Analysis I

1 Vollständige Induktion

A_n: Aussage über natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$.
Zu zeigen:

1. A_{n_0} gilt (Induktionsanfang)

2. Für jedes A_n mit $n > n_0$ gilt A_{n+1} (Induktionsschritt)

$\Rightarrow A_n$ gilt für alle $n > n_0$

2 Die reellen Zahlen

2.1 Körperaxiome

2.1.1 Axiome der Addition

A1: Assotiativgesetz: $(x + y) + z = x + (y + z)$
A2: Kommutativgesetz: $x + y = y + x$
A3: Neutrales Element: $x + 0 = 0 + x = x$
A4: Inverses Element: $\exists - x \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$

2.2 Axiome der Mulitplikation

M1: Assotiativgesetz: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
M2: Kommutativgesetz: $x \cdot y = y \cdot x$
M3: Neutrales Element: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
M4: Inveres Element : $\exists \frac{1}{x} \in \mathbb{R} : x \cdot \frac{1}{x} = 1$
D: Distributivgesetz: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

2.3 Anordnungsaxiome

1. Trichotomie: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der 3 Beziehungen:
   $x > 0$, $x = 0$, $-x > 0$
2. Addivität: $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x + y > 0$
3. Muliplikativität: $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$

2.4 Vollständigkeitsaxiom

Jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum
(Jede Cauchy-Folge konvergiert)

2.5 Betrag

2.5.1 Multiplikativität

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

2.5.2 Dreiecksungleichung

$|x + y| \leq |x| + |y|$

2.6 Archimedisches Axiom

Zu je zwei reellen Zahlen $x, y > 0$ existiert eine natürliche Zahl n mit $nx > y$.

2.7 Bernoullische Ungleichung

Sei $x \geq -1$:
$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$
für alle $n \in \mathbb{N}$

2.8 Binomischer Lehrsatz

$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

2.9 Beschränkte Menge

Eine Teilmenge $T \in \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt, falls ein $k \in \mathbb{R}$ existiert mit $t \leq k$ für alle $t \in T$. T heißt beschränkt falls T nach oben und nach unten beschränkt ist.

2.10 Supremum (Infimum)

Sei $T \subset \mathbb{R}$. Eine Zahl $k \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von T wenn gilt:

1. k ist obere Schranke von T
2. k ist kleinste obere Schranke , d.h. is $k' \in \mathbb{R}$ eine weitere obere Schranke dann gilt $k' \geq k$

$\Rightarrow k = \sup T$

3 Folgen

Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$.

3.1 Konvergenz

Eine Folge (a_n) heißt konvergent gegen a falls:
Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n > N$.
(Für alle $\epsilon > 0$ liegen fast alle (alle bis auf endlich viele) Folgenglieder im Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$).
Falls (a_n) gegen a konvergiert so schreibe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
Eine Folge (a_n) heißt divergent, falls sie gegen kein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.
Eine Folge (a_n) heißt bestimmt divergent, falls sie gegen $\pm\infty$ divergiert.

3.2 Beschränkheit von Folgen

(a_n) heißt nach oben beschränkt wenn es eine Konstante $K \in \mathbb{R}$ gibt mit:
$a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(Analog für nach unten beschränkt)
a_n heißt beschränkt wenn a_n nach oben und unten beschränkt ist.
$(|a_n| \leq K)$
Jede konvergente Folge ist beschränkt.

3.3 Cauchy Folge

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy Folge falls $\forall\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit
$|a_n - a_m| < \epsilon \, \forall n, m \geq N$
Eine Folge ist genau dann konvergent wenn sie eine Cauchy Folge ist.

3.4 Limes superior (inferior)

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} (sup\{a_k : k \geq n\})$
$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} (inf\{a_k : k \geq n\})$

3.5 Teilfolgen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge dann ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von (a_n).
$(a_{n_k}) = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n2}, ...)$ mit $n_0 < n_1 < n_2 < ...$

3.6 Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

3.7 Häufungspunkte

Eine Zahl a heißt Häufungspunkt von (a_n) wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert.
$\Rightarrow$ Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

3.8 Monotone Folgen

Eine Folge (a_n) heißt:

- monoton wachsend falls $a_n \leq a_{n+1}$
- streng monoton wachsend falls $a_n < a_{n+1}$
- monoton fallend falls $a_n \geq a_{n+1}$
- streng monoton fallend falls $a_n > a_{n+1}$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
Jede monotone beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert.

