Algoritmos
Estructuras de Datos I

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad Nacional de Tucumán
2023

Complejidad
Notación O grande(3)

Complejidad Práctica

La complejidad de un Programa es generalmente función de las características de la instancia.

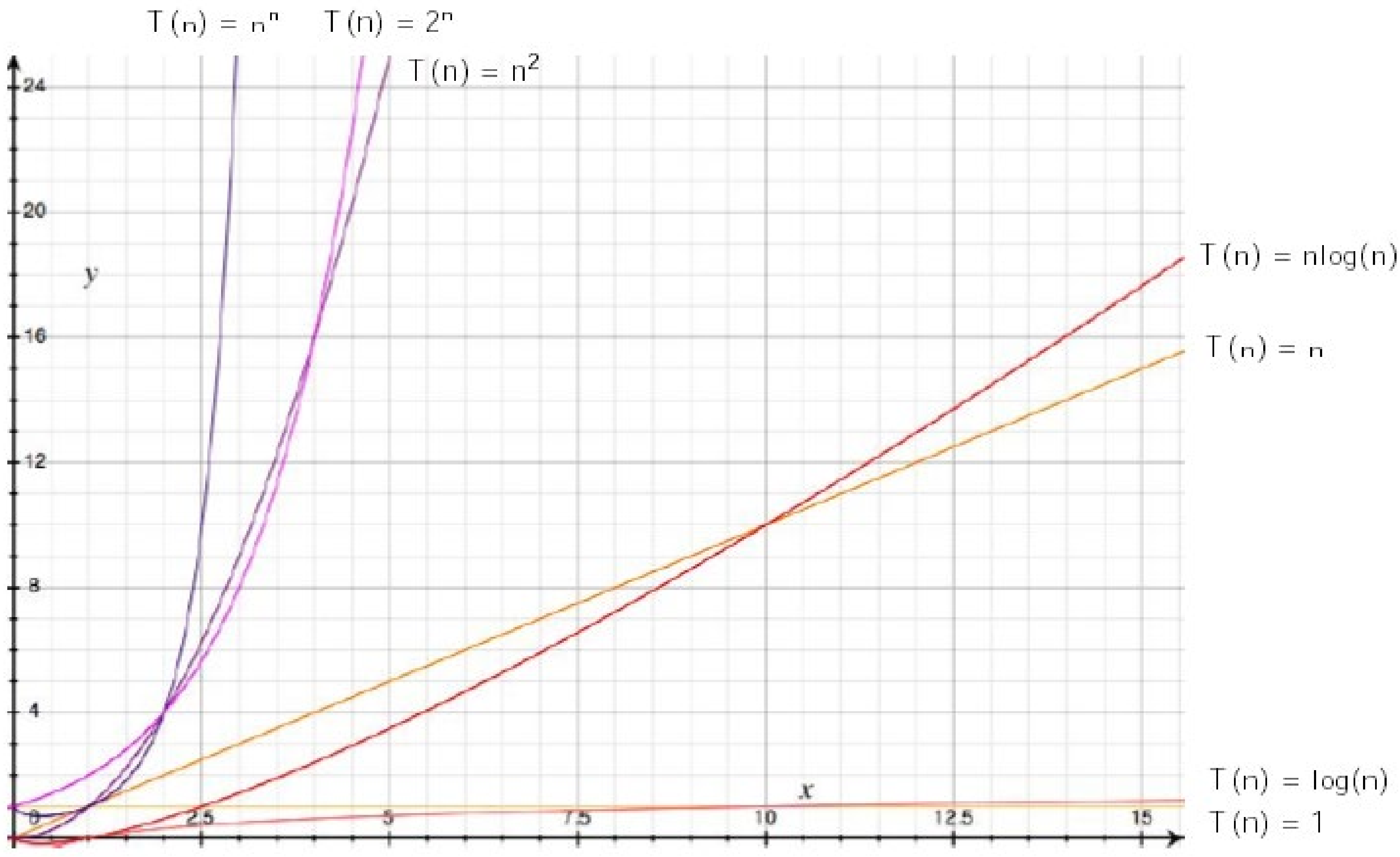
La funcion de complejidad se puede usar para comparar dos programas P y Q que hagan la misma tarea.

Se presentan tablas con los valores aproximados para distintas funciones de crecimiento.

