input, det får fra de følsomme akser [Noureddin et al., 2013]. Se figur 2.6



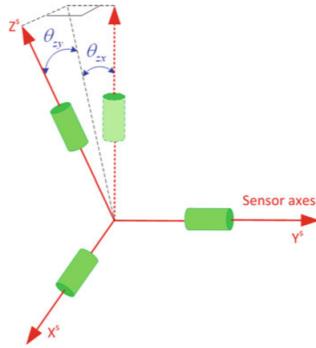
Figur 2.6: Skaleringsfejl illustreret, [Noureddin et al., 2013]

Forskydningsfejl

Forskydningsfejl er en fejl, som opstår, hvis en sensor monteres forkert i forhold til det legeme, hvis bevægelse den skal måle. En sensors akser skal være parallelle med de akser man ønsker at måle langs på legemet. Hvis dette ikke er tilfældet, opstår der forskydning.

Ikkeortogonal fejl

Ikkeortogonal fejl er en fejl, som er i alle bevægelsessensorer. Den forekommer, fordi der er en fejlmargin i de koordinatsystemer, der er i sensorerne, hvilket vil sige, at producenterne ikke kan producere sensorer, hvor akserne er ortogonale. Se figur 2.7



Figur 2.7: Ikke-Ortogonal-Fejl illustreret, [Noureldin et al., 2013]

2.2.3 Kalibrering

Når en sensor kalibreres, betyder det, at man sammenligner et output med en kendt værdi. Chippen MPU-6050 har et 3-akset accelerometer. Det vides fra arbejdsbladet for chippen, at 1g's påvirkning svarer til henholdsvis $16.384 \frac{LSB}{g}$, $8.192 \frac{LSB}{g}$, $4.096 \frac{LSB}{g}$, $2.048 \frac{LSB}{g}$ [InvenSense, 2013]. Dette afhænger af accelerometrets dynamikområde, som kan ændres efter behov. Det vil altså sige, hvis accelerometret sættes op, så det skulle måle henholdsvis 1g's påvirkning på z-aksen og 0g's påvirkning på x- og y-aksen, kan man regne den forskel, som der er mellem den værdi, den burde måle, og det der måles, ud, og korrigere for dens offset. I ligningerne (2.5) ses denne korrigering. Der tages blot et gennemsnit af målingerne, og afvigelsen fra den sande værdi beregnes.

$$\begin{aligned} O_x &= \frac{\sum_{i=0}^N M_{xi}}{N} - T_x \\ O_y &= \frac{\sum_{i=0}^N M_{yi}}{N} - T_y \\ O_z &= \frac{\sum_{i=0}^N M_{zi}}{N} - T_z \end{aligned} \quad (2.5)$$

Hvor

O_x , O_y og O_z er de offset de forskellige akser har

M_x , M_y og M_z er rådata

N er antallet af målinger

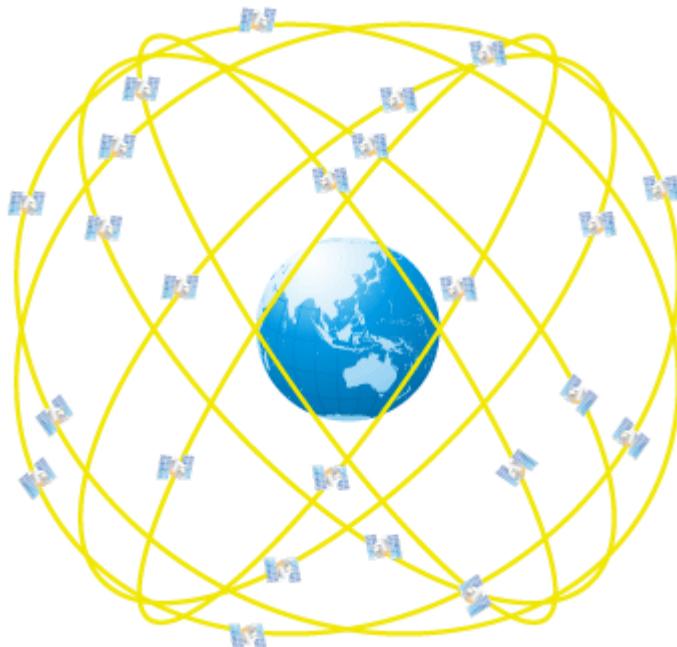
T_x , T_y og T_z er den kendte værdi, som accelerometeret skulle have ved 0 og 1g's påvirkning

2.3 Global Positioning System - GPS

Følgende afsnit redegører for den grundlæggende måde GPS fungerer og opfører sig på. På trods af at begreber som pseudoafstande forklares, udelades de matematiske udtryk da det ligger uden for projektets rammer. De bagvedliggende beregninger udføres af GPS-enheten og betragtes derfor som en blackbox.

2.3.1 Introduktion til GPS

Global Positioning System, forkortet GPS, er det mest benyttede *Global Navigation Satellite System*, forkortet GNSS [Egnos, 2016]. Det bemærkes, at begrebet "GPS" henviser til systemet og ikke en GPS-enhed. I dag er 30 satellitter i brug mens



Figur 2.8: Satellitternes kredsløb om jorden [Furuno, NA].

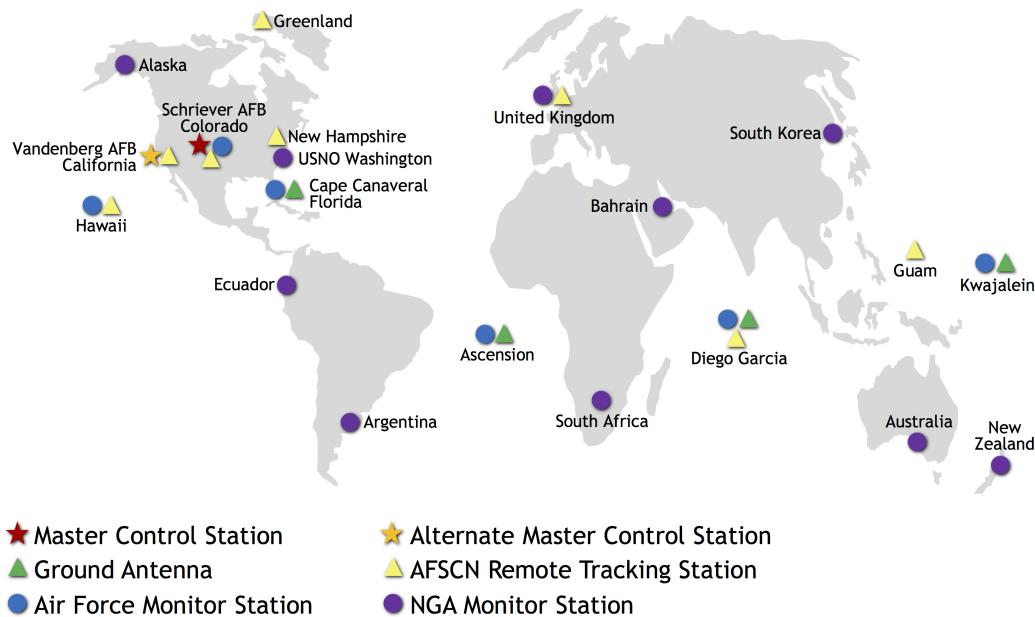
enkelte ekstra satellitter kredser om jorden som reserve [NCO for S.B. Pos., Nav., Tim., 2016]. Konceptet bag GPS er, at minimum tre satellitter i kredsløb om jorden udsender radiobølger, som opfanges af en GPS-modtager på jorden. Ved hjælp af trilateration¹ kan positionen, dvs. breddegrader, længdegrader og højden, bestemmes af en GPS-modtager. En fjerde satellit korrigerer for unøjagtigheder i tiden. Årsagen til, at netop 24 satellitter er sendt i kredsløb om jorden, er for at opnå tilstrækkeligt med tilgængelige satellitter og dermed nøjagtighed uanset GPS-

¹Trilateration tager udgangspunkt i beregnede afstande, hvilket ikke skal forveksles med vinkelbaseret triangulering.

modtagerens position [Noureldin et al., 2013]. Til gengæld, hvis en GPS-modtager befinner sig i et tætbebygget område eller indendørs, vil den have svært ved at opfange nok satellitter til at opnå høj nøjagtighed, se afsnit 2.3.6.

2.3.2 GPS Struktur

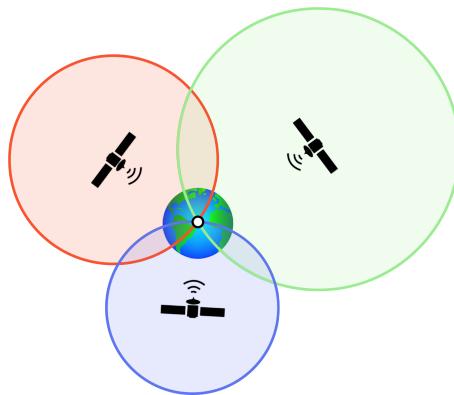
GPS er overordnet set opbygget af tre segmenter; rum-segmentet, kontrol-segmentet og bruger-segmentet. Rum-segmentet består af satellitter i omegn af 20.200 kilometeres højde, som udsender radiosignaler til GPS-modtagere og kredser om jorden i 12-timers intervaller. USA har selv forpligtet sig til at have mindst 24 satellitter tilgængelige 95% af tiden. For at sikre dette har de i de seneste år haft 31 funktionsdygtige satellitter i kredsløb om jorden. Se afsnit 2.3.3 og 2.3.4 for uddybende forklaring af satellitternes funktion. Kontrol-segmentet består af et globalt netværk af anlæg placeret på jorden, som holder styr på satellitternes position og transmissons signaler samt udfører analyser. Endvidere består anlæggene af en "Master Control Station"(MCS), en "Alternate Control Station"(AMCS), 12 kommando- og kontrolantennen samt 16 overvågningsstationer. Deres respektive geografiske placering ses på figur 2.9. Kort fortalt opretholder MCS nøjagtigheden af satellitten, kommando- og kontrolantennenne bruges som kommunikationsredskab med satellitterne over S-båndet mens overvågningsstationerne sporer satellitterne og indsamler væsentlige data fra dem [GPS.gov, 2016]. Sidste segment, bruger-segmentet, består af alle GPS-modtagere, som benytter sig af GPS.



Figur 2.9: Kort over kontrol-segmenternes placering på jorden [GPS.gov, 2016].

2.3.3 Trilateration

For at bestemme en GPS-modtagers position udregnes først afstanden fra satellitterne til GPS-modtageren, også kaldet pseudoafstanden², se afsnit 2.3.4, for derefter at bruge trilateration til den endelige positionering af GPS-modtageren. Jævnfør figur 2.10 ses principippet ved trilateration i to dimensioner. Det ses, at tre satellitter skal være til stede for at kunne bestemme en position [maptoaster.com, 2014]. Illustrationen danner et overskueligt indblik i trilateration, men i praksis foregår positioneringen i tre dimensioner. På figur 2.11 ses trilateration, hvor cirkler indi-



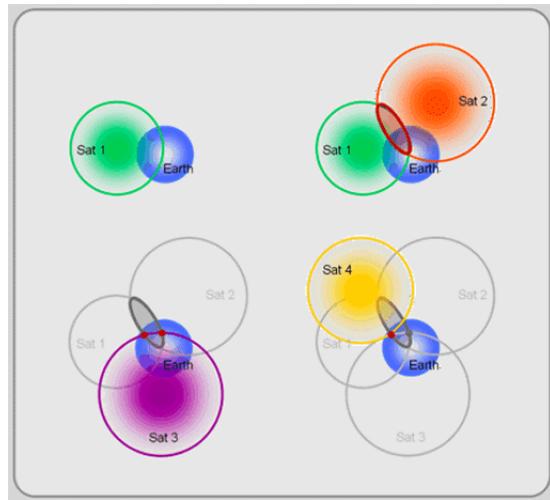
Figur 2.10: Trilateration-princippet illustreret med tre satellitter i et todimensionelt rum

kerer kugler, i tre dimensioner. Her fremgår det igen, at en GPS-modtagers position kan findes ved tre satellitter. Det bemærkes, at jorden fungerer som en fjerde kugle, og geometrisk set fås stadig to unikke krydsninger ved fire kugler - krydsningerne ligger på jorden og i rummet, og derfor ses bort fra sidstnævnte. En fjerde *satellit* muliggør bestemmelsen af højden GPS-modtageren befinner sig i, hvilket i praksis gør positioneringen nøjagtig nok til alment brug [Schmandt, NA].

2.3.4 Pseudoafstand

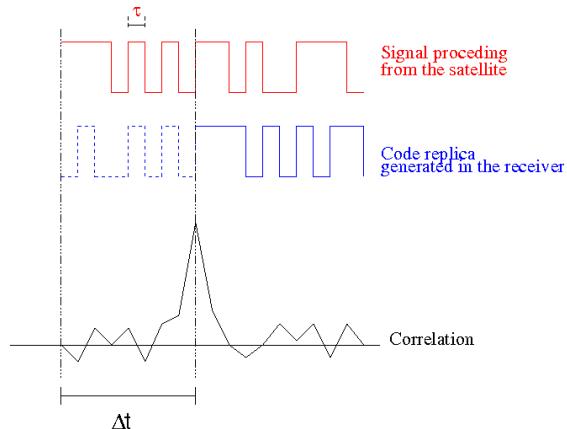
Som nævnt er et nødvendigt at kende pseudo-afstanden for at finde positionen af en GPS-modtager. Den findes ved at satellitter udsender to forskellige radiosignaler - en navigations meddeelse og en Pseudo-Random Noise kode (PRN-kode) [Noureldin et al., 2013]. Transmissionstidspunktet, signalet sendes fra satellitten til GPS-modtageren, beregnes ved hjælp af navigations meddeelsen, som indeholder information om satellittens koordinater. Modtagelsestidspunktet beregnes ved først, at GPS-modtageren danner en kopi af den transmitterede PRN-kode fra satellitten, for derefter at ændre i fasen af den kopierede PRN-kode indtil den

²Afstanden kaldes en *pseudo*-afstand, og ikke blot afstand, da den målte tid, som bruges til bestemmelsen af afstanden, har unøjagtigheder [Marco Rao, 2016].



Figur 2.11: Trilaterationprincippet illustreret skridtvis i et tredimensionelt rum [Schmandt, NA]

maksimale korrelation fra satellittens PRN-kode og kopien opstår, se figur 2.12 [J. Sanz Subirana, 2011].



Figur 2.12: Bestemmelse af signalets tid fra satellitten til GPS-modtageren [J. Sanz Subirana, 2011].

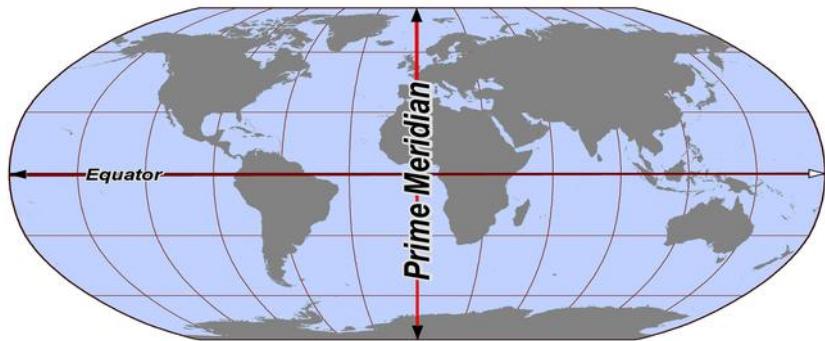
2.3.5 Geografiske koordinater

Det mest anvendte koordinatsystem, til at bestemme ens position på jorden, er det såkaldte "Geographic Coordinate System" (GCS), hvilket bruger bredde- og længdegrader:

Breddegradernes linjer løber parallelt nord og syd langs ækvator. De positive breddegrader ligger på den nordlige halvkugle, de negative på den sydlige halvkugle, mens nul breddegrader ligger på ækvator.

Længdegradernes linjer løber parallelt vest og øst langs nulmeridianen, defineret ud fra Greenwich-observatoriet [Dolan, 2016]. De positive længdegrader ligger på den østlige halvkugle, de negative på den vestlige halvkugle, mens nul længdegrader ligger på nulmeridianen [NRRI, NA].

Bredde- og længdegrader er illustreret på figur 2.13. Enhederne til at beskrive



Figur 2.13: Nulmeridianen og ækvator illustreret [6SocialStudies, 2016].

bredde- og længdegrader repræsenteres i forskellige formater. Overordnet set tales der om grader, minutter og sekunder, hvor

$$1 \text{ grad} \approx 111\text{km}$$

$$1 \text{ minut} \approx 1,9\text{km}$$

$$1 \text{ sekund} \approx 0,03\text{km}$$

Formatet, hvorpå fornævnte enheder skrives op, kan som sagt variere, hvor der i dette projekt er valgt decimal grader. Et eksempel på dette er: 57.0532684° breddegrader og 9.91268814° længdegrader. I andre formater deles grader, minutter og sekunder op, i stedet for ét decimal tal, som er tilfældet her [NRRI, NA]. Den GPS som anvendes i projektet angiver længde- og breddegrader i decimal grader, se 2.3.5. Derfor er det nødvendigt at konvertere til radianer, før formlerne 2.29 kan anvendes. Konverteringen mellem grader og radianer ses i formel 2.6.

$$\theta_{radian} = \theta_{grad} \cdot \frac{\pi}{180} \quad (2.6)$$

2.3.6 Fejkilder ved GPS

Fejkilder, som vil kunne påvirke GPS-enhedens nøjagtighed, og hvordan de undgås, redegøres for i det følgende afsnit. Desuden påpeges det, hvis fejkilden har særlig betydning for projektet, eller hvis den er væsentligere end resten.

Satellittens og GPS-modtagerens ur

Satellitter besidder atomure, som har høj nøjagtighed. Dog vil atomuret over tid afvige fra GPS systemtiden³. Ved hjælp af overvågningsstationer på jorden, som modtager satellitternes tidsdata, kan det såkaldte kontrol-segment, jævnfør afsnit 2.3.2, estimere parametrene som skal korrigere for afvigelsen. Disse informationer uploades derefter tilbage til satellitterne, som udsender dem til GPS-modtagere, for at de kan korrigere for tidsforskellen. GPS-modtageren besidder også et ur, dog langt billigere og mere unøjagtigt end et atomur. Endvidere indeholder uret en bias, som korrigeres for med et Kalmanfilter - dette ligger dog uden for projektets rammer [Noureldin et al., 2013].

Tidsforlængelse

Den specielle relativitetsteori samt den generelle relativitetsteori gør sig gældende ved satellitternes kredsløb i forhold til tidsopfattelsen. Hastigheden, hvormed satellitterne bevæger sig, forårsager at tiden for satellitterne går 7 millisekunder *langsommere* pr. dag end på jorden⁴. Tyngdekraftens styrkeforskelle forårsager at tiden for satellitterne går 45 millisekunder *hurtigere* pr. dag end på jorden. Samlet set er tiden for satellitterne 38 millisekunder hurtigere i forhold til GPS-modtagere nede på jorden. Uden at korrigere for tidsforskellen ville det resultere i en fejl-måling af positionen med over 10 kilometer i løbet af en dag [Will, 2016]. Som tidligere nævnt vil en fjerde satellit korrigere for dette. Det bemærkes hvor vigtigt nøjagtigheden af tiden er ved brug af GPS.

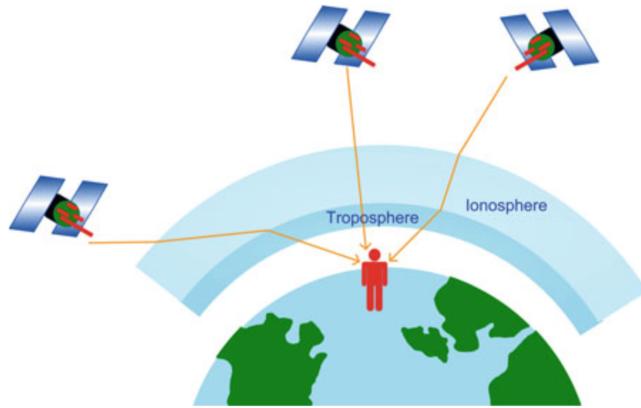
Atmosfæriske effekter

De mest betydningsfulde bestanddele af atmosfæren, som påvirker GPS, er Ionosfæren og Troposfæren som er del af henholdsvis den øvre og nedre atmosfære. I Ionosfæren forvrænges signalet fra satellitterne ned til GPS-modtagere - hvilket resulterer i en forsinket transmissionstid [Joshua Stevens, 2012]. Uden at grave dybere ned i de fysiske fænomener, er det nævneværdigt at densiteten af Ionosfæren varierer, og dermed vil forvrængningen også variere. Troposfæren fungerer som en ekstra forsinkelse af signalet men forvrænger det ikke. Jævnfør figur 2.14 ses hvordan signalet fra satellitterne forvrænges ned gennem Ionosfæren, hvor placeringen af satellitterne relativt til GPS-modtageren har betydning for omfanget af forvrængningen. Derudover vil den mængde atmosfære som signalet går igennem nede i Troposfæren, have betydning for mængden af forsinkelsen, som opstår dér.

³Global Positioning System time blev igangsat 6. januar 1980 og er installeret i GPS satellitter samt GPS kontrolstationer på jorden[leapsecond.com, NA].

⁴Et legeme i hviletilstand på jorden har en hastighed på 1.600 km/t mens satellitterne rejser med en hastighed på 14.000 km/t

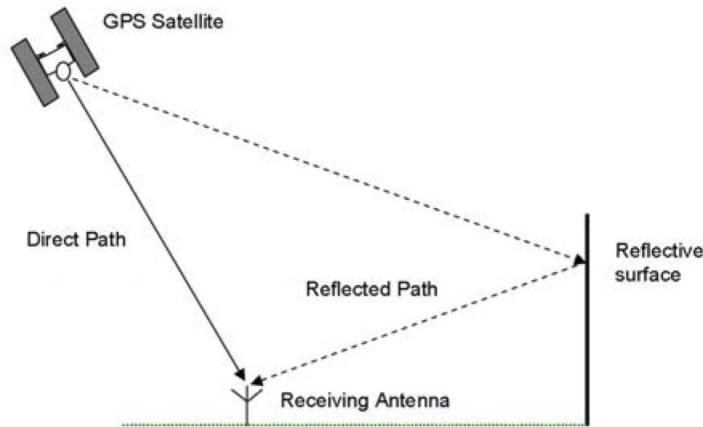
På figur 2.14 er det tydeligt, at signalet længst mod venstre rejser gennem Ionosfæren i længere tid end f.eks. det midterste signal. Forskellige modeller er udviklet for at minimere denne fejlkilde [Noureldin et al., 2013].



Figur 2.14: Signaler fra satellitter gennem Ionosfæren og Troposfæren [Noureldin et al., 2013].

Reflekterende signaler

Hvis signaler fra satellitterne reflekteres, før det når til en GPS-modtager, betyder det at tiden, signalerne er om at nå til GPS-modtageren, er forøget i forhold til et direkte signal, se figur 2.15. På den måde vil den beregnede pseudoafstand og dermed også positionen være unøjagtig. I praksis reflekteres signaler på f.eks. personer, vandoverflader, jorden eller bygninger. Sidst nævnte kommer ofte til udtryk, når GPS-modtageren befinner sig i et tætbebygget område eller indendørs. Alt efter satellitternes positioner vil antallet af reflekterede signaler variere [Tomislav Kos, 2010]. Ved mange af disse reflekterende signaler resulterer det ofte i at GPS-modtagerens antagne position "springer". Reflekterende signaler kan minimeres ved at placere GPS-modtageren tæt på jorden og langt væk fra objekter.



Figur 2.15: Reflekterende signal og direkte signal udsendes til en GPS-modtager [Tomislav Kos, 2010].

2.4 Matematik

Her introduceres den matematik, som benyttes i rapporten til behandling af data. I afsnittet forklares

Koordinattransformation

Afstand mellem punkter på en kugles overflade

Numerisk integration

Taylorpolynomiet

Komplekse tal

Fouriertransformation

Korrelation

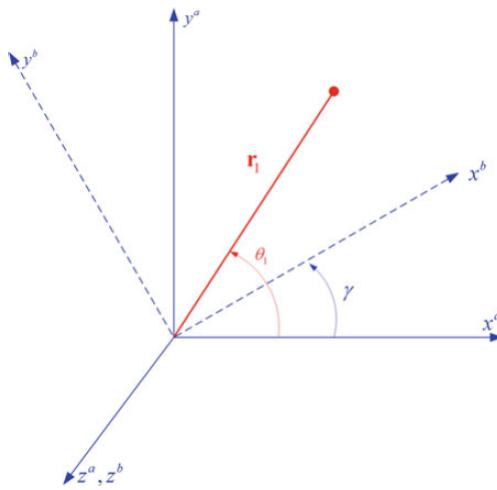
2.4.1 Koordinattransformation

Koordinattransformation kan bruges, hvis man har en punktmængde, som skal transformeres over i et nyt koordinatsystem. Hvis man har et koordinatsystem i \mathbb{R}^3 og alle tre planer, som bliver udspændt af akserne, skal roteres, kan man gøre brug af (2.17) [Noureldin et al., 2013].

