Algoritmos
Estructuras de Datos I

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad Nacional de Tucumán
2023

Técnicas algorítmicas(3)

Programación Dinámica - Ejemplo

Cálculo de **coeficientes binomiales**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad 0 < k < n \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{0} = 1$$

La función recursiva que surge de esta definición es:

```
FUNCION C(n,k) : entero>0 x entero ≥0 → entero>0
    SI k=0 o k=n ENTONCES
        retorna(1)
    SINO
        retorna (C(n-1,k-1) + C(n-1,k))
FIN
```

El algoritmo hace 2*combinaciones(n,k) -2 llamadas recursivas

Programación Dinámica - Ejemplo

Para resolver por programación dinámica se usa una tabla C(0..n,0..k).

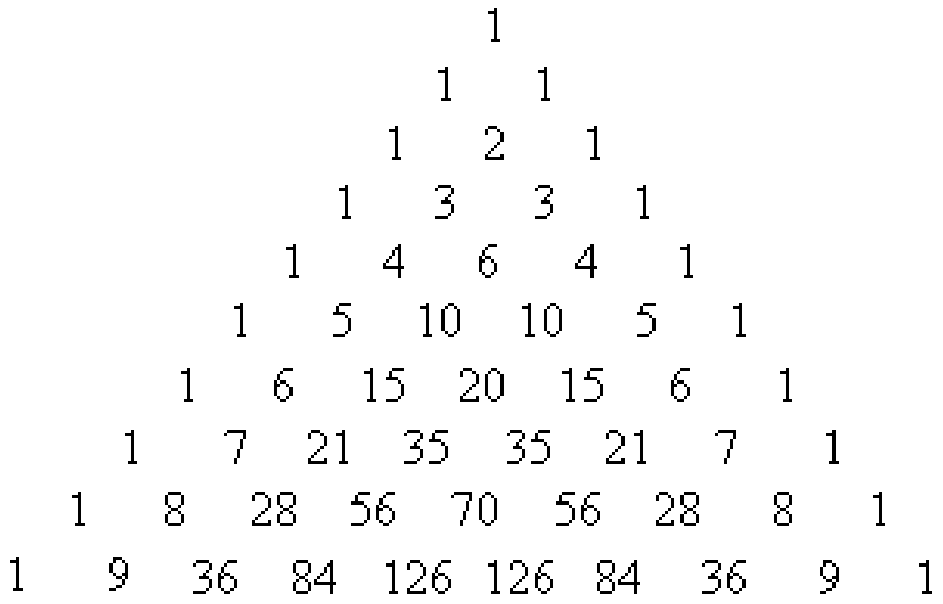
La tabla se llena por fila de izquierda a derecha usando 2 elementos de la fila anterior: C(i,j) = C(i-1,j-1) + C(i-1,j)

	0	**1**	**2**	**3**	**…**	**k-1**	**k**
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
…							
n-1	1					C(n-1,k-1)	C(n-1,k)
n	1						C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)

El algoritmo tiene: tiempo$\in$O(n.k), y usa almacenamiento$\in$O(n.k)

Programación Dinámica - Ejemplo

Triángulo de Pascal o Triángulo de Tartaglia

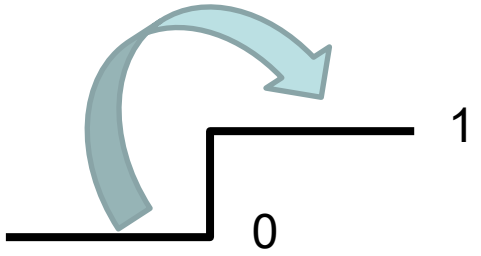


Programación Dinámica - Ejemplo

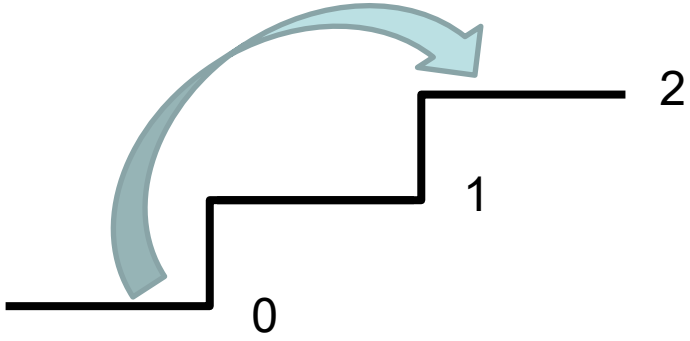
Subir una escalera:

Dos pasos posibles:

