

P1-projektforslag for matematik-teknologi

5. oktober 2015

I P1-projektperioden arbejdes der med *anvendt lineær algebra indenfor teknologi*. Nedenfor følger projektforslag som alle gør brug af nogle af de matematiske værktøjer fra kursusmodul Lineær Algebra (LIAL). Man må i princippet godt selv definere et projekt, men det skal godkendes af en vejleder.

1 Projektforslag

1.1 Projektforslag #1: Lineær algebra i billedbehandling og -kompression



(a)



(b)



(c)

Figur 1: Billedeksempler: (a) original, (b) støjfyldt og (c) filtreret.

Dette projekt tager udgangspunkt i digitale billedbehandlingsteknikker. Moderne (digital) billedbehandling er i stort omfang ganske enkelt lineær algebra. Dermed kan mange billedbehandlingsteknikker opskrives som operationer på matricer og vektorer.

Et eksempel kunne være, at man gerne vil kunne fjerne støj fra et billede. Her kunne vi have billedet i Figur 1(b), som er forringet af Gaussisk støj (sammenlign med Figur 1(a), som er det originale billede). Som en simpel metode til at "fjerne" støjen kunne man forsøge at filtrere billedet – dvs. tilføre en udglatning af billedet for at gøre støjen mindre synlig. Resultatet ses i Figur 1(c). En almindelig type filtrering kan

skrives på følgende måde:

$$\mathbf{A}_{\text{filt}} = \mathbf{F}^T \mathbf{A} \mathbf{F} \quad (1)$$

Matricen \mathbf{A} repræsenterer billedet (med støj), og matricen \mathbf{F} repræsenterer filter-operationen.

En anden type operationer på billeder, som er meget almindelig og allestedsnærværende i kameraer, TV osv., er kompression. Man komprimerer typisk billeder for at få dem til at fylde mindre på harddisken, at sende over Internettet osv. Dette kan heldigvis gøres effektivt uden at påvirke den synlige kvalitet af billedet nævneværdigt. En udbredt måde at komprimere billeder på er ved at transformere billedet med en bestemt lineær transformation, fjerne de mest ubetydelige af elementerne i det transformerede billede og til slut transformere tilbage igen. Som eksempel ses Figur 2d, hvor dette er gjort med den såkaldte diskrete cosinus-transformation (DCT). Denne kompression kan skrives op efter følgende ligninger:

$$\mathbf{B} = \mathbf{D} \mathbf{A} \quad (2)$$

Igen er \mathbf{A} billedet, \mathbf{D} repræsenterer cosinus-transformationen, og \mathbf{B} er det transformerede billede. Herefter komprimerer vi billedet ved at fjerne de fleste af elementerne i \mathbf{B} – resultatet kalder vi $\tilde{\mathbf{B}}$. Det færdige komprimerede billede $\tilde{\mathbf{A}}$ får vi herefter vha.:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}} \quad (3)$$

Disse eksempler er blot nogle blandt mange lineær algebra-operationer, der typisk laves på billeder.

1.1.1 Projektindhold

I projektet vil vi undersøge, hvordan forskellige typer billedbehandlingsopgaver kan repræsenteres ved hjælp af lineær algebra og undersøge de matematiske egenskaber ved disse operationer. Vi vil undersøge brugen af forskellige transformationer i forbindelse med kompression af billeder og afveje fordele og ulemper ved disse. Vi foreslår, at I fokuserer på følgende to opgaver:

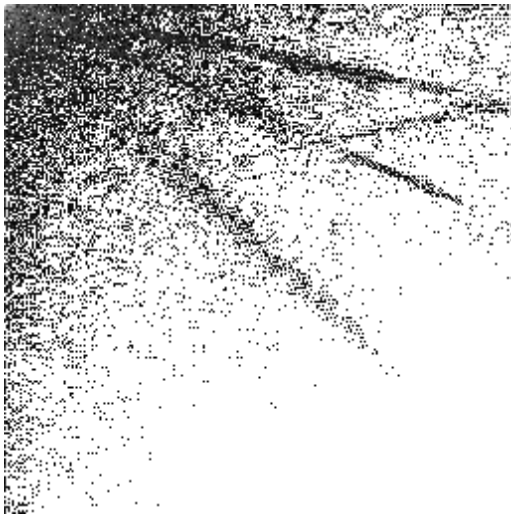
1. Undersøg hvordan en diskret cosinustransform (DCT) virker og repræsenteres ved hjælp af vektorer og matricer. En DCT anvendes for eksempel til at komprimere af musik (MP3) og komprimere af billeder (jpeg), og I skal arbejde med at lave en simpel billedkomprimeringsalgoritme baseret på DCTen.
2. Man kan opnå en endnu bedre komprimere ved at lave det, man på engelsk kalder en principal component analysis (PCA), og den er baseret på en egenverdiopløsning, som I vil lære om på semestret. I skal prøve at komprimere billeder af ansigter ved hjælp af denne algoritme. Se også Projektforslag #4.