Definition 1 En sum eller en differens til cosinus eller sinus er defineret ved (2.7)

$$\begin{aligned}\sin(A \pm B) &= \sin(A)\cos(B) \pm \cos(A)\sin(B) \\ \cos(A \pm B) &= \cos(A)\cos(B) \mp \sin(A)\sin(B)\end{aligned}\tag{2.7}$$

□



Figur 2.16: XY-plan roteret med γ , [Noureldin et al., 2013]

Hvis man ser på figur 2.16, sker der en rotation omkring z-aksen. Den kan beskrives ud fra formlerne i (2.8).

$$\begin{aligned} x^b &= r_1 \cos(\theta_1 - \gamma) \\ y^b &= r_1 \sin(\theta_1 - \gamma) \\ z^a &= z^b \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ifølge (2.7), kan (2.8) omskrives til (2.9)

$$\begin{aligned} x^b &= r_1 \cos(\theta_1) \cos(\gamma) + r_1 \sin(\gamma) \sin(\theta_1) \\ y^b &= r_1 \sin(\theta_1) \cos(\gamma) - r_1 \cos(\theta_1) \sin(\gamma) \\ z^b &= z^a \end{aligned} \quad (2.9)$$

De originale koordinater for r_1 i figur 2.16. Kan udtrykkes ved (2.10)

$$\begin{aligned} x^a &= r_1 \cos(\theta_1) \\ y^a &= r_1 \sin(\theta_1) \\ z^a &= z^b \end{aligned} \quad (2.10)$$

På baggrund af (2.10), ses det nu at $r_1 \cos(\theta_1)$ og $r_1 \sin(\theta_1)$ kan substitueres i (2.9), så der fås (2.11).

$$\begin{aligned} x^b &= x^a \cos(\gamma) + y^a \sin(\gamma) \\ y^b &= -x^a \sin(\gamma) + y^a \cos(\gamma) \\ z^a &= z^b \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nu kan man bruge matrix-notation og skrive ligningssystemet op som (2.12).

$$\begin{bmatrix} x^b \\ y^b \\ z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^a \\ y^a \\ z^a \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Hvis man benytter samme fremgangsmåde for rotation omkring x- og y-aksen, fås (2.13) og (2.14).

$$\begin{bmatrix} x^c \\ y^c \\ z^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^b \\ y^b \\ z^b \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} x^d \\ y^d \\ z^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^b \\ y^b \\ z^b \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Rotationerne kan nu kombineres, og der fås en matrix, som roterer koordinatsystemet med den samme vinkel, som alle matricerne ville gøre individuelt. Matrixproduktet ses i (eq:matrixprodukt) og den resulterende matrix, som fremover kaldes rotationsmatricen ses i (2.16).

$$R_a^d = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$R_a^d = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \beta \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha & -\cos \beta \sin \alpha \\ -\cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \sin \beta \\ \cos \gamma \sin \alpha + \cos \alpha \sin \gamma \sin \beta & \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta & \cos \beta \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Den endelige rotation kan altså beskrives ud fra (2.17).

$$R_a^d = R_c^d R_b^c R_a^b \quad (2.17)$$

Da rotationsmatricer er ortogonale, kan den inverse transformation beskrives ud fra (2.18) [Noureldin et al., 2013].

$$R_a^d = (R_a^d)^{-1} = (R_a^d)^T = (R_c^d R_b^c R_a^b)^T = (R_a^b)^T (R_b^c)^T (R_c^d)^T \quad (2.18)$$

2.4.2 Afstand mellem punkter på en kugles

Inden for navigation er det nyttigt at kende den afstand, der er mellem to givne punkter. Afstanden mellem to geografiske koordinater kan beskrives som afstanden mellem to punkter på en kugle, jævnfør **Definition 2**.

Definition 2 Afstanden mellem to punkter på en kugle er defineret ud fra (2.19) [Rick, 1999]

$$d = R \cdot c \quad (2.19)$$

Hvor

d er afstanden.

R er radius af kuglen.

c er vinklen mellem punkterne i radianer.

□

I de følgende beregninger tages der udgangspunkt i to vilkårlige koordinatsæt på Jorden. Længde- og breddegraderne beskrives ved lon og lat for *longitude* og *latitude*.

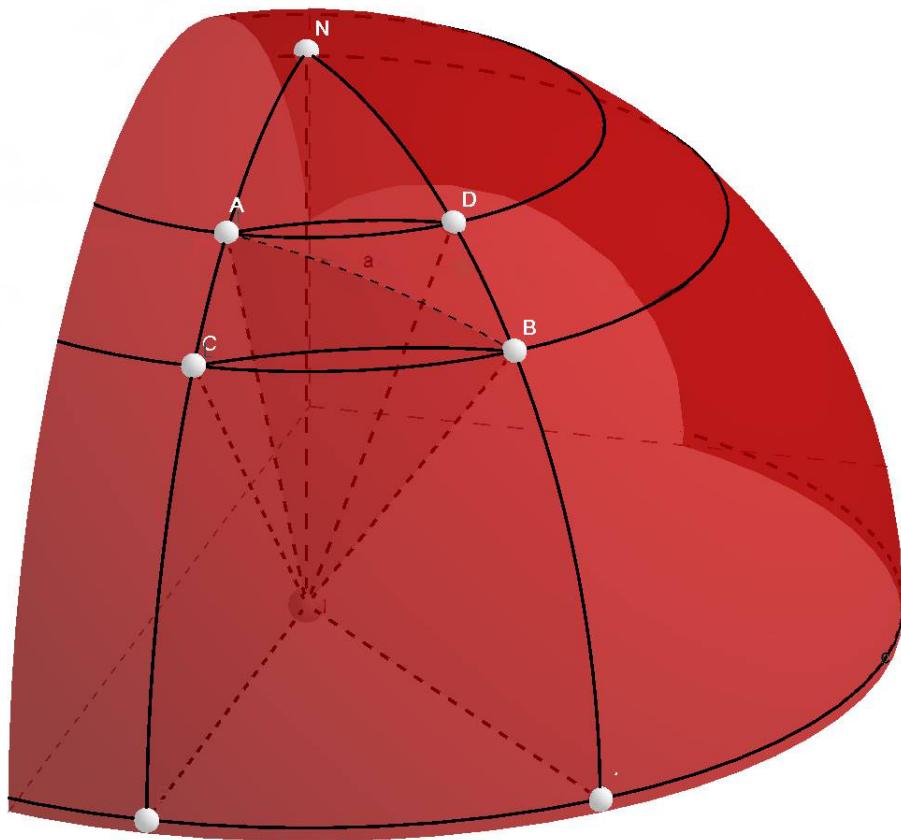
Hvis der ses på figur 2.17, er punkterne A og B givet ved koordinaterne $A = (lat1, lon1)$, $B = (lat2, lon2)$. For at beregne længden mellem punkterne, skal der benyttes trigonometri og trapez regneregler. Først opstilles punkterne C og D, som har værdierne $C = (lat2, lon1)$, $D = (lat1, lon2)$, så C ligger på samme breddegrad som B og samme længdegrad som A. Modsat har D samme breddegrad som A og samme længdegrad som B. Det ses ud fra de fire punkter, at de udspænder en trapez. Hvis man ser på trekant AOC , hvor O er origo, ses det at længde l_{AC} er givet ved (2.20), længde l_{BD} vil ligeledes være givet på denne måde, hvor Δlat er givet ved $lat1 - lat2$.

$$l_{AC} = 2 \cdot \sin\left(\frac{\Delta lat}{2}\right) \quad (2.20)$$

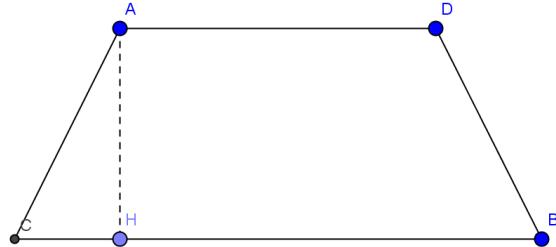
Punkterne A og D ligger på en cirkel med radius $\cos(lat1)$, mens punkterne B og C ligger på en cirkel med radius $\cos(lat2)$. Derfor kan længderne l_{AD} og l_{BC} , beskrives ud fra (2.21), hvor $2 \cdot \sin\left(\frac{\Delta lon}{2}\right)$ er længden af trekanten ved ækvator, og $\cos(lat)$ skalerer efter hvilken breddegrad punktet er ved - breddegraderne nær polerne har mindre radius end ækvator.

$$\begin{aligned} l_{AD} &= 2 \cdot \sin\left(\frac{\Delta lon}{2}\right) \cdot \cos(lat1) \\ l_{BC} &= 2 \cdot \sin\left(\frac{\Delta lon}{2}\right) \cdot \cos(lat2) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Det ses nu, at koordinaterne udspænder en trapez, hvor man er interesseret i længden af diagonalen l_{AB} . Dog mangles højden i trapezen, før pythagoras kan bruges til at finde diagonalen, se figur 2.18.



Figur 2.17: Afstanden mellem to punktet illustreret



Figur 2.18: Afstanden mellem to punktet illustreret

Da l_{AC} er kendt, kan l_{CH} kan bestemmes ud fra trapez regneregler, se (2.22).

$$l_{CH} = \frac{l_{AD} - l_{CB}}{2} \quad (2.22)$$

Da to af siderne i den vinkelrette trekant er kendt, kan pythagoras bruges og (2.23)

fås

$$l_{AH}^2 = l_{AC}^2 - l_{CH}^2 = l_{AC}^2 - \left(\frac{l_{AD} - l_{CB}}{2} \right)^2 \quad (2.23)$$

Længden l_{HB} kan findes ved (2.24).

$$l_{HB} = \frac{l_{AD} + l_{CB}}{2} \quad (2.24)$$

Nu kan en vinkelret trekant opstilles mellem punkterne A, H og B . Det betyder, at længden l_{AB} kan bestemmes ved (2.25).

$$l_{AB}^2 = l_{AH}^2 + l_{HB}^2 = l_{AC}^2 - \left(\frac{l_{AD} - l_{CB}}{2} \right)^2 + \left(\frac{l_{AD} + l_{CB}}{2} \right)^2 \quad (2.25)$$

Leddet $\left(\frac{l_{AD} - l_{CB}}{2} \right)^2 + \left(\frac{l_{AD} + l_{CB}}{2} \right)^2$ kan reduceres

$$\begin{aligned} & \frac{2l_{CB}(l_{CB} + l_{AD} - (l_{CB} - l_{AD}))}{4} \\ &= \frac{l_{CB}(l_{CB} + l_{AD} - (l_{CB} - l_{AD}))}{2} \\ &= \frac{l_{CB}(2l_{AD})}{2} = l_{AC} \cdot l_{BD} \end{aligned}$$

Der fås altså

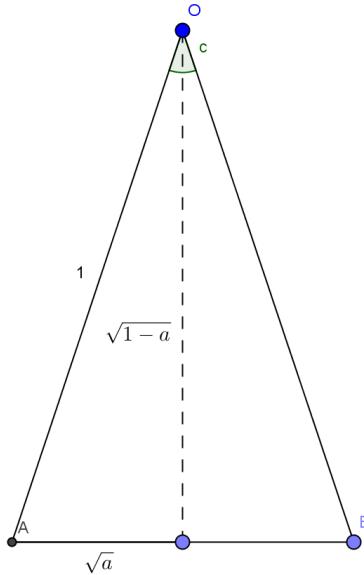
$$= l_{AC}^2 + l_{AC} \cdot l_{BD} \quad (2.26)$$

Nu kan de tidligere udregnede længder indsættes og (2.27) fås.

$$l_{AB}^2 = 4 \left(\sin^2 \left(\frac{\Delta lat}{2} \right) + \cos(lat1) \cdot \cos(lat2) \cdot \sin^2 \left(\frac{\Delta lon}{2} \right) \right) \quad (2.27)$$

Da man er interesseret i at bestemme den vinkel, som bliver udspændt mellem punkterne A og B (se **Definition 2**), kan en trekant opstilles mellem punkterne, se figur 2.19. Her defineres a ved 2.28.

$$a = \left(\frac{l_{AB}}{2} \right)^2 \quad (2.28)$$



Figur 2.19: Afstanden mellem to punkter illustreret

Ud fra figur 2.19, kan vinkel c beskrives ud fra (2.29)

$$c = 2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1-a}} \right), \text{ for } a < 1 \quad (2.29)$$

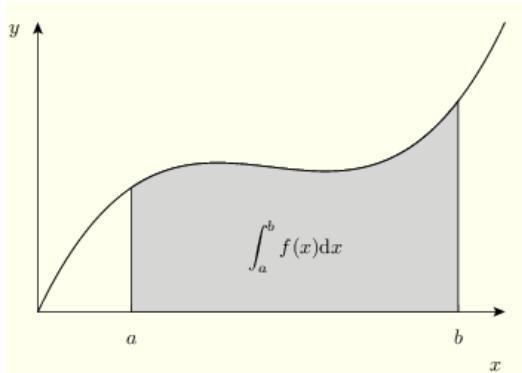
Nu er vinklen mellem A og B udregnet, hvor a går mod 1, når man kommer over på den modsatte side af kuglen. Da alle udregningerne foregik på enhedscirklen, kan de nu skaleres efter behov. Det kan de blive gennem **Definition 2**.

2.4.3 Numerisk integration

Bestemte integraler bestemmer arealet under en kontinuert funktion. Ofte bestemmes disse analytisk ud fra en analytisk udtrykt funktion, og arealet under kurven kan dermed bestemmes eksakt. Arealet under en kurve er illustreret på figur 2.20. Imidlertid kan bestemte integraler kun bestemmes analytisk, hvis funktionen, som integreres, har en stamfunktion, som kan udtrykkes ved elementære funktioner. (2.30) viser et eksempel på en funktion, som har en stamfunktion, som ikke kan udtrykkes ved elementære funktioner.

$$\int e^{-x^2} dx \quad (2.30)$$

Udtrykket har mening, idet det udtrykker arealet under kurven givet ved funktionen, men stamfunktionen kan ikke udtrykkes ved de funktioner, som der haves til rådighed. I et sådan tilfælde vil det være nødvendigt at benytte approksimerende metoder. Et andet tilfælde, som kræver en numerisk løsning, er hvis der haves en



Figur 2.20: En kurve beskrevet ved $f(x)$. Arealet under kurven i intervallet $[a; b]$ er farvet gråt [PyX, 2016].

mængde funktionsværdier, således funktionen kun kendes gennem diskrete punkter. Dette tilfælde kræver også en approksimering, da den eksakte funktion ikke kendes. Numerisk integration er et værktøj fra numerisk analyse, som approksimerer bestemte integraler ud fra kendte funktionsværdier gennem algoritmer. Netop denne metode vil blive uddybet her.

Numerisk integration approksimerer et integrale ved (2.31).

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^N c_x f(x_k) \quad (2.31)$$

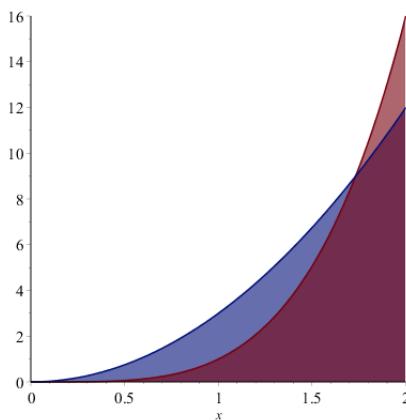
Kvadraturreglerne, som beskrives i dette afsnit, tager alle udgangspunkt i (2.31) - de giver blot forskellige vægte til punkterne. Integralet af en funktion f på et interval $[a; b]$ har geometrisk set den egenskab, at det udtrykker arealet af området afgrænset af grafen og x-aksen i intervallet $[a; b]$. Altså skal en metode til numerisk integration approksimere dette. Disse metoder kaldes kvadraturregler. I teorien kan man blot konstruere et Lagrange polynomium af høj grad på baggrund af kendte punkter og derefter integrere dette - polynomier er lette at integrere og dette ville give en integration af høj præcision. I dette projekt arbejdes der blot med de tre nedenstående kvadraturregler, som konstruerer interpolerende polynomier af grader på enten 1 eller 2 - se tabel 2.1. Reglerne har forskellige grader af præcision og beregningsmæssig kompleksitet, som vil blive forklaret senere i dette afsnit. Det kan dog afsløres, at Simpsons regel har højere præcision end de to andre, og trods dens berghningsmæssigt højere kompleksitet, anvendes denne i projektet. Simpsons regel approksimerer et bestemt integrale ved hjælp af et andengradspolynomium konstrueret fra kendte funktionsværdier - approksimeringen ses i (2.32) [Turner, 2000].

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (2.32)$$

Kvadraturregel	Grad af polynomium
Midtpunktsreglen	0. grad
Trapezreglen	1. grad
Simpsons regel	2. grad

Tabel 2.1: Grader af polynomier, som de tre forskellige kvadraturregler bruger til approksimering af bestemte integraler.

Simpsons regel konstruerer et interpolerende polynomium af 2. grad ud fra tre vægtede punkter, hvor yderpunkterne har vægt 1, mens det midterste punkt har vægt 4. På figur 2.21 ses approksimeringen af arealet under kurven for $f(x) = x^4$ i intervallet $[0; 2]$ med Simpsons regel. På figur 2.21 ses det tydeligt, at approksime-



Figur 2.21: Illustration af approksimering af x^4 i intervallet $[a; b]$ med Simpsons regel.

ringen ikke er ret præcis. Der er derfor grundlag for at finde en bedre metode til approksimering af integraler - Simpsons regel udvides til Simpsons sammensatte regel. Det udnyttes, at et bestemt integrale kan brydes op i flere integraler som set i (2.33) [Turner, 2000].

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (2.33)$$

Hvis altså Simpsons regel benyttes på samtlige delintervaller, må approksimeringen af integralet være summen af approksimeringen af delintegralerne. Senere vil det vise sig, at approksimationens præcision øges, hvis antallet af delintervaller øges. Altså er det ønskværdigt at dele intervallet op i delintervaller, og derpå benytte Simpsons regel.

I (2.34) ses Simpsons sammensatte regel for $2N$ punkter i intervallet $[a; b]$ [Turner, 2000].

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_{2N} = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{k=1}^N f(x_{2k-1}) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(x_{2k}) + f(b) \right] \quad (2.34)$$

Hvor

$$h = \frac{b-a}{2N}$$

Til denne approksimering hører der, som tidligere omtalt, en fejlvurdering, som fortæller noget om, hvor stor afvigelse den numeriske approksimation har. Fejlen er blot differensen mellem den eksakte og approksimerede løsning og ses i (2.35) [Turner, 2000].

$$E_S = \int_a^b f(x) dx - S_N \quad (2.35)$$

Vurderingen udledes ikke i denne rapport, men ses i (2.36) [Turner, 2000].

$$E_S = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi_S) \quad (2.36)$$

Hvor $a \leq \xi_S \leq b$

Til sammenligning hører der ligeledes fejlvurderinger til midtpunkts- og trapezreglen. Disse ses i (2.37) og (2.38) [Turner, 2000].

$$E_M = \frac{(b-a)h^2}{24} f^{(2)}(\xi_M) \quad (2.37)$$

$$E_T = -\frac{(b-a)h^2}{12} f^{(2)}(\xi_T) \quad (2.38)$$

For funktioner, som ikke er analytisk bestemt, kan det ikke lade sig gøre at bestemme fejlen eksakt, da der indgår et led $f^{(4)}(\xi)$, hvor ξ kun kan bestemmes såfremt funktionen er analytisk bestemt. Hvis det ikke er tilfældet, kan fejlen ikke bestemmes eksakt.

Det ses, at alle tre fejlvurderinger afhænger af h , som afhænger af antal opdelinger N . Altså afhænger alle tre reglers præcision af N , hvor fejlen mindskes i takt med at N øges. Fejlen E kan altså gøres arbitraert lille alt efter valg af N - dette er udtrykt i (2.39).

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E = 0 \quad (2.39)$$

Siden fejlvurderingen for Simpsons regel afhænger af h^4 , mens de to andre afhænger af h^2 , vil Simpsons regel konvergere mod det eksakte resultat hurtigere end midtpunkts- og trapezreglen, når antallet af inddelinger N øges. Det er dog værd at bemærke, at fejlvurderingerne også afhænger af forskellige grader af afledede af den integrerede funktion, og det derfor i specielle tilfælde, hvor $f^{(4)}$ opfører sig "grimt", kan ske, at midtpunkts- og trapezreglen er bedre end Simpsons. Hvis dette ikke er tilfældet, vil approksimationen ved Simpsons regel konvergere mod det eksakte resultat hurtigst.

Ud over fejlvurderingen kan reglerne også vurderes ud fra deres grader af præcision, se følgende definition.

Definition 3 En kvadraturregel på formen set i (2.31) har grad af præcision n , hvis n er det højeste heltal, for hvilket kvadraturreglen er eksakt for x^k for alle $k = 0, 1, \dots, n$ [Turner, 2000]. \square

Graden af præcision af de tre kvadraturregler ses i tabel 2.2. Simpsons regel er altså

Kvadraturregel	Grad af præcision
Midtpunktsregel	1
Trapezregel	1
Simpsons regel	3

Tabel 2.2: Grad af præcision for tre forskellige kvadraturregler [Turner, 2000].

også overlegen i dette aspekt - den kan give eksakte resultater for alle polynomier til og med grad 3 men ikke grad 4, hvor de to andre kun kan give eksakte resultater for polynomier til og med grad 1.

2.4.4 Taylorpolynomiet

Et Taylorpolynomium er et polynomium, som approksimerer en funktion og dens funktionsværdier centreret omkring et udviklingspunkt og den afledede fra den pågældende funktion. Polynomier er simple at regne med, og det er derfor ønskværdigt, at udtrykke funktioner som polynomier. Taylorpolynomiet vil desuden vise sig at være nødvendig i følgende afsnit, hvor den komplekse eksponentialfunktion defineres for derefter at kunne benyttes i udledningen af Fouriertransformationen. Taylorpolynomiet er defineret ved **Definition 4**.

Definition 4 Hvis f er en N gange differentiabel funktion på intervallet $I = (a, b)$ og der haves et punkt $x \in I$ så er Taylorpolynomiet af grad N defineret som værende

$$P_{N,c}(x) = \frac{f(c)}{0!} + f^{(1)}(c) \frac{(x-c)^1}{1!} + f^{(2)}(c) \frac{(x-c)^2}{2!} + \dots + f^{(N)}(c) \frac{(x-c)^N}{(N)!} \quad (2.40)$$

hvor x er udviklingspunktet. \square

Det kan altså lade sigøre at approksimere f med et polynomium af grad N med **Definition 4**. Desuden gør (2.41) sig gældende.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,c}(x) = f(x) \quad (2.41)$$

Det ses altså, at en differentiabel funktion kan approksimeres arbitrært præcis ved et Taylorpolynomium.

Til Taylorpolynomiet hører også en fejlurdering, men denne vil der ikke blive beskæftiget med her, da den ikke er relevant i forbindelse med udledningen af Eulers formel i afsnit 2.4.5.

2.4.5 Komplekse tal

Den komplekse tal mængde \mathbb{C} , er en udvidelse af den reelle talmængde \mathbb{R} . De komplekse tal har mange anvendelser inden for matematik. Især når der arbejdes i frekvensdomænet, er det en fordel at arbejde med de komplekse tal.

Definition 5 Et komplekst tal på rektangulær form, er defineret ud fra (2.42)

$$z = a + bi \quad (2.42)$$

Hvor a og b tilhører \mathbb{R} , for to komplekse tal $z_0 = a + bi$ og $z_1 = c + di$ gælder der at $z_0 = z_1$, hvis $a = c$ og $b = d$. i er det imaginære tal svarende til $\sqrt{-1}$, hvorom det gælder at $i^2 = -1$, [Nielsen, 2009]. \square

Et komplekst tal består af en realdel og en imaginærdel. Et komplekst tal kan plottes i det komplekse plan, hvor den ene akse er realdelen af det komplekse tal, og den anden akse er imaginærdelen af tallet.

Definition 6 Den reelle del af det komplekse tal $z = a + bi$ er a og den imaginære del er b . Hvis den reelle del af et komplekst tal er 0, siges det, at et tal er et rent imaginært tal [Nielsen, 2009] \square

Den komplekse eksponentialfunktion

Da den reelle eksponentialfunktion har mange anvendelser indenfor matematik, vil den komplekse eksponentialfunktion blive introduceret i dette afsnit.

Når den komplekse eksponentialfunktion introduceres, er det vigtigt, at den bevarer potensregnereglen set i (2.43).

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c} \quad (2.43)$$

Hvis der ses på det komplekse tal $z = x + iy$, og eksponentialfunktionen anvendes med dette tal, kan tallet deles med (2.43), se (2.44).

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \quad (2.44)$$

Nu kan specialtilfældet e^{iy} af (2.44) differentieres.

$$\frac{de^{iy}}{dy} = ie^{iy} \quad (2.45)$$

Det ses, at (2.45) skiftevis vil være positiv og negativ grundet $i^2 = -1$. Da (2.44) kan faktoriseres, indsættes det, at der kun skal ses på e^{iy} . På baggrund af afsnit 2.4.4, kan Taylorpolynomiet for e^x nu opskrives og approksimeres ud fra $a = 0$. Dette ses i (2.46).

$$e^x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) \quad (2.46)$$

Da taylorserien for e^x allerede er opstillet i (2.46), kan x blot substitueres med iy for at finde taylorserien for e^{iy} , se (2.47).

$$e^{iy} = \left(1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots + \frac{(iy)^n}{n!} \right) \quad (2.47)$$

Da $i^2 = -1$, kan (2.47) faktoriseres.

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots \right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots \right) \quad (2.48)$$

Taylors formel er defineret i (2.40), og kan benyttes til at udregne $\sin(x)$ og $\cos(x)$ med udvikling i punktet $c = 0$. Se **Definition 7** og **Definition 8**.

Definition 7 Taylorserien for $\sin(x)$ med udviklingspunkt $c = 0$ er givet ved (2.49)

$$\sin(x) = P_{N,c}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \text{ for alle } x \quad (2.49)$$

□

Definition 8 Taylorserien for $\cos(x)$ med udviklingspunkt $c = 0$ er givet ved (2.50)

$$\cos(x) = P_{N,c}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \text{ for alle } x \quad (2.50)$$

□

Det ses nu, at den første parentes i (2.48) svarer til $\cos(x)$ og det sidst led svarer til $\sin(x)$. Derfor må følgende gælde

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y) \quad (2.51)$$

Derfor kan (2.52) introduceres på baggrund af (2.43).

$$e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) \quad (2.52)$$

2.4.6 Fouriertransformation

I dette afsnit vil der kort gennemgås, hvad Fouriertransformation bruges til, samt teorien for den fremadgående og inverse Fourier transformation.

Fourier transformation kan bruges til at transformere imellem tidsdomænet og frekvensdomænet. Frekvensdomænet repræsenteres af $f = \frac{\omega}{2\pi} [\text{Hz}]$, hvor f er normaliseret i forhold til 2π . Det vil sige, at information i tidsdomænet nu kan repræsenteres i frekvensdomænet, hvor informationen er uændret.

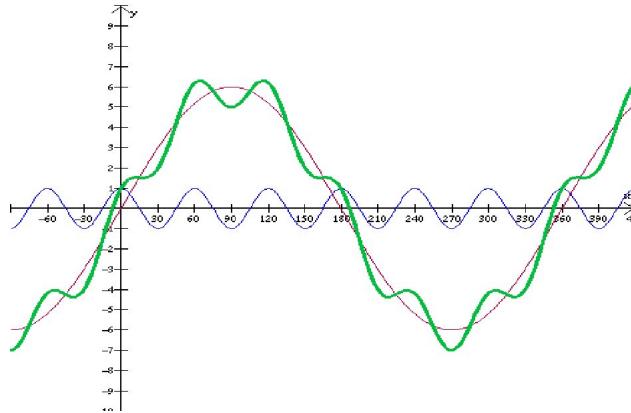
Joseph Fourier (1768–1830) fandt ud af, at det er muligt at beskrive alle funktioner med en uendelig sum af sinusoider [Stewart, 2008].