1) Al escalón siguiente

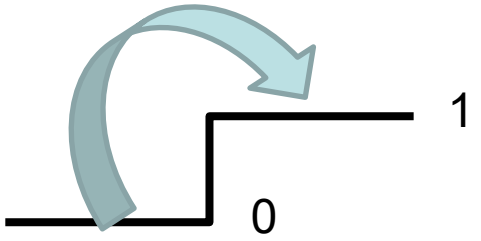


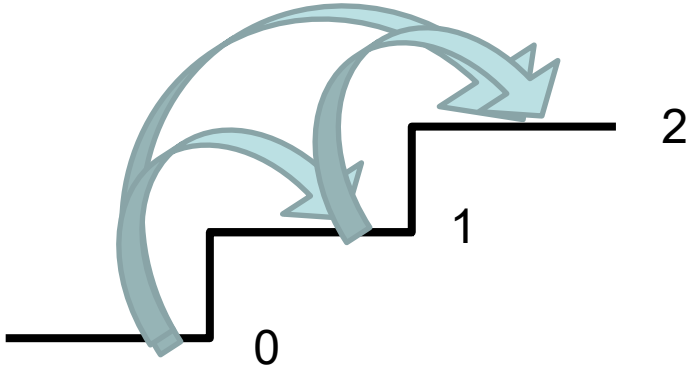
2) Salteando un escalón



Cuántas formas distintas hay para llegar al escalón **n** partiendo de **0** ?

Programación Dinámica - Ejemplo





Escalon 1: se llega de una sola manera

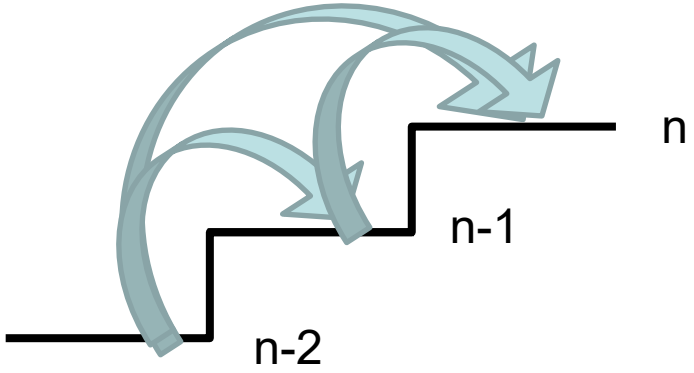
NUM(1) = 1

Escalon 2: se llega de dos maneras distintas.

NUM(2) = 2

Programación Dinámica - Ejemplo

Escalon n: ?



NUM(n) = NUM(n-1) + NUM(n-2) para n>2

Programación Dinámica - Ejemplo

```
FUNCION ESCALERA(n) : entero ≥1 → entero ≥1
  SI n=1 ENTONCES
      retorna (1)
  SINO
      SI n=2 ENTONCES
                  retorna 2
       SINO       // n>2
                  retorna ESCALERA(n-1) + ESCALERA(n-2)
FIN
```

Será eficiente este algoritmo ?

Como sería la implementación con Programación Dinámica ?

Técnica Greedy

El nombre de algoritmo *greedy* se debe a su comportamiento:

- Avanzan siempre hacia "la solución más prometedora".

Los algoritmos greedy son:

- sencillos,
- fáciles de inventar,
- fáciles de implementar,
- cuando funcionan, son eficientes.
- generalmente utilizan la estrategia top-down

- Se usan para resolver *problemas de optimización*.

Técnica Greedy

Se aplica a problemas de optimización que se pueden resolver mediante una ***secuencia de decisiones*.**

Un algoritmo greedy:

- trabaja en una secuencia de pasos
- en cada etapa hace una elección local que se considera una *decisión óptima*,
- luego se resuelve el subproblema que resulta de esta elección,
- finalmente estas soluciones localmente óptimas se integran en una solución global óptima.

Para cada problema de optimización se debe demostrar que la elección óptima en cada paso, lleva a una solución óptima global.

Frecuentemente se preprocesa la Entrada o se usa una una Estructura de Datos adecuada para hacer rápida la elección greedy y así tener un algoritmo más eficiente.

Técnica Greedy

- Dado un problema con n entradas el método consiste en obtener un subconjunto de éstas que satisfaga una determinada restricción definida para el problema.

- Cada uno de los subconjuntos que cumplan las restricciones se dice que son *soluciones prometedoras.*

- Una solución prometedora que *maximice* o *minimice* una *función objetivo* se denomina *solución óptima*.

