✓ Fuldstændighed af de reelle tal

Grænseværdier

✓ Bolzano-Weierstrass

✓ Kvotient- og rodkriteriet

Kontinuitetsbegreber og -egenskaber

✓ Hovedsætninger om kontinuerte funktioner

✓ Åbne og lukkede mængder

✓ Differentiation

✓ Rolles- og Middelværdisætningen

✓ L'Hôpitals regel

✓ Riemann-integralet

✓ Analysens Fundamentalsætning

1 Fuldstændighed af de reelle tal

Bøger og noter

- Funktioner af en og flere variable
- Punktmængdetopologi, metriske rum og fuldstændighed

Tidligere kapitler

- Korollar 1.9 (Egenskaber for legemer)

Definitioner vi skal have styr på

- 3.1 (Ordnet mængde)
- 3.2 (Største/mindste element)
- 3.6 (Øvre grænse)

- 3.10 (Mindste øvre grænse)
- 3.15 (Supremum/infimum)
- 3.4 (De reelle tal)

Sætninger/lemmaer vi skal have styr på med bevis

- 3.7 (Ækvivalente udsagn for øvre grænse)
- 3.8 (Ækvivalente udsagn for !øvre grænse)
- 3.11 (Mindste øvre grænse)
- 3.12 (Mindste øvre grænse - anden måde)
- 3.14 (Infimumegenskaben)
- 3.17 (Arkimedes' princip)

Sætninger, som kan bevises til eksamen

- 4.16 (Hovedsætning om monotone talfølge) (se 3.4 på 255)
- 4.42 (Enhver Cauchy-følge i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ er konvergent)
- 3.4 i (PMT) (Fuldstændighed af $\mathbb{R}$)

Theorem 1.0.1 (Fuldstændighed af de reelle tal) *Antag, at K er et legeme, som er ordnet, og fuldstændigt og som opfylder, at for ethvert $k \in K$ eksisterer et $n \in \mathbb{N}$ så $k < n$. Så er $K = \mathbb{R}$.*

$\mathbb{R}$ er defineret som et ordnet legeme, som opfylder supremumegenskaben. Der vises, at enhver ikke-tom opadtil begærnset delmængde af K har en mindste øvre grænse.

Proof for Lad $S \in K$ være ikke-tom og opad begrænset. Så eksisterer en øvre grænse $b \in K$ og et $a \in S$, således

$$\exists -m, M \in \mathbb{N} : m < a \leq b < M \tag{1.1}$$

Definér

$$T_k = \{p \in \mathbb{Z} | p^k M \leq M \text{ og } \frac{p}{2^k} \text{ er en ø.g. for } S\} \tag{1.2}$$

T_k er

- nedadtil begrænset af $2^k m$
- opadtil begrænset af $2^k M$
- ikke-tom, da $2^k M \in S$

Da T_k er ikke-tom og begrænset, så har den et mindste element (da den er delmængde af $\mathbb{Z}$).
Mindste element kaldes $p_k = \min T_k$.
Konstruér følge $a_k = \frac{p_k}{2^k}$, som er ø.g. for S. Da p_k er mindste elemtn, som opfylder, at a_k er en ø.g. kan $\frac{p_k - 1}{2^k}$ ikke være ø.g.
Der fås, da de venstre brøker ikke er ø.g., at

$$\frac{p_k - 1}{2^k} = \frac{2p_k - 2}{2^{k+1}} < a_{k+1} = \frac{p_{k+1}}{2^{k+1}} \leq \frac{2p_k}{2^k} = a_k \tag{1.3}$$

hvilket betyder, at

$$p_{k+1} = 2p_k \text{ eller } p_{k+1} = 2p_k \tag{1.4}$$

Næste skridt er altså mindre-end-lig det foregående. Derfor

$$0 \leq a_k - a_{k+1} = \frac{p_k}{2^k} - \frac{p_{k+1}}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^{k+1}} \tag{1.5}$$

Lad $m > n \geq 1$. Så er

$$
\begin{aligned}
0 &\leq a_n - a_m && (1.6)\\
&= (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \ldots + (a_{m-2} - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_m) && (1.7)\\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} && (1.8)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \ldots + \frac{1}{2^{m-n-2}} + \frac{1}{2^{m-n-1}} \right) && (1.9)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{\frac{1}{2^{m-n}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right) && (1.10)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \left(2 - \frac{1}{2^{m-n-1}} \right) && (1.11)\\
&= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} && (1.12)\\
&\leq \frac{1}{2^n} && (1.13)
\end{aligned}
$$

