Opgave 164

e16g3113

December 1, 2016

Opgave 292 - Bevis for L'Hopitals regel om 0/0-udtryk ved grænseovergange $x \to a^-$ og $x \to a$

a) Tilfældet $x \to a^-$

Antag, at f og g er defineret og differentiable i en interval $]a-\rho, a[$ til venstre for punktet a, og at der gælder:

$$f(x) \to 0 \text{ for } x \to a^- \tag{1}$$

$$g(x) \to 0 \text{ for } x \to a^- \tag{2}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to c \text{ for } x \to a^- \tag{3}$$

Bevis, at så gælder der

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to c \text{ for } x \to a^- \tag{4}$$

Lad $\tilde{f}(x) = f(-x)$ og $\tilde{g}(x) = g(-x)$. $\tilde{f}$ og $\tilde{g}$ er da defineret og differentiable i intervallet $]-a, -a+\rho[$ og der kigges nu på grænseovergangen $x \to -a^+$.

Lad nu $\tilde{f}(-a) = 0$ og $\tilde{g}(-a) = 0$ Analogt med forberedelserne til beviset for grænseovergangen for $x \to a^+$ laves forberedelse, således middelværdisætningen kan benyttes. Siden $\tilde{g}$ og $\tilde{f}$ er kontinuerte i ethvert punkt af intervallet er de det dermed også i $-a$. $\tilde{f}$ og $\tilde{g}$ er desuden definerede i et interval $]-a, -a+\rho_1[$, hvor $\rho_1 \le \rho$, og hvorpå $\tilde{f}$ og $\tilde{g}$ altså er differentiable.

Dermed opfylder $\tilde{f}$ og $\tilde{g}$ kravene for middelværdisætningen, og der eksisterer et $\xi \in \,]-x, -a[$, således

$$\frac{\tilde{g}(-x) - \tilde{g}(-a)}{-x + a} = \tilde{g}'(xi) \neq 0 \quad \text{og} \quad \frac{\tilde{f}(-x) - \tilde{f}(-a)}{-x + a} = \tilde{f}'(-\xi) \neq 0. \tag{5}$$

Det skal bevises, at når følgende er givet

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : -a < -x < -a + \delta \implies \left| \frac{\tilde{f}(-x)}{\tilde{g}(-x)} - c \right| < \varepsilon \tag{6}$$

så gælder det i følge L'Hopitals regel, at

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : -a < -x < -a + \delta \implies \left| \frac{\tilde{f}'(-x)}{\tilde{g}'(-x)} - c \right| < \varepsilon \tag{7}$$

Lad så $\varepsilon > 0$ være givet og bestem δ i henhold til (6). Herudfra påståes så, at det bestemte δ også vil afparere ε i (7).
Da $f(\tilde{-}a) = g(\tilde{-}a) = 0$ vælges $-x$ nu vilkårligt, sådan at $-a < -x < -a + \delta$ og følgende brøk opstilles

$$\frac{\tilde{f}(-x)}{\tilde{g}(-x)} = \frac{\tilde{f}(-x) - \tilde{f}(-a)}{\tilde{g}(-x) - \tilde{g}(-a)}. \tag{8}$$

Da $x \neq -a$ og $\tilde{g}(0) = 0$ fås at $\tilde{g}(-x) \neq 0$. Altså gælder ifølge Cauchys middelværdisætning

$$\frac{\tilde{f}(-x)}{\tilde{g}(-x)} = \frac{\tilde{f}(-x) - \tilde{f}(-a)}{\tilde{g}(-x) - \tilde{g}(-a)} = \frac{\tilde{f}'(-\xi)}{\tilde{g}'(-\xi)} \tag{9}$$

og da $-a < \xi < -a + \delta$ følger det heraf, at

$$\left| \frac{\tilde{f}(-x)}{\tilde{g}(-x)} - c \right| = \left| \frac{\tilde{f}'(-\xi)}{\tilde{g}'(-\xi)} - c \right| < \varepsilon. \tag{10}$$

Altså haves, at

$$\frac{f(\tilde{-}x)}{g(\tilde{-}x)} \to c \text{ for} - x \to -a^+ \tag{11}$$

i et interval $]-a, -a + \rho[$ til højre for $-a$ og dermed også at

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to c \text{ for } x \to a^- \tag{12}$$

i et interval $]a - \rho, a[$ til venstre for a. ■

b Tilfældet $x \to a$

Antag, at f og g er definerede i nærheden af punktet a, og at der gælder

$$f(x) \to 0 \text{ for } x \to a, \tag{13}$$

$$g(x) \to 0 \text{ for } x \to a, \qquad \text{og} \tag{14}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to c \text{ for } x \to a. \tag{15}$$

Bevis, at så gælder der

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to c \text{ for } x \to a. \tag{16}$$

Da