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) \quad (2.53)$$

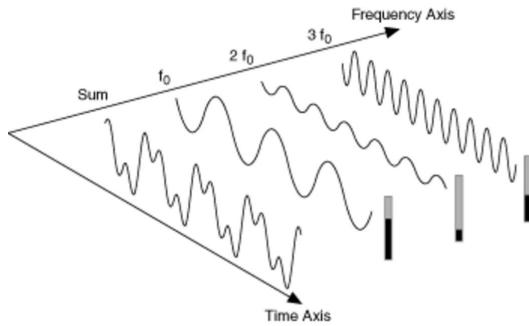
Hvis det antages, at $f(x)$ er en delvis-kontinuert funktion i intervallet $[-\pi, \pi]$ fås:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)) \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad (2.54)$$

Da en funktion kan beskrives af en uendelig summering af sinusoider, så vil en funktion kunne beskrives gennem amplituden og faseforskydningen ved diverse frekvenser, de forskellige sinusoiderne har. Så når summeringen af sinusoiderne beskrives i tidsdomænet, er det repræsenteret som en funktion der afhænger af tiden, hvilket ses på figur 2.22. Derimod når summeringen af sinusoiderne beskrives i frekvensdomænet, er det repræsenteret som søjler ved hver frekvens, der har amplituden som højden ved de specifikke frekvenser, hvilket ses på figur 2.23.



Figur 2.22: Den grønne funktion er den summerede sinusoide af de to andre [Tara, 2006].



Figur 2.23: Her ses den summerede sinusoide funktion og dens opdelinger i frekvensdomænet [Instruments, 2012].

Hvis der haves en sinusoide, som er beskrevet i frekvensdomænet, så for tre forskellige frekvenser, f_1 , f_2 og f_3 med en tilhørende amplitude $A(f)$, kan sinusoiden beskrives i tidsdomænet som en summering af sinusoider som i (2.55).

$$f(t) = A(f_1) \cdot \cos(2\pi f_1 t) + A(f_2) \cdot \cos(2\pi f_2 t) + A(f_3) \cdot \cos(2\pi f_3 t) \quad (2.55)$$

Den generelle notation for denne transformation ses i (2.56).

$$f(t) = \sum_{f=-\infty}^{\infty} A(f) \cdot \cos(2\pi f t) \quad (2.56)$$

Hvis amplituden er en kontinuert funktion af frekvensen, så er det muligt at udskifte den diskrete sum med et bestemt integrale i intervallet $[-\infty; \infty]$ som set i (2.57).

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(f) \cdot \cos(2\pi f t) df \quad (2.57)$$

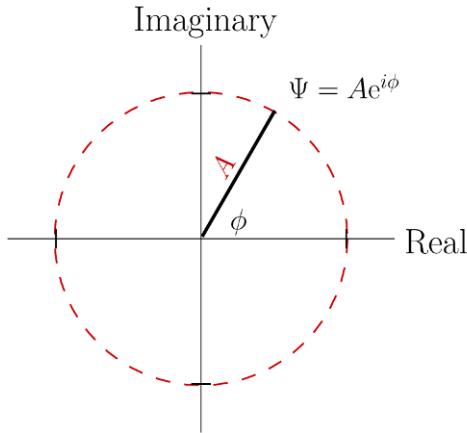
Ligning 2.57 er den inverse Fourier transformation, men kun når der ikke er faseforskydning i sinusoiderne ved de specifikke frekvenser. En sinusoides amplitude og faseforskydning kan afbilledes som komplekse tal i det komplekse plan, hvor længden af det komplekse tal er amplituden og hvor størrelsen af vinklen i forhold til den reelle-akse, er faseforskydningen, hvilket ses på figur 2.24.

Definitionen af amplituden i forhold til frekvensen $A(f)$ vil kunne skrives som et komplekst tal, hvor faseforskydningen er defineret til (2.58).

$$F(f) = A(f) \cdot \cos \phi + i \cdot A(f) \cdot \sin \phi \quad (2.58)$$

Ved at se på Eulers formel, se (2.51), kan man omskrive udtrykket (2.57) til (2.59), da udtrykkene for \sin er 0.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) \cdot e^{i2\pi f t} df \quad (2.59)$$



Figur 2.24: Her er sinusoidens amplitude og faseforskydning beskrevet i det komplekse plan [Francis, 2012].

Denne formel transformerer information fra frekvensdomænet til tidsdomænet, og kaldes den inverse Fouriertransformation [Douglas, 2013a]. Fouriertransformationen (den ikkeinverse) går fra tidsdomænet til frekvensdomænet. For en kontinuert funktion i tidsdomænet, kan man finde ud af hvor stor en amplitude, der tilhører en vis frekvens ved at dividere funktionen med Eulers formel for den specifikke frekvens - se (2.60).

$$\frac{f(t)}{e^{i2\pi f_0 t}} = f(t) \cdot e^{-i2\pi f_0 t} \quad (2.60)$$

Ved at integrere for alle tidspunkter og alle frekvenser, fås udtrykket for Fouriertransformationen [Douglas, 2013b], som set i (2.61).

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.61)$$

Hvis det antages, at $f(t)$ er kontinuert og består af N punkter $f[0], f[1], \dots, f[k], \dots, f[N-1]$ kan hver sample ses som en impuls med areal $f[k]$, se (2.62).

$$F(f) = \int_0^{(N-1)T} f(t) e^{-i\omega t} dt = f[0]e^{-j0} + f[1]e^{-i\omega T} + \dots + f[k]e^{-i\omega kT} + \dots + f[N-1]e^{-i\omega(N-1)T} \quad (2.62)$$

Det ses nu, at (2.62) kan skrives som (2.63).

$$F(f) = \sum_{k=0}^{N-1} f[k] e^{-i\omega kT} \quad (2.63)$$

Den diskrete Fouriertransformation er nu introduceret [Roberts, 2016].

2.4.7 Korrelation

For at kunne sammenligne to signaler, kan metoden korrelation anvendes. Dette er relevant, når forskellige bevægelser skal sammenlignes. En korrelationskoefficient indtager talværdi mellem -1 og 1. Hvis værdien ligger tæt på et af yderpunkterne -1 eller 1, er korrelationen høj, hvilket betyder, at signalerne minder om hinanden. Hvis værdien er 0, er korrelationen lav, hvilket betyder, at signalerne ikke minder om hinanden [Chan, 2016]. Korrelationskoefficienten er defineret ved **Definition 9**.

Definition 9 Korrelationskoefficienten er defineret ud fra (2.64)

$$\rho(v_1, v_2) = \frac{\text{cov}(v_1, v_2)}{s_{v_1} s_{v_2}} \quad (2.64)$$

Hvor cov er kovariansen mellem de to signaler, og s er standardafvigelsen for signalerne. Hvor standardafvigelsen defineret ud fra (2.65) og kovariansen er ved (2.66).

$$s_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2}{n - 1}} \quad (2.65)$$

$$\text{cov}(v_1, v_2) = \frac{\sum_{i=1}^n (v_{1i} - \bar{v}_1)(v_{2i} - \bar{v}_2)}{n - 1} \quad (2.66)$$

Her er \bar{v}_1 og \bar{v}_2 middelværdien af de to vektorer.

□

2.5 Filterteori

Målinger fra IMU er som regel støjfyldte. Grunden til dette er, at stokastiske fejl, det vil sige tilfældig støj fra enten udstyret selv eller dets omgivelser, påvirker accelerometeret og gyroskopet, hvilket leder til fejlagtige målinger. Et digitalt filter kan designes således dele af støjen kan filtreres fra, og det ønskede signal bevares. I forbindelse med decimering, som uddybes i afsnit 2.6.4, kan der også med fordel designes et filter, som fjerner de problemer, der er ved denne teknik.

For at fjerne den overordnede stokastiske støj, som kommer til udtryk i målingerne fra IMU, er en løsning at anvende digitale filtre, herunder *finite impulse response* (FIR) filtre.

2.5.1 FIR filter

Som det vil vises under forsøgene med IMU, se afsnit 4, vil forsøgene være præget af højfrekvent støj. En metode til at filtrere denne højfrekvente støj fra måledataen

er gennem finite impulse response (FIR) filteret. Den matematiske repræsentation af FIR er vist som følgende:

$$y_n = \sum_{k=0}^M b_k \cdot x_{n-k} \quad (2.67)$$

Hertil viser (2.67) et *FIR*-filter [Wickert, 2011]. Variablerne er beskrevet som følgende

y_n er signalets filtrerede output.

M er ordenen af filteret svarende til længden af filteret -1.

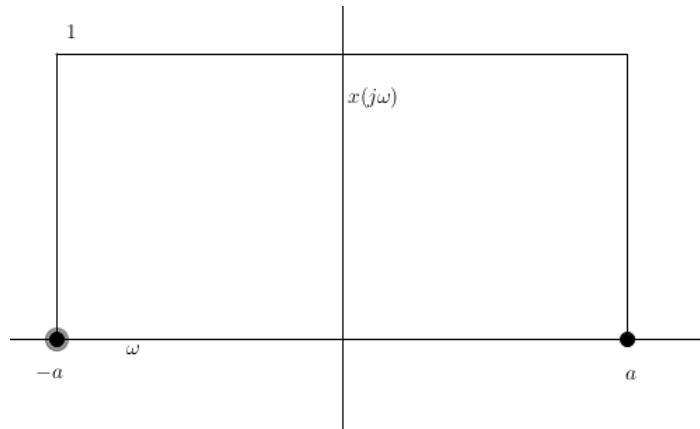
b_k er vægte/faktorer som skalaer input af signalet som filteret påvirker.

x_n er samples.

Der findes flere metoder til bestemmelse af vægten/vægtene b_k . Den metode der anvendes til at bestemme b_k i projektet, er vinduefunktioner.

Vinduesfunktioner

Det ideelle lavpas filter, altså et filter til formål at dæmpe høje frekvenser, vil blive beskrevet ud fra en rektangulær funktion. I denne rektangulære funktion forbliver nogle bestemte frekvensintervaller i signalet, imens andre sorteres fra. Dette ses på figur 2.25.



Figur 2.25: Rektangulær funktion $x(j\omega)$ med konstant funktionsværdi på 1 i intervallet $[-a; a]$ og 0 ellers

Hvis Fouriertransformationen bruges på den rektangulære funktion fås integralet i (2.68).

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (2.68)$$

Udtrykket kan forkortes, da amplituden uden for intervallet $[-a;a]$ er 0, mens amplituden inden for intervallet er 1. Dvs. at der kan nøjes med kun at betragte intervallet $[-a;a]$. I intervallet gælder $x(\omega) = 1$. Dette resulterer i en Fouriertransformation som set i (2.69).

$$x(t) = \int_{-a}^a e^{i\omega t} d\omega \quad (2.69)$$

Derefter udregnes der i (2.70) det bestemte integrale.

$$\frac{1}{i \cdot t} [e^{i\omega t}]_{-a}^a = \frac{1}{i \cdot t} (e^{ita} - e^{i \cdot t \cdot (-a)}) \quad (2.70)$$

Herefter reduceres udtrykket.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{it} (e^{ita} - e^{-ita}) && (1.) & &= \frac{2}{t} \cdot \frac{1}{2i} \cdot (e^{ita} - e^{-ita}) && (2.) \\ &= \frac{2a}{ta} \sin(t \cdot a) && (3.) & &= 2a \frac{\sin(t \cdot a)}{ta} && (4.) \end{aligned}$$

Sincfunktionen er defineret ved $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ og udtryk 4 skrives da om til udtryk 5. Fra udtryk 5 til udtryk 6 divideres der med $2a$.

$$= 2a \cdot \text{sinc}(ta) \quad (5.) \quad \text{sinc}(ta) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{i\omega t} d\omega \quad (6.)$$

Intervallet $[-a;a]$ skiftes ud med intervallet $[-\pi;\pi]$.

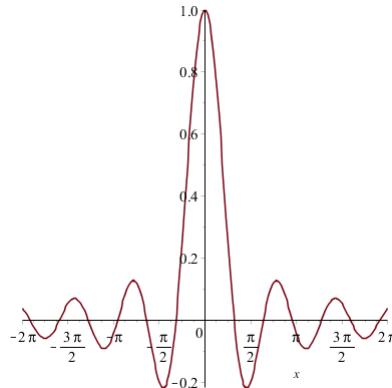
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} d\omega && (1.) & &= \frac{1}{2 \cdot i \cdot \pi \cdot t} [e^{it\omega}]_{-\pi}^{\pi} && (2.) \\ &= \frac{1}{\pi \cdot t} \frac{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}}{2 \cdot i} && (3.) & &= \frac{\sin(t\pi)}{\pi \cdot t} && (4.) \end{aligned}$$

Dette kan omskrives til sinc funktionen set i (2.71) [Mathworld, 2016].

$$\text{sinc}(t\pi) = \frac{\sin(t\pi)}{\pi \cdot t} \quad (2.71)$$

Grafen for sinc funktionen ses på figur 2.26.

Sinc funktionen kaldes også *samplingsfunktionen* [Mathworld, 2016]. Denne funktion har intervallet $[-\infty; \infty]$, hvilket er problematisk når det kommer til computerberegnning, da intervallet er uendeligt, og en computer kan kun foretage et endeligt



Figur 2.26: Sincfunktionen

antal udregninger. Udtrykket trunkeres og forskydes med $\frac{M}{2}$, således den kun har positive x-værdier [Smith, 2011a]. Dette resulterer i (2.72).

$$\text{sinc}\left(\left(t - \frac{M}{2}\right)\pi\right) = \frac{\sin(\pi(t - \frac{M}{2}))}{\pi \cdot (t - \frac{M}{2})} \quad (2.72)$$

[Smith, 1998] Sinc funktionen er nu afgrænset, men grundet denne afgrænsning vil funktionen ikke afbilde det ideelle filter mere. Dette forårsager, at der kommer tydeligere cosinusbølger, også kaldet *ripples*, af samme type som set i figur 2.26. For at løse dette problem anvendes et såkaldt vindue for at formindske disse ripples [Smith, 1998]. Det ideelle vindue har funktionen (2.73)

$$H[n] = \begin{cases} 1, & \text{hvis } 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \quad (2.73)$$

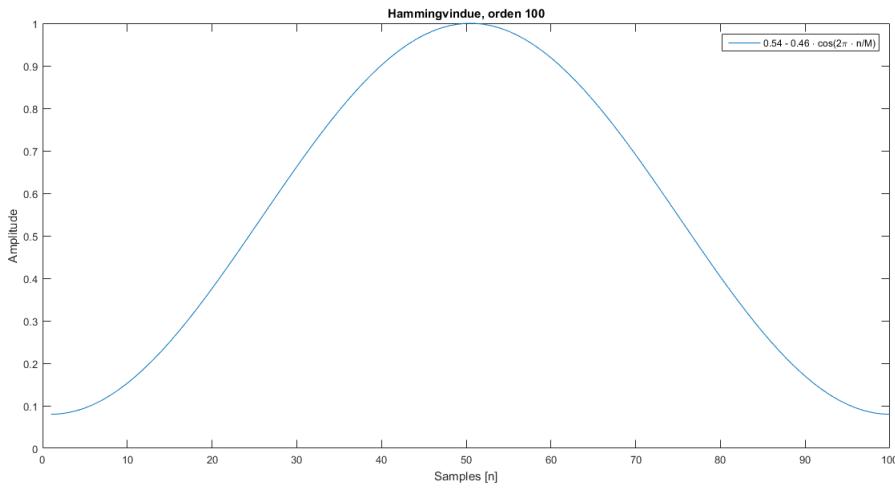
Dog kan dette ideelle vindue ikke anvendes, da (2.73) ikke kan beskrives som en kontinuert funktion. Af denne årsag anvendes andre vinduer, herunder Hamming, hvis funktion er givet ved (2.74) og ses på figur 2.27.

$$w[n] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & \text{hvis } 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{ellers} \end{cases} \quad (2.74)$$

Hvor n er samples og M er ordnen. Udedningen af disse vinduer vil ikke blive beskrevet yderligere, dog vil indførslen af vinduet i (2.74) skabe vægtene b_k .

$$b_k = \text{sinc}[n] \cdot w[n], \text{ hvor } k = n + \frac{M}{2}, \text{ og } n = [-\frac{M}{2} \dots \frac{M}{2}] \quad (2.75)$$

Jævnfør (2.75) kan sincfunktionen ganges med en normaliseret værdi ω_0 i intervallet $[0 < \omega_0 < 1]$, for at styre hvilken frekvens i $\pi \frac{\text{rad}}{\text{sample}}$ filterets vægte skal virke

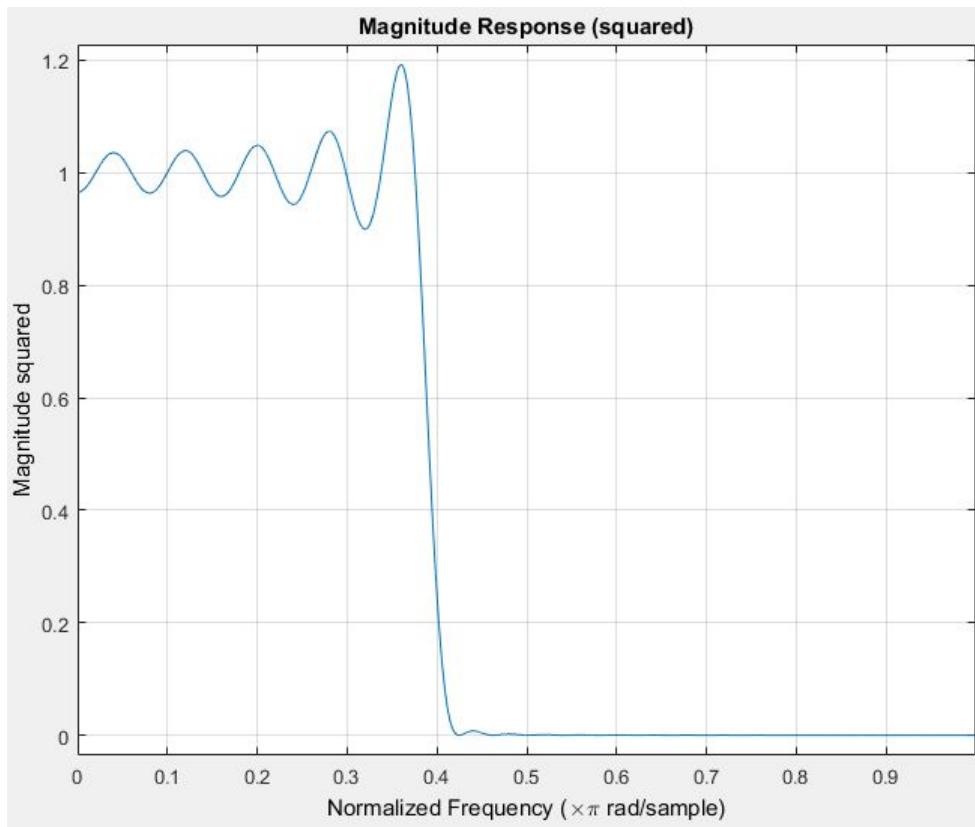


Figur 2.27: Hammingvindue af orden $M = 100$

over. Denne værdi er den *normaliserede skæringsfrekvens*. Med filter orden $M = 50$ og en normaliseret skæringsfrekvens ω_0 ved $0,4 \frac{\text{rad}}{\text{sample}}$ fås vægtene b_k (2.76).

$$b_k = \frac{\sin(0,4\pi(n - \frac{50}{2}))}{\pi \cdot (n - \frac{50}{2})} \cdot w[n] \quad (2.76)$$

Denne kan illustreres i frekvensdomænet ved at benytte Fouriertransformen på udtrykket, som set i figur 2.28.



Figur 2.28: b_k Fouriertransformeret

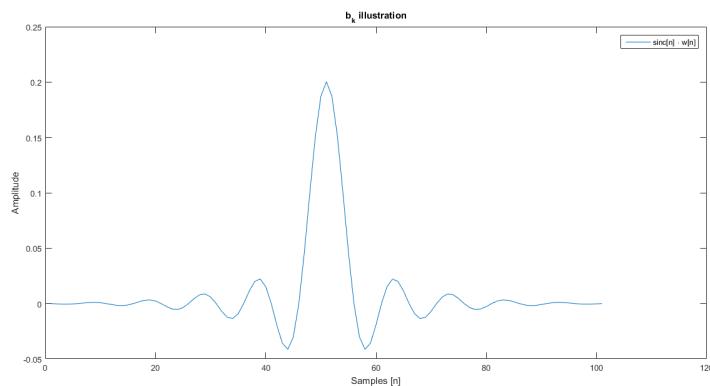
Som det ses på figur 2.28, er x-aksen i radianer op til π , mens y-aksen repræsenterer kvadrerede amplituder. Disse amplituder beskriver, i hvilken grad forskellige frekvenser optræder i et signal. Det vil sige, at denne matematiske repræsentation giver anledning til et filter som dæmper frekvenser over en bestemt skæringsfrekvens i frekvensdomænet, og det er netop denne form for lavpasfilter, der vil blive anvendt i projektet. Noget der er vigtigt at bemærke, er den hældning hvorved filteret konvergerer mod 0, ved ω_0 omkring $0,4 \pi \frac{\text{rad}}{\text{sample}}$. Konvergensen, ved dette filter, afhænger udelukkende af den orden, filteret er givet ved, som i dette tilfælde er 50 - højordensfiltre konvergerer hurtigere mod 0. En højere filterorden er dog beregningsmæssigt mere kompleks, og det er derfor oplagt at justere ordnen for hvert filter for at spare beregninger.

En anden ting, der observeres på grafen, er det cosinusmønster eller ripples, som tegner sig før ω_0 og til dels efter ω_0 . Disse ripples afhænger på samme måde som konvergensen over den givne ω_0 af filterordnen. En højere filter orden vil reducere størrelsen af disse ripples, men frekvensen bag disse ripples afhænger af, hvilket

vindue der anvendes. Hvis den samme orden holdes, kan størrelsen, forskydningen og frekvensen af disse ripples blive styret af valget af vindue. Som nævnt vil der i projektet blive arbejdet med Hammingvinduet, men med en orden på 50 eller 100, forventes det ikke, at disse ripples får særlig indvirkning på amplituden før skæringsfrekvensen i frekvensdomænet i forhold til den data, dette filter vil passere hen over.

2.5.2 Design af filter

For at kunne designe et filter, er det vigtigt at vide hvilken skæringsfrekvens der skal anvendes. Skæringsfrekvens er blevet introduceret i forrige afsnit men ikke defineret. Skæringsfrekvens er det sted, hvor et filter har en forstærkning på $-3dB$ [innovateus, 2016], hvilket vil sige det sted hvor amplituden af signalet halveres. Før det er muligt at finde den skæringsfrekvens, der vil passe bedst til et givet datasæt, skal frekvensresponsen introduceres, hvilket den kan blive gennem den diskrete Fouriertransformation, se (2.63). Med denne er det muligt at gå fra det diskrete tidsdomæne til frekvensdomænet, se figur 2.29 for illustration af et vindue.



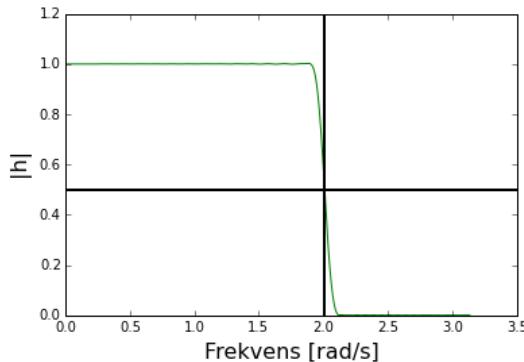
Figur 2.29: Illustration af vindue med orden $M = 100$ og skæringsfrekvens $0,2$

På figur 2.30 og 2.31 ses et plot af amplitude frekvensrespons og dB frekvensrespons. Det er defineret ud fra (2.77) [Ninness, N/a], hvor H er overføringsfunktionen for systemet. Forskellen på de to plot er, at y-aksen er lavet om til dB forstærkning ved at skalere aksen med (2.78).

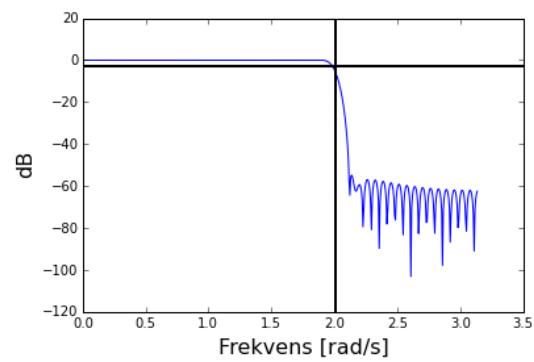
$$R(\omega) \triangleq |H(\omega)| \quad (2.77)$$

$$20\log_{10}(|H(\omega)|) \quad (2.78)$$

Det ses ud fra figurene, at de er normaliserede og at skæringsfrekvens ligger omkring $2\frac{\text{rad}}{\text{sample}}$, hvilket svarer til halvering af amplituden eller $-3dB$ forstærkning. På baggrund af denne teori kan et filter specifikt for ens system designes, ved at



Figur 2.30: Amplitude frekvensrespons



Figur 2.31: dB frekvensrespons

opstille de tilhørende frekvensresponser, og se hvilken information der er værd at beholde.

2.6 Sampling

Sampling bruges inden for signalbehandling til at konvertere et kontinuert signal (måles ud fra spændingsniveauer) til et diskret signal (måles ud fra binæreniveauer). Dette muliggør en digital lagring af data rekonstrueret fra et analogt signal. Derfor omtales dette som en analog til digital konvertering (ADC). Hastigheden, hvorved et digitalt signal samples, benævnes samplerate med enheden hertz (Hz), hvilket i denne sammenhæng er samples per sekund mens, det ved analoge signaler er det cyklusser per sekund. Problematikken ved konvertering af et analogt signal til et digitalt er, at vælge en passende samplerate. Hertil kan desuden nævnes kvantisering som en problematik - denne berøres i afsnit 2.6.3. En lav samplerate kan resultere i aliasering, se afsnit 2.6.2, mens en høj samplerate kræver kraftige CPU'er, og kan være overflødig i forhold til det ønskede resultat [Smith, 2011a]. De følgende afsnit redegør for valg af samplerate og fejlkilder herved.

2.6.1 Nyquist–Shannon samplingteorem

For at sample et analogt signal *korrekt*⁵ og dermed undgå aliasering skal Nyquist–Shannon teoremet tages i betragtning. Dette ses i **Definition 10**.

Definition 10 Sampleraten skal være mindst det dobbelte af den højeste frekvens indeholdt i signalet.