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ er altså Cauchy.
Sæt $s = \lim_{n\to\infty} a_k$ og antag s ikke ø.g.

$$\exists x \in S : x > s \tag{1.14}$$

Lad $\varepsilon = x - s > 0$ og find k således

$$x - s = \varepsilon > |a_k - s| = a_k - s \text{ (a_k er aftagende)} \tag{1.15}$$

$x > a_k$ er modstrid, da $a_k = \frac{p_k}{2^k}$, som var ø.g. for S.
Antag for modstrid, at $s' < s$.
Find k, så $\frac{1}{2^k} < s - s'$. $s' < s - \frac{1}{2^k} \leq a_k - \frac{1}{2^k} = \frac{p_k - 1}{2^k}$ Ovenstående siger, at $\frac{p_k-1}{2^k}$ er en ø.g., hvilket er i modstrid med tidligere. ■

2 | Grænseværdier

Definitioner der skal være styr på

- 4.1 (Talfølger)
- 4.2 (Konvergens af talfølger)
- 4.6 (Begrænset talfølge)
- 4.9 (Begrænsethed af konvergent talfølge)
- 4.17 og 4.20 (Divergens mod $\pm\infty$)

Sætninger, som kan bevises til eksamen

- 6.41 (Grænseværdi for en monoton funktion)
- 6.34 eller 6.44 (Grænseværdi for en sammensat funktion. II)

Theorem 2.0.2 (Grænseværdi for en sammensat funktion) *Lad* $f\ :]a,\infty[\rightarrow\ \mathbb{R}$ *og* $g\ :]b,\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ *være to reelle funktioner således, at* $g(x)\ \in]a,\infty[$ *for* $x\ \in]b,\infty[$.
Bevis, at hvis $g(x) \rightarrow \infty$ *for* $x \rightarrow \infty$ *og* $f(x) \rightarrow c$ *for* $x \rightarrow \infty$*, så gælder* $f(g(x)) \rightarrow c$ *for* $x \rightarrow \infty$.

Proof **(i)** Bevis, at

$$\forall \varepsilon > 0 \exists > 0 : x \geq k \qquad \Rightarrow \qquad |f(g(x)) - c| < \varepsilon \tag{2.1}$$

Ifølge definition 6.42

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R} : x \geq k \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - c| < \varepsilon \tag{2.2}$$

På samme vis

$$\forall k \in \mathbb{R} \exists \tilde{k} > 0 : x \geq \tilde{k} \qquad \Rightarrow \qquad g(x) > k \tag{2.3}$$

Dermed haves

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{k} > 0 : x \geq \tilde{k} \qquad \Rightarrow \qquad |f(g(x)) - c| < \varepsilon \tag{2.4}$$

(ii) Bevis, når $c = \pm\infty$.
Antag UTAG, at $c = +\infty$.
Der kan nu skrives (ifølge 6.38)

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists K \in \mathbb{R} : x \geq K \qquad \Rightarrow \qquad f(x) > M \tag{2.5}$$

og på samme måde for g

$$\forall N \in \mathbb{R} \exists \tilde{K} \in \mathbb{R} : x \geq \tilde{K} \qquad \Rightarrow \qquad g(x) > N \tag{2.6}$$

Altså haves

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \tilde{K} \in \mathbb{R} : x \geq K \qquad \Rightarrow \qquad f(g(x)) > M \tag{2.7}$$

Der haves altså, at $f(x) \rightarrow \infty$ for $x \rightarrow \infty$. ■

3 | Bolzano-Weierstrass

Definitioner

- 6.9 (Indre punkt)
- 6.10 (Åben mængde)
- 6.11 (Lukket mængde)
- 6.13 (Begrænset mængde)

Sætninger/lemmaer der skal være styr på med bevis

- 4.16 (Hovedsætning om monotone talfølger)
- 4.26 (Konvergent/divergent følge og delfølge)
- 4.27 (Monoton delfølge)
- 6.5 (Koordinatvis konvergens)

