Opgave 1, s. 166

Let $\{p_n\}_0^\infty$ be an orthogonal set in $\mathcal{L}^2_w(a,b)$, where p_n is a polynomial of degree n.

(a) Fix a value of n. Let $x_1, x_2, \dots, x_k$ be the points in (a,b) where p_n changes sign i.e., where its graph crosses the x-axis, and let $q(x) = \prod_1^k (x - x_j)$. Show that $p_n q$ never changes sign on (a,b) and hence that $\langle p_n, q\rangle_w \neq 0$.

Da q har samme nulpunkter som p_n og skifter fortegn i samme punkter, så kan der generelt siges, at hvis q og p_n har modsat fortegn for $x < x_1$, så vil produktet af de to være negativt $\forall x$, og hvis de har samme fortegn for $x < x_1$, så vil produktet af de to være positivt $\forall x$.

(b) Show that the number k of sign changes in part **(a)** is at least n. (Hint: If $k < n$ then $\langle p_n, q\rangle_w = 0$. Why?)

Hvis q har $k < n$ fortegnsskift, så kan det udtrykkes som en lineær kombination af $p_1, \dots, p_k$ og denne lineære kombination vil derfor være ortogonal på p_n, hvilket giver et indre produkt på 0. Altså opnås modstrid fra **(a)**, og derfor må $k \geq n$.

(c) Conclude that p_n has exactly n distinct zeros, all of which lie in (a,b). (Geometrically, this indicates that p_n becomes more and more oscillatory on (a,b) as $n \to \infty$, rather like $\sin nx$.)

Da q har n fortegnsskift, så er det af grad højst n, og med **(b)** fås, at $n \leq k \leq n$.

Opgave fra Moodle

Betragt en vægt w på (a,b) og to tilhørende ortogonale familier af polynomier $\{P_n\}$ og $\{Q_n\}$. Vis, at der findes konstanter $\{c_n\}$ således $P_n = c_n Q_n$.

Vi ved, at Q_n kan skrives som en linearkombination af P_n. Altså

$$Q_n = \sum_{j=0}^{n} c_j P_j. \tag{1}$$

Det vides jævnfør Lemma 6.1, at de første $n-1$ led skal være nul, da

$$c_j = \frac{\langle P_j, Q_n\rangle}{||P_j||} = 0. \tag{2}$$

Altså haves, at

$$Q_n = c_n P_n. \tag{3}$$

Opgave 1, s. 173

Show that

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j \le n/2} \frac{(-1)^j (2n-2j)!}{j!(n-j)!(n-2j)!} x^{n-2j} \tag{4}$$