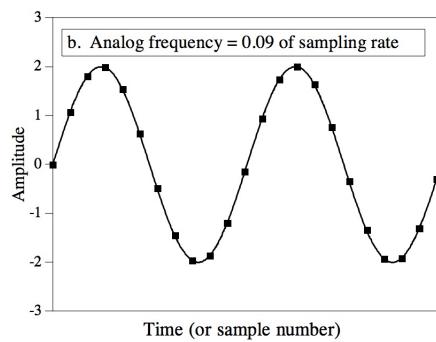
$$f_s \geq 2f_c \quad (2.79)$$

□

⁵Hvis det analoge signal kan rekonstrueres med de samplede data, er det analoge signal samplet korrekt.

hvor f_s er sampleraten, og f_c er den højeste frekvens indeholdt i signalet og benævnes Nyquistfrekvensen [Olshausen, 2010]. Ligning (2.79) kaldes også Nyquistkriteriet.

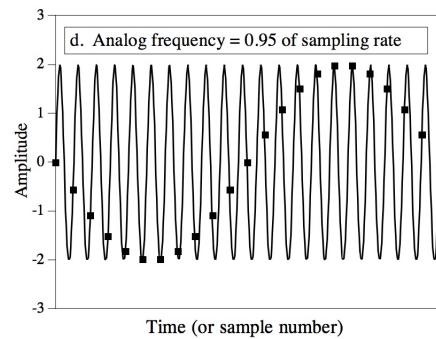
Et eksempel, hvor dette er opfyldt, ses på figur 2.32. Ved et eksempel med lydoptagelse, optræder teoremet i den forstand, at mennesker groft sagt kan høre toner mellem 20Hz og 20kHz. For at konvertere et analogt signal med 20kHz til et digitalt signal, skal sampleraten jævnfør (2.79) være 40kHz eller over [Smith, 2011b].



Figur 2.32: Analogt signal repræsenteret *korrekt* digitalt [Smith, 2011a]

2.6.2 Aliasering

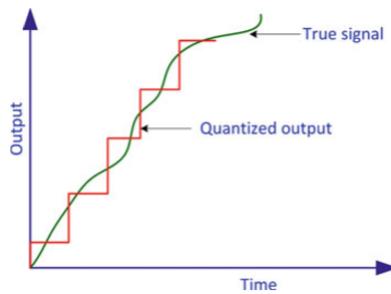
I tilfælde af for lav en samplerate kan fænomenet aliasering opstå. Ved optrædelse af fænomenet, samples det analoge signal ukorrekt i forhold til Nyquistkriteriet, og det vil ikke være muligt at rekonstruere det analoge signal fra det digitale. På figur 2.33 ses aliasering tydeligt, idet det digitale signal har en lavere frekvens end det analoge. Nyquistkriteriet må af samme grund nødvendigvis ikke være opfyldt.



Figur 2.33: Analogt signal repræsenteret *forkert* digitalt [Smith, 2011a]

2.6.3 Kvantisering

Kvantisering er den fejl, der forekommer, når et analogt signal skal digitaliseres. Hvis man ser på et elektronisk system introduceres fejlen i AD-konverteren, hvilket er, hvor signalet konverteres fra et analogt signal til et digitalt signal. I forbindelse med en Arduino er AD-konverterne på 10 bits, hvilket betyder, at et signal med spændingsniveauet 0 til 5V skal repræsenteres med tal mellem 0 og $2^{10} - 1$ [www.arduino.cc, 2016]. Det vil derfor introducere nogle mærkbare fejkilder som for eksempel afrundingsfejl.



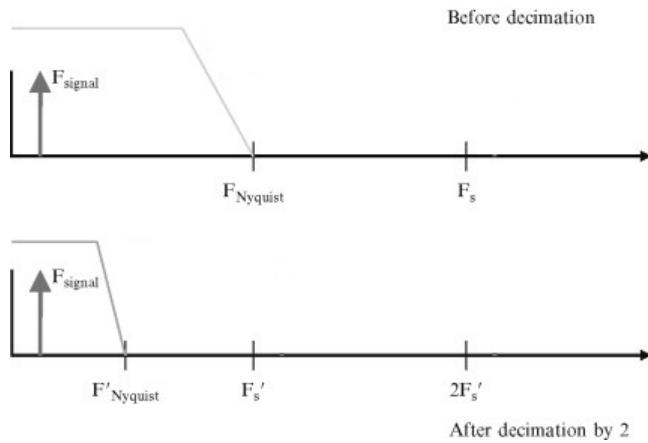
Figur 2.34: Kvantisering illustreret, [Noureldin et al., 2013]

2.6.4 Resampling

Resampling er når mængden af samples ændres i et signal, mens informationen af signalet bibeholdes. Opsamling laver flere samples end der haves gennem interpolation, mens nedsampling, også kaldet decimering, fjerner intervaller af samples, således kun hvert n te punkt beholdes, hvor n er faktoren med hvilken der nedsamples. Hermed kan et datasæt tilpasses efter behov i forhold til beregningsmæssig kompleksitet og databehandling.

Decimering kan foretages, hvis det er ønskværdigt at bringe et datasæts størrelse ned, således eventuel efterfølgende databehandling gøres beregningsmæssigt simplere. Der opstår dog et problem ved decimering, da Nyquistfrekvensen, som forklaret i afsnit 2.6.1, skaleres ned med samme skalering, som der decimeres med - derved kan der opstå spejling af flere frekvenser i denne nye Nyquistfrekvens. Dette kan undgås ved brug af et lavpasfilter, som filtrerer disse frekvenser fra, og derved gør spejlingen mindre betydningsfuld. Et filter implementeret til dette formål kaldes et antialiaseringsfilter [Parker, 2010].

På figur 2.35 ses et eksempel på en decimering af et signal og et tilhørende filter med stopbånd ved Nyquistfrekvensen.



Figur 2.35: Decimering med en faktor 2 - F_s er den originale samplerate og F'_s er efter decimering [Parker, 2010]

2.7 Hardware

I projektet bruges en Arduino UNO, samt modulerne GY-87, GY-GPS6MV2 og SparkFun OpenLog. Arduinoen skal anvendes som mikrocontroller, den skal holde styr på kommunikationen mellem sensorerne og loggeren. Alle sensorene anvender kommunikationsprotokollen I2C, som ikke uddybes i projektet.

2.7.1 Arduino

Arduino er en open-source platform, hvorpå der kan konstrueres prototyper med diverse sensorer og egen kode.

Hardwaren er i stand til at sende og modtage digitale og analoge signaler fra 0 til 5V, som gør den i stand til at kontrollere eller modtage informationer fra komponenter. Softwaren bruges til at logisk kontrollere hardwaren og behandle informationerne man får fra komponenter i systemet. Arduino UNO'en bruger en ATmega328P microprocesser som har 32 kB flashdrive, 16 MHz krystal, 14 digitale porte og 6 analoge porte. Arduinoen kan udføre 8 millioner instruktioner pr. sekund. Programmer laves i Arduino IDE og overføres til Arduinoen gennem en USB ledning [arduino.cc, 2016].

2.7.2 GY-87

GY-87 er et modul til Arduino, som indeholder i MPU-6050 Motion Sensor modul bestående af tre gyroskoper og tre accelerometre. Accelerometrene og gyroskopene er arrangeret således, at de hver især mäter henholdsvis acceleration og rotation langs og omkring tre ortogonale akser. Modulet er altså i stand til at mæle acceleration og rotation af system i rummet. Ud over disse sensorer indeholder modulet

desuden et BMP180 barometer, som er i stand til at måle tryk og et HMC5884L magnetometer, som kan registrere magnetisme. Disse vil ikke bliver uddybet i denne rapport, da de ikke anvendes. Modulet er funktionsdygtigt ved en spænding mellem 3,3V og 5V.

IMU kan kalibreres gennem Arduino IDE således accelerometrene korrekt mäter tyngde- og dermed egenacceleration. På samme måde kan gyroskoperne kalibreres, således disse korrekt mäter rotation fra et ønsket udgangspunkt. Både accelerometre og gyroskoper kan indstilles til ét af fire mulige dynamikområder. For accelerometrene drejer det sig om intervallerne $\pm 2g$, $\pm 4g$, $\pm 8g$ og $\pm 16g$. Det ønskede interval opnås gennem skalering af målingerne. Gennem denne skalering mistes præcision, hvis der måles i større dynamikområder og omvendt, fås der større præcision, hvis der måles i mindre dynamikområder - alt dette afhænger af, hvor stor en ændring i input, der skal til for at ændre én bit. For gyroskoperne drejer det sig om $\pm 250\frac{\circ}{s}$, $\pm 500\frac{\circ}{s}$, $\pm 1000\frac{\circ}{s}$ og $\pm 2000\frac{\circ}{s}$. Her gælder samme princip som for accelerometrene i forhold til dynamikområdet.

Alle målinger foretaget af IMU i dette modul påvirkes af temperatur og tryk. Alle oplysninger opgivet fra producenten gælder ved 25°C . Altså passer disse oplysninger ikke, når temperaturen ændrer sig. I intervallet -40°C til 85°C ændrer accelerometrenes og gyroskopernes målinger sig henholdsvis $\pm 2\frac{\%}{^{\circ}\text{C}}$ og $\pm 20\frac{\%}{^{\circ}\text{C}}$. Der er desuden opgivet en tolerance fra producentens side, som omhandler fejl i produktionen. Denne fejl består i forkert arrangering akserne for sensorerne - dette kaldes cross-axis sensitivity. Producenten oplyser at denne er $\pm 2\%$ for både accelerometre og gyroskoper [InvenSense, 2013]. Modulet har otte pins, hvoraf fire forbindelser bruges og forbindes på følgende måder

V_{CC} : spændingsinput (5V)

GND: stel

SCL: I2C (analogport)

SDA: I2C (analogport)

2.7.3 GY-GPS6MV2 GPS Module

Dette modul kan finde og modtage signaler fra GPS-satellitter og kan derfor benyttes til at bestemme position af Arduino'en. Modulet bruger cirka 26 sekunder på at modtage og beregne informationer omhandlende dens nuværende position først gang efter den initialiseres og derefter måles og beregnes position hvert sekund. Under optimale forhold har disse målinger og beregninger en positionel nøjagtighed på 2,5 meter med en CEP (Circular Error Probability) på 50% mens dens SEP (Spherical Error Probability) er $< 3,5$ meter [u-blox, 2010]. Det vil sige at GPS'en

har en horisontal nøjagtighed på < 2,5 meter og vertikal nøjagtighed på < 3,5 meter 50% af tiden. Desuden måles tidpunktet, som informationer modtages på, med en nøjagtighed på 30 nanosekunder. Præcision for hastighed og retning er henholdsvis 0,1 $\frac{m}{s}$ og 0,5°

Modulet er kun funktionsdygtig til og med en acceleration på 4g, en højde på 50.000 meter og en fart på 500 $\frac{m}{s}$. Modulet har fire forbindelser, som forbindes på følgende måder

V_{CC} : spændingsinput (3.3V)	TX: digitalport
RX: digitalport	GND: stel

2.7.4 SparkFun OpenLog

Dette modul har til formål at gemme al data, som måles af de andre moduler. Modulet gemmer disse informationer på et microSD kort, som lægges i modulet. Al data som printes bliver gemt på SD kortet. Modulet behøver mellem 3,3 og 5V og kører som udgangspunkt på 9.600 bits per sekund.

Modulet har seks forbindelser, som forbindes på følgende måder

GRN: forbindes til stel, og benyttes til at genstarte processoren
RX: input
TX: output
V_{CC} : spændingsinput (5V)
GND: stel
BLK: stel

3 | Verificering af sensorer

Det system der er indeholdt i projektet består af sensorene GY-87 (IMU-enhed), GY-GPS6MV2 (GPS-enhed) og SparkFun OpenLog (Logger), for mere information om sensorerne se 2.7.2, 2.7.3 og 2.7.4. Disse er påsat et shield til Arduino'en, hvilket gør det muligt at foretage en dataopsamling. For at kunne validere de data, som kommer fra chippen MPU-6050's accelerometer og gyroskop, er der blevet foretaget empiriske forsøg. Forsøgene gik ud på at sammenligne det målte data fra MPU-6050 og det målte data fra en iPhone, for at se om de afbilleder samme bevægelse. Da specifikationerne for MPU-6050 er beskrevet i afsnit 2.7.2, er det relevant at se på specifikationerne for en iPhone 5's accelerometer, LIS331DLH, og gyroskop, L3G4200DH [Yogasingam, 2012].

LIS331DLH

LIS331DLH er det accelerometer, som er i Apple's iPhone 5 model. Accelerometeret består af 3 følsomme akser x, y, z , modulet bruger en 16 bit Analog-til-digital konverter, med et dynamikområde på $70 \frac{mV}{\text{g}}$ og har en skala på $\pm 250 \frac{\text{°}}{\text{s}}, \pm 500 \frac{\text{°}}{\text{s}}, \pm 1000 \frac{\text{°}}{\text{s}}$ og $\pm 2000 \frac{\text{°}}{\text{s}}$. Der er allerede et passivt lavpasfilter indbygget i LIS331DLH. Det har dog ikke været muligt at finde hvilken indstilling apple har sat skæringsfrekvensen til [STMicroelectronics, 2009].

L3G4200DH

L3G4200DH er det gyroskop, som er i Apple's iPhone 5 model. Gyroskopet består af 3 følsomme akser x, y, z , modulet bruger en 16 bit Analog-til-digital konverter, med en skala på enten $\pm 2g, \pm 4g$ eller $\pm 8g$. Der er allerede et passivt lavpasfilter indbygget i L3G4200DH. Det har dog ikke været muligt at finde hvilken indstilling skæringsfrekvensen stop på som default [STMicroelectronics, 2010].

SensorLog

For at kunne læse data fra en iPhone's IMU, kan det gøres gennem appen SensorLog. Med appen er det muligt at måle acceleration i g-påvirkning og vinkelhastighed i $[\frac{rad}{s}]$, gennem appen er det også muligt at logge ens data og overfører det til en computer, så det kan bearbejdes.

3.1 Verificering af gyroskop

For at verificere den data, der fås fra MPU-6050's gyroskop, er der blevet foretaget forsøg, hvor den data der er blevet målt, er blevet sammenlignet med den data, der fås fra en iPhone's gyroskop. Dette forsøg og tilhørende resultater bliver forklaret i følgende afsnit.

Materialeliste

Arduino, (Arduino UNO)	Hjul, (Cykelhjul)
Gyroskop, (MPU-6050)	SparkFun OpenLog
Tape, (Maler tape)	micro SD 2GB
iPhone med SensorLog, (iPhone-5)	

Opstilling af forsøg

Arduino'en skal anvendes som en mikrocontroller, der styrer gyroskopet, den er forbundet til. Den skal gemme data og holde styr på, at sample raten er uændret under forsøget. Gyroskopet skal anvendes til at måle vinkelhastigheden, hvormed hjulet roterer. Hjulet og tapen skal bruges til at montering af apparaturet, så det er muligt at have en kontrolleret rotation. iPhone'en skal bruges, så man har noget supplerende data, hvorved det er muligt at sammenligne iPhone'ens og gyroskopets data og se om de beskriver samme bevægelse.

Fejkilder

Der er en del fejkilder ved forsøget, der er blevet foretaget. Derfor er der blevet taget nogle forbehold:

MPU-6050 var sat til dynamikområdet $FS_SEL = 0$, hvilket gør, at gyroskopet kan give fejlagtige målinger, hvis vinkelhastigheder overskridt $250 \frac{\circ}{s}$. Det betyder, at hvis rotationen af hjulet er højere end $250 \frac{\circ}{s}$, vil gyroskopet ikke være i stand til at opfange ændringer i signalet. Derfor blev rotationerne talt op for at være sikker på at rotationshastigheden ikke oversteg $\frac{250 \text{ omgange}}{360 \text{ s}}$. Da der ikke var adgang til udstyr, der kunne måle antal rotationer, vil dette være en fejkilde. Dog hvis dette var tilfældet, kan det ses ud fra resultaterne, da resultaterne vil flatline ved enten 32687 eller -32687.

Når iPhone'en og gyroskopet bliver monteret på hjulet, skal den akse, man vil måle på, være ortogonal med hjulet, ellers vil de to andre akser måle noget

af vinkelhastigheden. Da det i praksis ikke er muligt at lave en ortogonal opstilling, vil dette være en fejlkilde.

De fejlkilder, der forekommer, når man anvender bevægelsessensorer vil naturligvis blive introduceret i systemet, se 2.2.2

Metode

Det første skridt i forsøget, var at montere iPhone'en og gyroskop-systemet. Her skal man være opmærksom på, at enhederne så vidt muligt skal være ortogonale med hjulet. Dernæst skal gyroskopet og iPhone'en kalibreres, for at minimere den fejl der kommer, når man anvender bevægelsessensorer. Nu kan selve testen gå i gang. Gyroskopet i forbindelse med loggeren og appen SensorLog startes. For at synkronisere det data der fås, skal enhederne startes på samme tidspunkt.

Nu kan man tilføre kraft til hulet, så det begynder at rotere. For at være sikker på at vinkel hastighed ikke overstiger $\frac{250 \text{ omgange}}{360 \text{ s}}$, skal omgangene pr. sekunder tælles, hvis antallet overstiger 1 rotation pr. sekund, skal forsøget startes forfra. Når hjulets rotation sænkes til omkring $0 \frac{\text{omgange}}{\text{s}}$, stoppes hjulet og dataene kan læses. Hvis resultaterne på noget tidspunkt opnår et maksimum på $2^{15} - 1$ eller et minimum på $-(2^{15})$ skal forsøgene gentages, da man ikke kan vide om der er resultater med større vinkelhastighed. Hvis de tidligere skridt er opfyldt, er forsøget færdigt, og datene kan læses. Se figur 3.1 for illustration af forsøg. Hvis omløbsretning er med uret som vist på figur 3.1, er de værdier man får fra gyroskopet negative og modsat hvis omløbsretningen er mod uret, vil man få positive værdier.



Figur 3.1: Forsøgsopstilling på cykelhjul, hvorpå Arduino og iPhone er spændt fast.

Resultater

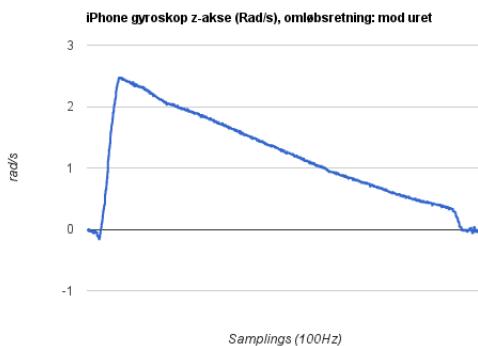
De data, der fås fra chippen MPU-6050 kommer med enheden: LSB per $\frac{\circ}{s}$. De data som kommer fra SensorLog er angivet i enheden $\frac{rad}{s}$, og da enhederne er forskellige er det svært at sammenligne dem. Derfor skal der foretages nogle omregninger. For MPU-6050'en gælder der at $FS_SEL = 0$, hvilket betyder at den følsomme akse mäter med $131\ LSB$ per $\frac{\circ}{s}$ [InvenSense, 2013]. Det betyder at man kan omregne enhederne med formel 3.1.

$$\frac{LSB}{131} = \frac{\circ}{s} \quad (3.1)$$

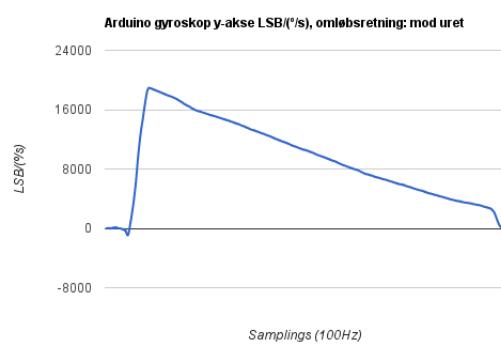
For at få den data der fås fra iPhone'en over i samme enhed, kan formel 3.2 benyttes.

$$\frac{rad}{s} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{\circ}{s} \quad (3.2)$$

På figur 3.2 og 3.3 ses det, at omløbsretningen er mod uret. Dette kan ses ved, at værdierne er markant større end 0. Det kan ses ud fra graferne, at de afbilleder samme bevægelse, men da graferne ikke har samme enheder, kan man ikke sige om de indtager samme værdier til samme tidspunkter. Derfor skal graferne bearbejdes gennem formlerne 3.1 og 3.2. Nu er graferne blevet bearbejdet, se 3.4, og deres

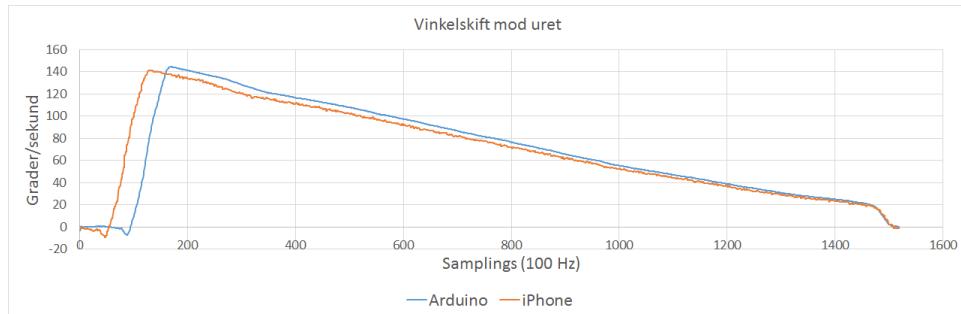


Figur 3.2: iPhone rådata.

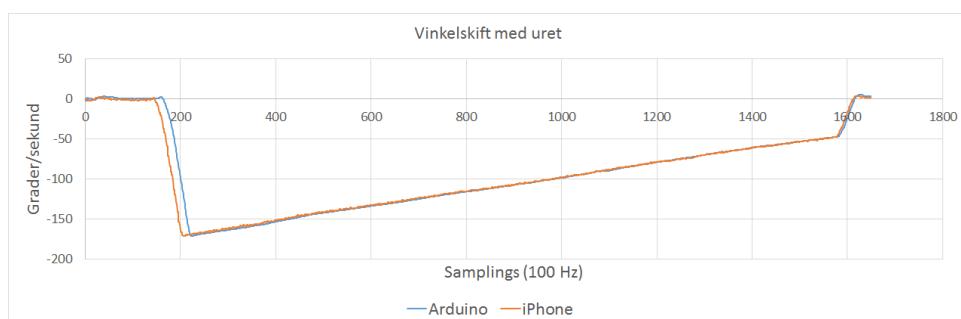


Figur 3.3: Arduino rådata.

enheder er $\frac{\circ}{s}$. Det er nu muligt at samle graferne i et plot, og se om de beskriver samme bevægelse. Det ses, at begge grafer har et maksimum lidt under $150\frac{\circ}{s}$. Det betyder, at hjulet skulle rotere med en hastighed på lidt under 42% af en fuld rotation per sekund. Den maksimale vinkelhastighed Arduino'en mäter er $144,5\frac{\circ}{s}$, og den maksimale vinkelhastighed for iPhone'en er $141,6\frac{\circ}{s}$. Denne forskel kan forklaries ved, at gyroskoperne ikke mäter med samme dynamikområde og gennem de fejlkilder, som er gængse for bevægelsessensorer, se 2.2.2.



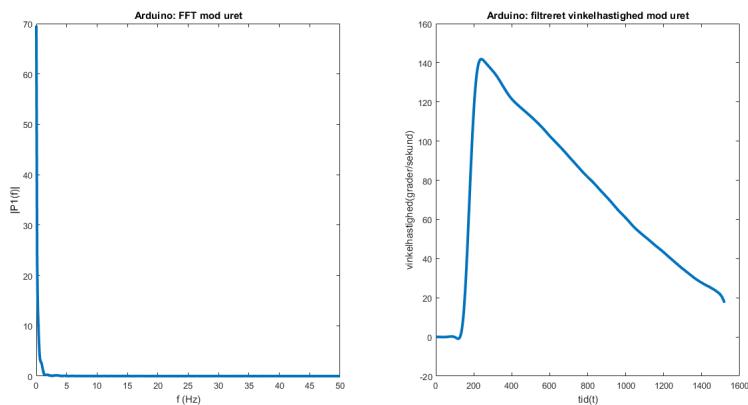
Figur 3.4: Bearbejdede grafer med data fra rotation med uret. Data fra Arduino er blevet resamplet i MATLAB, således de to datasæt er mere sammenlignelige.



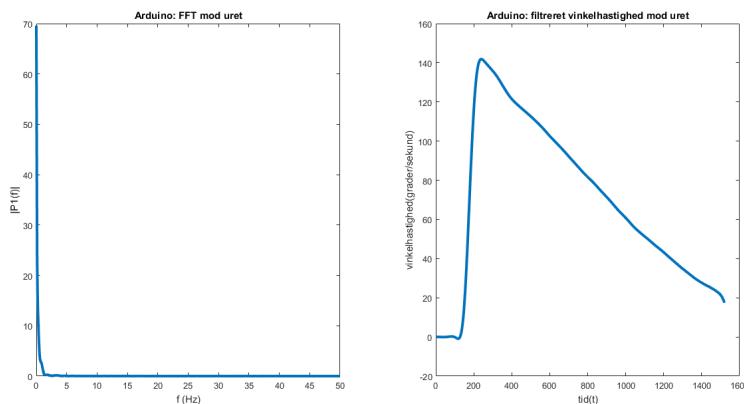
Figur 3.5: Bearbejdede grafer med data fra rotation mod uret. Data fra Arduino er blevet resamplet i MATLAB, således de to datasæt er mere sammenlignelige.

For at bekræfte, at vinkelhastigheden bliver negativ, hvis hjulet bliver roteret med uret, blev der også foretaget forsøg med rotation med uret. Dataene ses på figur 3.5, hvor det ses, at bevægelsen tydeligvis går med uret, da vinkelhastigheden er negativ. Denne rotation foregik hurtigere, da dens højeste fart ligger på lidt under $180\frac{\circ}{s}$.

Det ses generelt på graferne, at der er meget højfrekvent støj. Derfor vil det være relevant at anvende et lavpasfilter på datene. Det vil fjerne den værste støj fra signalet. På figur 3.6 og 3.7 ses signalet i frekvensdomænet til venstre, og ud fra frekvensdomænet kan det konkluderes, at der skal bruges et lavpasfilter, da amplituden er markant højest ved de lave frekvenser. På grafen til højre er et lavpasfilter anvendt på den originale graf, og der er tydeligt mindre højfrekvent støj.



Figur 3.6: iPhone lavpasfilter.



Figur 3.7: Arduino lavpasfilter.

