AALBORG UNIVERSITET
STUDENTERRAPPORT

Første Studieår Matematik-Teknologi
Strandvejen 12-14 9000 Aalborg
http://tnb.aau.dk

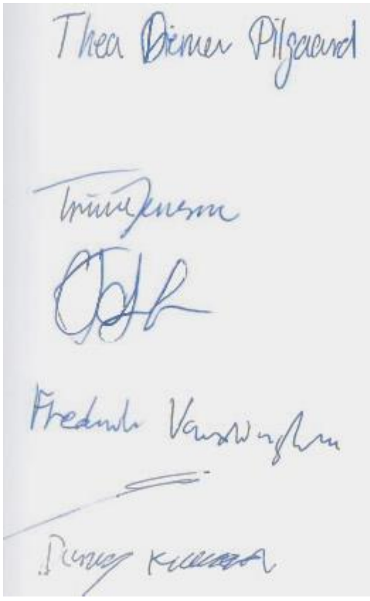
Titel: **Eulers metode**

Tema: **Differentialligninger**

Projektperiode: **1/9 – 2015-25/9 - 2015**

Projektgruppe: B146

Deltagere:
Christian Hilligsøe Toft
Danny Manstrup Kristensen
Frederik Appel Vardinghus-Nielsen
Sebastian Ejlskov Schrøder
Thea Diemer Pilgaard
Trine Nyholm Jensen



Vejledere:
E. Susanne Christensen

Synopsis:

Dette P0-projekt handler om numerisk løsning af differentialligninger ved brug af Eulers metode. Vi anvender metoden på differentialligninger og vurderer om den er brugbar ud fra en sammenligning med den eksakte løsning af samme ligninger.

Dette er vores problemformulering: *Hvordan og til hvad bruger man differentialligninger? Hvordan benyttes Eulers metode og hvilken geometrisk intuition ligger til grund for denne? Hvordan agerer Eulers metode kontra den eksakte løsning til en differentialligning?*

I projektet redegør vi for udvalgte differentialligninger og for geometrien bag Eulers metode. Herefter afprøver vi Eulers metode på to differentialligninger for derefter at sammenligne resultaterne med den eksakte løsning. Gennem denne sammenligning vurderer vi i hvilket omfang metoden er anvendelig.

Eulers metode viser sig at være upræcis på flere forskellige måder. Ved små skridtlængder h afrundes betydende decimaler, og ved store skridtlængder afviger den numeriske løsning så meget fra

Oplagstal: 3
Sideantal:16
Bilagsantal og -art: 1, skema
Afsluttet den 18.09.2015

Indholdsfortegnelse

Indledning

Differentialligninger er et vigtigt redskab i matematikken, da de kan bruges til at beskrive mange fænomener fra den virkelige verden. For nogle differentialligninger er det dog ikke muligt at finde en eksakt løsning.
Vi vil i denne rapport derfor kigge nærmere på, hvordan man numerisk kan finde frem til en tilnærmet løsning for sådanne uløselige differentialligninger. Dette vil vi gøre ved hjælp af Eulers metode.
Der findes andre metoder til at beregne en numerisk løsning med mere nøjagtighed end Eulers metode, f.eks. Runge-Kutta metoden. Eulers metode bruges ikke i praksis, men kan passende bruges til at forklare princippet bag metoderne anvendt til at finde en numerisk tilnærmet løsning til en differentialligning. [1]

Problemformulering

Hvorfor, og til hvad bruger man differentialligninger? Hvordan benyttes Eulers metode og hvilken geometrisk intuition ligger til grund for denne? Hvordan agerer Eulers metode kontra den eksakte løsning til en differentialligning? Og er det et godt værktøj til brug i praksis.

