Opgave 7

Gruppe 7

September 28, 2016

a) Bevis sætning 12.

Sætning 12 (Konvergensradius II). *Lad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ være en reel eller kompleks potensrække og sæt $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$. Hvis $\alpha = \infty$, så er rækkens konvergensradius $R = 0$, ellers er rækkens konvergensradius R givet ved $\frac{1}{R} = \alpha$, hvor $0 < R \leq \infty$*

Del 1. Antag, at $\alpha = \infty$.

Fra **Sætning 9** haves at

1. *Hvis $\beta < 1$, så konvergerer rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.*
2. *Hvis $\beta > 1$, så divergerer rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

Indsæt $a_n(z-a)^n$ i udtrykket for β fra **Sætning 9**.

$$
\begin{aligned}
\beta &= \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n(z-a)^n|} && (1)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n||z-a|^n}\\
&= \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{|z-a|^n}\\
&= \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}|z-a| && (2)
\end{aligned}
$$

Der søges jf. **Sætning 9** et $z \Rightarrow \beta < 1$. Altså, da $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ gælder

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}|z-a| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-a| = 0 \tag{3}$$

Det ses, at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ divergerer for $z \neq a$, og at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ konvergerer hvis og kun hvis $z = a \Rightarrow R = 0$.

Del 2. Antag, at $\alpha \neq \infty$. Jv. **Sætning 9** ønskes, at $\beta < 1$

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n(z-a)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}|z-a| < 1 \Rightarrow$$
$$|z-a| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\alpha} \tag{4}$$

Der gælder, at rækken har konvergens hvis $|z-a| < \frac{1}{\alpha}$ og divergerer for $|z-a| > \frac{1}{\alpha}$. Altså er konvergensradius for rækken $\frac{1}{\alpha} = R$.

b) Find en øvre grænse for konvergensradius for en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ ved hjælp af $\lim_{n\to\infty \sup} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

Opret følgen $\{|a_n|\}_{n=0}^{\infty}$ som grundet numerisk tegn er reel og antag at $|a_n| > 0$ fra et vist trin. Så er følgende sandt jævnfør **Sætning 12** og **Lemma 10** i for omtalte potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$:

$$\frac{1}{R} = \alpha = \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} \geq \lim_{n\to\infty} \inf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \Rightarrow$$
$$R = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\lim\sup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \leq \frac{1}{\lim\inf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \widetilde{R} \tag{5}$$

$\widetilde{R}$ vil således være øvre grænse for konvergensradius.

c) Find en nedre grænse for konvergensradius for en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ ved hjælp af $\lim\sup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

Fra **Lemma 10** benyttes det, at:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \tag{6}$$

Og på samme vis som i (5) ses det at:

$$R = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \geq \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \tilde{\tilde{R}} \tag{7}$$

Og $\tilde{\tilde{R}}$ er således nedre grænse for konvergensradius.

d) Er man normalt interesseret i en øvre eller nedre grænse for konvergensradius - med andre ord hvilken af de to ovenstående resultater er oftest mest brugbar?

Dette afhænger af hvad der skal bestemmes, dog vides det at for den nedre grænse konvergerer alt indenfor denne. Dette vil altså sige, at den nedre grænse siger mest om elementerne inden for cirkelskiven.

e) Konstruér et eksempel på en potensrække, hvor den nedre grænse for konvergensradius fra (c) er forskellig fra den rigtige konvergensradius.

Lad en uendelig potensrække være givet ved

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(z-a)^n$$

hvor

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 2k \quad : k \in \mathbb{N} \\ 2, & n = 2k+1 : k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{8}$$

Da er den nedre grænse fra **c)** givet ved

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \frac{1}{2} = \tilde{\tilde{R}} \tag{9}$$

mens konvergensradius er givet ved

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = R \tag{10}$$

Altså gælder for denne potensrække, at $R \neq \tilde{\tilde{R}}$