Delkonklusion

Hvis det antages at iPhone'ens gyroskop er en god supplerende kilde, kan der konkluderes, at den data der fås fra gyroskopet i MPU-6050'erne er troværdig. Da det generelt ses, at der er en del højfrekvent støj i gyroskopets data, vil det være relevant at anvende et lavpasfilter i projektet.

3.2 Verificering af accelerometer

For at verificere de målinger, som accelerometrene i MPU-6050 giver, er der udført forsøg hvis resultater sammenlignes med kontroldata fra et accelerometer i en iPhone, som udsættes for samme forsøg. Forsøgene har desuden til formål at afdække hvilket filter, der bør bruges til filtrering af data som indsamles med Arduino. Disse forsøg og resultaterne herfra forklares i dette afsnit. Det antages, at accelerometeret i iPhone er et godt et af slagsen og at det derfor fungerer udmærket som kontrol.

Der blev udført to sæt af forsøg - ét med Arduino og iPhone i hånden og ét på en luftpudeskinne. Accelerometrene blev kalibret umiddelbart inden forsøgene blev påbegyndt.

3.2.1 Forsøg i hånden

Dette forsøg involverede en Arduino med MPU-6050 og en iPhone med SensorLog, som skiftevis blev ført frem og tilbage i luften med hånden, således de to oplevede skiftende accelerationer.

Materialeliste

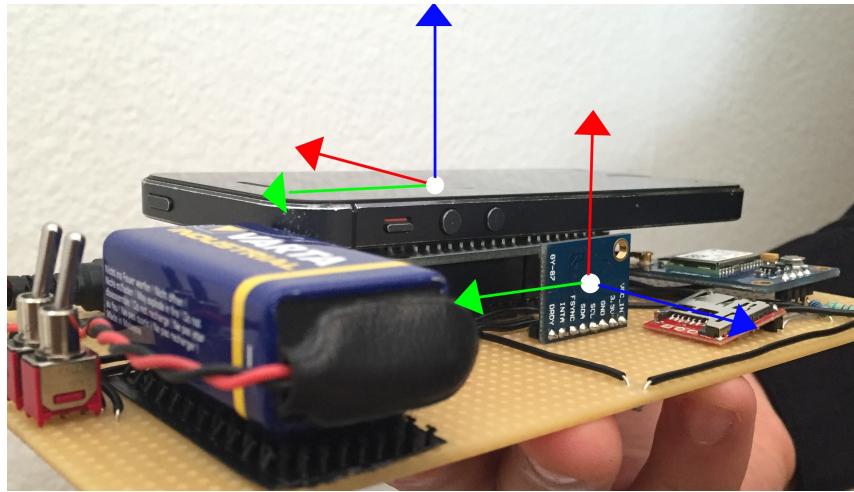
Arduino (Arduino UNO)	iPhone 5 med SensorLog (20 Hz)
MPU6050 (20 Hz, sensitivitet $\pm 2\text{g}$)	SparkFun OpenLog
A4-papir	Micro SD 2GB

Metode

Med Arduino og tilkoblet MPU-6050 i hånden blev iPhone lagt oven på, således dennes accelerometer-akser var parallelle med MPU-6050's akser. A4-papir lå mellem iPhone og Arduino for ikke at ridse iPhone. Arduino og iPhone's loggere blev startet på samme tid og konfigurationen blev med højre hånd ført frem og tilbage (henholdsvis væk og mod kroppen) fire gange. Målerne blev slukket.

Dette forsøg blev lavet med hurtig frem- og tilbageførsel og med langsom frem-

og tilbageførsel. Det hurtige forsøg tog ca. 7 sekunder, mens det langsomme forsøg tog ca. 15 sekunder. Forsøgsopstillingen kan ses på figur 3.8.



Figur 3.8: Konfiguration af Arduino, iPhone og OpenLog, som førtes frem og tilbage med hånden. Akserne for iPhone og MPU-6050 er vist med farvede akser - x er rød, y er grøn og z er blå.

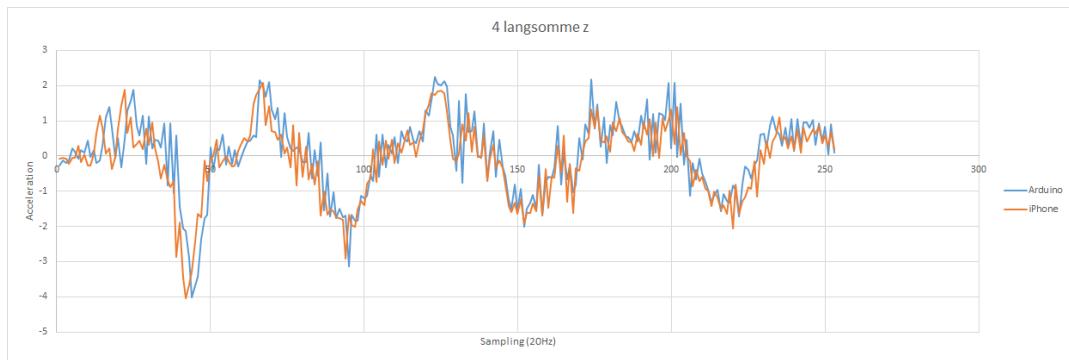
Fejlkilder

- Da det er svært at lave konsistente og ens bevægelser med armen, er det usandsynligt, at bevægelserne og forsøgene har været ens.
- Konfigurationen blev højst sandsynligt ikke holdt horisontalt i luften, og altså har det ikke kun været ét accelerometer, som mælte acceleration, men nærmere en kombination af alle tre accelerometre i begge IMU'er.
- Fejlkilderne beskrevet i afsnit 2.2.2 kan selvfølgelig også optræde her.

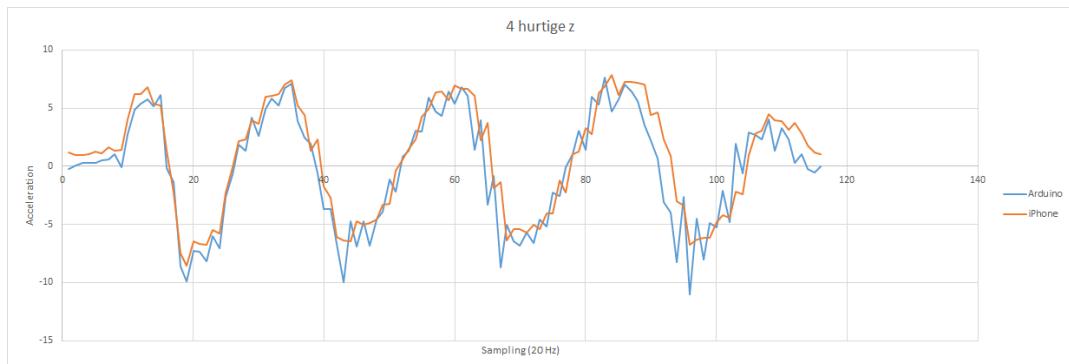
Disse fejlkilder kan alle forårsage fejl i målingerne, men der regnes ikke med, at disse har nogen stor betydning for den endelige konklusion.

Resultater

Herunder vises resultaterne fra de to forsøg. Da det data der kommer ud af MPU-6050 er i enheden $\frac{LSB}{g}$, skal man dividere med 16.384 og gange med $9,82 \frac{m}{s^2}$, for at få enheden $\frac{m}{s^2}$. De resterende data og grafer findes i bilaget. På figur 3.9 ses graferne for målingerne af acceleration fra Arduino og iPhone. I samme stil ses graferne fra de hurtige svingninger på figur 3.10.



Figur 3.9: Graf for fire langsomme svingninger med hånden. Målinger er foretaget med en sample rate på 20 Hz. Langs y-aksen ses acceleration i $\frac{m}{s^2}$.



Figur 3.10: Graf for fire hurtige svingninger med hånden. Målinger er foretaget med en sample rate på 20 Hz. Langs y-aksen ses acceleration i $\frac{m}{s^2}$.

3.2.2 Forsøg med luftpudeskinne

Dette forsøg involverede en luftpudeskinne med et køretøj til skinnen, som Arduino og MPU-6050 samt iPhone med SensorLog blev spændt fast på. Køretøjet med disse enheder spændt fast, kunne dermed bevæge sig langs skinnen, og dermed kunne der isoleret testes acceleration langs én akse.

Materialeliste

Forsøgsopstillingen kan ses på figur 3.11. Køretøjet med Arduino og iPhone ses desuden på figur 3.12 og 3.13.

Luftpudeskinne

Køretøj

Malertape

Arduino, (Arduino UNO)

MPU-6050 (100 Hz, dynamikområde $\pm 2g$)

iPhone 5 med SensorLog (100 Hz)

Støvsuger

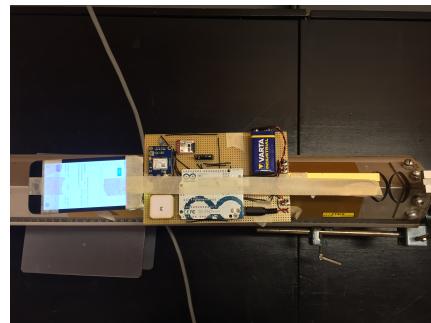
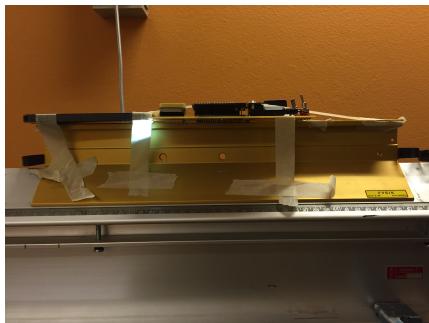
iPhone med Tracker

SparkFun OpenLog

Micro SD 2GB



Figur 3.11: Forsøgsopstilling på luftpudeskinne med køretøj, hvorpå Arduino og iPhone er spændt fast.



Figur 3.12: Køretøj med Arduino og iPhone set fra **Figur 3.13:** Køretøj med Arduino og iPhone set fra siden.
oven.

Fejlkilder

Under forsøget er der en række fejlkilder, som her gøres opmærksom på.

- Arduino og iPhone er muligvis ikke monteret på køretøjet således de er parallelle med skinnen.
- Grundet ujævne huller i skinnen støder køretøjet nogle gange på skinnen og bremser derfor meget.
- Det viser sig at Arduino og iPhone ikke måler med samme samplerate - dette kan introducere forskelle mellem de to enheder målinger.
- Fejkilderne beskrevet i afsnit 2.2.2 kan selvfølgelig også optræde her.

Disse fejkilder kan alle forårsage fejl i målingerne, men der regnes ikke med, at disse har nogen betydning for den endelige konklusion.

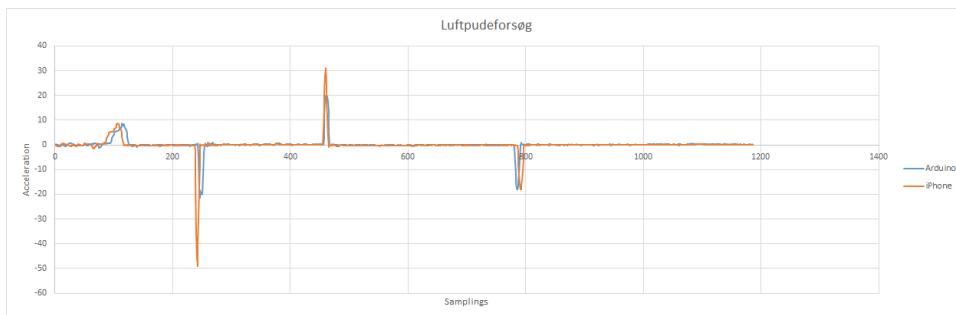
Metode

Forsøget blev udført ved at køretøjet blev placeret i den ene ende af skinnen og Arduino og iPhone blev tændt på samme tid. Efter 2 sekunder, hvor Arduino fik tid til at starte programmet, blev køretøjet skubbet kraftigt mod den modsatte ende. Da det nåede enden skiftede det retning og fortsatte tilbage til startpunktet. Køretøjet fik lov til at køre helt til det stoppede hvorefter Arduino og iPhone blev slukket.

Resultater

Herunder ses resultaterne fra forsøget med luftpudeskinne.

På figur 3.14 ses den målte acceleration, illustreret ved to grafer i samme billede. Bemærk, at Arduino mäter en lavere acceleration i de to første spidser på grafen end iPhone gør. Dette skyldes, at accelerationen under sammenstødet i enden af luftpudeskinnen overskrider $2g$, og MPU-6050 er derfor ikke i stand til at måle dette, da dets dynamikområde er begrænset til $\pm 2g$.



Figur 3.14: Grafer for den målte acceleration fra Arduino og iPhone, henholdsvis blå og orange. Langs y-aksen ses acceleration i $\frac{m}{s^2}$.

Det ses, at Arduino og iPhone ikke måler med samme samplerate - Arduino måler hurtigere. Dette er til trods for at de begge er indstillet til at måle med 100 Hz. Det er dog værd at bemærke, at graferne næsten er ens, hvis blot de skaleres. Det vurderes at målingerne ligner hinanden meget.

Konklusion

Hvis der ses bort fra forskydningen af målingerne fra Arduino, iPhone og MPU-6050's dynamikområde på $\pm 2g$, så fås der meget lignende målinger ved begge udførte forsøg. Hvis det tilmed antages, at accelerometrene i iPhone er en god supplerende kilde, kan det konkluderes, at accelerometret i MPU-6050 fungerer udmærket, og at vi kan stole på dets målinger så længe det ikke udsættes for accelerationer uden for dets dynamikområde.

En anden betydningsfuld observation omhandler mængden af støj. Det ses, at resultaterne er støjfyldte - dette er værd at tage i betragtning, når data skal filtreres.

4 | Forsøg

I de foregående kapitler blev den nødvendige teori bag Arduinoens sensorer, samt matematikken som benyttes til at behandle dataene fra disse sensorer, forklaret. I dette kapitel opstilles og udføres forsøg for at kunne skelne et uregelmæssigt bevægelsesmønster, fald, fra et normalt bevægelsesmønster. Derfor er det nødvendigt at vide hvordan et normalt bevægelsesmønster ser ud. Endvidere undersøges hvorvidt GPS-modulet kan angive en tilstrækkelig nøjagtig position, når et fald er sket. Hvert forsøg inkluderer præsentation af rådata samt en databehandling. Alle forsøg med IMU er lavet tre gange for to testpersoner, men i dette afsnit vises kun ét af forsøgene fra én af testpersonerne - resten kan findes i bilag 7.1. Forsøgene opdeles i forsøg med IMU og GPS

IMU

Med IMU undersøges følgende bevægelsesmønstre

Fald

Her ses på hvordan fald ser ud. Resultaterne fra disse forsøg skal senere bruges som referencesignal for at kunne skelne normale bevægelsesmønstre fra fald.

Gang og løb

Her ses på hvordan gang og løb ser ud, og om det kan skelnes fra løb og fald

Buk

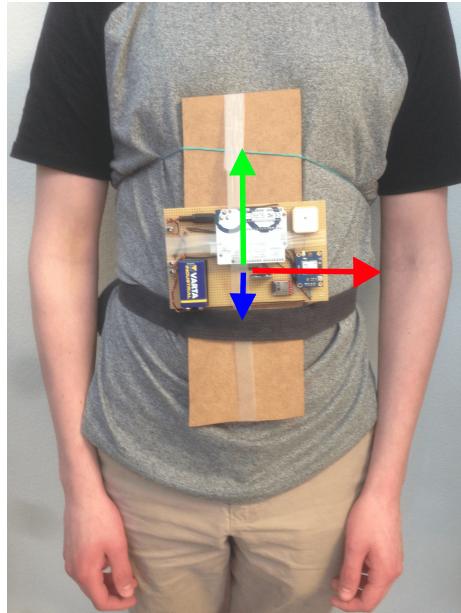
Her ses på hvordan buk ser ud, og om det er en gyldig faktor, som der skal tages hensyn til i forhold til fald.

Hop

Her ses på hvordan hop ser ud, og om det kan skelnes fra fald.

Forsøgene udføres tre gange på to forskellige forsøgspersoner. Formålet med disse forsøg vil være at klarlægge, hvordan et normalt bevægelsesmønster ser ud ved målinger med IMU. Et normalt bevægelsesmønster regnes her for at være almindelige bevægelser, som ikke er til skade for den bevægende person - altså alt andet end et fald.

Arduinoen tapes i alle forsøg med IMU fast på et bræt, og brættet spændes derafter fast på testpersonen med bælte og snor. Denne opstilling ses på figur 4.1. Accelerometrenes dynamikområde vil under alle forsøg være sat til $\pm 4g$, svarende til $\pm 39.28 \frac{m}{s^2}$. Inden hvert forsøg blev sensorerne kalibreret ved en orientering, hvor z-aksen var normal med Jorden.



Figur 4.1: Montering af Arduino og dens sensorer på en testperson. x-, y-, og z-akserne er henholdsvis blå, rød og grøn.

Samplerate

Forsøgene hop og baglæns fald blev målt med en samplerate på 50Hz, men da de andre forsøg blev målt med 100Hz, og resultaterne skal sammenlignes gennem en korrelationsanalyse, blev hop og baglæns fald opsamplet gennem MATLAB. Grunden til at det ikke giver mening at sammenligne to signaler med korrelation, som er opsamlet ved forskellige samplerater er, at ved 100Hz ville der være det dobbelte antal samples til at beskrive samme bevægelse, hvilket vil resultere i en meningslös sammenligning.

Valg af filter

Som forklaret i afsnit 3 vil der blive brugt et lavpasfilter til at frafiltrere højfrekvent støj, som optræder i forsøgsdata. Filteret vælges til at have filterorden $M = 100$ med normaliseret skæringsfrekvens $\omega_0 = 0,2\pi \frac{\text{rad}}{\text{sample}}$, svarende til en skæringsfrekvens i på 20Hz. Dette vil være fælles for alle forsøgene. Valget af netop dette filter er foretaget gennem en vurdering af de forskellige frekvensresponser, fra de forskellige bevægelser. Der blev foretaget empiriske forsøg for at se hvilke frekvenser, der ville beskrive bevægelsen bedst ved færrest frekvenser. Resultatet var, at $0,2\pi \frac{\text{rad}}{\text{sample}}$, som skæringsfrekvens, beskrev signalerne godt i forhold til projektets anvendelser, se bilag 7.1 for de forskellige frekvensresponser.

GPS

Med GPS undersøges dens nøjagtighed ved følgende lokationer

Ikke tætbebygget område

Her vil der blive set, hvor godt koordinaterne givet ved GPS'en passer til den givet tilbagelagte rute i et ikke tætbebygget område.

Tætbebygget område

Her vil der blive set, hvor godt koordinaterne givet ved GPS'en passer til den givet tilbagelagte rute i et tætbebygget område.

Indendørs

Her vil der blive set, hvor godt GPS'en kan sige, hvor man befinner sig indendørs, mens man står stille.

Materialeliste for IMU

Materialer brugt til forsøgene med IMU inkluderer

- Arduino
- MPU-6050
- SparkFun OpenLog
- Micro SD
- Tape
- 1 bælte
- Snor
- Træplade
- Batteri, 9V

Materialeliste for GPS

Materialer brugt til forsøgene med GPS inkluderer:

- Arduino (Arduino UNO) - Indholder kode som giver output med 0,2Hz i længde- og breddegrader med enhed DD samt antallet af tilgængelige satellitter i det givne datapunkt. Formatet er som følgende: "breddegrader, længdegrader, antal satellitter" f.eks. 57,057182 , 9,897404 , Sat: 9
- GPS (GY-GPS6MV2)
- SparkFun OpenLog (DEV-09530)
- Micro SD 4GB
- Micro SD til SD adapter

4.1 Fald forsøg

I dette afsnit opstilles og udføres forsøg som skal klarlægge, hvordan forskellige falds accelerationer ser ud.

Typer af fald, som skal testes, er følgende:

- Baglæns fald
- Forlæns fald med rotation

Det primære formål med disse forsøg vil være at måle udsving i acceleration som følge af et fald. Dette vil give grundlag for at kunne skelne fald fra et normalt bevægelsesmønster. Da det imidlertid ikke er realistisk, at personer falder forlæns eller baglæns, som et bræt der vælter, vil et forlæns fald hvorimens testpersonerne roterer blive udført. Der kan her med fordel, også undersøges hvor stor en acceleration, der sker under sammenstød med jorden efter et fuldendt fald. Denne må nødvendigvis være høj og kan derfor også hjælpe med at registrere fald.

Opstilling af forsøg

Arduinoen blev først indstillet til en samplerate på 50 Hz og accelerometrenes og gyroskopernes dynamikområder blev indstillet til henholdsvis $\pm 4g$ og $\pm 250 \frac{\circ}{s}$. Disse indstillinger gjaldt for forsøgene med baglæns fald. For roterende forlæns fald var indstillingerne 100 Hz og $500 \frac{\circ}{s}$. Forklaring følger i afsnit 4.5.

Fremgangsmåde

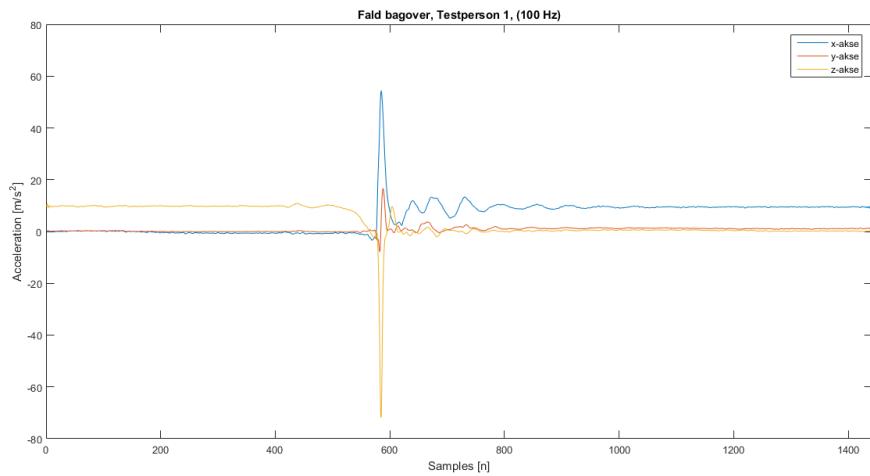
Efter Arduinoen blev tændt, gik testpersonen op på en Airtrack. Testpersonen udførte derefter følgende bevægelser

- Arduinoens sensorer blev tændt
- Efter 3 sekunder tændes loggeren
- 5 sekunders stilleståen
- Fald udføres (enten baglæns som et bræt eller forlæns med samtidig rotation således der landes på ryggen)
- Liggende position på ryggen indtil 15 sekunder sammenlagt er passeret, hvorefter Arduinoen slukkes

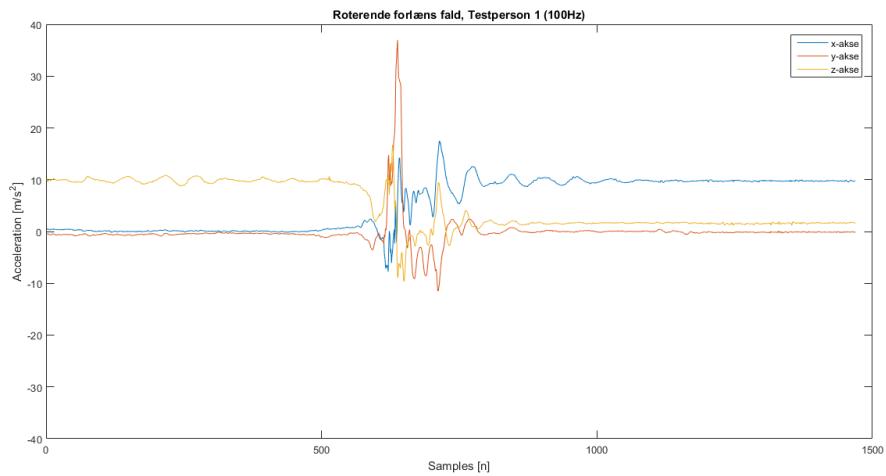
Forsøgene for både fald bagover og forlæns fald med rotation, blev gentaget 3 gange af hver testperson. Forsøgene for baglæns fald blev logget med en frekvens på 50 Hz mens forsøgene med roterende forlæns fald blev logget med 100 Hz.

Resultater

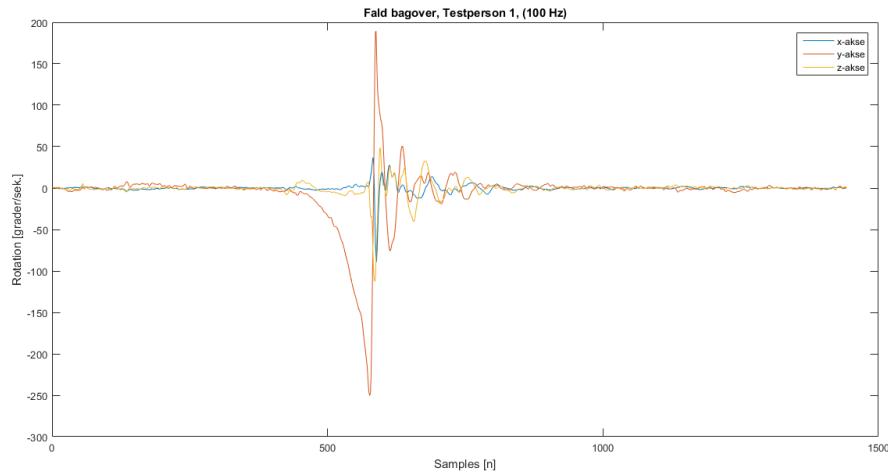
Da de tre gentagelser af disse forsøg ligner hinanden til næsten identisk grad og resultaterne for testperson 1 og 2 ligner hinanden og illustrerer samme princip vises kun ét forsøg for testperson 1. Dette vil være nok for forståelsen af forsøgene og den efterfølgende databehandling. På figur 4.2 ses rå accelerationsdata for testperson 1 fra et forsøg med baglæns fald og på figur 4.3 ses rå accelerationsdata fra testperson 1 for et forsøg med roterende forlæns fald. På figur 4.4 ses desuden rå gyroskopdata fra testperson 1 for baglæns fald.