Fremgangsmåde

Vi vil kort redegøre for differentialligninger og brugen af disse. Her vil vi fokusere på ordinære differentialligninger af første orden.
Herefter vil vi redegøre for geometrien bag Eulers metode samt anvendelsen af denne. Vi vil anvende Eulers metode på differentialligningerne $y' = 2y$ og $y' = 3 \cdot \sqrt{y} \cdot (\sqrt{x} + 1)$. Her vil vi undersøge hvilken betydning det har for den numeriske løsning, når man ændrer på skridtlængden h, ved at sammenligne vores fundne numeriske løsninger med den eksakte løsning til differentialligningerne.
Til sidst i rapporten vil vi vurdere hvilke fordele og ulemper, der er ved brug af Eulers metode.

Differentialligninger

Differentialligninger er et ekstremt nyttigt matematisk værktøj, der kan bruges til at beskrive diverse naturvidenskabelige fænomener, såsom bevægelsen i et pendul, forholdet mellem byttedyr og rovdyr[2], vækst i population[3], men de kan også bruges til at beskrive økonomiske fænomener. [4]

Definition af differentialligninger

En differentialligning er en ligning, der indeholder den afledede af en funktion, og funktionen selv. Et simpelt eksempel kunne være:

$$f'(t) = a \cdot f(t) + c \tag{1.1}$$

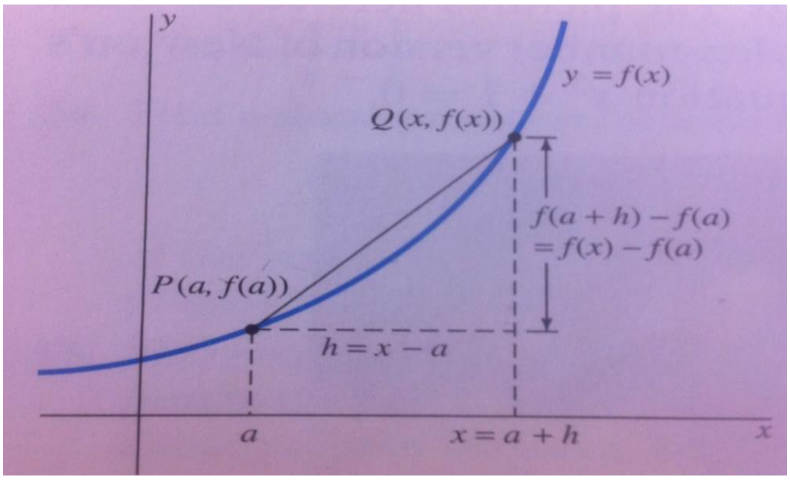
Eksemplet i sætning (1.1), er en differentialligning af første orden. En differentialligning kan være af højere orden. Ordenen af en differentialligning, er defineret ved den højeste afledede. En differentialligning af nte orden, er på følgende form:

$$f^n(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} \dots \frac{d}{dx}\right) \cdot f(x)$$
$$\text{(gentages n gange)} \tag{1.2}$$

Hvad er den afledede?

Når man differentierer en funktion fås den afledede, der kan bruges til at beskrive hældningskoefficienten til den oprindelig funktion. Det betyder at den afledede er beskrevet som:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f(a+h) - f(a))}{h} = \lim_{x \to a} \frac{(f(x) - f(a)}{x - a} \text{ [5]} \tag{1.3}$$



(Figur 1) [6]

Det kan ses af sætning 1.3 og figur 1 at hvis h er gående mod 0, så vil $f'(x)$ være hældningskoefficienten til funktionen $f(x)$.

Uheldigvis er der nogle differentialligninger, der ikke kan løses eksakt, og man er derfor nødt til at tilnærme sig med en numerisk løsning. Ét af de værktøjer, der kan benyttes for at få en numerisk løsning til en differentialligning, er Eulers metode, som vi vil beskrive nærmere i denne rapport.