- Cuando el algoritmo greedy funciona correctamente, la primera solución que encuentre es siempre óptima.

Técnica Greedy

Elementos que deben estar presentes en el problema:

- Un conjunto de ***candidatos***, que corresponden a las *n* entradas del problema.
- Una ***función de selección*** que en cada momento determina el candidato idóneo para formar la solución de entre los que aún no han sido seleccionados ni rechazados.
- Una función que compruebe si un cierto subconjunto de candidatos forman ***una solución prometedor***a.
- Una función que comprueba si un subconjunto de estas entradas es ***solución*** al problema, sea óptima o no.
- Una ***función objetivo*** que determina el valor de la solución encontrada. Es la función que se quiere maximizar o minimizar.

Técnica Greedy

En un **algoritmo Greedy** se tiene generalmente:

C: conjunto de candidatos que nos sirven para construir la solución del problema.

S: conjunto de los candidatos ya usados para armar la solución

solución: una función que chequea si un conjunto es solución del problema, ignorando en principio si esta solución es óptima o no.

factible: una función que chequea si un conjunto de candidatos es factible como solución del problema sin considerar si es óptima o no.

selección: una función que indique cual es el candidato mas prometedor que no se eligió todavía. Está relacionada con la función objetivo.

objetivo: una función que es lo que se trata de optimizar. (Esta función no aparece en el algoritmo).

Esquema Algoritmo Greedy

```
FUNCIÓN Greedy (C): conjunto → conjunto
    S ← ∅
    MIENTRAS not solución (S) AND C ≠ ∅ HACER
        x ← selección (C)
        C ← C - {x}
        SI factible ( S U {x} ) ENTONCES
            S ← S U {x}
    FIN MIENTRAS
    RETORNA (S)
FIN
```

Técnica Greedy

En los algoritmos Greedy el proceso no finaliza al diseñar e implementar el algoritmo que resuelve el problema en consideración.

Hay una tarea extra muy importante:

- **SI el algoritmo FUNCIONA BIEN**: la ***demostración formal*** de que el algoritmo encuentra la solución óptima en todos los casos.

- **SI el algoritmo NO FUNCIONA**: la presentación de un ***contraejemplo*** que muestra los casos en donde falla.

Técnica Greedy
Ejemplo: mínimo de monedas

Funcion darvuelto(vuelto): entero → conjunto de monedas

C ← {25, 10, 5, 1} con suficiente cantidad de c/u

S ← ∅

suma ← 0

MIENTRAS suma ≠ vuelto HACER

x ← el elemento de mayor valor en C

C ← C-{x}

SI suma+x ≤ vuelto ENTONCES

S ← S u {x}

suma ← suma+x

FIN MIENTRAS

RETORNA S

Este algoritmo funciona para cualquier valuación ?

Técnica Greedy
Ejemplo: mínimo de monedas

- Se puede demostrar que con los valores de monedas sugeridos (valores de 1, 5, 10 y 25 unidades),

- si hay disponibles de todas las denominaciones de monedas en cantidad suficiente en el conjunto inicial,

- Entonces este algoritmo Greedy que elige en cada paso la moneda de mayor valor, ***siempre encontrará la solución optima***.

Técnica Greedy
Ejemplo: mínimo de monedas

Se puede demostrar que con los valores de monedas de curso legal en Argentina:

- ✓ 1 , 5 , 10 , 25 , 50 Centavos (en desuso)
- ✓ 1 , 2 , 5 , 10 Pesos

el algoritmo Greedy que elige en cada paso la *moneda de mayor valor*,

siempre encontrará la solución optima si es que existe una solución.

Técnica Greedy
Ejemplo: mínimo de monedas

En Europa las monedas son de valor:
{1, 2, 5, 10, 20, 50 } centavos de euro
y de 1€ y 2€.

Funcionará la técnica Greedy planteada?

Se puede demostrar que funciona el algoritmo Greedy

Técnica Greedy
Ejemplo: mínimo de monedas

En el Reino Unido las monedas son de valor:
{1, 2, 5, 10, 20, 25, 50 } peniques (centavos de libra esterlina)
y de 1, 2 y 5 £ (libra esterlina)

Funcionará la técnica Greedy planteada?

Ejemplo:
Para pagar 40 peniques:
Solución greedy usa: 25 + 10 + 5 (3 monedas)
Solución óptima usa: 20 + 20 (2 monedas)

Conclusión: No funciona el algoritmo Greedy

Técnica Greedy
Ejemplo: Problema de Carga

- Un barco se tiene que cargar con contenedores.
- Los contenedores son todos del mismo tamaño, pero de distintos pesos.
- La capacidad de carga del barco esta prefijada.
- Se quiere cargar el barco con el ***máximo número de contenedores.***

Está demostrado que este problema se puede resolver con una técnica greedy obteniendo siempre la solución óptima.

