12.5
Lit $X \sim \mathcal{U}(-1, 1)$ and $Y \sim \mathcal{U}(-1, 1)$ for X and Y independent. First relate $P[X^2 + Y^2 \leq 1]$ to the value of π. Then generate realizations of X and Y and use them to estimate π.

Relatér cirklens areal til hele firkantens areal.

$$\frac{\pi}{4} \tag{1}$$

Dette er sandsynligheden for at et punkt med koordinaterne X og Y lander i cirklen. Altså

$$\begin{aligned} P[X^2 + Y^2 \leq 1] &= \frac{4}{\pi} \\ 4P[X^2 + Y^2 \leq 1] &= \pi \end{aligned}$$

Der genereres punkter med koordinater X og Y og forholdet mellem antallet af punkter, som opfylder $X^2 + Y^2 \leq 1$ og det totale antal punkter bruges som $P[X^2 + Y^2 \leq 1]$.

12.11
If (X, Y) has a standard bivariate Gaussian PDF, find $P[X^2 + Y^2 = 10]$.

Sandsynligheden for at kontinuert fordelte punkter lander på en cirkel (rand) er 0, da randen har areal på 0.

12.15
If

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

find the marginal PDFs.

Find marginal PDF ved

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y)\, dy \tag{3}$$

Altså

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2\, \mathbf{1}(0 < x < 1) \mathbf{1}(0 < y < x)\, dy \\ &= 2 \int_0^x \mathbf{1}(0 < x < 1)\, dy \\ &= 2x\, \mathbf{1}(0 < x < 1) \end{aligned}$$

For Y:

$$\begin{aligned}
p_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2\,\mathbf{1}(0 < x < 1)\mathbf{1}(0 < y < x)\,dx \\
&= 2\int_0^1 \mathbf{1}(0 < y < x)\,dx \\
&= 2\int_0^1 \mathbf{1}(0 < y)\mathbf{1}(y < x)\,dx \\
&= 2\int_y^1 \mathbf{1}(y < x)\,dx \\
&= 2\,\mathbf{1}(y < x) - 2y\,\mathbf{1}(y < x) \\
&= 2(1-y)
\end{aligned}$$

13.2

Determine if the proposed conditional PDF

$$p_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} c\,\mathrm{e}^{\frac{-y}{x}} & y \geq 0, x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

is a valid conditional PDF for some c. If so, find the required value of c.

Udtrykket integreres i forhold til y.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} c\,\mathrm{e}^{\frac{-y}{x}}\,dy \\
=&c\left[-x\,\mathrm{e}^{\frac{-y}{x}}\right]_0^{\infty} \\
=&c\left(-x \cdot 0 - (-x \cdot 1)\right) \\
=&cx
\end{aligned}$$

Funktionen er valid og $c = \frac{1}{x}$.