Geometrien bag Eulers metode

I et hvilket som helst punkt (x,y) i x,y-planen, hvor differentialligningen $\frac{dy}{dx} = g(x,y)$ er defineret, er hældningskoefficienten bestemt ved $g(x,y)$.
Løsningen til differentialligningen, er en funktion, hvis graf har hældningskoefficienten $F(x,y)$ i et hvilket som helst punkt (x,y) på grafen. [7]

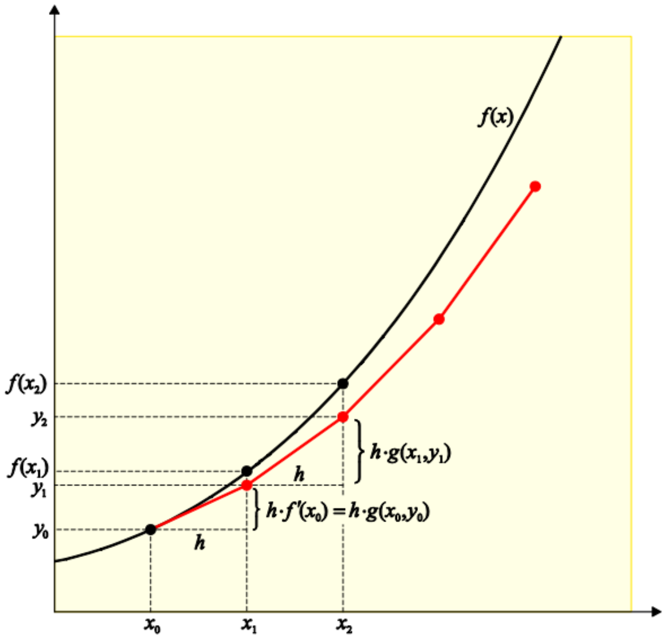
Eulers metode udnytter dette til at finde en tilnærmet numerisk løsning til differentialligningen. Dette gøres ved at tegne en række linjeelementer med hældningskoefficienterne,

$$g(x_0, y_0), \quad g(x_1, y_1), \quad g(x_2, y_2), \quad \dots, \quad g(x_n, y_n), \quad g(x_{n+1}, y_{n+1})$$

der forbinder punkterne

$$(x_0, y_0), \quad (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \dots, \quad (x_n, y_n), \quad (x_{n+1}, y_{n+1})$$

For at finde en løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = g(x, y)$ med randbetingelsen $y(x_0) = y_0$, fastsætter vi en skridtlængde h, med hvilken vi bevæger os fra ét punkt til det næste ud af x-aksen.



(Figur 2)[8]

Vi starter i punktet (x_0, y_0), hvor grafen har hældningskoefficienten $g(x_0, y_0)$. På figur 2 ses det, at vi finder koordinaterne til punktet (x_1, y_1) på følgende måde

$$x_1 = x_0 + h, \qquad y_1 = y_0 + h \cdot g(x_0, y_0)$$

(2.1)

For at finde punktet (x_2, y_2) tager vi nu udgangspunkt i (x_1, y_1) med den tilhørende hældningskoefficient $g(x_1, y_1)$

$$x_2 = x_1 + h, \qquad y_2 = y_1 + h \cdot g(x_1, y_1)$$

(2.2)

Generelt for at finde det næste punkt på vores numerisk tilnærmede graf tager vi altså udgangspunkt i det forrige punkt, samt hældningskoefficienten til dette punkt. Dette formulerer Euler således

$$x_{n+1} = x_n + h, \qquad y_{n+1} = y_n + h \cdot g(x_n, y_n)$$

(2.3, Eulers metode)

Fra hvert punkt (x_n, y_n) på vores tilnærmede graf tegner vi altså en lige linje med hældningskoefficienten, $g(x_n, y_n)$ hen til det næste punkt, (x_{n+1}, y_{n+1}). Dette betyder, at der kun korrigeres for grafens hældning ved de beregnede punkter. Dermed vil den numeriske løsning af ligningen ændres alt efter hvilken h-værdi, der anvendes.

