Opgave 2
The discrete random variable X has cdf

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 1/4 & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ 3/4 & \text{for } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{for } x \geq 3 \end{cases} \tag{1}$$

Find **(a)** $P(X = 1)$, **(b)** $P(X = 2)$, **(c)** $P(X = 2.5)$ and **(d)** $P(X \leq 2.5)$.

(a) F bruges til at beregne dette. For at finde den ønskede sandsynlighed bruges den tilsvarende samlede minus den foregående samlede.

$$P(X = 1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{4} \tag{2}$$

(b) På samme måde som før:

$$P(X = 2) = F(2) - F(1) = \frac{1}{2} \tag{3}$$

(c) Da der er tale om en diskret stokastisk variabel kan den ikke være lig 2.5.

$$P(X = 2.5) = 0 \tag{4}$$

(d) Der er tale om alle muligheder lavere end 2.5, så der benyttes $F(2)$.

$$P(X \leq 2.5) = F(2) = \frac{3}{4} \tag{5}$$

Opgave 4
The random variable X has pmf $p(k) = ck, k = 1, 2, 3$. Find **(a)** the constant c, **(b)** the cdf F, **(c)** $P(X \leq 2)$, and **(d)** $P(X > 1)$.

(a) Summen af alle p skal være 1.

$$\sum_{k=1}^{3} p(k) = \sum_{k=1}^{3} ck = 1 \tag{6}$$

Altså er $c = \frac{1}{6}$.

(b) Da $p(1) = \frac{1}{6}$, $p(2) = \frac{2}{6}$ og $p(3) = \frac{3}{6}$ fås

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 1/6 & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ 3/6 & \text{for } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{for } x \geq 3 \end{cases} \tag{7}$$

(c) Det er den samlede sandsynlighed for alle muligheder under 2.5.

$$P(X \leq 2) = F(2) = \frac{1}{2} \tag{8}$$

(d) Den samlede sandsynlighed for alle muligheder større end 1.

$$p(X > 1) = F(3) - F(1) = \frac{5}{6} \tag{9}$$

Opgave 12
Let f be the pdf of a continuous random variable X. Is it always true that $f(x) \leq 1$ for all x in the range of X? Does it have to be true for some x in the range of X?

Nej og nej. Hvis intervallet i en $Unif$ er mindre end 1 må der nødvendigvis være $f(x)$ som er større end 1.

Opgave 13
The function f is defined as $f(x) = cx^2$, $0 \leq x \leq 1$.**(a)** Determine the constant c så that this becomes a pdf of a random variable of X. **(b)** Find the cdf and compute $P(X > 0.5)$.**(c)** Let $Y = \sqrt{X}$ and find the pdf of Y.

(a) Arealet under kurven for $f(x)$ skal være 1. Altså integreres der fra 0 til 1.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 cx^2\,dx = \frac{1}{3}cx^3 \tag{10}$$

For at ovenstående bliver 1 skal $c = 3$.

(b) Nedenstående sammenhæng benyttes

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \tag{11}$$

Altså

$$F(x) = \int_0^x 3x^2\,dt = [x^3]_0^x = x^3 \tag{12}$$

Herefter beregnes $P(X > 0.5)$ med nedenstående sammenhæng.

$$P(x \in B) = \int_B f(x)\,dx \tag{13}$$

Altså

$$P(X > 0.5) = \int_{0.5}^1 f(x)\,dx = \int_{0.5}^1 3x^2\,dx = [x^3]_{0.5}^1 = 1 - 0.5^3 = 0.875 \tag{14}$$

(c)