Sætninger, som kan bevises til eksamen

- Forklar BWI (4.28), bevis BWII (4.29) og forklar BWIII (6.7) om punktfølger
- Inddrag punktmængdetopologi i forbindelse med BW-egenskab (6.14) - enhver kompakt delmængde af $\mathbb{R}^n$ er følgekompakt

Theorem 3.0.3 *Enhver begrænset kompleks talfølge har en konvergent delfølge.*

Proof Lad $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ være en begrænset kompleks talfølge.
Skriv $z_n = x_n + iy_n$ - altså udtrykt ved reelle talfølger. Ifølge BWI har $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en konvergent delfølge $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$. Sæt $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.
Følgen $\{y_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ har ifølge BWI en konvergent delfølge $\{y_{n_{k_j}}\}_{j=0}^{\infty}$.
Sæt $\lim_{j\to\infty} y_{n_{k_j}} = y$. Delfølgen $\{x_{n_{k_j}}\}_{j=0}^{\infty}$ har samme grænseværdi x som $\{x_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$.
Delfølgen $\{z_{n_{k_j}}\}_{j=0}^{\infty}$ er nu ifølge sætning 4.14 konvergent. ■

4 Kvotient- og rodkriteriet

Hav styr på

- 4.35 (Halelemma, indskudsregel for rækker)
- 4.34 (Sammenligningskriteriet)
- 4.11 (Konvergent delfølge større end et tal fra et vist trin)

Disposition

- Forklar talfølge, række, kvotientrække og konvergens af denne og/eller sammenligningskriteriet og halelemmaet
- Bevis rod- og/eller kvotientkriteriet for rækker i bogen (4.36 og 4.37) eller for potensrækker i noterne (Sætning 6) og fortsæt med konvergensradius

Theorem 4.0.4 (Kvotientkriteriet) *Lad $\sum_{n=1} \infty a_n$ være en række med positive led og antag, at grænseværdien*

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \tag{4.1}$$

eksisterer (den må gerne være ∞). Så gælder

- ***a*** *Hvis $q < 1$, er rækken konvergent.*
- ***b*** *Hvis $q > 1$ er rækken divergent.*

Proof **(a)** Antag $q < 1$ og lad $r > q$. Find ved lemma 4.10 (større end et tal fra et vist skridt) et $N \in \mathbb{N}$ således

$$q < \frac{a_{n+1}}{a_n} < r \text{ for } n \geq N \tag{4.2}$$

Hvilket medfører

$$a_{n+1} < a_n r \tag{4.3}$$

Ved at føre dette videre i successive skridt fra N fås

$$a_{N+1} < a_N r \tag{4.4}$$
$$a_{N+2} < a_{N+1} r < a_N r^2 \tag{4.5}$$
$$\vdots \tag{4.6}$$
$$a_{N+k} < a_N r^k \tag{4.7}$$

Det k'te led i halen af den oprindelige række er mindre end det k'te led af kvotientrækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_N r^n$, som er konvergent, da $r < 1$. Sammeligningskriteriet giver, at halen er konvergent, og halelemmaet giver, at hele rækken er konvergent. **(b)** Antag $q > 1$. Fra lemma 4.10 (større end et tal fra et vist skridt) fås et $N \in \mathbb{N}$ således at

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} > a_n \tag{4.8}$$

Rækkens led går ikke mod 0, og rækken konvergerer altså ikke. ■

Theorem 4.0.5 (Konvergensradius) *Hvis grænseværdien*

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{a_{|n+1|}} \tag{4.9}$$

eksisterer (må gerne være ∞), da er R konvergensradius for enhver potensrække på formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$.

Proof Når $z \neq a$ giver antagelsen om $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(z-a)^{n+1}|}{|a_n(z-a)^n|} = \frac{|z-a|}{R} \tag{4.10}$$

som har samme form som ovenstående kvotientkriterium.
Altså

$$|z-a| < R \quad \Rightarrow \quad \frac{|z-a|}{R} < 1 \tag{4.11}$$

$$|z-a| > R \quad \Rightarrow \quad \frac{|z-a|}{R} > 1 \tag{4.12}$$

Dermed er $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ konvergensradius for rækken. ∎

5 | Kontinuitetsbegreber og -egenskaber

Ting der skal være styr på

- 5.3 (Kontinuitet i et punkt)
- 5.6 (Følgekontinuitet)
- 5.7 (Følgekarakterisation af kontinuitet)
- 5.8 (Kontinuitet (i alle punkter))