Anvendelse af Eulers metode

Vi har vist, hvordan en første ordens differentialligning kan løses numerisk ved brug af Eulers metode. I dette afsnit benytter vi Eulers metode på en differentialligning, som vi *kan* løse eksakt. Dette gøres fordi den numeriske løsning derefter kan sammenlignes med den eksakte. Her vil vi også undersøge, hvordan forskellige værdier af h har indflydelse på den numeriske løsning, og hvorvidt Eulers metode er et godt værktøj til at lave numeriske løsninger af differentialligninger.

Differentialligningen y'=2y

Den første differentialligning vi vil undersøge er denne:

$$y' = 2y, hvor\ y(0) = 1$$

Til at løse denne numerisk bruges Eulers metode. Til at starte med forsøges med h = 0,1. Altså ser ligningssættet ud som følger:

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}1 \cdot 2y$$

$$x_{n+1} = x_n + 0{,}1$$

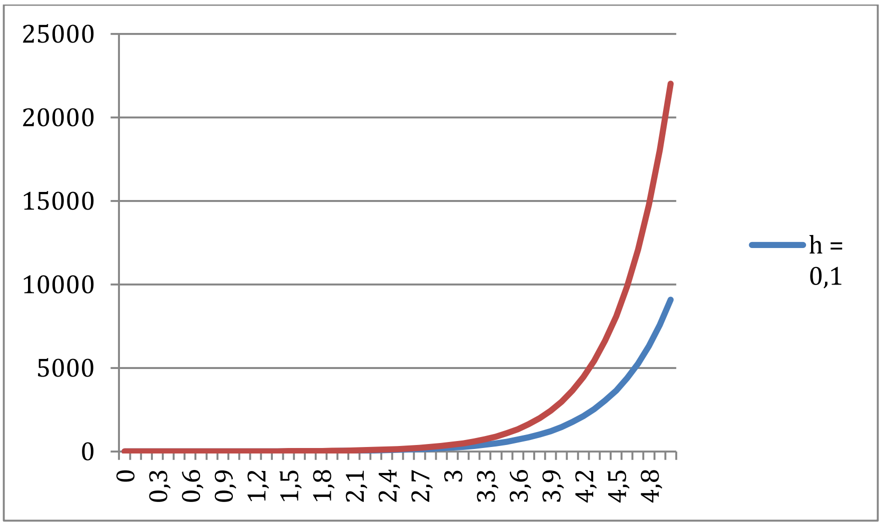
Den eksakte løsning findes med dsolve i Maple.

$dsolve([y' = 2y, y(0) = 1])$

$$y(x) = e^{2x}$$

Denne skal bruges som kontrol for Eulers metode.
Når startværdien indsættes i den numeriske løsning, og der laves flere iterationer vil der fremkomme et datasæt, som er den numeriske løsning til differentialligningen i intervallet $[x_0\, ; x_{n+1}]$.

I nedenstående graf er ligningen løst numerisk i intervallet [0;5].



(Graf 1)