3.9 Wurzeln

Seien $a > 0$ und $x_0 > 0$ relle Zahlen. Die Folge (x_n) sei durch $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ rekursiv definiert. Dann kovergiert x_n gegen $\sqrt{a}$.
Seien $a > 0$, $x_0 > 0$ und $k > 2$ relle Zahlen. Die Folge (x_n) sei durch $x_{n+1} := \frac{1}{k}((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}})$ rekursiv definiert. Dann kovergiert x_n gegen $\sqrt[k]{a}$.

4 Intervalle

$\operatorname{diam}([a,b]) := b - a$

4.1 Intervallschachtelungsprinzip

Sei $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ...$ eine absteigende Folge von abgeschlossenen Intervallen mit $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} I_n = 0$. Dann existiert genau eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_n \forall n$.

4.2 Abgeschlossene Intervalle

Sei $T \subset \mathbb{R}$. T ist offen $:\Leftrightarrow \forall t \in T \; \exists \epsilon > 0$ mit $(t-\epsilon, t+\epsilon) \subset T$. T heißt abgeschlossen wenn $\mathbb{R} \backslash T$ offen ist.
$T \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Werten in T so ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in T$.

4.3 Abschluss

Ist $T \subset \mathbb{R}$, so ist $\overline{T} := \{a \in \mathbb{R} | \; \exists \; (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a\}$

1. $\overline{T}$ ist abgeschlossen
2. $T \subset \overline{T}$
3. $S \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und $T \subset S$ dann ist $\overline{T} \subset S$
4. $\overline{T}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge die T enthält

4.4 Berührpunkt/Häufungspunkt

a heißt Berührpunkt von $A \subset \mathbb{R}$ falls in jeder ϵ-Umgebung von a mindestens ein Punkt von A liegt.
a heißt Häufungspunkt von $A \subset \mathbb{R}$ falls in jeder ϵ-Umgebung von a unendlich viele Punkte von A liegen.
Jeder Punkt $a \in A$ ist Berührpunkt von A.
a ist dann Berührpunkt wenn eine Folge (a_n) mit $a_n \in A$ gegen a konvergiert.
a ist dann Häufungspunkt wenn eine Folge (a_n) mit $a_n \in A \backslash \{a\}$ gegen a konvergiert.

4.5 Kompaktes Intervall

Ein kompaktes Intervall ist ein abgeschlossenes und beschränktes Intervall

5 Reihen

Sei (a_n) eine Folge. $\sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k$ ist die Reihe, die die von a_{n_0} bis a_n alle Glieder der Folge summiert.

5.1 Geometrische Reihe

Für $x \neq 1$ ist $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
Für $|x| < 1$ ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

5.2 Harmonische Reihe

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert obwohl $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert.

5.3 Linearkombination konvergenter Reihen

Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen. Dann konvergiert auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

5.4 Teleskopsummen

Jede Folge a_n lässt sich als Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1})$

5.5 Cauchysches Konvergenz-Kriterium

Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann wenn gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass: $|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k| < \epsilon$ für alle $n \geq m \geq N$.

5.6 Notwendige Bedingung für Konvergenz einer Reihe

(aber nicht hinreichend) $\lim a_n = 0$

5.7 Leibnizsches Konvergenzkriterium

Sei (a_n) eine monoton fallende Folge nicht-negativer Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

5.8 Cauchysches Verdichtungskriterium

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert

5.9 Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Eine absolut konvergente Reihe konvergiert.

5.10 Majoranten-Kriterium

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit nur nicht-negativen Gliedern und a_n eine Folge mit: $|a_n| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
Dann kovergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ ist eine Majorante von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$

5.11 Quotienten-Kriterium

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \neq 0$ und $n \geq n_0$. Gibt es eine relle Zahl θ mit $1 < \theta < 0$ so dass $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < \theta$ für alle n $\geq n_0$. Dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

5.12 Wurzelkriterium

Eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut wenn $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

5.13 Umordnung von Reihen

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung. Dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ eine Umordnung. Sie besteht aus den selben Summanden nur in einer anderen Reihenfolge.

5.13.1 Umordnungssatz

Die Umordnung einer absolut konvergenten Reihe konvergiert absolut gegen den selben Grenzwert.