Técnica Greedy
Ejemplo: Problema de Carga

Datos:

n contenedores numerados: $i=1,2,3,\ldots n$

p_i= peso de cada contenedor i,

M= capacidad máxima de carga del barco

Solución: vector X

$x_i = 0$ si el contenedor i no se carga en el barco

$x_i = 1$ si el contenedor i si se carga en el barco

Maximizar la cantidad: $\sum_{i=1}^{n} x_i$

Restricción: $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq M$

SOLUCIÓN: Estrategia greedy en peso: en cada paso elegir el contenedor ***de menor peso posible***.

Técnica Greedy
Ejemplo: Problema de Carga

ALGORITMO Carga

ENTRADA: n: entero
pesos: vector [1..n] de números reales
capacidad: nro. real
SALIDA: X: vector [1..n] de valores: 0 y 1
AUXILIARES: sigue: bool
t: vector (1..n) de números enteros

P1. Leer (n, pesos, capacidad)
P2. Pre procesar vector de pesos:
Usar un método de ordenación para dar valores a un arreglo de índices t(1..n) de modo que para i=1..n: pesos[t(i)] ≤ pesos[t(i+1)]

Técnica Greedy
Ejemplo: Problema de Carga

ALGORITMO carga (continuación)

P3. X[1..n] ← 0
P4. sigue ← true
P5. i ←1
P6. MIENTRAS (i ≤ n) and sigue HACER
    SI pesos[t(i)] ≤ capacidad ENTONCES *// se puede cargar ?*
        X[t(i)] ← 1 *// se carga*
        capacidad ← capacidad - pesos[t(i)]
        i ← i+1
    SINO
        sigue ← false *// capacidad colmada*

P7. Escribir (X)
P8. FIN

Técnica Greedy
Ejemplo: Problema de la mochila

Este problema es una variante del problema de carga ya presentado.

- Se tiene ***n*** **objetos** y una mochila para llevarlos.
- Cada objeto tiene un ***peso*** y un ***beneficio*** asociado
- La mochila puede cargar un ***peso máximo*** dado.
- El objetivo es llenar la mochila de tal manera que se ***maximice el beneficio de los objetos transportados***, respetando la limitación de la capacidad impuesta.

Técnica Greedy
Ejemplo: Problema de la mochila

Datos: n objetos con sus pesos y beneficios y capacidad de carga:

$i=1,2,3,...n$

p_i= peso de cada objeto i

b_i= beneficio asociado al objeto i

M= capacidad máxima de la mochila

Solución: vector X, $i=1,2,3,...n$

$x_i = 0$ si el objeto i no va en la mochila

$x_i = 1$ si el objeto i se carga en la mochila

Objetivo: Maximizar la cantidad: $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$

Restricción: $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq M$

Tiene solución con la Técnica Greedy?

Técnica Greedy
Ejemplo: Problema de la mochila

Posibles planteos Greedy para el problema de la mochila:

1. *Greedy al mayor beneficio*.

Ejemplo: n=3, M=105 , p=[100,10,10], b=[20,15,15]

Solución Greedy eligiendo en cada paso el objeto de mayor beneficio:

x=[1,0,0] , Beneficio Total = 20

Solución óptima :

x=[0,1,1] , Beneficio Total = 30

Técnica Greedy
Ejemplo: Problema de la mochila

Posibles planteos Greedy para el problema de la mochila:

2. Greedy al menor peso.

Ejemplo: n=2, M=25, p=[10,20], b=[5,100]

Solución Greedy eligiendo en cada paso el objeto de menor peso:

x=[1,0] , Beneficio Total = 5

Solución óptima :

x=[0,1] , Beneficio Total = 100.