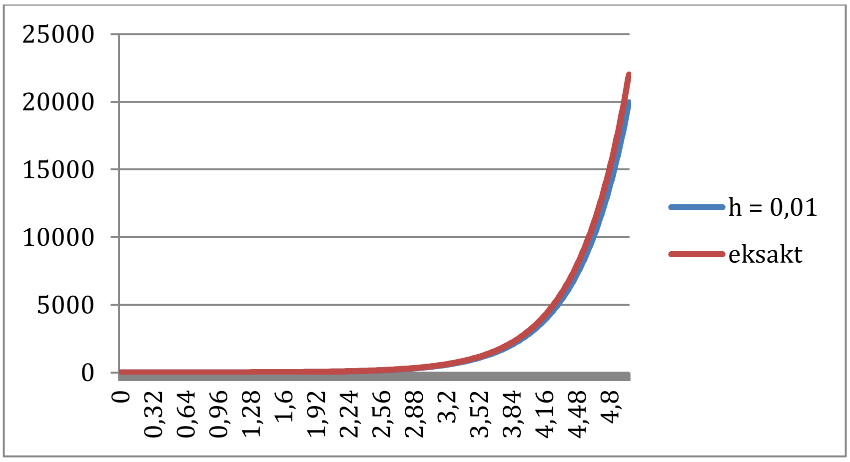
På grafen ses den eksakte løsning grafisk repræsenteret af den røde linje, og den numeriske løsning med Eulers metode som den blå. Det er tydeligt, at Eulers metode afviger gradvist mere og mere, jo større x bliver.
Afvigelsen kan beregnes, og repræsenteres som procentvis afvigelse fra den eksakte løsning. Dette er simpelt, og gøres ved brug af en y-værdi fra den eksakte løsning, og fra den numeriske løsning fra samme x-koordinat. Altså

$$Afvigelse = 58{,}68\%$$

Dette er en meget stor afvigelse, og endda ved en meget lav x-værdi. For at øge præcisionen af den numeriske løsning mindskes h.
Denne gang forsøges med h = 0,01. Her forventes en bedre tilnærmelse af den eksakte løsning.

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}01 \cdot 2y$$
$$x_{n+1} = x_n + 0{,}01$$

Grafen ser ud som følger:

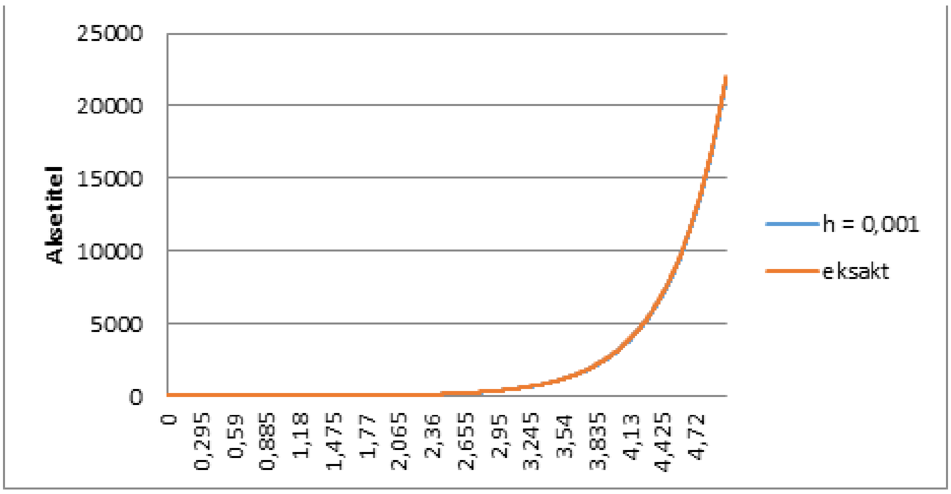


(Graf 2)

Denne gang, hvor der er taget væsentligt flere skridt, ligger grafen for den numeriske løsning langt tættere op ad den eksakte løsnings graf. Altså stemmer det overens med vores hypotese omkring variation af h. Som ovenfor vil vi beregne en tilsvarende men forhåbentlig mindre afvigelse fra det eksakte resultat.

$$Afvigelse = 9{,}38\%$$

Som forventet er afvigelsen mindre ved en skridtlængde på 0,01, end ved en på 0,1 Det er dog stadig en upræcis approksimation, så der forsøges med h = 0,001.



(Graf 3)

$$y_{n+1} = y_n + 0{,}001 \cdot 2y$$

$$x_{n+1} = x_n + 0{,}001$$

$$Afvigelse = 0{,}98\%$$

Afvigelsen er nu under 1%, hvilket er en udmærket tilnærmelse. Det er værd at bemærke, at når x bliver større, så skal der til stadighed mindre og mindre skridtlængde h til for at bevare en acceptabel præcision.