5.14 Exponentialreihe

$exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert absolut.

5.14.1 Abschätzung des Restgliedes

$exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x)$
$|R_{N+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$ für alle x mit $|x| \leq 1 + \frac{1}{2}N$

5.15 Cauchy Produkt von Reihen

Seien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen.
$c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$
Dann ist auch die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent mit:
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n)$

6 Funktionen

6.1 Operationen auf Funktionen

$f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
$(fg)(x) = f(x)g(x)$
$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$g \circ f : D \to \mathbb{R}$
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

6.2 Stetigkeit

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in D$
f ist stetig im Punkt a wenn:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
f ist stetig in D falls f in jedem Punkt von D stetig ist.
Linearkombinationen von stetigen Funktionen sind stetig.

6.2.1 $\epsilon - \delta$ -Definition

f ist genau dann in D stetig wenn gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(p)| < \epsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$.

6.2.2 Gleichmäßige Stetigkeit

f ist genau dann in D gleichmäßig stetig wenn gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(p)| < \epsilon$ für alle $x, p \in D$ mit $|x - p| < \delta$.
Unterschied zu stetig: Bei gleichmäßiger Stetigkeit ist δ nur von ϵ abhängig und nicht von p.

6.2.3 Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann existiert ein$p \in [a, b]$ mit $f(p) = 0$.
$\Rightarrow$ Sei c eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$ dann existiert ein p mit $f(p) = c$.

6.3 Kompaktes Intervall

Jede in einem kompakten Intervall stetige Funktion nimmt ihr Maximum und Minimum an.
Jede in einem kompakten Intervall stetige Funktion ist dort gleichmäßig stetig.

6.4 Logarithmus- und Exponentialfunktion

$f(x) = e^x$
$f^{-1}(x) = \log(x)$
$\exp_a(x) = \exp(x(\log(a)) = a^x$
für $a > 0$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$
$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
$\log(\frac{x}{y}) = \log(x) - \log(y)$
$\log(x + y) = \log(x) + \log(1 + \frac{y}{x})$
$\log(x - y) = \log(x) + \log(1 - \frac{y}{x})$
$\log(x^r) = r \log(x)$

6.5 Sinus und Kosinus

$\cos(x) = Re(e^{ix}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
$\sin(x) = Im(e^{ix}) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
$\Rightarrow e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(y)\sin(x)$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
$\cos^{-1}(x) = \arccos(x) : [-1,1] \to [0,\pi]$
$\sin^{-1}(x) = \arcsin(x) : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\tan^{-1}(x) = \arctan(x) : \mathbb{R} \to -[\frac{\pi}{2}]$

6.5.1 Polarkoordinaten

$z = re^{i\varphi}$ mit φ Winkel im Bogenmaß des Vektors und $r = |z|$

6.6 Differentation

Eine Funktion f heißt im Punkt x differenzierbar, falls der Grenzwert
$f'(x) = \lim\limits_{\xi \to x} \frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x}$ existiert.
$(f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h})$

$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ heißt Ableitung oder Differentialquotient von f. f heißt differenzierbar in D wenn f in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar ist.
Der Differenzialquotient $\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x}$ ist die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(\xi, f(\xi))$.
f heißt stetig differenzierbar wenn $f(x)$ differenzierbar ist und $f'(x)$ stetig ist.

$\frac{d^k f(x)}{dk^2} = f^(k)(x)$ heißt zweite Ableitung von f.

6.7 Lineare Approximierbarkeit

f ist dann in a differenzierbar wenn es eine Konstante c gibt so dass:
$f(x) = f(a) + c(x-a) + \varphi(x)$
mit: $\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{x-a} = 0$

6.8 Differentationsregeln

6.8.1 Produktregel

$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

6.8.2 Quotientenregel

$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

6.8.3 Ableitung der Umkehrfunktion

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

6.8.4 Kettenregel

$(f \circ g) = g'(f(x))f'(x)$

6.8.5 P-Norm

Sei $p \geq 1$ eine relle Zahl. Dann definiert man für Vektoren $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ eine Norm $||x||_p \in \mathbb{R}_+$ durch $||x||_p = (\sum\limits_{v=1}^{n} |x_v|^p)^{\frac{1}{p}}$

6.8.6 l'Hospital

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ wenn $g' \neq 0$ und $g(x) \neq 0$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ oder $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

6.9 Lokales Extremum

f hat in $]a, b[$ ein Maximum(Minimum) falls gilt:
$f(x) \geq f(\xi)$ (bzw. $f(x) \geq f(\xi)$) für alle ξ mit $|x - \xi| < \epsilon$.
Wenn f im Punkt x ein Maximum besitzt und in x differenzierbar ist, dann ist $f'(x) = 0$.