(a)



(b)



(c)



(d)

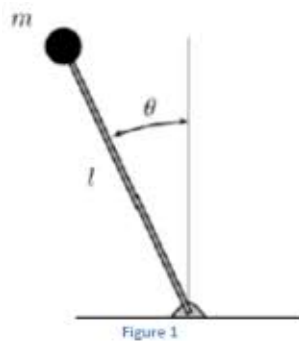
Figur 2: Billedeksempler: (a) original, (b) transformeret, (c) transformeret og komprimeret, og (d) det komprimerede billede.

1.2 Projektforslag #2: Stabilisering af Pendulet

For at et (dynamisk) system skal være interessant set med anvendelses øjne, er det nødvendigt at systemet kan beskrives som et input/output (IO) system, dvs. et system hvis beskrivelse indeholder størrelser (input) der kan påvirkes udefra samt størrelser (output) der kan observeres udefra. Eksempel vis hvis systemet beskriver en bil, da kan speeder og styrtøj betragtes som inputs og bilens placering på vejbane som et output.

For et IO system er den typiske problemstilling ofte den at man ønsker at designe et input signal således at outputtet (dvs. den del af systemet der observeres) følger en ønsket reference. For bil eksemplet ovenfor kunne det omhandle design af autopilot, dvs. hvilket signal skulle sendes til motoren således at bilen holder en konstant fart på 100 km/t (bemærk at signalet ville afhænge af blandt andet vind og terræn). Teorien der beskriver hvorledes dette muligøres kaldes kontrol teori og det er netop den teoretiske overskrift for dette projekt.

I dette projekt vil vi eksemplificere kontrol teorien gennem et studie af hvorledes man stabilisere et omvendt pendul (figure 3)



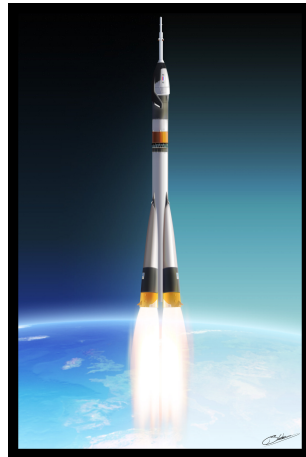
Figur 3: Omvendt pendul

Mere præcist, betragt figure 3 og antag vi kan styre pendulet (dvs. vinklen θ) ved hjælp af en motor fastgjort ved lejet nederst i figur 1. Opgaven består nu i at designe et signal (input) til motoren således at pendulet altid står lodret (dvs. således at referencen $\theta = 0$ følges). Følgende emner vil spille en vigtig rolle i projektet

- Linearisering af ikke lineære differentialligninger
- Lineær (kontrol) differentialligninger
- Stabilisering via placering af egenverdier
- Simulering

Det skal bemærkes at selvom vi i dette projekt "kun" arbejder med "legetøjs versioner" af virkelige IO systemer, så er de metoder og principper vi anvender de samme som for virkelige systemer. For eksempel, en raket, som den russiske Soyuz vist på billedet nedenfor, er et eksempel på et system som - noget forsimplet - kan modelleres som et omvendt (3-dimensionalt) pendul. Gyroer ombord på raketten måler løbende raketens orientering i rummet, og raketdysernes retning kan varieres således at raketten

forbliver lodret under opsendelsen.



Figur 4: Soyuz raket

En god reference til ovenstående problem er Khalils bog kapitel 1.2.1, og 4.4. Hvis der er tid vil der blive mulighed for at implementere løsningen på en forsøgsopstilling.