Técnica Greedy
Ejemplo: Problema de la mochila

Posibles planteos Greedy para el problema de la mochila:

3. *Tampoco se consigue siempre la solución optima con estrategia Greedy para beneficio/peso*

Ni con ninguna estrategia…

Conclusión:

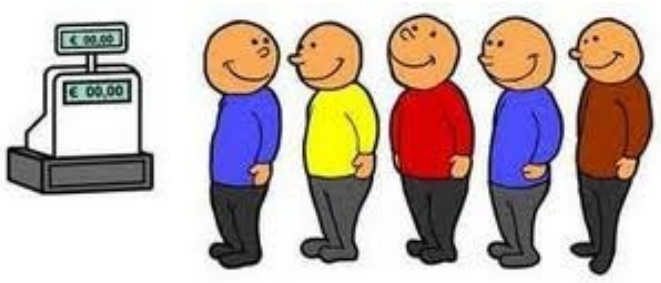
El problema de la mochila
NO tiene solución con la Técnica Greedy

Técnica Greedy
Ejemplo: Planificación 1 servidor

Minimización del tiempo en el sistema.
Considere ***un solo servidor*** que tiene que atender n clientes.
El tiempo de atención que necesita cada cliente se conoce de antemano.
Se quiere *minimizar el tiempo medio invertido por cada cliente* en el sistema.

Datos:

número de cada cliente: $i=1,n$
t_i: tiempo de atención del cliente i
E_i: tiempo de espera del cliente i



Objetivo:

Minimizar: $$E = \frac{\sum_{i=1}^{n} E_i}{n}$$

Cuál es la estrategia Greedy ?

Técnica Greedy
Ejemplo: Planificación 1 servidor

Ejemplo: n=3 clientes: C1, C2, C3, tiempos: t1=8, t2=4, t3=6
Tiempo total de atención para estos clientes = $\sum$ ti = 18 .
Existen n!=6 posibles esquemas de orden de atención.

ORDEN	**Tiempo de Espera**			
	C1	**C2**	**C3**	**TIEMPO MEDIO**
C1C2C3	8	8+4	8+4+6	12.7
C1C3C2	8	8+6+4	8+6	13.3
C2C1C3	4+8	4	4+8+6	11.3
C2C3C1	**4+6+8**	**4**	**4+6**	**10.7 (mínimo)**
C3C1C2	6+8	6+8+4	6	12.7
C3C2C1	6+4+8	6+4	6	11.3

El algoritmo greedy atiende a los clientes en orden creciente de *ti* y garantiza siempre la solución óptima en este problema.

Técnica Greedy
Ejemplo: Planificación vs servidores

Si se aumenta el servidores, con lo que ahora se dispone de un total de ***S*** servidores para realizar las ***n*** tareas.

En este caso también se tiene que ***minimizar el tiempo medio de espera de los clientes***, pero con la diferencia que ahora existen ***S*** servidores dando servicio simultáneamente.

Técnica Greedy
Ejemplo: Planificación vs servidores

Basándose en el método utilizado anteriormente, la forma óptima de atender los clientes es la siguiente:

- En primer lugar, se ordenan los clientes por ***orden creciente*** de tiempo de servicio.

- Una vez ordenados, se van asignando los clientes por orden, siempre al servidor menos ocupado.

- En caso de haber varios con el mismo grado de ocupación, se elige el de número menor.

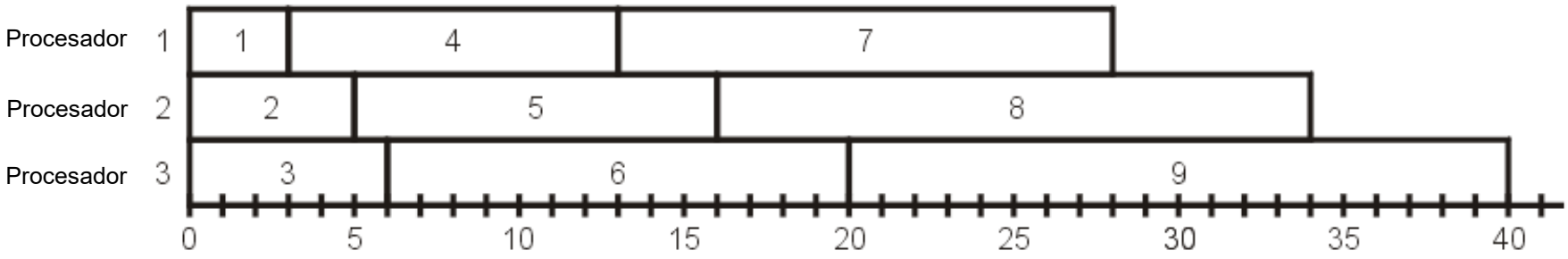
Técnica Greedy
Ejemplo: Planificación vs servidores

Si los clientes están ordenados de forma que:

$$ti \leq tj \quad \text{si} \quad i < j,$$

Un algoritmo greedy asigna al servidor k las tareas k, $k+S$, $k+2S$, ...

Por ejemplo:



Esta distribución *minimiza* el tiempo medio de espera de los clientes.