I skema 1 ses udvalgte x-værdier og procentvis afvigelse ved forskellige skridtlængder.

	h = 0,1	h = 0,01	h = 0,001
x = 1	16,20	1,95	0,20
x = 2	29,78	3,87	0,40
x = 3	41,16	5,75	0,60
x = 4	50,69	7,59	0,80
x = 5	58,68	9,40	0,99

(Skema 1)

Differentialligningen $y' = 3 \cdot \sqrt{y}\left(\sqrt{x} + 1\right)$

Her vil vi igen undersøge hvorvidt Eulers metode er anvendelig og opfører sig på samme måde som i det forrige afsnit.

Vi anvender Eulers metode på følgende første ordens differentialligning

$$y' = 3 \cdot \sqrt{y} \cdot (\sqrt{x} + 1)$$

hvor $y(0) = 1000 \;\; h = 1$

ved indsættelse får vi følgende

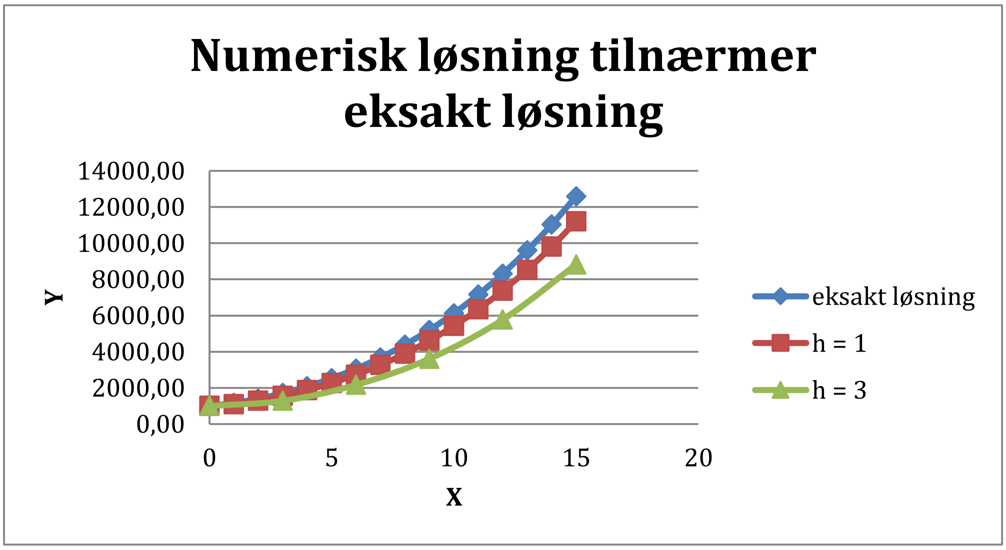
$$y_{n+1} = y_n + 1 \cdot 3 \cdot \sqrt{y} \cdot (\sqrt{x} + 1)$$
$$x_{n+1} = x_n + 1$$

Herefter har vi ændret vores skridtlængde, *h,* til henholdsvis 3 og 0,1.