1.3 Projektforslag #3: Googles PageRank-algoritme

I et netværk som internettet findes der i omegnen af 4 milliarder websider¹. Internettet er et selvorganiseret netværk, hvor det enkelte webside overordnet set selv bestemmer hvilke andre websider de linker til. Ydermere, er det frit for alle websider at linke til alle andre websider. Hvorledes navigerer man, organisere søgninger og prioriterer hvilke hits man vil liste først?

PageRank-algoritmen blev udviklet af Larry Page og Sergey Brin på Stanford University i 1996. Udviklingen af PageRank-algoritmen førte til grundlæggelsen af Google og gjorde det muligt at rangere websider ud fra simple principper og matematiske modeller.

Grundlæggende kræves en definition af hvor interessant en webside er. Hvis webside A henvises til af andre websider B_1, B_2, \dots så må webside A være interessant. Ydermere, hvis fx websiderne B_1 og B_2 er meget interessante, vil A blive mere interessant fordi den henvises til af B_1 og B_2 . Altså desto flere interessante websider der linker til en webside, desto mere interessant må denne webside være.

Overordnet kan internettet betragtes som en orienteret graf², hvor knuderne er websider og kanterne repræsenterer links fra det ene webside til en anden. Formålet med projektet at studere det matematiske grundlag for rangordning af knuder i et netværk. Man må først give en matematisk definition af rang-vektoren. Rang-vektoren indeholder rangeringen af hver knude (website) i netværket (internettet). En definition af den

¹<http://www.worldwidewebsize.com/>

²<http://da.wikipedia.org/wiki/Grafteori>

i 'te websides *PageRank* er

$$P(i) = \sum_{(j,i) \in E} \frac{P(j)}{O_j},$$

hvor E er mængden af kanter, elementet $(j, i) \in E$ betyder der er en kant fra j til i , $P(j)$ er PageRank for webside j , mens O_j er antallet af udgående links fra webside j . Således er PageRanken for webside i givet som en vægtet sum af PageRanken fra de indgående sider.

Giver denne definition mening? Dvs. eksisterer der en PageRank vektor $(P(1), \dots, P(N))$, hvor N er antal knuder. Hvad sker der hvis netværket ikke er stærkt sammenhængende, dvs. hvis der er ikke er en sammenhængende sti mellem alle par af knuder (fx websider uden indgående links)?

Hvordan er det muligt at lave algoritmer til beregning af rang-vektoren? Sådanne algoritmer bør kunne bruges til netværk med ca. 10^{10} knuder.

1.4 Projektforslag #4: Eigenfaces

Dette projekt tager udgangspunkt i anvendelsen af lineær algebra i teknologi, her i form af ansigtsbilleder.

Nogle eksempler på anvendelse af ansigtsbilleder er:

Ansigtsgenkendelse Antag at man har en database med billeder af folks ansigter. Ud fra et andet billede af en person i databasen, ville man så kunne identificere personen? Og ud fra et vilkårligt billede, ville man så kunne sige om billedet viste et ansigt eller ej?

Antropologi Kan man identificere nogle fællestræk for en gruppe af mennesker?