Sei f im Punkt x zweimal differenzierbar und ist $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ (bzw. $f''(x) > 0$). Dann ist x ein Maximum bzw. Minimum von f.

6.9.1 Satz von Rolle

Sei $f : [a, b]$ eine stetige Funktion mit $f(a) = f(b)$ und in $]a, b[$ differenzierbar dann existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit $f'(\xi) = 0$.

6.10 Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in $]a, b[$ differenzierbar ist, dann existiert ein $\xi \in]a, b[$ mit:
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

6.10.1 Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b]$ stetig und differenzierbar in $]a, b[$ ungelte: $m \leq f'(x) \leq M$ für bestimmte Konstanten $m, M \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle x_1, x_2:
$m(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq M(x_2 - x_1)$

6.10.2 Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

Sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann ist f konstant.

6.11 Konvexität

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt konvex wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ und alle λ mit $0 < \lambda < 1$ gilt:
$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$
f heißt konkav wenn $-f$ konvex ist.
f ist genau dann konvex wenn $f''(x) \geq 0$
(konvex ist linksgekrümmt, konkav rechtsgekrümmt)

6.12 Riemannsches Integral

6.12.1 Integral für Treppenfunktionen

Sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion mit Unterteilung $a = x_0 < ... < a_n = b$ konstant auf $]x_{k-1}, x_k[$ und $c_k = f(x)$ für $x \in]x_{k-1}, x_k[$. Dann ist $\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$.

6.12.2 Oberintegral,Unterintegral

$\int\limits_a^b {}^* f(x)dx = \inf\{\int\limits_a^b \varphi(x)dx : \varphi \geq f\}$
$\int\limits_a^b {}_* f(x)dx = \sup\{\int\limits_a^b \varphi(x)dx : \varphi \leq f\}$
$f(x)$ heißt Riemann intergrierbar wenn $\int\limits_a^b {}^* f(x)dx = \int\limits_a^b {}_* f(x)dx$
$\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b {}^* f(x)dx$

6.12.3 Integrierbare Funtkionen

Jede stetige Funktion ist integrierbar.
Jede monotone Funktion ist integrierbar.

6.12.4 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Seien $f, \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\varphi \geq 0$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$, so dass $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

6.12.5 Riemannsche Summen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Unterteilung $a = x_0 < ... < a_n = b$ und ξ_k ein Punkt(Stützstelle) aus $[x_{k-1}, x_k]$. Dann ist $S(Z, f) := \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ die Riemannsche Summe der Funktion f bzgl. Z.
Für R-integrierbare Funktionen gilt: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{Max(x_k - x_{k-1}) \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$.

6.13 Integral

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funtkion und $a \in I$. Für $x \in I$ sei $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Dann ist $F : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $F' = f$. F heißt Stammfunktion von f.
Seien $F, G : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktinonen von f. Dann ist $F - G$ konstant.

6.13.1 Fundamentalsatz der Integralrechnung

$f : I \to \mathbb{R}$ stetig und F Stammfunktion von f. Dann gilt für alle $a, b \in I$:
$\int\limits_a^b f(x) = F(b) - F(a)$.

6.13.2 Substitutionsregel

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetige und $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\varphi([a, b]) \subset I$.
Dann gilt: $\int\limits_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$.

6.13.3 Partielle Integration

$f, g : [a.b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:
$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g'(x)dx$

6.13.4 Wallissches Produkt

$\frac{\pi}{2} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$

6.13.5 Trapezregel

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $\xi \in [0,1]$. $\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \frac{1}{12}f''(\xi)$

6.14 Uneigentliche Integrale

1. Eine Integrationsgrenze unendlich
Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion die auf jedem Intervall $[a, R], a < R < \infty$ R-integrierbar ist. Falls $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_a^R f(x)dx$ existert ist das Integral $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ konvergent und $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_a^R f(x)dx = \int\limits_a^\infty f(x)dx$.