I kapitel 6 defineres kontinuitet for funktioner af flere variable, og definitioner og sætninger er analoge med dem i kapitel 5. I stedet for absolutværdi bruges normen. Der findes desuden disse yderligere kontinuitetsbegreber i kapitel 6 og 7:

- 6.28 (Uniform kontinuitet)
- 6.29 (Uniformt kontinuert funktion på kompakt mængde)
- 7.5 (Hvis f er differentiabel i a er f kontinuert i a)

For vektorfunktioner gælder samme begreber om kontinuitet, hvis alle funktionerne i vektorfunktionen er kontinuerte. Se 6.45-6.47.

Disposition

- Forklar kontinuitet ved topologiske rum
- Bevis, at f er kontinuert i "ε-δ"-forstand hvis og kun hvis f er kontinuert mellem de topologiske rum (A, T_A) og $(\mathbb{R}^m, T_{\mathbb{R}^m})$ ifølge Definition 1.3, hvor T_A er sportopologien (se Definition 1.4).

6 Hovedsætninger om kontinuerte funktioner

De tre hovedsætninger

- 5.13 (Begrænsethed)
- 5.14 (Eksistens af største- og mindsteværdi)
- 5.16 (Mellemværdisætningen)

Sætningerne 6.26 og 6.27 siger tilsvarende om kontinuerte funktioner af flere variable på kompakte mængder.

Theorem 6.0.6 (Mellemværdisætningen) *Hvis funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert og d er et reelt tal, der ligger strengt mellem $f(a)$ og $f(b)$, så finder der et tal $c \in [a,b]$ således, at $f(c) = d$.*

Til dette skal bruges følgende lemma.

Lemma 6.0.1 *Hvis funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert, og der gælder $f(a) < 0, f(b) > 0$, så har f et nulpunkt $c \in [a,b]$.*

Proof Betragt $A = \{x \in [a,b] | f(x) \leq 0\}$. Da er A

- ikke-tom, da $a \in A$
- opad begrænset, da $x \in A \leq b$

Sæt $c = \sup A$ og vis, at $0 \leq f(c) \leq 0$.

Bevis for $\mathbf{f(c) \leq 0}$
Opskriv

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : x > c - \varepsilon \text{ for } \varepsilon = 1/n, n = 1, 2, \ldots \tag{6.1}$$

Da c ø.g. og $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n$:

$$c - \frac{1}{n} < x_n \leq c \tag{6.2}$$

Altså $x_n \to c$ for $n \to \infty$.
f er kontinuert og dermed følgekontinuert, så

$$f(x_n) \to f(c) \text{ for } n \to \infty \tag{6.3}$$

Da $x_n \in A$ følger at $f(x_n) \leq 0$ og dermed fra korollar 4.12 (om grænseværdier af en følge, som er ≤ 0) at $f(c) \leq 0$.

Bevis for $f(c) \geq 0$
Da $f(c) \leq 0$ og $f(b) > 0$ er $c < b$.
Konstruér følge $\{x'_n\}_{n=0}^{\infty}$, hvor $x'_n = c + 1/n$. Fra et vist trin er $x'_n \in [a,b]$ og $x'_n \to c$ for $c \to \infty$. Da c er ø.g. for A og $x'_n > c$ er $x'_n \notin A$ og altså $f(x'_n) > 0$. Altså fås med korollar 4.12, at $f(c) \geq 0$. ■

Proof (Bevis for Middelværdisætningen) d ligger strengt imellem $f(a)$ og $f(b)$ - altså

$$f(a) < d < f(b) \text{ eller } f(a) > d > f(b) \tag{6.4}$$

Hvis ovenstående lemma anvendes på funktionen $x \mapsto f(x) - d$ eller $x \mapsto d - f(x)$ findes d til at være lig c iovenstående bevis. Grafen forskydes, således $f(a) < 0$ eller $f(a) > 0$. ■

7 Åbne og lukkede mængder

Bogen

- 6.8 (Kugle)
- 6.9 (Indre punkt)
- 6.10 (Åben mængde)
- 6.11 (Lukket mængde)
- 6.12 (Følgekarakterisation af lukkede mængder)

Afsnit 1.4 om kompakthed i noterne

Omhandler lukkede mængder i et topologisk rum. Viser, at lukkede og begrænsede mængder er kompakte.