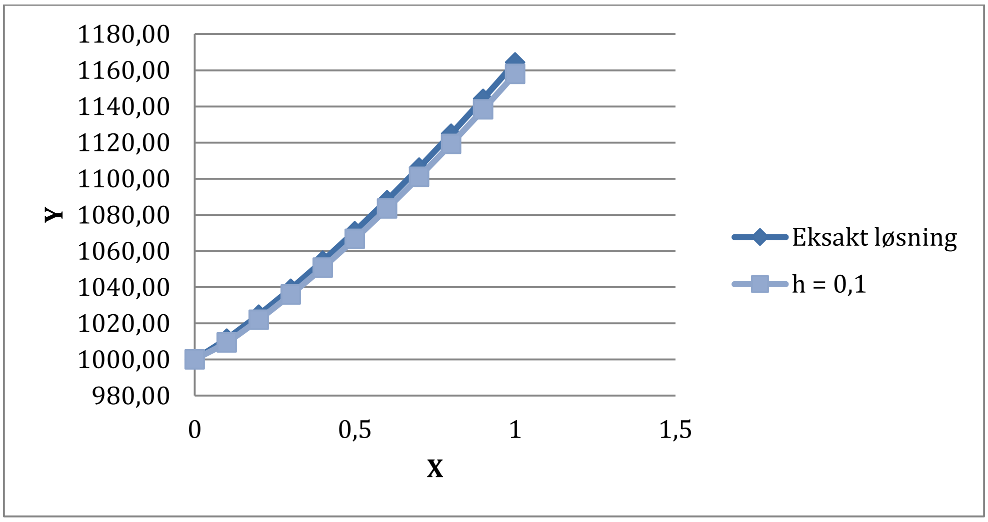
Den eksakte løsning finder vi ved at anvende dsolve på differentialligningen i Maple:

$$dsolve([y' = 3 \cdot \mathrm{sqrt}(y) \cdot (\mathrm{sqrt}(x) + 1), y(0) = 1000])$$
$$y(x) = 3x^{5/2} + 20x^{3/2}\sqrt{10} + x^3 + \frac{9}{4}x^2 + 30\sqrt{10}\,x + 1000$$

Vi har opstillet resultaterne i følgende to grafer. *Graf 4 og 5*



(Graf 4)



(Graf 5)

I graf 4 ser vi tydeligt, hvordan afvigelsen bliver væsentligt større, når vi går fra en skridtlængde på $h = 1$ til $h = 3$. Tilsvarende ser vi i graf nr. 5, at afvigelsen bliver markant mindre når vi anvender $h = 0{,}1$.

For nærmere undersøgelse har vi beregnet den procentvise afvigelse, ved flere x-værdier. *Resultaterne ses i skema 2 og 3 herunder.*

	h = 0,1
x = 0,1	0,20
x = 0,3	0,32
x = 0,6	0,43
x = 0,9	0,52

Skema 2 - Afvigelse i %

	h = 1	h = 3
x = 3	8,98	24,76
x = 6	10,82	29,23
x = 9	11,34	30,59
x = 12	11,27	30,57
x = 15	10,95	29,91

Skema 3 - Afvigelse i %

Ud fra graferne 4 og 5, forventer vi at den procentvise afvigelse vil øges, når x går mod uendeligt. I skema 1 ser vi en procentvis afvigelse på under 1% og konkluderer derfor, at tilnærmelsen igen giver en acceptabel løsningskurve. Vi ser også, at den procentvise afvigelse stiger i takt med at x-værdien øges. Dette er dog ikke tilfældet i skema 2, hvor vi har den procentvise afvigelse ved $h = 1$ og $h = 3$. Her ser vi, at den procentvise afvigelse er stigende op til x = 9. Herefter falder den procentvise afvigelse igen langsomt.

Da dette ikke stemmer overens med vores tidligere antagelser, undersøger vi tallene nærmere ved at beregne den procentvise afvigelse for de resterende x værdier. Vi sætter dem over for den faktiske afstand mellem de to punkter, som vi kan finde ved at trække de to y værdier fra hinanden. *Se skema 4 i bilag 1.*

Her kan vi se, at den faktiske afstand mellem punkterne bliver større, hvor den procentvise afvigelse bliver mindre. Ud fra det kan vi fastslå, at den aftagende afvigelse ikke skyldes, at den numeriske løsningskurve igen tilnærmer sig den eksakte løsning. Vi antager, at når y-værdierne bliver så store, vil den procentvise afvigelse bliver mindre i det afstanden mellem den eksakte, og den numeriske løsning er forsvindende lille i forhold til y-værdierne, til trods for at den er stigende.