2. Eine Integrationsgrenze nicht definiert
Sei $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion die auf jedem Intervall $[a + \epsilon, b], 0 < \epsilon < b - a$ R-integrierbar ist. Falls $\lim\limits_{\epsilon\searrow 0} \int\limits_{a+\epsilon}^b f(x)dx$ existert ist das Integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ konvergent und $\lim\limits_{\epsilon\searrow 0} \int\limits_{a+\epsilon}^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$.

3. Beide Integrationsgrenzen kritisch
Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$. $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine Funktion die über jedem kompakten Teilintervall $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$ R-integrierbar ist und sei $c \in]a, b[$. Falls $\int\limits_a^c f(x)dx = \lim\limits_{\alpha\searrow a} \int\limits_\alpha^c f(x)dx$ und $\int\limits_c^b f(x)dx = \lim\limits_{\beta\nearrow b} \int\limits_c^\beta f(x)dx$ heißt $\int\limits_a^b f(x)dx$ konvergent und
$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

6.14.1 Integralvergleichskriterium

Sei $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}_+$ eine monoton fallende Funktion.
Dann gilt: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert $\Leftrightarrow \int\limits_1^\infty f(x)dx$ konvergiert.

6.15 Gamma Funktion

$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-1}dt$
$\Gamma(n + 1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$
$x\Gamma(x) = \Gamma(x + 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}_+^*$

$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$ für alle $x < 0$

6.15.1 Logarithmisch konvex

$f : I \to \mathbb{R}_+^*$ heißt logarithmisch konvex wenn $\log f : I \to \mathbb{R}$
Die Gammmafunktion ist logarithmisch konvex.

6.16 Funktionenfolgen

6.16.1 Gleichmäßige Konvergenz

Sei K eine Menge und $f_n : K \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ Funktionen.
1. Die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ falls für jedes $x \in K$ die Folge $(f_n(x))$ gegen $f(x)$ konvergiert d.h. wenn gilt:
Zu jedem $x \in K$ und $\epsilon > 0$ existiert ein $N = N(x, \epsilon)$, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle $n \geq N$.
2. Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ falls gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N = N(\epsilon)$, so dass $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle $x \in K$ und alle $n \geq N$.

6.16.2 Stetigkeit und gleichmäßige Konvergenz

Sei $K \subset \mathbb{C}$ und $f_n : K \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ konvergiere. Dann ist auch f stetig.

6.16.3 Supremumsnorm

Sei K eine Menge und $f : K \to \mathbb{C}$ eine Funktion.
$||f||_K = sup\{|f(x)| : x \in K\}$

6.16.4 Konvergenzkriterium von Weierstraß

Wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||f_n||_K < \infty$ dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ absolut und gleichmäßig auf K gegen eine Funktion $f : K \to \mathbb{C}$

6.16.5 Integration

Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ eine Folge stetiger Funktionen. Die Folge konvergiere auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:
$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx.$

6.16.6 Differentation

Sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen, die punktweise gegen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergieren. Die Folge der Ableitungen f'_n konvergiere gleichmäßig. Dann ist f differenzierbar und es gilt: $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

7 Potenzreihen

Sei (c_n) eine Folge komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ konvergiere für ein $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq a$. Sei r eine relle Zahl mit $0 < r < |z_1 - a|$ und $K(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$. Dann konvergiert die Potenzreihe absolut und gleichmäßig auf $K(a, r)$.
Die formal differenzierte Potenzeihe $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ konvergiert ebenfalls absolut und gleichmäßig auf $K(a, r)$.
$R = sup\{|z - a| : \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \text{ konvergiert}\}$ heißt Konvergenzradius.

7.1 Hamardsche Formel

Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ mit Konvergenzradius R. Dann gilt:
$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$

7.2 Folgerung aus Quotientenkriterium

Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ mit Konvergenzradius R. Dann gilt:
$R = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}|$
(Gilt nicht immer)

7.3 Ableitung von Potenzreihen

Sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$. Dann gilt für alle $x \in]a - r, a + r[: f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$
$f :]a - r, a + r[\to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar und $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

7.4 Abelscher Grenzwertsatz

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe reeler Zahlen. Dann konvergiert $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

8 Taylor Reihen

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar und $a \in I$. Dann gilt für alle $x \in I$
$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$
wobei $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar mit $f^{(n+1)}(x) = 0$ für alle $x \in I$. Dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$.