- Definition 1.12 (Lukket mængde)
- Definition 1.13 (Kompakt mængde)
- Definition 1.14 (Hvis $K \in X$ er kompakt, er $f(K)$ kompakt)
- Proposition 1.15 (Hvis $C \in K$ (kompakt), så er C kompakt)
- Defition 1.16 (Følgekompakthed)

Afsnit 2.1 om metriske rum i noterne

- Definition 2.1 (Metrisk rum)
- Definition 2.2 (Åbne og lukkede kugler)
- Definition 2.3 (Topologien induceret af en metrik)
- Definition 2.9 (Hvis $K \in X$ er kompakt, som er K lukket og begrænset)

Afsnit 2.3 om normerede vektorrum i noterne

- Definition 2.16 (Normeret vetkorrum)
- Sætning 2.19 (Heine-Borels sætning)

Bevis til eksamen

Der kan gøres flere ting men 6.12 om følgekarakterisation af lukkede mængder er oplagt. Derefter eventuelt 2.9 i noterne.

- Nem(meste)
  Definér åbne og lukkede mængder ved definition 1.12 i noterne. Definér derefter kompakte mængder ved topologi (1.13 i noterne) og bevis slutteligt 1.15 om lukkede delmængder af kompakte mængder.
- Mellem(ste)
  Definér åbne og lukkede mængder og begrænsethed mht. metriske rum og bevis derefter 2.9 om lukket- og begrænsethed af kompakte mængder i metriske rum.
- Svær(este)
  Bevis 2.19 (Heine-Borels sætning) eller tilhørende lemmaer om at kompakte mængder i $\mathbb{R}^n$ er lukkede og begrænsede.

Theorem 7.0.7 (Følgekarakterisation af lukkede mængder) *En delmængde $F \subset \mathbb{R}$ er lukket, hvis og kun hvis følgende betingelse er opfyldt:*

For enhver punktfølge $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ i F gælder, at hvis den er konvergent,
så er grænsepunktet $lim_k \rightarrow \infty x^k = x \in F$.

Proof Det skal bevises, at en vilkårlig punktfølge med alle punkter i F for alle k med en eksisterende grænseværdi har denne grænseværdi i F.
Antag for modstrid, at $x \in F$. Så ligger x i komplementærmængden $\mathbb{R}^n \backslash F$.
Der konstrueres en kugle med radius r og centrum x. Denne ligger i $\mathbb{R}^n \backslash F$. Da $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ er konvergent mod x gælder der fra et vist trin, at

$$||x^k - x|| < r \qquad \Rightarrow \qquad x^k \in \mathbb{R}^n \backslash F \tag{7.1}$$

hvilket er modstrid.

Antag for modstrid, at F ikke er lukket. Så er komplementet $\mathbb{R}^n \backslash F$ ikke åbent. Det skal negeres, at alle punkter er indre punkter i komplementet:

$$\neg(\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash F \; \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash F) \tag{7.2}$$

$$\exists x \in \mathbb{R}^n \backslash F \; \forall r > 0 : B_r(x) \nsubseteq \mathbb{R}^n \backslash F \tag{7.3}$$

Kan også skrives som at en kugle på randen af komplementet har en fællesmængde med F:

$$\exists x \in \mathbb{R}^n \backslash F \; \forall r > 0 : B_r(x) \cap F \neq \emptyset \tag{7.4}$$

Lad y^k opfylde

$$\forall k \in \mathbb{N} : \exists y^k \in B_r(x) \cap F \tag{7.5}$$

Punktfølgen $\{y^k\}_{n=1}^{\infty} \in F$ konvergerer altså mod x, som derfor på være i F. Altså er modstrid opnået og F er lukket. ∎

Theorem 7.0.8 (Kompakt delmængd af metrisk rum er lukket og begrænset) *Lad (X, d) være et metrisk rum. Hvis $K \subset X$ er kompakt, så er K lukket og begrænset.*

Proof Antag for modstrid, at K ikke lukket. Så er komplementet K^c ikke åbent.
Der eksisterer et punkt $a \in K^c$ som ikke er et indre punkt. Fællesmængde mellem kugle på randen og K er ikke-tom.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \overline{B_{\frac{1}{n}}(a)} \cap K \neq \emptyset \tag{7.6}$$

