Opgave 1 For at $\mathbb{C}[z]$ skal være et underrum, skal det opfylde kravene i **Definition 4.1.1** af vektorrum.

1) Lukkethed under addition
Lad $p, q \in \mathbb{C}[z]$ være polynomier af grad n hhv. med komplekse koefficienter $a_0 ... a_n$ og $b_0 ... b_n$. Da gælder, at

$$p + q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)z^1 + ... + (a_n + b_n)z^n, \tag{1}$$

som er et polynomium med komplekse koefficienter $(a_0+b_0)...(a_n+b_n)$. Altså gælder, at $\mathbb{C}[z]$ er lukket under skalarmoltiplikation.

2) Lukkethed under skalarmultiplikation
Lad $p \in \mathbb{C}[z]$ være et polynomium af grad med komplekse koefficienter $a_0 ... a_n$. Da gælder, at

$$cp = ca_0 + a_1 z^1 + ...ca_n z^n \tag{2}$$

som er et polynomium med komplekse koefficienter $ca_0 ... ca_n$. Altså gælder, at $cp \in \mathbb{C}[z]$.

3) Kommutativitet
Lad $p, q \in \mathbb{C}[z]$ være polynomier af grad n hhv. med komplekse koefficienter $a_0 ... a_n$ og $b_0 ... b_n$. Da gælder, at

$$\begin{aligned} p + q &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)z^1 + ... + (a_n + b_n)z^n && (3) \\ &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)z^1 + ... + (b_n + a_n)z^n && (4) \\ &= q + p && (5) \end{aligned}$$

4) Associativitet
Lad $p, q, r \in \mathbb{C}[z]$ være polynomier af grad n hhv. med komplekse koefficienter $a_0 ... a_n$, $b_0 ... b_n$ og $c_0 ... c_n$. Da gælder, at

$$\begin{aligned} (p + q) + r &= ((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)z^1 + ... + (a_n + b_n)z^n) + c_0 + c_1 z^1 + ... + c_n z^n \\ &= ((a_0 + b_0 + c_0) + (a_1 + b_1 + c_1)z^1 + ... + (a_n + b_n + c_n)z^n) \\ &= ((a_0 + (b_0 + c_0)) + (a_1 + (b_1 + c_1))z^1 + ... + (a_n + (b_n + c_n))z^n \\ &= a_0 + a_1 z^1 + ... + a_n z^n + (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)z^1 + ... + (b_n + c_n)z^n \\ &= p + (q + r) \end{aligned}$$

5) Additiv identitet
Det trivielle polynomium $p = 0$ er den additive identitet.

6) Additiv invers

Lad $p \in \mathbb{C}[z]$ være et polynomium af grad med komplekse koefficienter $a_0...a_n$. Lad $q = -p$. Da gælder, at

$$p + q = (a_0 + (-a_0)) + (a_1 + (-a_1))z^1 + ... + (a_n + (-a_n))z^n = 0, \qquad (6)$$

hvilket gør q til den additive invers.

7) Multiplikativ identitet
Polynomiet $p = 1$ er den multiplikative identitet.

8) Distributivitet
Lad $p, q \in \mathbb{C}[z]$ være polynomier af grad n hhv. med komplekse koefficienter $a_0...a_n$ og $b_0...b_n$ og $a, b \in \mathbb{F}$. Da gælder, at

$$\begin{aligned} a(p+q) &= a(a_0 + b_0) + a(a_1 + b_1)z^1 + ... + a(a_n + b_n)z^n \\ &= (aa_0 + ab_0) + (aa_1 + ab_1)z^1 + ... + (aa_n + ab_n)z^n \\ &= aa_0 + aa_1z^1 + ... + aa_nz^n + ab_0 + ab_1z^1 + ... + ab_nz^n \\ &= ap + aq. \end{aligned}$$

Der gælder desuden også, at

$$\begin{aligned} (a+b)p &= (a+b)a_0 + (a+b)a_1z^1 + ... + (a+b)a_nz^n \\ &= (aa_0 + ba_0) + (aa_1 + ba_1)z^1 + ... + (aa_n + ba_n)z^n \\ &= aa_0 + aa_1z^1 + ... + aa_nz^n + ba_0 + ba_1z^1 + ... + ba_nz^n \\ &= ap + bp \end{aligned}$$

Siden $\mathbb{C}[z]$ opfylder ovenstående krav, da er det et vektorrum over $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R}[z]$ er ikke et vektorrum over $\mathbb{C}$, da dette ikke er lukket under skalarmultiplikation.
Lad p være et polynomium med reelle koefficienter af grad n i $\mathbb{R}[z]$, hvor $z \in \mathbb{C}$.

$$p = a_0 + a_1z^1 + ... + a_nz^n \qquad (7)$$

Ved skalarmultiplikation med en kompleks konstant c fås

$$cp = ca_0 + ca_1z^1 + ... + ca_nz^n, \qquad (8)$$

som er et polynomium med komplekse koefficienter $ca_0...ca_n$, og altså gælder, at $cp \notin \mathbb{R}[z]$. Altså er $\mathbb{R}[z]$ over $\mathbb{C}$ ikke et vektorrum.

For $\mathbb{R}[x]$ over $\mathbb{C}$, hvor x er en reel variabel gælder samme som for $\mathbb{R}[z]$ over $\mathbb{C}$, hvor z er en kompleks variabel - det er ikke et vektorrum.