1 Impulsrespons

LTI system

$$
\begin{aligned}
y[n] &= T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-k]\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]T\left(\delta[n-k]\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]h[n-k]
\end{aligned}
$$

Lineære differensligninger med konstante koefficienter

$$
\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{N} b_m x[n-m]
$$

LTI er BIBO-stabilt hvis og kun hvis impulsresponsen ligger i ℓ^1:

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty
$$

Foldning og multiplikation i tid og frekvens

Digitale filtre

2 Overføringsfunktioner

Brug impulseresponsen som indledning.

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] * h[n] \\
Y(z) &= X(z)H(z) \\
H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)}
\end{aligned}
$$

3 Fouriertransformationen

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j\omega kn/N}$$
$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{-j\omega kn/N}$$

Sekvens, som er samples af DTFT.

Frekvensanalyse

FIR-filterdesign

4 Z-transformationen

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-1} \tag{1}$$

Det diskrete modstykke til Laplace:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \tag{2}$$

Region of convergence Z-transformationen konvergerer for flere sekvenser end Fouriertransformationen.

$$|X(re^{j\omega})| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \tag{3}$$

Hvis $r = 1$ svarer ovenstående til Fouriertransformationen. Konvergensen afhænger af Z:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z|^{-n} < \infty \tag{4}$$

Nuller og poler

5 Nyquist's samplesætning

Nyquist-Shannons samplsætning: Lad $x_c(t)$ være et båndbegrænset signal, hvor

$$X_c(j\omega) = 0 \text{ for } |\Omega| \geq \Omega_N. \tag{5}$$

Da er $x_c(t)$ unikt specificeret ved dets samples $x[n] = x_c(nT)\,, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ hvis

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N \tag{6}$$

således

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\mathrm{sinc}(\omega_N t - n\pi) \tag{7}$$

Fouriertransformation af δ og impulstog

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\}(\omega) = 1$$
$$\mathcal{F}\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

hvor $\omega_s = 2\pi f_s$.

Aliasering

Plancherels sætning om energibevarelse

6 IIR-filtre, impulsinvariantmetoden og den bilineære transformation

Tjek semesterprojekt

IIR-filter
Rekursiv algoritme, med uendelig impulsrespons – fortsætter for evigt. Designes ud fra specifikationer omkring stop-, pas- og transitionsbånd.

Butterworth

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\omega/j\omega_c)^{2N}} \tag{8}$$

Impulsinvariantmetoden
Et kontinuert filter samples:

$$h[n] = T_d h_c(nT_d) \tag{9}$$

hvor T_d er samplingsperioden. Frekvensresponsen for det samplede filter er

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\frac{\omega}{T_d} + j\frac{2\pi}{T_d}k\right) \tag{10}$$

Kontinuerte filtre er ikke båndbegrænsede, så der sker aliasering.

Den bilineære transformation
Motivation: analoge filtre er ikke båndbegrænsede. Den bilineære konverterer den reelle tallinje til enhedscirklen. Derfor sker forvrængning.

$$\begin{aligned} z &= e^{j\omega} \\ \omega &= T_d\Omega \\ s &= j\Omega \\ s &\approx \frac{2}{T_d}\frac{z-1}{z+1} \\ z &= \frac{1 + \frac{T_d}{2}\sigma + j\frac{T_d}{2}\Omega}{1 - \frac{T_d}{2}\sigma - j\frac{T-d}{2}\Omega} \end{aligned}$$

Generelt for IIR-filtre

- Opstil amplituderespons $|H_c(s)|$ for filter ud fra specifikationer

- Find poler og brug dem i venstre halvplan til at opstille ny $|H_c(s)|$
- Partialbrøksopspaltning
- Invers Laplacetransformation
- Sampling af impulsrespons
- Z-transformation

7 Lineær fase, FIR-filtre og vinduesmetoden

Nødvendig betingelse for lineær fase

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \sin(\beta + (n - \alpha)\omega) = 0 \tag{11}$$

Værdier somtilfredsstiller denne betingelse:

- $\beta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$
- $\alpha = \frac{M}{2} \Rightarrow 2\alpha = M$
- $h[n] = h[2\alpha - n] = h[M - n]$

FIR-filtres poler

$$\begin{aligned} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^{N} a_j z^{-j}} \\ &= \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} \bigg|_{a_j=0,\, j=1,\ldots,N} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{M-i}}{z^M} \end{aligned}$$

8 Geometrisk baseret analyse af amplitude- og fase-respons

Se slides 20-25 i lektion 9.

Hvis overføringsfunktionen $H(z)$ haves, så kan der laves geometrisk analyse af denne.

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^- k}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{12}$$

- $M = N$: forlæng $H(z)$ med z^M

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^{M} z^{M-k}} \tag{13}$$

- $M > N$: forlæng med z^M

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k x^{M-k}}{\sum_{k=0}^{M} a_k^{M-k}} \tag{14}$$

- $M < N$: forlæng med z^N

$$H(z) = \frac{z^{N-M} \sum_{k=0}^{M} b_K z^{M-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}} \tag{15}$$

Faktorisér $H(z)$

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{L}(z - c_k)}{\prod_{k=1}^{L}(z - d_k)}, \qquad L = \max\{N, M\} \tag{16}$$

Amplituderespons

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \frac{\prod_{k=1}^{L} |e^{j\omega} - c_k|}{\prod_{k=1}^{L} |e^{j\omega} - d_k|} \tag{17}$$

Faserespons

$$\arg\{H(e^{j\omega}\} = \arg\{\frac{b_0}{a_0}\} + \sum_{k=1}^{L} \arg\{e^{j\omega} - c_k\} - \sum_{k=1}^{L} \arg\{e^{j\omega} - d_k\} \tag{18}$$

9 Frekvenstransformation af IIR-filtre

Ud fra et prototype IIR-lavpasfilter transformeres dette om til en anden type. Generelt:

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^{N} \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \tag{19}$$

Indsættes

$$H(z) = H_{LP}(Z)\Big|_{Z^-1 = G(z^{-1})} \tag{20}$$

For et lavpasfilter

$$G(z) = \frac{z^{-1} - a_k}{1 - a_k z^{-1}} \tag{21}$$

hvor

$$\alpha = \frac{\sin[(\theta_c - \omega_c)/2]}{\sin[(\theta_c + \omega_c)/2]} \tag{22}$$

og

$$\omega = \arctan\left[\frac{(1-\alpha^2)\sin(\theta)}{2\alpha + (1+\alpha^2)\cos(\theta)}\right] \tag{23}$$

10 Kvantiseringseffekter og skalering af filterstrukturer

Ved variabelkvantisering øges SNR med 6dB hver gang opløsningen øges med 1 bit.

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} = 6.02N + 1.76\mathrm{dB} \tag{24}$$