Den åbne overdækning

$$\left\{ \overline{B_{\frac{1}{n}}(a)}^{c} \right\}_{n=1}^{\infty} \tag{7.7}$$

kan ikke udtryndes til en endelig overdækning i modstrid med at K er kompakt.
Da $K \in X$ er kompakt og $a \in X$ findes en endelig udtynding af $X = \cup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$ således $K \subset \cup_{i \in J}^{\infty} = B_{\max\{n_i | i \in J\}}(a)$. Altså er K begrænset. ∎

8 Differentiation

Definitioner

- 5.24 (Arcus sinus)
- 5.26 (Arcus tanges)
- 6.9 (Indre punkt)
- 6.10 (Åben mængde)
- 7.1 (Differentialkvotient)

Sætninger og lemmaer

- 5.9 (Sum og produkt af kontinuerte funktioner)
- 5.11 (Sammensat funktion)
- 5.23 (Omvendt funktion)
- 6.35 (Grænseværdi og kontinuitet)
- 7.2 (Vigtige differentialkvotienter)
- 7.6 (Kædereglen)
- 7.7 (Omvendt funktion)
- 7.8 (Arcus-funktionernes differentialkvotienter)

Vigtige sætninger/definitioner

- Definition 7.3 (o-funktion)
- Lemma 7.4 (Hvis f er differentiabel findes en o-funktion...)
- Sætning 7.5 (Kontinuert hvis differentiabel) - gør brug af 7.4, 5.9 og 5.11 til bevis
- Sætning 7.1 (Regneregler for diffferentiation)

Theorem 8.0.9 (Differentiation med o-funktion) *Se side 112 i bogen.*

Proof (a)
Hvis første ligning i sætningen skal gælde, skal $h \neq 0$ medføre

$$\varphi(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \tag{8.1}$$

Da ovenstående ikke er defineret ved $h = 0$ omskrives og $\varphi(h)$ defineres ved

$$\varphi(h) = \begin{cases} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) & \text{for } h \neq 0 \\ 0 & \text{for } h = 0 \end{cases} \tag{8.2}$$

Så er det opfyldt, at $\varphi(0) = 0$ og $\varphi(h) \to 0$ for $h \to 0$.

(ii)
Hvis

$$f(a+h) = b + \alpha h + \varphi(h)h \tag{8.3}$$

fås

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \alpha + \varphi(h) \tag{8.4}$$

som har grænseværdien α for $h \to 0$. ■

Theorem 8.0.10 *Hvis f er differentiabel i a, så er f kontinuert i a.*

Proof Af lemma 4 følger, at

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varphi(x-a)(x-a) \tag{8.5}$$

Hvor højre side er kontinuert ifølge regnereglerne for kontinuerte funktioner (sætning 5.9 og 5.11 om sum af og sammensatte kontinuerte funktioner). ■

9 Rolles- og Middelværdisætningen

En del af beviserne i afsnittet om differentiation bygger på indre punkter og åbne og lukkede kugler og mængder, så hav styr på disse definitioner - også i PMT.

Sætninger, lemmaer og definitioner

- Definition 7.14 (Lokalt ekstremum)
- Sætning 5.14 (Eksistens af største- og mindsteværdi)
- 7.13 (f' og monotoni)

Vær klar på de mange korollarer, som gør brug af f' og f'' i forbindelse med lokalt og globalt ekstremum.

Beviser til eksamen

Bevis

- 7.9 (Maksimums- og minimumspunkt)
- 7.10 (Rolles sætning)
  Her bruges sætning 5.4 og 7.9.
- 7.11 (Middelværdisætningen)

Theorem 9.0.11 (Hældning i ekstremumspunkt er 0) *Lad I være et interval og c et indre punkt i I. Hvis c er et ekstremumspunkt for f og f er differentiable i c, så er $f'(c) = 0$.*