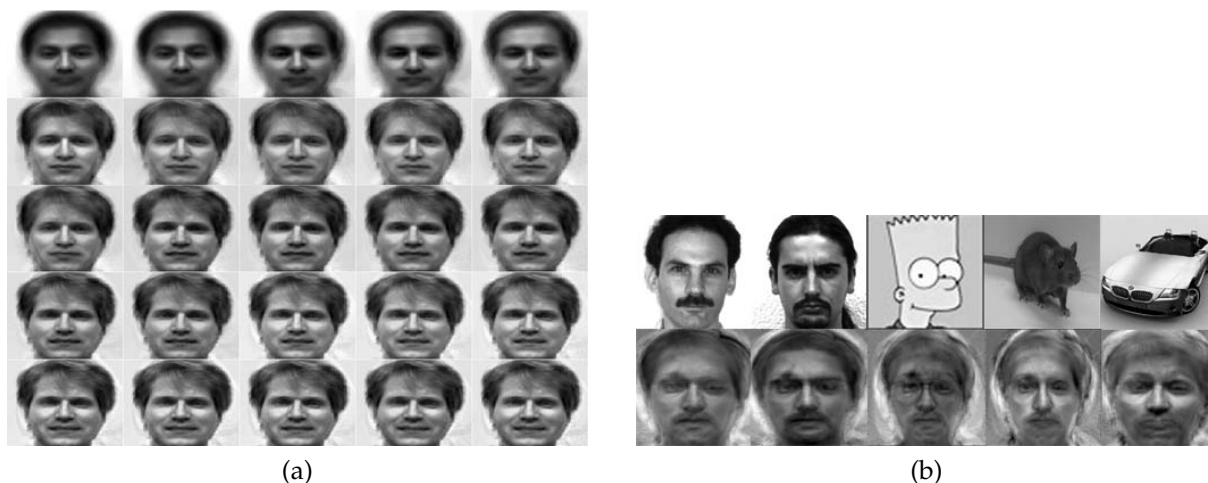
Humørgenkendelse Kan det lade sig gøre at genkende humør og/eller ansigtstræk?

Komprimering Kan billeder af ansigter komprimeres (se også Projektforslag #1)?

1.4.1 Projektindhold

I projektet vil vi undersøge, hvordan billeder kan repræsenteres som vektorer og hvilke operationer fra lineær algebra, der kan give mening at udføre samt de matematiske egenskaber for disse operationer. Vi vil fokusere på en metode, man på engelsk kalder *principal component analysis* (PCA), som er baseret på en egenværdiopløsning (det vil I lære om i løbet af semestret).

Se mere på <https://en.wikipedia.org/wiki/Eigenface> samt eksempelvis <http://www.cs.princeton.edu/~cdecoro/eigenfaces/>.



Figur 5: Billedeksempler: (a) rekonstruktion af et ansigt vha. mere og mere information, (b) eksempler på ansigter og ikke-ansigter. Begge billeder er fra <http://www.cs.princeton.edu/~cdecoreo/eigenfaces/>.

1.5 Projektforslag #5: Forbedring af lydoptagelser med tonal forurening

Ved mange lydoptagelser er der en risiko for, at der kommer uønsket lyd med i optagelsen. En del af de uønskede signaler, som man kan risikere at samle op i en optagelse, er tonale – det vil sige, at de lyder som en tone, der ikke hører til i optagelsen.

Tonen kommer ikke nødvendigvis ind i optagelsen som en del af den lyd, man vil optage, men kan også komme fra det elektriske eller det mekaniske system. F.eks. kan man med en opstilling, hvor ledningsføringen ikke er beskyttet mod elektro-magnetisk indstråling, meget ofte få en elektrisk overhøring fra netfrekvensen. I Europa vil det betyde, at der kommer en 50 Hz tone ind på optagelsen, som ikke har noget med den lyd at gøre, som man vil optage. Det kan være en hjertelydsoptagelse, som er forurennet, eller en live musik optagelse, som ikke kan tages om. Ældre musik optagelser, som er overspillet fra grammofon til digitalt format, kan også have en forstyrrende tone fra den motor, der roterede grammofonen ved afspilningen.

Der findes forskellige metoder i lineær algebra, som kan hjælpe med at fjerne støjen. Man kan multiplicere med en tone med samme amplitude men modsat fase, hvorved tone vil blive elimineret. Hvis tonen ikke er helt stabil, f.eks. kan både netfrekvens og omdrejningshastigheden på grammofonen variere, kan det være en ide at fjerne tonen med et filter, som dæmper ikke bare toner ved den specifikke frekvens, men også nogle få nabo frekvenser.

Vejleder kan hjælpe med at skaffe optagelser med tonal forurening. I kan også selv "forurene" en eksisterende optagelse med en given frekvens med lineær algebra. Så ved I helt præcist, hvilket signal, der skal fjernes, og kan afprøve forskellige teknikker med forskellige typer lyd.

1.6 Projektforslag #6: Ekkofri kommunikation

Når lyden sendes fra en telefon til en anden, vil mikrofonen kunne opsamle lidt af den lyd, som kommer fra højttaleren. Man kan derved komme til at høre sig selv med en forsinkelse, som giver en oplevelse af et ekko. Der er meget svært at gennemføre en normal samtale, når der er en kraftig, sen forsinkelse. Noget tilsvarende – blot noget mere komplekst – kommer med i lydoptagelser i rum med hårdt reflekterende vægge.