Konklusion

Vi bruger differentialligninger, som et matematisk værktøj, der er i stand til at beskrive komplekse modeller fra den virkelige verden. Disse modeller kan blandt andet være vækstmodeller, forhold mellem rovdyr og byttedyr, fysiske fænomener og økonomiske tilstande.

Vi har udledt Eulers metode ud fra den viden, at for en graf til løsningen til en given differentialligning, er hældningskoefficienten $g(x_n, y_n)$i et hvilket som helst punkt (x_n, y_n) på grafen. Ved anvendelse af Eulers metode beregnes værdierne af koordinaterne i punktet (x_{n+1}, y_{n+1}), ved at tage udgangspunkt i det forrige koordinat (x_n, y_n). Dette giver en numerisk løsning til differentialligningen. Den numeriske løsning er en tilnærmelse af den eksakte løsning, og det er derfor vigtigt at beregne afvigelserne, hvis man vil finde ud af om metoden er anvendelig.

Vi har anvendt Eulers metode på to differentialligninger, og har, ved sammenligning med ligningernes eksakte løsninger, konkluderet at det er muligt at finde en numerisk løsning med en tilpas lille afvigelse til, at den kan accepteres som en løsning til differentialligningen.
Det viser sig dog at dette kræver meget små værdier af skridtlængden h, hvilket betyder at der skal mange skridt, og altså mange beregninger til. På samme tid kommer man til at arbejde med så små tal, at der kan opstå en større usikkerhed, i og med, at tallene afrundes, og resultaterne dermed ikke bliver så præcise, som ved anvendelse af større h-værdier.
Dermed kan vi konkludere, at der vil opstå usikkerheder uanset om der anvendes en lille h-værdi, hvor tallene ikke længere er præcise, eller en større h-værdi, hvor afvigelsen fra den eksakte løsning bliver forøget væsentligt. Dette stemmer udmærket overens med at Eulers metode til at finde en numerisk løsning, ikke bliver brugt i praksis, hvor det ikke er muligt at opstille den eksakte løsning.

Referenceliste

[1] Kreyszig, Erwin, *Advanced Engineering Mathematics* 9th *Edition,* Wiley, 2006, s. 903-904.

[2] Kreyszig, Erwin, *Advanced Engineering Mathematics 9th Edition,* Wiley, 2006, s. 3.

[3] Kreyszig, Erwin, *Advanced Engineering Mathematics 9th Edition*, Wiley, 2006, s. 26.

[4]http://www.denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Matematik_og_statistik/Analyse,_vektor-_og_matrixregning_og_funktionsteori/differentialligning, 17.09.2015

[5] Edwards & Penney, *Calculus 6th Edition*, Prentice-Hall, Inc. 2002, s.102

[6] Edwards & Penney, *Calculus 6th Edition*, Prentice-Hall, Inc. 2002, s.102

[7] Edwards, C. Henry m.fl, *Calculus 7th Edition,* Pearson, 2008

[8] http://www.matematiksider.dk/projekter/eulers_metode.pdf, 18.09.2015

Bilag 1

% Afvi-gelse	Afstand
0,00	0,00
5,97	69,50
7,78	109,19
8,98	153,38
9,82	204,48
10,41	263,53
10,82	331,17
11,09	407,87
11,25	493,97
11,34	589,77
11,36	695,51
11,34	811,39
11,27	937,58
11,19	1074,24
11,08	1221,50
10,95	1379,48
10,82	1548,27
10,68	1727,97
10,53	1918,67
10,38	2120,42
10,22	2333,30
10,07	2557,38
9,92	2792,69
9,76	3039,30
9,61	3297,24
9,46	3566,57
9,32	3847,30
9,17	4139,49
9,03	4443,16
8,89	4758,35
8,76	5085,07
8,63	5423,36
8,50	5773,24

SKEMA 4 – Procentvis afvigelse og faktisk afstand når h = 1