Proof Bevis ved modstrid - hvis $f'(c) \neq 0$, så er c ikke ekstremumspunkt.
Da f er differentiabel eksisterer en o-funktion, således

$$f(c+h) = f(c) + (f'(c) + \varphi(h))h \qquad \forall h \in [-r, r] \tag{9.1}$$

Lad $f'(c) < 0$. Ddermed eksisterer et $\delta \in]0, r[$ således $f'(c) + \varphi(h) < 0$ for alle $|h| < \delta$ (tjek definition af o-funktion). Dermed følger

$$f(c+h) < 0 \text{ for } 0 < h < \delta \tag{9.2}$$

$$f(c+h) > 0 \text{ for } -\delta < h < 0 \tag{9.3}$$

Altså har f ikke ekstremumspunkt i et punkt c, hvor $f'(c) \neq 0$. ■

Theorem 9.0.12 (Rolles sætning) *Lad $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være en funktion, som er kontinuert i det lukkede interval $[a, b]$ og differentiabel i det åbne interval $]a, b[$.*

Hvis $f(a) = f(b) = 0$, eksisterer det er $c \in]a, b[$ således, at det gælder $f'(c) = 0$.

Proof Ifølge 5.14 (eksistens af største- og mindsteværdi) har f ekstremumspunkter på intervallet fordi den er kontinuert. I disse ekstremumspunkter er hældningen 0 ifølge ovenstående sætning.
Hvis ekstremumspunkterne er i endepunkterne, så er de både maksimum og minimum og funktionen er dermed konstant. ■

Theorem 9.0.13 (Middelværdisætningen) *Lad $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ være en funktion, som er kontinuert i det lukkede interval og differentiabel i det åbne.*

Så eksisterer der et $c \in]a, b[$ således at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{9.4}$$

Proof Lav ret linje mellem endepunkterne:

$$y = \alpha x + b, \qquad \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{9.5}$$

Lav kontinuert funktion

$$h(x) = f(x) + (\alpha x + b) \tag{9.6}$$

Se, at $h(a) = h(b) = 0$. Da gælder Rolles sætning således der findes et c

$$h'(c) = 0 = f'(c) - \alpha = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{9.7}$$

Dermed er sætningen bevist. ■

10 L'Hôpitals regel

Definitioner, sætninger og lemmaer der skal være styr på

- Sætning 4.33 (Konvergent, hvis afsnitsfølgen er begrænset)
- Sætning 4.34 (Sammenligningskriteriet)
  Benytter definition 4.33
- Sætninger og lemmaer om konvergens af Cauchy-følger i $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ (4.42-4.45)
- Sætning 6.35 (Grænseværdi og kontinuitet)
- Sætning 7.5 (Kontinuert, hvis differentiabel)
- Sætningerne 7.9, 7.10 og 7.11, som leder op til og er Middelværdisætningen

Sætninger til eksamen

- Sætning 7.19 (Cauchys middelværdisætning)
  Benyttes i beviset for 7.20
- Sætning 7.20 (L'Hôpitals regel om $0/0$-udtryk, når x går mod a)
- Sætning 7.21 (L'Hôpitals regel om $0/0$-udtryk, når x går mod ∞)
- Sætning 7.22 (L'Hôpitals regel om ∞/∞-udtryk)

Theorem 10.0.14 (L'Hôpitals regel om 0/0-udtryk, når x går mod a) *Se side 123 i bogen.*

Proof Kun for grænseovergangen $f(x) \to 0$ for $x \to a^+$ for $x \in]a, a+\rho[$.

(i)
f og g er definerede og kontinuerte i $[a, a+\rho[$, ifølge sætning 6.35 om grænseovergange.

(ii)
Det er antaget, at $f'(x)/g'(x)$ er defineret i et interval $]a, a+\rho_1[$, og derfor $g'(x) \neq 0$.
f og g skal være definerede for at de afledede kan, så $\rho_1 \leq \rho$.
Brøken $f(x)/g(x)$ er også defineret, da g opfylder kravene i Middelværdisætningen og man kan derfor skrive

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(\xi) \tag{10.1}$$

og siden $g(a) = 0$, så er $g(x) \neq 0$.

(iii)
Bevis

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x - a < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| < \varepsilon \text{ når} \tag{10.2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x - a < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - c \right| < \varepsilon \tag{10.3}$$

Lad $\varepsilon > 0$ være bestemt og $\delta > 0$ for nedereste ligning. Dette skal gælde for øverte ligning.
f og g opfylder kravene i Cauchys middelværdisætning, så

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)} \tag{10.4}$$

Altså haves

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| = \left| \frac{f(\xi)}{g(\xi)} - c \right| < \varepsilon \tag{10.5}$$

Bevis for $x \to a^-$ gøres ved at lave funktioner med omvendt fortegn. Se opgave 292. ∎

11 | Riemann-integralet

Definitioner der skal være styr på

- Definition 8.1 (Inddeling, oversum, undersum)

Beviser og definitioner til eksamen

- Bevis sætning 8.7 (En funktion er integrabel hvis og kun hvis der findes en fin nok inddeling for $\varepsilon > 0$)
- Bevis sætning 8.9 (En kontinuert funktion er integrabel)
  Der gøres brug af sætning 6.29 om uniform kontinuitet.