I projektet foreslås det, at I tager udgangspunkt i mobil telefon casen, og arbejder med signaler, som har ekkoer med ankomst tid mellem 20 og 200 millisekund. Der kan anvendes forskellige typer lineær algebra. I kan evt. selv lave det materiale, som I skal arbejde med og variere, hvor lang tid der går mellem den ønskede (den direkte lyd), og den uønskede lyd – ekkoet.

I kan vurdere resultatet af jeres behandling rent objektivt ved at beregne, hvor stor reduktion af den uønskede lyd, som I får fjernet. I kan også sammenligne subjektivt ved en lyttetest. Man vil forvente, at jo længere tid, der går inden ekkoet kommer, jo mere generende vil det være. Man vil derfor også forvente, at at man kan klare sig med simplere midler, hvis ekkoet kommer tidligt. Det vil i så fald være delvist maskeret (gemt) i den oprindelige lyd, og derfor mindre hørbart.

2 Om abstraktion og modeller

Matematikere, statistikere og matematik-teknologer arbejder både med udvikling af ny matematik, nye abstraktioner og med at "oversætte" resultater, muligheder og begrænsninger til anvendelsesområderne, ofte i dialog med specialister fra andre fag: Læger, fysikere, kemikere, ingeniører, biologer, økonomer,.... Gode spørgsmål om modeller og matematik kan ligge såvel indenfor matematikken, i grænsefladen til anvendelsen og i anvendelsen:

- Muligheder og begrænsninger ved anvendelse af netop den model i det eksempel (eller de eksempler), I har valgt at studere.
- Hvad kunne give bedre modeller? Mere komplicerede diskrete dynamiske modeller? Bedre stabilitetsanalyse? Flere variable? Hvilken matematik kunne give bedre modeller?
- Matematikkens rolle som generelt værktøj:
 - Nyttens af at træde et skridt tilbage og analysere matematikken i sig selv.
 - Er et matematisk område/emne kun relevant, hvis det umiddelbart kan bruges i en model i et andet område?
 - Hvordan opstår "ny matematik"? Matematik opstår både i kontakt med andre fag og ved modellering af deres problemer og gennem intern fagudvik-

ling. Prøv at se begge dele i forbindelse med jeres projekt.

- Hvordan håndterer man et fagområde, hvis resultater muligvis ikke skal anvendes konkret før om 50 år? Når det ikke på forhånd er klart, hvilke resultater og områder, der bliver konkret anvendelige.
- Formidling: Hvordan formidles resultaterne af jeres analyse til en bredere offentlighed? Risikerer man, at et forsimplet budskab giver uheldige reaktioner? Kan man overhovedet formidle det præcise budskab? Er der nogen, der hører efter? Hvordan får man andre til at høre efter?

3 Litteratur

Her er nogle få introducerende bøger:

- Saber Elaydi
“An Introduction to Difference Equations”, 3rd edition.
(Undergraduate Texts in Mathematics)
Springer Verlag, 2005
- Samuel Goldberg
“Introduction to Difference Equations - with Illustrative Examples from Economics, Psychology, and Sociology”.
Dover 1986.
(Bogen kan også læses under “Google bøger”)
- Amy N. Langville & Carl D. Meyer
“Google’s PageRank and beyond: the science of search engine rankings.”
Princeton University Press 2012. (Online)
- Hassan K. Khalil
“Nonlinear Systems”
Prentice-Hall. Inc., 2000.

- David C. Lay
“Linear Algebra and its applications”
Pearson 2006, 3rd ed. kapitel 5.
- Kenneth H. Rosen
“Discrete Mathematics and its applications”, 6th edition.
McGraw-Hill.
- Gilbert Strang
“Linear Algebra and its applications”
Brooks/Cole 2006, 4th ed. afsnit 8.4, side 401-406.

4 Vejledere

Christoffer Eg Sloth (ces@es.aau.dk)

Dorte Hammershøi (dh@es.aau.dk)

Mikkel Meyer Andersen (mikl@math.aau.dk).