Figur 4.2: Rå accelerationsdata fra baglæns fald, testperson 1



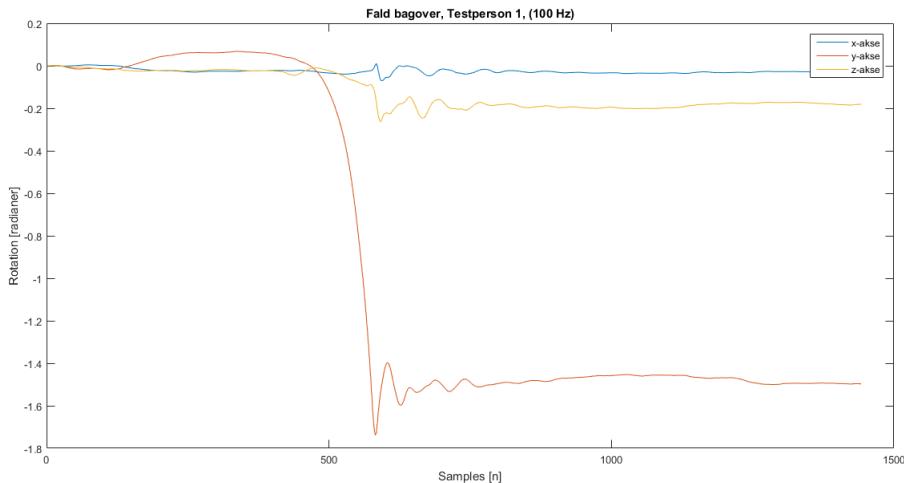
Figur 4.3: Rå accelerationsdata fra roterende forlæns fald, testperson 1



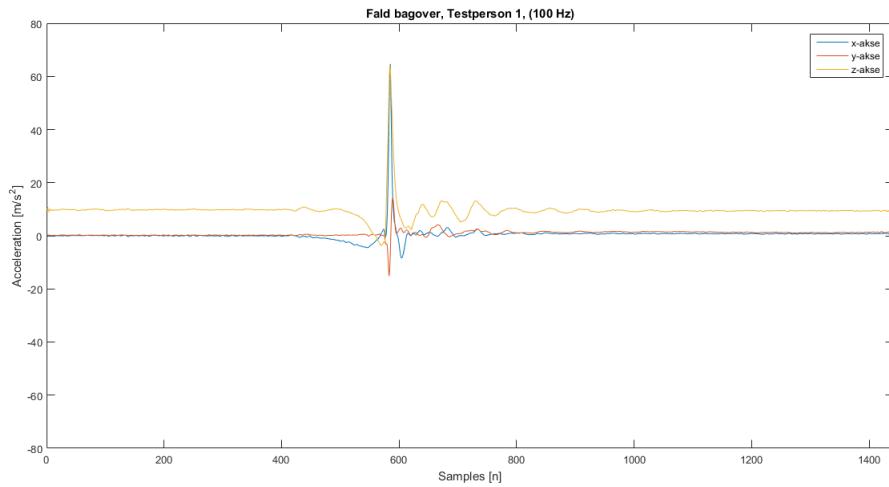
Figur 4.4: Rå gyroskopdata fra baglæns fald, testperson 1

Databehandling

Databehandlingen inkluderer rotation af rådata med rotationsmatricen introduceret i afsnit 2.4.1 samt filtrering med et lavpasfilter som introduceret i afsnit 2.5.1. Til rotationsmatricen skal bruges den samlede vinkelændring til hvert sample i radianer. Denne opnås gennem numerisk integration med Simpsons regel som forklaret i afsnit 2.4.3 og de integrerede gyroskopdata ses på figur 4.5. Med vinkelændringer roteres accelerationerne - på figur 4.6 ses de roterede accelerationer fra baglæns fald og på figur 4.7 ses de roterede accelerationer fra forlæns fald.



Figur 4.5: Numerisk integrerede gyroskopmålinger for testperson 1 fra forsøget med baglæns fald

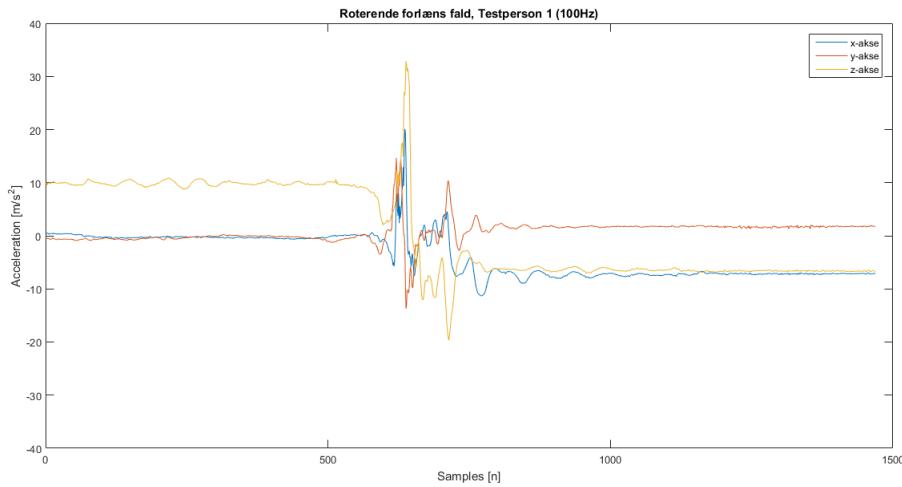


Figur 4.6: Data fra baglæns fald med testperson 1 roteret med rotationsmatricen introduceret i afsnit 2.4.1.

På figur 4.5 ses det, at vinkelændringen i radianer omkring y-aksen, som er akseen, der roteres omkring under et baglæns fald, går fra 0 til $-1,4981$. Dette er en kvart omgang i radianer og passer udmærket med, at der under faldet bevæges fra stående til liggende position. Samtidig sker der ikke meget ændring omkring de resterende akser (x og z), hvilket passer fint med, at der kun skal foregå rotation omkring én akse. Gyroskopernes målinger må altså siges at være fornuftige, og den numeriske integration fungerer som den skal.

Det ses på figur 4.6, at accelerometret, som mäter acceleration i z-aksens retning, i starten mäter en egenacceleration på 1g. Denne ændrer sig, da der sker et fald, men stabiliserer sig omkring 1g igen efter faldet, selvom personen, som udstyret er monteret på, befinner sig i liggende position.

Det ses dog på figur 4.7, at z-aksen ikke stabiliserer sig omkring 1g efter faldet, som den skulle. De andre forsøgsdata giver lignende resultater, og det konkluderes, at rotationen er fejlagtig.



Figur 4.7: Data fra roterende forlæns fald med testperson 1 roteret med rotationsmatricen introduceret i afsnit 2.4.1.

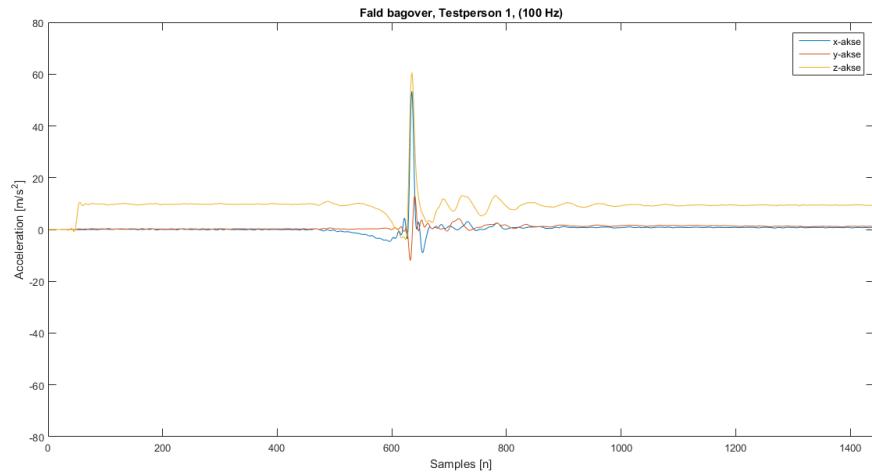
Vurdering og løsning uden rotation

Da accelerationerne roteret ved rotationsmatricen introduceret i afsnit 2.4.1 ikke stemte overens med, hvad der var forventet, gav det anledning til at se kritisk på rotationsmatricen. Ved nærmere undersøgelse af, hvorledes et legeme roteres omkring tre forskellige akser simultant, viser det sig, at dette ikke foregår, som det var forventet med den rotationsmatrix, som benyttes her i projektet - den rotation, som opnås med denne, er fejlagtig. Det er dog værd at bemærke, at rotation omkring en enkelt akse giver korrekt rotation, hvilket kunne lede én til at tro, at de tre rotationer (omkring x-, y- og z-aksen) kan beregnes som værende på hinanden følgende. Dette er dog ikke tilfældet for de rotationer, der arbejdes med i dette projekt, da rotationerne foregår simultant, og denne løsning må altså forkastes.

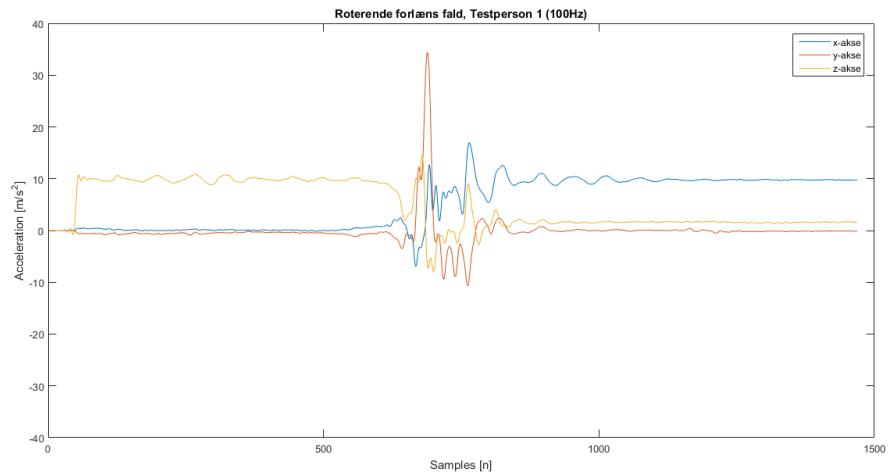
Grundet disse resultater, besluttes det, at der i dette projekt ikke vil blive foretaget en rotation af målte accelerationer omkring tre akser. I stedet for at registrere et fald blot ved at kigge på acceleration langs z-aksen efter en rotation med rotationsmatricen, bruges der en alternativ løsning, som bygger på idéen om, at et fald kan ses i form af udsving i acceleration på alle tre akser (x, y og z). Her vil teorien omhandlende korrelation, som forklaret i afsnit 2.4.7, blive benyttet til at lave korrelationsanalyse mellem et referencesignal og målte data. Med denne metode kan en samling målinger undersøges for eventuelle fællestræk med et referencesignal fra et fald. Denne metode er uafhængig af rotation af accelerationerne, og omgår derfor problemet med den manglende rotation. Korrelationsanalysen vil blive foretaget i det senere afsnit 4.5.1.

Den eneste databehandling, som vil foretages i de følgende forsøgsafsnit, er derfor

filtrering med et digitalt lavpasfilter. På figur 4.8 og 4.9 ses derfor filtreret data fra forsøgene med henholdsvis baglæns og roterende forlæns fald *uden* rotation med rotationsmatricen.



Figur 4.8: Data fra testperson 1 baglæns fald, filtreret med et lavpasfilter



Figur 4.9: Data fra testperson 1 roteret forlæns fald, filtreret med et lavpasfilter

4.2 Forsøg med gang og løb

For at kunne skelne mellem bevægelser, er der udført forsøg med gang og løb, for at kunne sammenligne bevægelserne relativt til fald.

Opstilling af forsøg

Arduinoen blev indstillet til en samplerate på 100 Hz og accelerometret blev indstillet til et dynamikområde på $\pm 4g$.

Fremgangsmåde

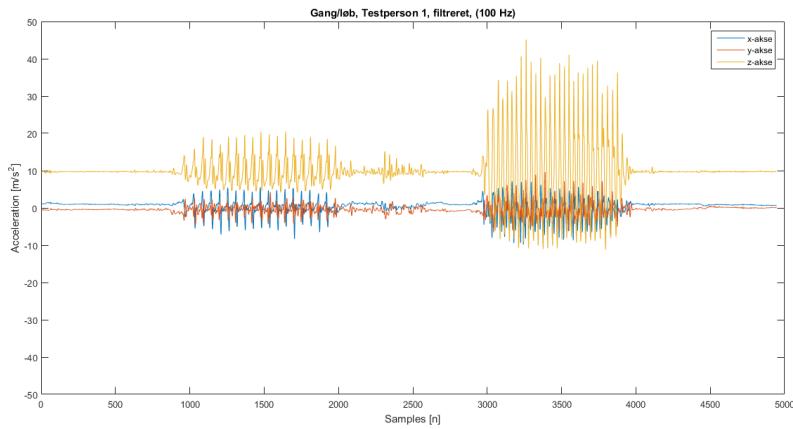
Et stopur blev tændt og følgende bevægelser blev udført af testpersonen:

- 10 sekunders stillestående
- 10 sekunders gang
- 10 sekunders stillestående
- 180° rotation omkring z-aksen
- 10 sekunders løb
- 10 sekunders stillestående, hvorefter Arduinoen slukkes

Testperson 2 havde samme fremgangsmåde, med undtagelse af 180° rotation.

Resultater

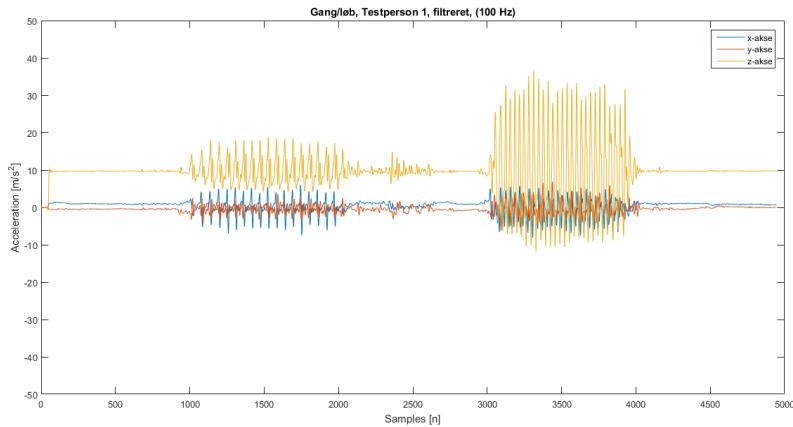
Da resultaterne for de to testpersoner ligner hinanden, præsenteres kun ét af data-sættene her. De resterende kan findes i bilag 7.1. På figur 4.10 ses data for et forsøg med gang og løb for testperson 1 - den data, som ligger i intervallet [1000; 2000], afbilder gang, og den data, som ligger i intervallet [3000; 4000], afbilder løb. Data i de to intervaller er tilnærmelsesvis periodiske, som det forventes af data fra gang og løb.



Figur 4.10: Rådata for testperson 1 fra forsøget med gang og løb

Databehandling

Der foretages en filtrering af det rå signal, resultaterne fra figur 4.10 filteres gennem et digitalt lavpasfilter, se afsnit 4 for valg af filter. Den filtrerede data ses på figur 4.11.



Figur 4.11: Data fra testperson 1 filtreret med et digitalt lavpasfilter af orden $M = 100$ og skæringsfrekvens på $0.2 \cdot \pi \frac{\text{rad}}{\text{sample}}$

4.3 Buk forsøg

For yderligere at skelne mellem bevægelser, er der udført forsøg med buk, for at kunne sammenligne disse i forhold til fald.

Opstilling af forsøg

Arduinoen blev indstillet til en samplerate på 100Hz og accelerometeret blev indstillet til et dynamikområde på $\pm 4g$.

Fremgangsmåde

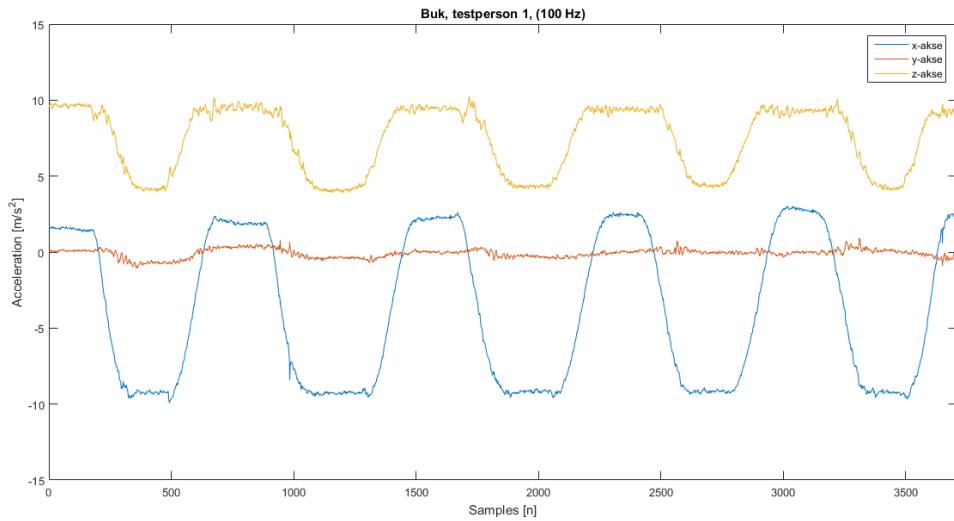
Arduinoen holdes mod maven og tændes, hvorefter udføres af testpersonen:

- 2 sekunder, stillestående i lodret positur
- Buk udføres, så hovedet befinner sig cirka vandret ud for livet
- 2 sekunder, stillestående
- Oprejsning til startposition

Denne proces blev gentaget, til der var foretaget fem buk per testperson. I forbindelse med denne forsøgsproces er det værd at notere at kun accelerationen på z- og x-aksen er af særlig relevans, da testpersonerne stod det samme sted og bukkede sig.

Resultater

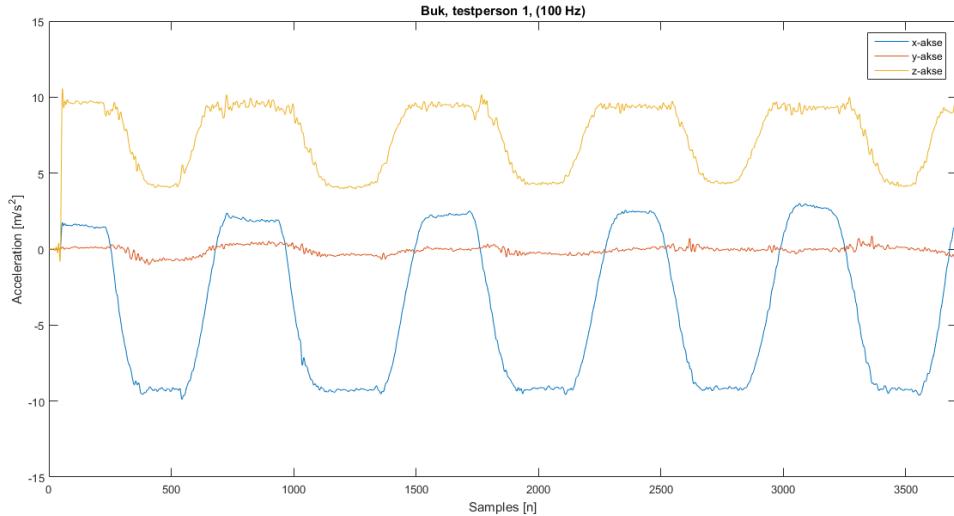
Da resultaterne for de to testpersoner ligner hinanden, vil der kun blive præsenteres 1 sæt data fra testperson 1. De resterende resultater kan findes i bilag 7.1. På figur 4.12 ses det rådata for test 1 med testperson 1. Da bevægelsen blev foretaget 5 gang, ses det ud fra de rådata at de er periodiske, inden for intervallet, som forventet.



Figur 4.12: Rådata fra bukforsøg testperson 1

Databehandling

Der foretages en filtrering af det rå signal, resultaterne fra figur 4.12 filtreres gennem et digitalt lavpasfilter, se afsnit 4 for valg af filter. Den filtrerede data ses på figur 4.13.



Figur 4.13: Data fra testperson 1 filtreret med et digitalt lavpasfilter af orden $M = 100$ og skæringsfrekvens på $0,2 \cdot \pi \frac{rad}{sample}$

4.4 Hop forsøg

Ved dette forsøg udførtes hop, for at se hvilken karakteristik accelerationsudsvingene har ved netop denne type bevægelse.

Opstilling af forsøg

Arduinoen blev indstillet til en samplerate på 50 Hz og kalibreret. Efter denne kalibrering blev Arduinoen tapet fast til en træplade og påført brystkassen på testpersonerne med belter.

Metode

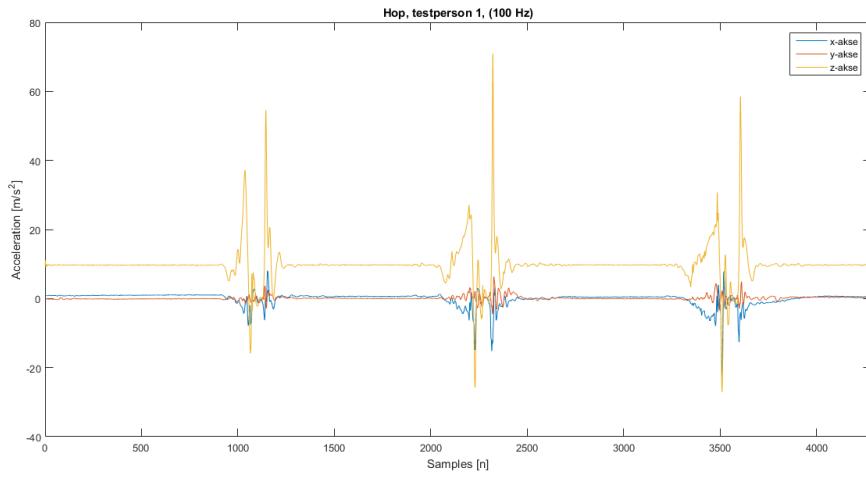
Arduinoen fastspændtes på maven på testperson 1, hvorefter følgende bevægelser udførtes af testpersonen:

- 5 sekunders stilleståen
- Moderat lodret hop
- 5 sekunders stilleståen
- Højt hop
- 5 sekunders stilleståen
- Maksimalt hop

Dette udførtes tre gange af testperson 1. Derefter blev bevægelerne gentaget af testperson 2.

Resultater

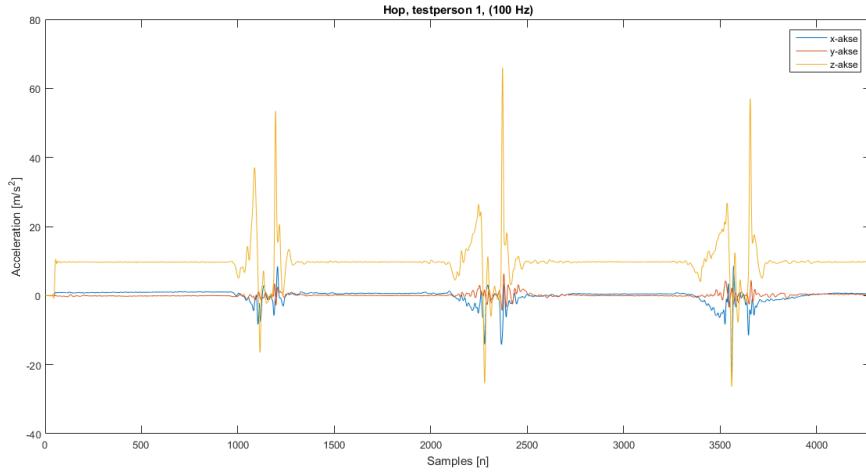
Da resultaterne for de to testpersoner ligner hinanden, præsenteres kun et af data-sættene her. De resterende kan findes i bilag 7.1. På figur 4.14 ses data for et forsøg med hop for testperson 1.



Figur 4.14: Rådata fra forsøg med hop for testperson 1

Databehandling

På figur 4.15 ses data fra figur 4.14 filtreret med et digitalt lavpasfilter, se afsnit 4 for valg af filter.



Figur 4.15: Filtreret data fra forsøg med hop for testperson 1

4.5 Fejlkilder IMU

Som følge af forsøgene beskrevet i tidligere afsnit findes en række overordnede fejlkilder, som beskrives her.

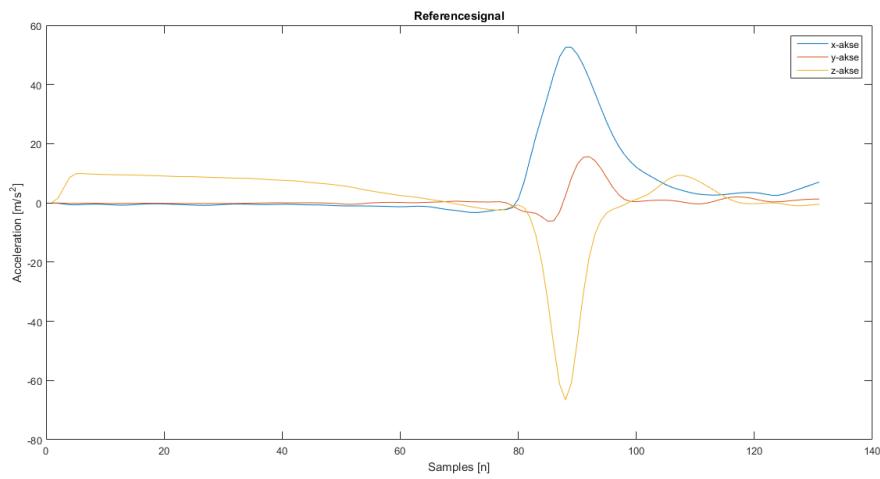
Fejlkilder ved IMU-forsøgene er som følgende

- Gengivelser for forsøgene har ikke kunnet udføres ens, da bevægelsesmønstre er svære at genskabe.
- Da arduinoens påmontering med snor og bælte på testpersonerne ikke har medført, at Arduinoen har sidset helt fast, har Arduinoens udgangspunkt på kroppen ikke være konstant - Arduinoens orientering er imidlertid blevet justeret ved øjemål for hver gentagelse under alle forøg gældende for IMU, således x- og y-akserne var parallelle med gulvet.
- Da arduinoens position ved start af forsøg ikke har kunnet holdes konstant, må det formodes at arduinoen ikke har stået lige lodret under alle forsøgene.

Som følge af udførelsen af forsøgene vedrørende forlæns fald med rotation blev der i de første forsøg logget med et dynamikområde på gyroskopet svarende til $250\frac{^{\circ}}{s}$. Dette viste sig imidlertid at være for langsomt, da forsøgspersonerne roterebevægelse hurtigere. Der blev derfor udført tre nye forsøg med hver testperson, hvor dynamikområdet blev indstillet til $500\frac{^{\circ}}{s}$. Ud over justeringen af gyroskopernes dynamikområder tages der forbehold til disse fejlkilder som følge af forsøgene.