8.1 Lagrangesche Form des Restgliedes

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar und $a, x \in I$. Dann existiert ein ξ zwischen a und x, so dass $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar und $a \in I$. Dann gilt für alle $x \in I$:
$f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \varphi(x)(x-a)^n$ wobei $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$ ist.

8.2 Unendliche Taylor-Reihe

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und $a \in I$.
$T[f,a](x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$
Konvergenzradius ist nicht notwendig > 0
Falls die Taylor-Reihe konvergiert, nicht notwendigerweise gegen f.
Die Taylor-Reihe konvergiert für die $x \in I$ für die das Restglied gegen 0 konvergiert.

9 Fourier Reihen

9.1 Periodische Funktionen

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch mit Periode $L > 0$ wenn $f(x+L) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
F wird definiert durch $F(x) = f(\frac{L}{2\pi}x)$ mit Periode 2π.
$\Rightarrow$ man kann sich auf Funktionen mit Periode 2π beschränken.

9.2 Trigonometrische Polynome

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt trigonometrisches Polynom n-ten Grades wenn
$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$
mit reellen Konstanten a_k, b_k mit
$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx$ für $k = 0, 1, ..., n$
$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx$ für $k = 1, 2..., n$

f lässt sich auch schreiben als:
$f(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$
mit $c_0 = \frac{a_0}{2}$
$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ für $k \geq 1$
$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$ für $k \geq 1$

9.3 Fourier Koeffizienten

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ eine periodische über das Intervall $[0, 2\pi]$ integrierbare Funktion. Dann heißen die Zahlen
$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx \; k \in \mathbb{Z}$
Fourier-Koeffizienten von f.

$\mathfrak{F}[f](x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ d.h. die Folge der Partialsummen $\mathfrak{F}_n[f](x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ heißt Fourier-Reihe von f.
Die Fourier-Reihe lässt sich auch in der Form $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$
schreiben mit $a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx$
$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx$
Die Fourier-Reihe muss nicht konvergieren. Wenn sie konvergiert nicht unbedingt gegen f.

9.4 Skalarprodukt für periodische Funktionen

Sei V der $\mathbb{C}$ - VR aller periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die über $[0, 2\pi]$ integrierbar sind.
Das L^2-Skalarprodukt wird definiert durch
$< f, g > = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$ für $f, g \in V$
Eigenschaften:
$< f + g, h > = < f, h > + < g, h >$
$< f, g + h > = < f, g > + < f, h >$
$< \lambda f, g > = \overline{\lambda} < f, g >$
$< f, \lambda g > = \lambda < f, g >$
$< f, g > = \overline{< g, f >}$
Für alle $f \in V$ gilt: $< f, f > = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} ||f||_2^2 \geq 0$
Aus $< f, f > = 0$ folgt nicht dass $f = 0$
Für $f, g \in V$ gilt:
$| < f, g > | \leq ||f||_2 \cdot ||g||_2$ (Cauchy-Schwartz)

$||f+g||_2 \leq ||f||_2 + ||g||_2$ (Dreiecksungleichung)

Sei $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch $e_k(x) = e^{ikx}$ definiert
so ist $c_k =< e_k, f >$, $k \in \mathbb{Z}$
$< e_k, e_l >= \delta_{kl} \Rightarrow e_k$ ist Orthonormalsystem

9.5 Besselsche Ungleichung

Sei f periodisch und über $[0, 2\pi]$ integrierbar mit Fouriere Koeffizienten c_k. Dann gilt:
$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$

9.6 Quadratisches Mittel

$f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodische, über $[0, 2\pi]$ integrierbare Funktionen. (f_n) konvergiert im quadratischen Mittel gegen f falls $\lim\limits_{n\to\infty} ||f - f_n||_2 = 0$
Konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f so auch im quadratischen Mittel.

9.7 Vollständigkeitsrelation

Sei f periodisch und auf $[0, 2\pi]$ integrierbar dann konvergiert die Fourier-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f. Es gilt die Vollständigkeitsrelation:
$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$

9.8 Gleichmäßige Stetigkeit

Sei f eine stetige periodische Funtkion die stückweise stetig differenzierbar ist, dann konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig gegen f.