Theorem 11.0.15 (Integrabel hviss over- og undersum går mod hinanden) *En begrænset funktion f på et lukket interval er integrabel hvis og kun hvis der for ethvert $\varepsilon > 0$ findes en inddeling D af intervallet således*

$$O(D) - U(D) = \sum_{i=1}^{n} (G_i - g_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon \tag{11.1}$$

Proof Antag for modstrid at f ikke er integrabel

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \neq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \tag{11.2}$$

Sætning 8.4 giver

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \tag{11.3}$$

Det vides, at

$$U(D) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \text{ og } O(D) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \tag{11.4}$$

Sæt

$$\varepsilon = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \tag{11.5}$$

Omskriv

$$O(D) - U(D) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \varepsilon \tag{11.6}$$

Summerne konvergerer dermed mod hinanden og er i modstrid med antagelsen. Der er brugt, at f begrænset på et lukket og begrænset interval.

(ii)
Bevis, at summerne går mod hinanden

$$O(D) - U(D) < \varepsilon \tag{11.7}$$

Da integralet er infimum af mængden af oversummer ved forskellige inddelinger fås

$$O(D_1) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} \tag{11.8}$$

På samme måde med supremum for undersummerne

$$U(D_2) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} \tag{11.9}$$

Det følger dermed, at

$$O(D) - U(D) < \varepsilon \tag{11.10}$$

f er integrabel hvis og kun ovenstående gælder. ■

12 | Analysen Fundamentalsætning

Der skal forberedes på alt fra Analysens Fundamentalsætning til slutningen af kapitel 8.

Beviser til eksamen

- Præsentér sætning 8.13 (Indskudsreglen) og 8.14 (Middelværdisætningen for integraler)
- Bevis Analysens Fundamentalsætning

Theorem 12.0.16 (Analysen Fundamentalsætning) *Lad I være et interval og lad $f : I \to \mathbb{R}$ være en kontinuert funktion. Lad endvidere $a \in I$ og lad funktionen $F : I \to \mathbb{R}$ være defineret ved*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt \tag{12.1}$$

Så er F kontinuert på I og differentiabel i det indre af I mid differentialkvotienten

$$F'(x) = f(x) \tag{12.2}$$

Proof (i)
Lad x og $y \in I$. Med indskudsreglen og Middelværdisætningen fås

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt = \int_x^y f(t)\ dt = f(c)(y-a) \tag{12.3}$$

hvor c ligger mellem x og y.

(ii)
Bevis, at F kontinuert i $x \in I$. f er kontinuert i x, så der findes $r > 0$, således

$$|t - x| < r \qquad \Rightarrow \qquad |f(t)| \le K \tag{12.4}$$

Lad vilkårligt y opfylde ovenstående, og et c imellem y og x opfylde $F(y) - F(x) = f(c)(y-x)$. Da $|f(c)| \le K$ fås $|F(y) - F(x)| \le K|y-x|$. Hvis $|y-x|$ mindskes er det mindre end et ε og F er altså kontinuert i x.

(iii)
Bevis, at F er differentiabel i x med differentialkvotient $f(x)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |y-x| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x)\right| < \varepsilon \tag{12.5}$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Dermed

$$\exists\delta_1 > 0 \forall t \in I : |t - x| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{12.6}$$
$$\exists\rho > 0 \forall t \in \mathbb{R} : |t - x| < \rho \quad \Rightarrow \quad t \in I \tag{12.7}$$

Sæt $\delta = \min\{\delta_1, \rho\}$ og find y således $|y - x| < \delta < \delta_1 \leq \rho$. Et tal c mellem x og y opfylder også ovenstående og ligning i **(i)**. Dermed

$$\left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \right| = |f(c) - f(x)| < \varepsilon \tag{12.8}$$

Dermed er F differentiabel i $x \in I$ med differentialkvotient $f(x)$. ■