4.5.1 Korrelationsanalyser

For at sammenligne resultaterne fra fald med de andre forsøg, og se det er muligt at registrere et fald, skal de forskellige signaler kunne sammenlignes - dette sker gennem en korrelationsanalyse, se tabel 4.2. Til sammenligning gennem korrelation, skal der bruges et referencesignal, derfor er faldet fra forsøg 1 baglænsfald fra testperson 1, defineret til at være referencesignalet. Dette referencesignal kan ses i figur 4.16.



Figur 4.16: Referencesignal, Baglænsfald forsøg 1, Testperson 1, lavpasfiltreret

Herunder præsenteres fem korrelationsanalyser for henholdsvis fald, gang, løb, buk og hop, se figur 4.17, 4.18, 4.19, 4.20 og 4.21. De er lavet gennem en korrelationsanalyse mellem signalet for bevægelserne og referencesignalet, hvor de respektive akser blev korreleret med hinanden, hvorefter korrelationskoefficienterne blev summeret og delt med tre for at finde gennemsnittet. Da referencesignalet kun beskriver bevægelsen for selve faldet, er længden af signalet, i disse tilfælde, kortere end det signal, der skal korreleres med. Derfor blev referencesignalet forskudt med én sample, hvorefter de blev korreleret igen. Denne proces blev gentaget på hele signalet.

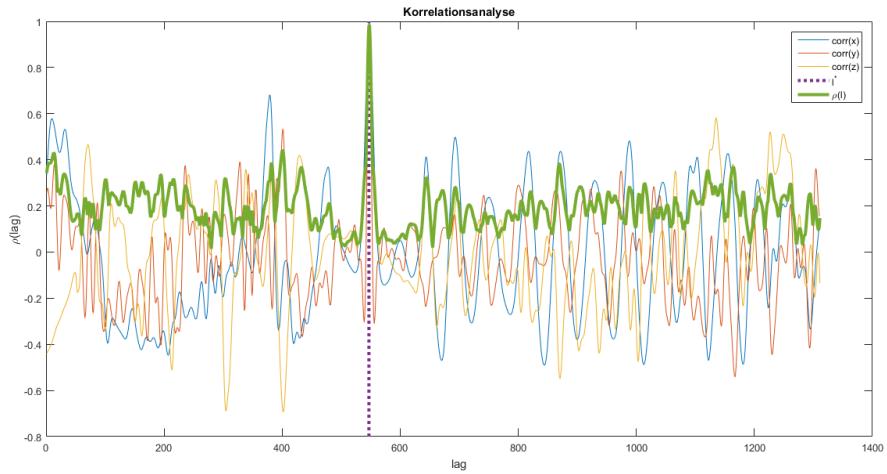
Når hele signalet er korreleret, og man har en vektor med de forskellige korrelationskoefficienter, kan den maksimale værdi findes, se (4.1). Den maksimale gennemsnitsværdi korrelationskoefficienterne indtager er ρ^* , mens l^* er det lag ρ^* findes ved. Der benyttes absolutværdier af ρ_x og ρ_y , da positive og negative målinger på disse akser svarer til ens bevægelsesmønstre i modsatte retninger. Dette gør sig ikke gældende for z-aksen. Intervallet I er 1 til længden af reference signalet l_r trukket fra signalets længde l_s og intervallet er altså $[1; l_s - l_r]$, for implementering se 7.1.

$$\begin{aligned} \rho^* &= \max_{l \in I} \left(\frac{|\rho_x(l)| + |\rho_y(l)| + \rho_z(l)}{3} \right) \\ l^* &= \arg \max_{l \in I} \left(\frac{|\rho_x(l)| + |\rho_y(l)| + \rho_z(l)}{3} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Hvor

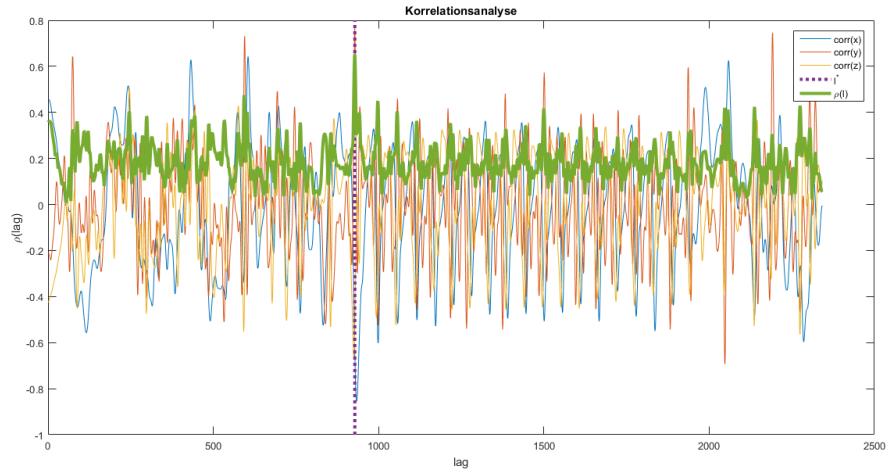
$$\rho_x(l) = \frac{\frac{1}{l_r} \sum_{n=0}^{l_r-1} (x[n+l] - \bar{x}_l) \cdot (r_x[n] - \bar{r})}{\sqrt{\frac{1}{l_r} \sum_{n=0}^{l_r-1} (x[n+l] - \bar{x}_l)^2 \cdot (r_x[n] - \bar{r})^2}} \quad (4.2)$$

Den maksimale gennemsnitskorrelation for x-, y- og z-aksen mellem fald og reference signalet, er givet ved $\rho^* = 1$ ved lag $l^* = 577$. Dette ses på figur 4.17, hvor den maksimale gennemsnitlige korrelation er omkring sample 600.



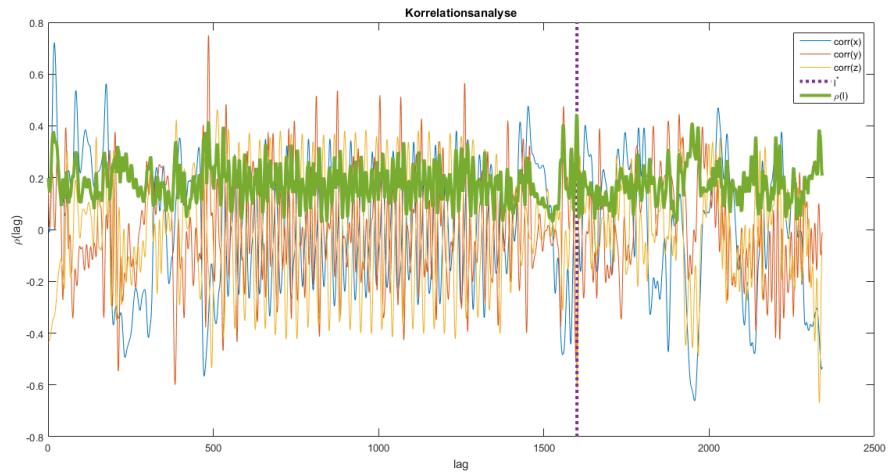
Figur 4.17: Korrelationsanalyse, baglæns testperson 1.

Den maksimale gennemsnitskorrelation for x-, y- og z-aksen mellem gang og reference signalet er givet ved $\rho^* = 0,7690$ ved lag $l^* = 930$. Det ses på figur 4.18, at ρ^* ligger ved sample 930.



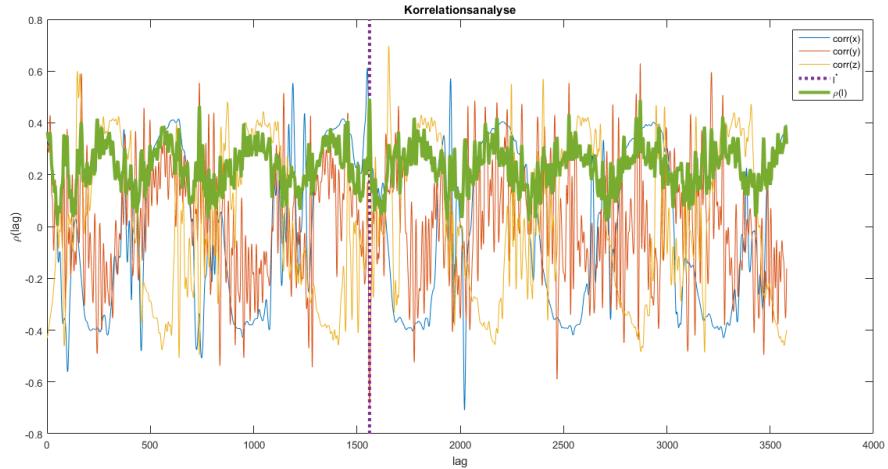
Figur 4.18: Korrelationanalyse, gang testperson 1.

Den maksimale gennemsnitskorrelation for x-, y- og z-aksen mellem løb og reference signalet er givet ved $\rho^* = 0,5816$ ved lag $l^* = 1602$. Det ses på figur 4.19, at ρ^* ligger ved sample 1600.



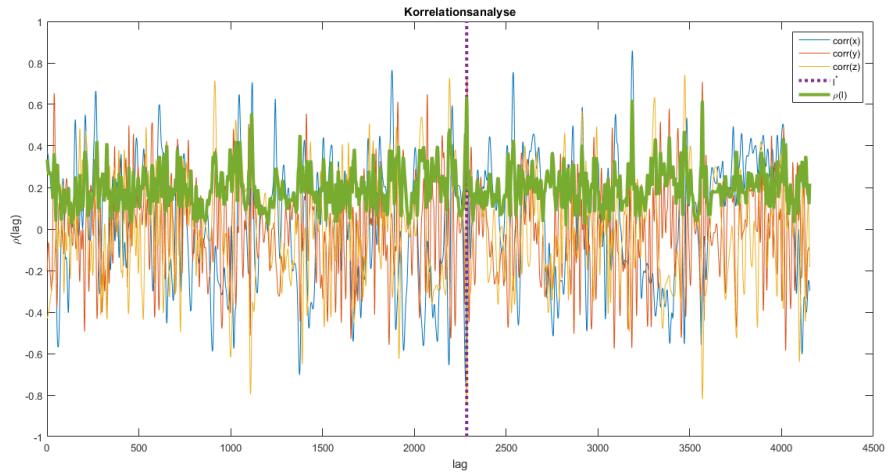
Figur 4.19: Korrelation mellem løb og et fald.

Den maksimale gennemsnitskorrelation for x-, y- og z-aksen mellem buk og reference signalet er givet ved $\rho^* = 0,6478$ ved lag $l^* = 1563$. Det ses på figur 4.20, at ρ^* ligger ved sample 1500.



Figur 4.20: Korrelationsanalyse, buk, testperson 1

Den maksimale gennemsnitskorrelation for x-, y- og z-aksen mellem hop og reference signalet er givet ved $\rho^* = 0.6824$ ved lag $l^* = 2287$. Det ses på figur 4.21, at ρ^* ligger ved sample 2300.



Figur 4.21: Korrelationsanalyse, hop, testperson 1.

4.6 GPS forsøg

Det er essentielt at en GPS-modtageres positionsestimat ikke afviger drastisk fra dens faktiske position. I dette afsnit undersøge GY-GPS6MV2 GPS-modulets nøjagtighed på tre forskellige lokationer gennem forsøg; udenfor i et relativt *ikke tæt bebygget område*, udenfor i et relativt tæt bebygget område og indendørs. Dette vil give en indikation om nøjagtighed og robustheden af GPS-modulet. Resultatsnippetet hører under databehandling under dette forsøg, da fortolkning og analyse af datapunkterne, i vores tilfælde, giver bedst mening rent visuelt.

Opstilling af forsøg

Et gruppemedlem skal holde Arduinoen med de tilkoblede moduler i hånden. Arduinoen får data fra GPS-modulet, som efterfølgende logges på micro SD-kortet ved hjælp af OpenLog-modulet. Ved de to udendørs lokationer transporterer Arduinoen af gruppemedlemmet ved at gå.

Metode

De tre lokationer til dataopsamlingen er i Aalborg Vestby henholdsvis ved havneområdet, hvilket betragtes som værende det udendørs *ikke tæt bebyggede område*, i et boligområde, hvilket betragtes som værende det udendørs *tæt bebyggede område* samt Kvickly Vestbyen, som udgør den indendørs lokationen, se figur 4.22, 4.23 og 4.24.



Figur 4.22: Det udendørs *ikke tætbebyggede område* - Rute ved havnen i Aalborg Vestby. Den røde cirkel indikerer start- og slutpunktet på ruten [Google, 2015].



Figur 4.23: Det udendørs *tætbebyggede område* - Rute i et boligområde i Aalborg Vestby. Den røde cirkel indikerer start- og slutpunktet på ruten [Google, 2015].



Figur 4.24: Indendørs - Kvickly Vestbyen i Aalborg. Den gule cirkel indikerer det statiske dataopsamlingspunkt [Google, 2015].

Første dataopsamling udføres ved, at gruppemedlemmet går den prædefinerede rute i det udendørs *ikke tæt bebyggede område* med Arduinoen, opsamler og gemmer data med loggeren på micro SD-kortet. Gruppemedlemmet går denne rute 5 gange i træk. Anden dataopsamling udføres med samme metode dog på ruten i det *tæt bebyggede område*. Sidste dataopsamling udføres ved den indendørs lokation, hvor gruppemedlemmet opsamler og gemmer data med loggeren på micro SD-kortet stillestående i 15 minutter.

Ved endt dataopsamling analyseres dataene ved at plotte GPS-koordinaterne ind i Google Maps og sammenligne dem med henholdsvis den faktiske gåede rute og indendørs lokation, se næste afsnit.

Databehandling

På figur 4.25, 4.26 og 4.27 ses GPS-koordinaterne plottet, indikeret med en rødmarkør, mens den faktiske gåede rute er markeret med en blå streg ved de udendørs lokationer og en blå cirkel ved den indendørs. Endvidere blev der indsamlet data om antallet af tilgængelige satellitter ved et given datapunkt, se tabel 4.1.

Tabel 4.1: Satellit tilgængelighed under dataopsamlingen.

Lokation	Gns. satellitter	Min.	Maks.
Det udendørs <i>åbne område</i>	10,36	8	11
Det udendørs <i>tætbebyggede område</i>	7,82	4*	10
Indendørs	8,34	4	9

Det udendørs *tætbebyggede område*, var den eneste lokation hvor GPS-modulet, midt i dataopsamlingen, ikke havde tilstrækkeligt med satellitter til at angive en position - dog var det kun fem datapunkter, som ikke kunne logges. GPS-modulets besvær, med at finde satellitter ved denne lokation, kommer til udtryk på figur 4.26, hvor det ses, at datapunkterne ikke på nogen måde ligger konsekvent på den blå streg. Dette skyldes højst sandsynligt en væsentlig fejkilde som reflekterende signaler, jævnfør afsnit 2.3.6. Ydermere ses det på tabel 4.1, at der var mindst variation af satellit tilgængeligheden ved det udendørs *ikke tæt bebyggede område*. Denne observation passer glimrende med figur 4.25, hvor det ses at GPS-koordinaterne overvejende er plottet ovenpå den blå streg. Ved indendørs lokationen svinger GPS-modulets positionering, hvilket hænger godt sammen med satellit tilgængeligheden, i forhold til min. og maks., på tabel 4.1. Endvidere er afstanden mellem den eksakte indendørs position og de loggede data beregnet jævnfør 2.19, 2.27, 2.28 og 2.29 afsnit 2.4.2. En praktisk implementering ses ved følgende udregning med koordinaterne (57,054124; 9,905776) og (57,054283; 9,905783) udtrykt i radianer som vist i (2.6) i afsnit 2.3.5.

$$l_{AB}^2 = 4 \left(\sin^2 \left(\frac{0,9957823 - 0,9957851}{2} \right) + \cos(0,9957823) \cdot \cos(0,9957851) \cdot \sin^2 \left(\frac{0,1728884 - 0,1728885}{2} \right) \right) \approx 7,703932 \cdot 10^{-12}$$

Isolerer I_{AB} og indsætter i næste udtryk:

$$a = \left(\frac{\sqrt{7,703932 \cdot 10^{-12}}}{2} \right) \approx 1,925983 \cdot 10^{-12}$$

*Under dataopsamlingen var GPS-modulet ikke i stand til at angive antallet af satellitter ved fem datapunkter.

Vinklen c beregnes nu:

$$c = 2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1,925983 \cdot 10^{-12}}}{\sqrt{1 - 1,925983 \cdot 10^{-12}}} \right) \approx 2.775596 \cdot 10^{-6}$$

Jordens radius indsættes i næste udtryk sammen med vinklen c :

$$d = 6371000m \cdot 2.775596 \cdot 10^{-6} rad \approx 17,7m$$

Den største afvigelse ligger på 17,7 m, den mindste på 0,4 m mens den gennemsnitlige afvigelse ligger på 7,5 m. Det er svært at sætte tal på afigelserne ved de tilbagelagte ruter, da man ikke med sikkerhed kender den faktiske position, GPS-modtageren befandt sig i ved det givne loggede datapunkt.



Figur 4.25: Det udendørs *ikke tæt bebyggede område* - GPS-koordinater plottet (rød indikator) sammen med den faktiske gæde rute (blå streg) [Schneider, 2016].

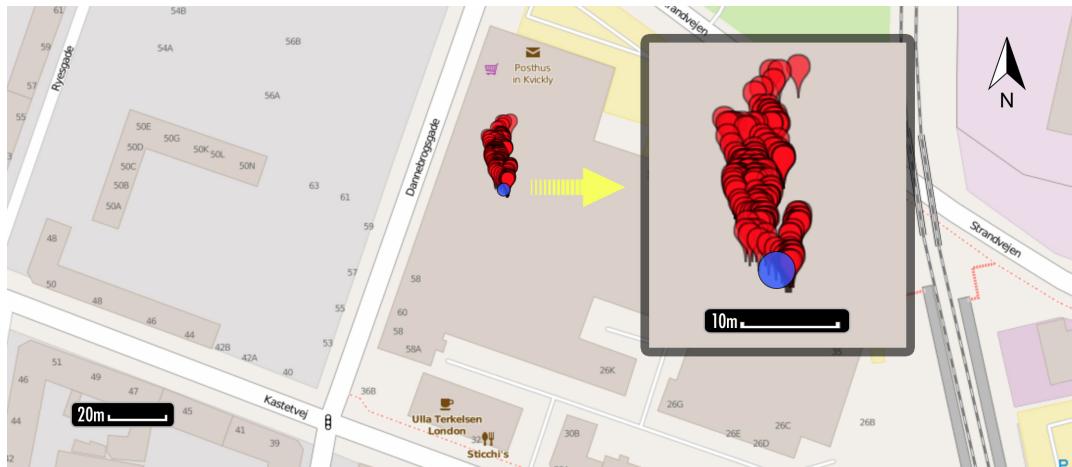
4.7 Fejlkilder GPS

Fejlkilder ved GPS-forsøget er som følgende

- GPS-modulet har under gode forhold (satellitterne står langt fra hinanden) *en horisontal nøjagtighed på < 2,5 meter og vertikal nøjagtighed på < 3,5 meter ved 50% af tiden*, som tidligere beskrevet i afsnit 2.7.3 og jævnfør GPS-modulets datablad [u-blox, 2010].
- Håndteringen af Arduinoen og heraf GPS-modulet kan variere i form af, at den ikke konsistent holdes det samme sted ud for kroppen. På den måde skygges GPS-signalerne af kroppen forskelligt over tid - dette kan gøre sig gældende ved de to udendørs lokationer.



Figur 4.26: Det udendørs tætbebyggede område - GPS-koordinater plottet (rød indikator) sammen med den faktiske gående rute (blå streg) [Schneider, 2016].



Figur 4.27: Indendørs - GPS-koordinater plottet (rød indikator) sammen med det statiske punkt (blå cirkel). Endvidere ses et *close-up* af datapunkterne i højre side af figuren [Schneider, 2016].

- Antal tilgængelige satellitter - dette tages der direkte forbehold for under dataopsamlingen, da antallet af tilgængelige satellitter kendes for hvert datapunkt.
- Satellitternes position kendes ikke på det givne dataopsamlingstidspunkt. Dataopsamlingerne udføres dog kort tid efter hinanden, og derfor står satellitterne omtrent samme sted under hver dataopsamling.
- Generelle fejlkilder ved brug af GPS er beskrevet i afsnit 2.3.6.

4.8 Diskussion

I dette afsnit diskutes resultaterne præsenteret i de foregående afsnit. Dette indebærer metodekritik, reliabilitet og validitet af resultaterne samt vurdering af resultaterne i forhold til projektet formål.

4.8.1 IMU

Her diskutes resultaterne fra forsøgene omhandlende IMU og registrering af fald.

Metodekritik

Her diskutes, hvilke aspekter af forsøgene, som kunne være udført bedre.

Til forsøgene er der brugt mennesker som testpersoner, hvilket begrænsede mulighederne for at efterligne fald, idet testpersonerne ikke var interesserede i at falde på hårde underlag - alle forsøg blev udført på en Airtrack, hvilket ikke er nogen god repræsentation for de forskellige slags underlag, der kan ske fald på. Her kunne der have været brugt en dukke, som kunne simulere et fald på flere forskellige typer underlag.

Hvis mængden af forsøg øges, vil reliabiliteten forbedres - jo flere gange identiske forsøg med ens resultater gentages desto tydeligere bliver reliabiliteten.

Der kunne med fordel være brugt timere, som stod for elektronisk start og stop af logger samt igangsættelse af fald. Dette ville give højere reliabilitet, da der ikke ville blive introduceret fejl i forsøgene som følge af menneskelig fejlbarlighed.

Reliabilitet

Reliabiliteten af resultater beskriver, hvorvidt resultaterne kan genskabes. Høj reliabilitet betyder, at der fås meget lignende resultater ved forsøg under samme forhold.

Resultaterne præsenteret i foregående afsnit og bilaget ligner hinanden inden for hvert forsøg - det har kunnet lade sig gøre at skabe resultater magen til hinanden under de kontrollerede forhold opstilling til forsøgene. Der er desuden tilhørende forsøgsbeskrivelser, hvilket gør det muligt at opstille forsøgene igen. Resultaterne kan derfor siges at have høj reliabilitet og de er altså ikke blot resultater fået ved tilfældigheder.

Validitet

Validiteten af resultater beskriver hvorvidt resultaterne er brugbare til den pågældende problemstilling. For at dette kan opfyldes, skal der være sammenhæng mellem formål, forsøg og resultater. Altså skal forsøg(ene) opstilles med henblik på, hvad der ønskes undersøget, og resultaterne skal give mening i forhold til forsøgene og desuden være brugbare i forbindelse med besvarelse af den oprindelige problemstilling.

Forsøgene i dette projekt er opstillet ud fra problemstillingen omhandlende registrering af fald ved registrering af abnorme accelerationer under faldet. Forsøgene er altså blot fald udført af testpersoner, således de kan bruges som reference for andre fald. Under forsøgene blev der målt acceleration og rotation af testpersonen i tre ortogonale retninger - disse accelerationer og rotationer er resultaterne. Manglerne ved disse forsøg og dermed resultaterne er beskrevet i afsnit 4.8.1. Slutteligt viste det sig, at resultaterne kan bruges til at skelne fald fra normale bevægelsesmønstre - med et referencesignal, opnået gennem forsøg, kan der laves korrelationsanalyse af anden forsøgsdata, for at bestemme hvorvidt der er sket et fald. Der er altså nogenlunde sammenhæng mellem formål og forsøg, mens der er god sammenhæng mellem resultater og formål. Resultaternes validitet lader derfor under forsøgenes udførelsel, mens de stadig er relevante i forhold til formålet med projektet.

Resultater og korrelation

Her gennemgås resultater fra forsøg med IMU - mere specifikt de målte rotationer og accelerationer.

Gyroskopernes målinger stemte som nævnt overens med foventningerne, og ved numerisk integration med Simpsons kvadraturregel blev der opnået rotationen udtrykt i total rotation i radianer, set på figur 4.5. Dette svarede til omkring en kvart omgang, hvilket var forventet, og den numeriske integration fungerede dermed til formålet. Rotation af accelerometrene viste sig dog at være fejlagtig, og de integrerede gyroskopmålinger bruges dermed ikke i det kommende løsningsforslag. I stedet bruges korrelationsanalyse, som ikke er så afhængig af accelerometrenes orientering i rummet.

Korrelationsanalysen af de målte accelerationer fra IMU ses på figur 4.2. På figuren i søjle 1 og 2 ses den ikke decimerede data korreleret med et referencesignal, som er henholdsvis ikkefilteret og filteret. I søjle 3 og 4, ses den decimerede data korreleret med et referencesignal, som er henholdsvis ikkefilteret og filteret. Denne tabel præsenteres på baggrund af teorien i afsnit 2.6.4, hvorfra det vides, at en

decimering af lavpasfiltrerede resultater skulle afbilde bevægelsen bedre, end decimering af ikke filterede resultater. Dette er også tilfældet for faldbevægelsen, hvor det ses, at resultaterne, som var filtrerede, inden de blev decimeret, har en højere ρ^* , end ikkefiltreret decimering. Med undtagelse af hop og buk ses det generelt, at de ikkefiltrerede signaler bliver ødelagt af spejling i Nyquistfrekvensen efter decimering. Dette kan skyldes, at der under decimeringen bevares en del af signalet, som har en større korrelationskoefficient med referencesignalet, end det originale signal.

Forsøg	Uden decimering Uden Filter, ρ^*	Uden decimering Med filter, ρ^*	$\downarrow 5$ Uden filter, ρ^*	$\downarrow 5$ Med filter, ρ^*
Fald	1,0	1,0	0,9080	0,9261
Hop	0,5831	0,6824	0,6263	0,6829
Gang	0,5883	0,7690	0,5590	0,6669
Løb	0,5040	0,5816	0,4956	0,5801
Buk	0,4293	0,6478	0,4723	0,6442

Tabel 4.2: Tabel over ρ^* for de forskellige forsøg

4.8.2 GPS

Her diskuteres resultaterne fra forsøgene omhandlende GPS og bestemmelse af afstand fra et punkt.

Metodekritik

Da forsøgene blev foretaget på forskellige tidspunkter af døgnet stod satellitterne, som blev brugt til estimering af position, højst sandsynligt ikke ens under forsøgene. GPS-modtagerens præcision afhænger af hvor mange satellitter der bruges til estimeringen. Forsøgene burde være lavet på samme tidspunkt på dagen, således positionerne estimeres ud fra samme forudsætninger. Det er klart, at flere satellitter vil give en bedre estimering af positionen.

Reliabilitet

Siden forsøgene, hvor der blev gået med GPS-modtageren, bestod af en rute, som blev tilbagelagt fem gange, kan der ses på, hvor meget resultaterne for hver omgang ligner hinanden. Ved at kigge på figur 4.25, 4.26 og 4.27 ses det, at resultaterne i det ikke tæt bebyggede område ligner hinanden for hver omgang, mens resultaterne for de to andre forsøg ikke gør. Resultaterne fra det ikke tæt bebyggede område kan altså genskabes under samme forhold, mens dette ikke gælder for de to andre forsøg, og reliabiliteten er derefter.

Det er værd at bemærke, at den lave reliabilitet af resultaterne er forårsaget af fejlkilder, som hører til GPS-modtageren og ikke forsøgsopstillingen og fremgangsmåden. Fejlkilderne er beskrevet i afsnit 4.7. Der kan altså ikke gøres noget ved reliabiliteten gennem ændring af forsøgene.

Validitet

Ved forsøget med GPS-modulet, var hovedformålet at observere om den de angivne positioner afvigede drastisk fra den faktiske position. De tre forsøg, henholdsvis de gående og stillestående, viste hver især, at nøjagtigheden i høj grad afhænger af omgivelserne. Dette resultat passer fremragende til formålet med forsøget, da det efterfølgende var muligt at observere netop om GPS-modulet er i stand til at give en tilstrækkelig nøjagtig position. Endvidere passer formål og resultaterne sammen, hvilket gør, at resultaterne kan benyttes i forbindelse med besvarelse af problemformuleringen.

GPS resultater i forhold til teori

Ud fra resultaterne fremgår det klart, at GPS-modulet klarer sig fremragende uden-dørs i *ikke* tæt bebyggede områder. Ved tæt bebyggede områder og indendørs lokationer har GPS-modulet sværere ved at give en nøjagtig position, dog nøjagtig nok til at vise området og/eller bygningen den befinner sig i. For at danne et fuldestgørende indtryk af GPS-modulets formåen, kræver det yderligere test. Resultaterne er desuden hvad der var forventet ud fra teorien bag GPS-modtageren.

5 | Vurdering

I følgende afsnit vurderes resultaterne i en projektsammenhæng. Ud fra korrelationsanalysen af resultaterne præsenteret i kapitel 4 vurderes det, hvorvidt det er muligt at skelne fald og normale bevægelsesmønstre fra hinanden, og om dette er brugbart i forhold til projektets problemstilling. GPS-modtageren vurderes ud fra dens evne til at bestemme dens faktiske position med høj nøjagtighed, og der konkluderes, hvorvidt denne pålideligt kan bruges til at registrere om en person er gået uden for fastsat radius fra et punkt. Efter disse analyser og vurderinger svares der som konklusion på projektet på den opstillede problemformuleringen.

5.0.1 GPS

Forsøgene med GPS-modtageren havde til formål at klarlægge, hvor præcist GPS-modtageren kunne estimere modtagerens position under forskellige forhold. Der kræves ikke en høj præcision af GPS-modtagerens målinger, da blot en estimering af en persons lokation er bedre end slet ingen. Det giver dog sig selv, at høj præcision er ønskværdig men ikke afgørende for formålet i dette projekt.

Det viste sig, at GPS-modtageren estimerede dens faktiske position med en gennemsnitsafvigelse på 7,5 meter, når den var stillestående. Under bevægelse blev afvigelsen fra den faktiske position ikke beregnet, men kortene med de plottede koordinater og den faktiske tilbagelagte rute giver en god idé om, hvor præcis modtageren er, og det vurderes, at modtageren er præcis nok til projektets formål. Data fra GPS-modtageren kan altså bruges til at bestemme, om en person har bevæget sig uden for en radius fra et bestemt punkt ved hjælp af teorien beskrevet i afsnit 2.4.2 og til at lokalisere en person, som har gjort dette, eller som er faldet.

5.0.2 IMU

I forbindelse med data fra IMU blev det nødvendigt at benytte numerisk integration for at integrere gyroskopernes målinger til noget der kunne bruges i en rotationsmatrix. Den numeriske integration viste sig at virke som forventet og skulle dermed bruges til virtuel rotation af accelerometrene. Det viste sig dog, at rotationsmatricen, som blev introduceret i 2.4.1, ikke foretog den ønskede rotation af accelerationerne på baggrund af de målte rotationer ved hjælp af gyroskopet. Idéen om virtuelt at rottere koordinatsystemet, som accelerationerne er udtrykt i, blev derfor forkastet. Altså bliver gyroskopernes målinger ikke brugt til projektets formål.

Korrelationsanalysen i tabel 4.2 viste, at det er muligt, at skelne fald fra normalt bevægelsesmønster ud fra forskellige bevægelsers korrelation med fald. Filtrering gjorde, at der var højere korrelation mellem normalt bevægelsesmønster og fald, hvilket ikke er ønskværdigt i forbindelse med projektets problemstilling, da dette gør det sværere at skelne de to fra hinanden. Decimering havde ikke stor indflydelse på korrelationerne, hvilket er ønskværdigt, da decimering reducerer den beregningsmæssige kompleksitet af korrelationsanalysen. Dette vil spare tid og batterilevetid i et produkt, som bruger disse teknikker. Det er værd at bemærke, at et filter kan gøre en korrelationsanalyse, som følger en decimering, mere præcis, idet der undgås eventuel spejling i den nye Nyquistfrekvens.

Ud fra tabel 4.2 ses det, at en tærskel på 0,8 i normaliseret korrelation, ville frasortere samtlige normale bevægelser, mens et fald ville blive registreret. Dette kan dog ikke gøre sig generelt gældende, da korrelationsanalysen ikke tager højde for andre slags fald. I dette projekt haves kun ét referencesignal, og der kan dermed kun registreres ét slags fald - andre fald har anderledes accelerationsaftryk. Resultaterne fra forsøgene giver et udmærket billede af, hvordan man kan skelne fald fra normale bevægelser, men for at kunne registrere flere forskellige fald, formodes det, at der kræves flere forskellige referencesignaler, og en bedre estimering af en tærskel, hvorved fald skal registreres. Til dette projekts formål er resultaterne dog nok til at vise metodens funktion.

Resultaterne fra forsøgene med GPS kan altså bruges til projektets problemstiller. Det samme gælder for resultaterne fra forsøgene med IMU, som viser, at en korrelationsanalyse kan bruges til registrering af fald.

5.1 Algoritme (løsningspseudokode)

Da løsningen i projektet, grundet begrænset forsøgmængde, er *proof of concept*, er der udviklet en algoritme, som en løsning kunne tage udgangspunkt i. Algoritmen i tabel 5.1 beskriver tankegangen bag registreringen af fald og vildfaren og efterfølgende sporing af GPS-modulet, hvis implementering var foretaget på en Arduino.

Algoritme: registrering af fald og/eller vildfaren

1. Input	Rådata fra IMU og GPS Besked om eventuelt fald og/eller vildfaren med dertilhørende geografiske koordinater
2. Output	
3. Dataopsamling	IMU og GPS foretager dataopsamling
4. Databehandling	Rådata filtreres og decimeres
5. Sammenligning med referencesignal	Der foretages en korrelationsanalyse af de behandlede data og referencesignalet
6. Sammenligning med tærskel	Resultaterne sammenlignes med den fastsatte tærskel, for at bestemme, hvorvidt der skal registreres et fald
7. Alarm	Hvis tærsklen overskrides, slås der alarm til en ansvarlig, og de geografiske koordinater for den demente sendes

Tabel 5.1: Algoritme til bestemmelse af, hvorvidt en dement er faldet og/eller føret vild

6 | Konklusion

I dette afsnit besvares problemformuleringen, som lød på følgende

Hvorledes kan et system baseret på Global Positioning System (GPS) og inertial measurement unit (IMU) udvikles til at registrere fald og vildfaren hos en dement?

De relevante matematiske teorier er blevet fremlagt og anvendt i forbindelse med registrering og sporing af fald. Ved implementering af numerisk integration, en rotationsmatrix og filtrering, i projektets tilfælde lavpas filter, i form af et FIR design med Hammingvindue, blev forsøg udført og analyseret i MATLAB.

Simpsons kvadraturregel virkede som ønsket ved numerisk integration ud fra samples fra et gyroskop, som målte vinkelændringshastighed. Disse data blev dog ikke brugt, da rotationsmatricen ikke udførte den ønskede rotation. Den numeriske integration kan benyttes, hvis der findes en bedre måde at rottere systemet virtuelt på, men i dette projekt blev den ikke brugt videre. Den efterfølgende korrelationsanalyse blev derfor tilpasset disse nye forhold, og problemet omhandlende manglen på virtuel rotation af accelerometrene blev dermed omgået.

Korrelationsanalysen af fald blev sammenlignet med korrelationsanalyse af gang, løb, buk og hop, og denne viste, at det kan lade sig gøre at skelne fald fra normalt bevægelsesmønster ud fra et referencesignal. Det formodes, at flere referencesignaler vil gøre systemet i stand til at genkende flere forskellige fald, men der haves i dette kun ét, og der må nøjes med *proof of concept*. Det blev desuden vist, at decimering ikke har stor indflydelse på korrelationsanalysen og denne teknik kan derfor bruges til at nedsætte den beregningsmæssige kompleksitet, og dermed tid og batterilevetid i et eventuelt produkt, som skal foretage denne analyse.

Forsøgene med GPS-modulet viste, at det er nøjagtigt nok til at kunne angive en position i forbindelse med fald, da det stillestående indendørs forsøg indikerede, at GPS-modulet har en gennemsnitlig afvigelse på 7,5 meter.

På trods af at der ikke er udviklet et konkret system, er en algoritme, fungerende som *proof of concept*, til registrering af fald og vildfaren udviklet og ses i afsnit 5.1 for pseudokoden.

Metoden beskrevet i afsnit 1.5 blev fulgt med undtagelse af det sidste skridt om-handlende implementering af algoritme til et samlet system, som kunne registrere fald og vilfarens.

Det tænkte produkt vil være i stand til at spare demente ældre for overvågning, de ellers ville opleve ved almindelige GPS-løsninger. Af disse årsager vil løsningen således pligtetisk være nemmere at forsvare brugen af, samt være en garanteret bedre løsning konsekvensetisk, da byrden på de demente ældrelettes.

Der kan konkluderes, at der kan laves et system, som benytter IMU og GPS, til sporing og registrering af fald hos demente, og som derigennem slår alarm i tilfælde af et eventuelt fald og/eller vildfaren i form af færden uden for et givent område.

6.1 Perspektivering

Selvom de opnåede resultater, set under kapitel 4, indikerer at fald kan skelnes fra andre bevægelsesmønstre, er dette kun gældende ved et specifikt baglæns fald. Fremadrettet kunne der dermed arbejdes med at generalisere modellen til *alle* former for fald. Dog ville dette kræve flere referencesignaler i form af forskellige fald. Der kunne dermed konstrueres mange referencesignaler, som kunne bruges til korrelationsanalyse med et datasæt og dermed bedre at registrere fald og endda bestemme *hvilket* slags fald.

Registreringen af fald kunne udføres ved hjælp af andre metoder end de i projektet fremlagte. Gyroskopet i IMU kunne eventuelt bruges til at detektere, hvorvidt en person ligger ned. En anden løsning kunne være at bruge gyroskopernes målinger til at rotere accelerometrenes målinger. Dette kræver, at der bruges en måde hvorpå man roterer alle tre akser virtuelt og simultant. Med denne teori ville et accelerationsudsving kunne bruges som endnu en parameter til at registrere fald.

I forhold til sporing ville det være oplagt at overveje tilfælde, hvor et fald er registreret i et miljø, som gør det svært for GPS-modtageren at bestemme position præcist - for eksempel dybt inde i en bygning. Her kunne udvikles et system med INS-assisteret GPS, hvor INS er i stand til at bestemme positionen inde i en bygning, hvor GPS-modtageren ikke er nøjagtig nok.

Projektet har haft fald som fokusområde, men fornævnte model åbner op for mange muligheder for registrering af bevægelsemønstre. Denne teknik vil kunne bruges til andre problemstillinger ikke omhandlende fald.

7 | Bilag

Pseudokoder I dette bilag vil de resterende pseudokoder ligge. Dette inkluderer opsamling af data og korrelationsanalysen.

Algoritme: Korrelationsanalyse (MATLAB pseudokode)

1. Input:	Referencesignal og rå IMU-data som nyt signal
2. Output:	$\rho(l)$ samt l^* for alle tre akser
3. Indlæser data	<i>load file.txt</i>
4. Omregning til m/s^2	$acceleration(x, y, z) \cdot 16384 \cdot 9,81 \cdot 4$
5. Omregning til deg/s	$gyro(x, y, z) \cdot \frac{1}{131} \cdot \frac{1}{100}$
6. Filtrering (FIR)	$y_n = \sum_{k=0}^M b_k x_{n-k}$
7. Beregner korrelation	$corr(\tilde{r}, \tilde{s}) = \frac{cov(\tilde{r}, \tilde{s})}{\sqrt{var(\tilde{r}) \cdot var(\tilde{s})}}$
8. Gns. korrelation	$\rho(l) = \max_{l \in I} \left(\frac{ \rho_x(l) + \rho_y(l) + \rho_z(l) }{3} \right)$
9. Maks. gns. korrelation	$l^* = \arg \max_{l \in I} \left(\frac{ \rho_x(l) + \rho_y(l) + \rho_z(l) }{3} \right)$

Tabel 7.1: Pseudokode til beregning af korrelation

Algoritme: Dataopsamling med IMU (Arduino IDE pseudokode)

1. Input:	Bevægelse
2. Output:	Acceleration, vinkelhastighed
3. Initialisering	Indlæser moduler Starter kommunikation
4. Offsets	Beregner Offsets og anvender dem
5. Dataopsamling	Viser data fra IMU

Tabel 7.2: Pseudokode til dataopsamling gennem IMU

Algoritme: Dataopsamling med GPS (Arduino IDE pseudokode)

- | | |
|-------------------|---|
| 1. Input: | Satellitsignal |
| 2. Output: | Længde og breddegrader [DD] |
| | |
| 3. Initialisering | Indlæser moduler
Starter kommunikation |
| | |
| 4. Input | Tjekker kommunikation med satellitter |
| | |
| 5. Dataopsamling | Viser geografiske koordinater |

Tabel 7.3: Pseudokode til dataopsamling med GPS

7.1 Indhold på CD

De resterende grafer over forsøgsdata kan findes på den CD, som er afleveret med projektet.

Litteratur

6SocialStudies. Equator prime meridian, 2016. URL <https://6socialstudies.wikispaces.com/Maps+Unit>. Besøgt: 03-04-2016.

Alzheimer foreningen. Demente skal tilbydes gps tidligt, 2014. URL <http://www.alzheimer.dk/nyheder/demente-skal-tilbydes-gps-tidligt>. Besøgt: 2016-02-17.

Alzheimer's Association. Alzheimer's association: What is dementia?, 2016a. URL <http://www.alz.org/what-is-dementia.asp>. Besøgt: 2016-02-16.

Alzheimer's Association. Wandering and get lost, 2016b. URL <https://www.alz.org/care/alzheimers-dementia-wandering.asp>. Besøgt: 2016-02-12.

Alzheimer's Society. What is alzheimer's disease?, 2016. URL https://www.alzheimers.org.uk/site/scripts/documents_info.php?documentID=100. Besøgt: 2016-02-16.

arduino.cc. Arduino uno, 2016. URL <https://www.arduino.cc/en/Main/ArduinoBoardUno>. Besøgt: 22-05-2016.

T. Chan. What is the definition of cutoff frequency?, 2016. URL http://ci.columbia.edu/ci/premba_test/c0331/s7/s7_5.html. Besøgt: 13-05-2016.

Comfort Zone Check-In. How [comfort zone check-in] works, 2016. URL <http://www.comfortzonecheckin.com/HowItWorks.aspx>. Besøgt: 2016-02-11.

Danmarks Radio. Befolkningen: Giv demente gps, 2012. URL <http://www.dr.dk/nyheder/indland/befolkningen-giv-demente-gps>. Besøgt: 2016-02-24.

P.-J. V. de Maele. Getting the angular position from gyroscope data, 2012. URL <http://www.pieter-jan.com/node/7>. Besøgt: 2016-02-17.

G. Dolan. The greenwich meridian - where east meets west, 2016. URL <http://www.thegreenwichmeridian.org/tgm/articles.php?article=0>. Besøgt: 03-04-2016.

B. Douglas. Introduction to the fourier transform (part 1), 2013a. URL <https://www.youtube.com/watch?v=1JnayXHhjlg>. Besøgt: 31-03-2016.

B. Douglas. Introduction to the fourier transform (part 2), 2013b. URL <https://www.youtube.com/watch?v=kKu6JDqNma8>. Besøgt: 31-03-2016.

- C. H. Edwards. *Calculus: Early Transcendentals*. Pearson, 7. edition, 2014. ISBN 9781292022178.
- Egnos. What is gnss?, 2016. URL <http://egnos-portal.gsa.europa.eu/discover-egnos/about-egnos/what-gnss>. Besøgt: 2016-02-10.
- etik.dk. Demente skal ikke spærres inde, 2012. URL <http://www.etik.dk/%C3%A6ldre-og-etiske-udfordringer/demente-skal-ikke-sp%C3%A6rres-inde>. Besøgt: 2016-02-17.
- M. Francis. Imaginary numbers are real, 2012. URL <https://sciencevpseudoscience.files.wordpress.com/2012/06/phase.png>. Besøgt: 31-03-2016.
- Furuno. What is gps?, NA. URL http://www.furuno.com/en/gnss/technical/tec_what_gps#GeneraloverviewofGPS. Besøgt: 17-03-2016.
- Google. Google maps, 2015. URL <http://maps.google.com>. Besøgt: 16-04-2016.
- GPS.gov. Space segment, 2016. URL <http://www.gps.gov/systems/gps/space/>. Besøgt: 17-03-2016.
- J. Z. Hagen. *Det kategoriske imperativ*. Kbh.: Munksgaard, 1995. ISBN 8716115449.
- Hjælpemiddelbasen. Mobile tryghedsalarmer med positionsbestemmelse (gps), 2016. URL <http://www.hmi-basen.dk/r4x.asp?linktype=iso&linkinfo=22271806>. Besøgt: 03-04-2016.
- Information. Demente forsvinder i stort tal, 2014. URL <http://www.information.dk/502083>. Besøgt: 2016-02-16.
- innovateus. What is the definition of cutoff frequency?, 2016. URL <http://www.innovateus.net/science/what-definition-cutoff-frequency>. Besøgt: 09-05-2016.
- N. Instruments. Differences between frequency domain and time domain, 2012. URL http://zone.ni.com/reference/en-XX/help/370051V-01/cvi/libref/analysisconcepts/differences_between_frequency_domain_and_time_domain/. Besøgt: 31-03-2016.
- InvenSense. Mpu-6000 and mpu-6050 product specification revision 3.4, 2013. URL https://www.cdiweb.com/datasheets/invensense/MPU-6050_DataSheet_V3%204.pdf. Besøgt: 14-03-2016.
- J. J. Z. o. M. H.-P. J. Sanz Subirana. Gnss basic observables, 2011. URL http://www.navipedia.net/index.php/GNSS_Basic_Observables. Besøgt: 2016-02-22.

- R. A. B. Joshua Stevens, Jennifer M. Smith. User equivalent range errors, 2012. URL <https://www.e-education.psu.edu/geog160/node/1924>. Besøgt: 13-03-2016.
- P. Lauritsen. Den omsorgsfulde overvågning, 2014. URL <https://www.information.dk/debat/2014/07/omsorgsfulde-overvaagning>. Besøgt: 07-04-2016.
- leapsecond.com. Gps clock, NA. URL <http://www.leapsecond.com/java/gpsclock.htm>. Besøgt: 13-03-2016.
- maptoaster.com. How gps works, 2014. URL <https://www.maptoaster.com/maptoaster-topo-nz/articles/how-gps-works/how-gps-works.html>. Besøgt: 2016-02-24.
- M. P. Marco Rao, Gianluca Falco. Code tracking and pseudoranges, 2016. URL <http://www.insidegnss.com/node/2898>. Besøgt: 2016-02-23.
- W. Mathworld. Sinc function, 2016. URL <http://mathworld.wolfram.com/SincFunction.html>. Besøgt: 19-04-2016.
- Nationalt Videnscenter for Demens. Omkostninger forbundet med demens, 2016a. URL <http://www.videnscenterfordemens.dk/statistik/omkostninger-forbundet-med-demens/>. Besøgt: 2016-02-16.
- Nationalt Videnscenter for Demens. Indsats for pårørende til mennesker med demens, 2016b. URL <http://www.videnscenterfordemens.dk/pleje-og-behandling/pleje-og-omsorg/indsats-for-paaroerende>. Besøgt: 2016-02-16.
- NCO for S.B. Pos., Nav., Tim. Current and future satellite generations, 2016. URL <http://www.gps.gov/systems/gps/space/>. Besøgt: 2016-02-20.
- M. Nielsen. *An Introduction to Complex Numbers and Differential Equations*. 2009.
- B. Ninness. *Frequency Response, Fourier Analysis and Filter Design*. N/a.
- A. Noureldin, T. B. Karamat, and J. Georgy. *Fundamentals of Inertial Navigation, Satellite-based Positioning and their Integration*. Springer, 2013. ISBN 9788578110796.
- NRRI. The geographic coordinate system, NA. URL <http://www.nrri.umn.edu/worms/downloads/team/TheGeographicCoordinateSystem.pdf>. Besøgt: 03-04-2016.
- B. A. Olshausen. Aliasing. 2010. URL <http://redwood.berkeley.edu/bruno/npb261/aliasing.pdf>. Besøgt: 31-03-2016.

- M. Parker. *Decimation and Interpolation*. Newnes, 2010. ISBN 978-1-85617-922-5.
- PyX. Integral, 2016. URL <http://pyx.sourceforge.net/gallery/graphs/integral.html>. Besøgt: 21-03-2016.
- Retsinformation. Forslag til folketingsbeslutning - om alarm- og pejlesystemer til opsporing af demente, 2009. URL <https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=123376>. Besøgt: 2016-02-26.
- D. Rick. Deriving the haversine formula, 1999. URL <http://mathforum.org/library/drmath/view/51879.html>. Besøgt: 17-04-2016.
- S. Roberts. The discrete fourier transform, 2016. URL <http://www.robots.ox.ac.uk/~sjrob/Teaching/SP/17.pdf>. Besøgt: 03-05-2016.
- M. Schmandt. Phase 3: Data capture - gps, NA. URL <http://giscommons.org/chapter-2-input/>. Besøgt: 02-28-2016.
- A. Schneider. Resize/colorize data points on a map, 2016. URL http://www.gpsvisualizer.com/map_input?form=data. Besøgt: 17-04-2016.
- S. W. Smith. *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. Steven W. Smith, 1998.
- S. W. Smith. The scientist and engineer's guide to digital signal processing - chapter 3: Adc and dac - the sampling theorem, 2011a. URL <http://www.dspproject.com/ch3/2.htm>. Besøgt: 20-03-2016.
- S. W. Smith. The scientist and engineer's guide to digital signal processing - chapter 22: Audio processing - human hearing, 2011b. URL <http://www.dspproject.com/ch22/1.htm>. Besøgt: 31-03-2016.
- B. Spencer. Can i lock my alzheimer's parent in their room at night?, 2015. URL <https://www.caring.com/questions/lock-alzheimers-parent-in-their-room>. Besøgt: 2016-02-17.
- J. Stewart. Fourier series, 2008. URL http://www.stewartcalculus.com/data/CALCULUS%206E%20Early%20Transcendentals/upfiles/topics/6et_at_01_fs_stu.pdf. Besøgt: 31-03-2016.
- STMicroelectronics. Mems digital output motion sensor ultra low-power high performance 3-axes "nano" accelerometer, 2009. URL <http://www.st.com/web/en/resource/technical/document/datasheet/CD00213470.pdf>. Besøgt: 22-03-2016.

- STMicroelectronics. Mems motion sensor: ultra-stable three-axis digital output gyroscope, 2010. URL <http://www.st.com/web/en/resource/technical/document/datasheet/CD00265057.pdf>. Besøgt: 22-03-2016.
- sundhed.dk. Fald og faldtendens hos ældre, 2015. URL <https://www.sundhed.dk/sundhedsfaglig/laegehaadbogen/geriatri/symptomer-og-tegn/fald-og-faldtendens-hos-aeldre>. Besøgt: 2016-02-17.
- I. V. . I. Syd. Demonstrationsprojekt med brug af gps system i eget hjem, 2011. URL <http://goo.gl/57dqIA>. Besøgt: 2016-02-16.
- Tara. 5.4 composition of ordinates and harmonic analysis, 2006. URL <http://prepprecalcd0607.blogspot.dk/2006/11/54-composition-of-ordinates-and.html>. Besøgt: 31-03-2016.
- J. P. Tomislav Kos, Ivan Markezic. Effects of multipath reception on gps positioning performance. 2010. URL <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=5606130>. Besøgt: 16-03-2016.
- K. Tuck. Offset calibration of the mma8450q, 2010. URL http://www.nxp.com/files/sensors/doc/app_note/AN3916.pdf. Besøgt: 04-03-2016.
- P. R. Turner. *Guide to Scientific Programming*. Macmillan Mathematical Guides, 2000.
- u-blox. u-blox 6 gps modules data sheet, 2010. URL [https://www.u-blox.com/sites/default/files/products/documents/NEO-6_DataSheet_\(GPS.G6-HW-09005\).pdf](https://www.u-blox.com/sites/default/files/products/documents/NEO-6_DataSheet_(GPS.G6-HW-09005).pdf). Besøgt: 13-04-2016.
- Videnscenterfordemens. Svigt i kognitive funktioner, 2016. URL <http://www.videnscenterfordemens.dk/viden-om-demens/demenssygdomme/symptomer-paa-demens/svigt-i-kognitive-funktioner/>. Besøgt: 2016-02-23.
- D. M. Wickert. Fir filters, 2011. URL http://www.eas.uccs.edu/~mwickert/ece2610/lecture_notes/ece2610_chap5.pdf. Besøgt: 15-03-2016.
- C. M. Will. Einstein's relativity and everyday life, 2016. URL <http://physicscentral.com/explore/writers/will.cfm>. Besøgt: 2016-02-20.
- www.arduino.cc. analogread(), 2016. URL <https://www.arduino.cc/en/Reference/AnalogRead>. Besøgt: 04-03-2016.
- G. Yogasingam. The iphone 5 inside out, 2012. URL http://m.eetasia.com/ART_8800675370_499486_TA_b0ed944c_2.HTM. Besøgt: 20-03-2016.