Crecimiento de distintas funciones de costo

n	log n	n log n	n^2	n^3	2^n
1	0	0	1	1	2
5	0.7	3	25	125	32
10	1.0	10	100	1000	1024
20	1.3	26	400	8000	1048576
50	1.7	85	2500	25000	1125900000×10^6
100	2.0	200	10000	1000000	$1267651000 \times 10^{21}$
200	2.3	460	40000	8000000	-
500	2.7	1349	250000	125000000	-
1000	3.0	3000	1000000	1000000000	-

Gráfica de los valores de las distintas funciones T(n)



Tiempo T(n)

(si se ejecutan en promedio **10^6** instrucciones/seg)

n \ T(n)	n	n $LOG_2 n$	n^2	n^3	1.5^n	2^n	n!
10	<1s	<1s	<1s	<1s	<1s	<1s	10^{25} a
30	<1s	<1s	<1s	<1s	<1s	18 min	-
50	<1s	<1s	<1s	<1s	11 min	36 a	-
100	<1s	<1s	<1s	1 s	12892 a	3 10^7 a	-
1.000	<1s	<1s	1s	17 min	-	-	-
10.000	<1s	<1s	2 min	12 d	-	-	-
100.000	<1s	2s	3 h	32 a	-	-	-
1.000.000	1s	20s	12 d	31710 a	-	-	-

s=segundo   min=minuto   h=hora   d=día   a=año

Tiempo T(n)

(si se ejecutan en promedio 10^9 instrucciones/seg)

$n \backslash T(n)$	n	$n \, LOG_2 n$	n^2	n^3	n^4	n^{10}	2^n
10	.01 μs	.03 μs	.1μs	1 μs	10 μs	10 s	1 μs
20	.02 μs	.09 μs	.4 μs	8 μs	160 μs	2.84 h	1 ms
30	.03 μs	.15 μs	.9 μs	27 μs	810 μs	6.83 d	1 s
40	.04 μs	.21 μs	1.6 μs	64 μs	2.56 ms	121.36 d	18.3 min
50	.05 μs	.28 μs	2.5 μs	125 μs	6.25 ms	3.1 a	13 d
100	.10 μs	.66 μs	10 μs	1 ms	100 ms	3171 a	$4 \, 10^{13}$ a
1.000	1. μs	9.96 μs	1 ms	1 s	16.67 min	$3.17 \, 10^7$ a	$32 \, 10^{283}$ a
10.000	10. μs	130.03 μs	100 ms	16.67 min	115.7 d	$3.17 \, 10^{23}$ a	-
100.000	100 μs	1.66 ms	10 s	11.57 d	3171 a	$3.17 \, 10^{33}$ a	-
1.000.000	1.ms	19.92 ms	16.67 min	31.71 a	$3.17 \, 10^7$ a	$3.17 \, 10^{43}$ a	-

μs= microsegundo = 10^{-6} segundo ms= milisegundo = 10^{-3} segundo

s=segundo min=minuto h=hora d=día a=año

Tamaño del problema más grande que se puede resolver en 1 hora

complejidad del algoritmo	**con una computadora actual**	**con una computadora 100 veces más rápida**	**con una computadora 1000 veces más rápida.**
n	N_1	$100\ N_1$	$1000\ N_1$
n^2	N_2	$10\ N_2$	$312.6\ N_2$
n^3	N_3	$4.64\ N_3$	$10\ N_3$
n^5	N_4	$2.5\ N_4$	$3.98\ N_4$
2^n	N_5	$N_5+6.64$	$N_5+9.97$
3^n	N_6	$N_6+4.19$	$N_6+6.29$

Ejemplo: Ordenar n datos

Algoritmo1: $T(n) \in O(n^2)$, $T_1(n) = 2n^2$
Algoritmo2: $T(n) \in O(n \log_2 n)$, $T_2(n) = 50n\log_2 n$

Máquina A: ejecuta 10^{10} instrucciones/seg
Máquina B: ejecuta 10^7 instrucciones/seg

Suponer: $n=10^7$ datos,
Algoritmo 1:
$TA = (2*10^{14})/10^{10} = 20000$ seg $\approx$ 5.5 horas
$TB = (2*10^{14})/10^7 = 20000000$ seg $\approx$ 5555 horas
Algoritmo 2:
$TA \approx 1{,}163$ seg
$TB \approx 1163$ seg $\approx$ 20 min

Ejemplo: Ordenar n datos

Algoritmo1: $T(n) \in O(n^2)$, $T_1(n) = 2n^2$
Algoritmo2: $T(n) \in O(n \log_2 n)$, $T_2(n) = 50n\log_2 n$

Máquina A: ejecuta 10^{10} instrucciones/seg
Máquina B: ejecuta 10^7 instrucciones/seg

Suponer: $n=10^8$ datos,
Algoritmo 1:
$TA = (2*10^{16})/10^{10} = 2000000$ seg $\approx$ 23 dias
$TB = (2*10^{16})/10^7 = 2000000000$ seg $\approx$ 23148 dias
Algoritmo 2:
$TA \approx$ 13 seg
$TB \approx$ 3,69 horas

Algoritmos eficientes

Un algoritmo es eficiente si existe un polinomio P(n) tal que el algoritmo puede resolver cualquier caso de tamaño de entrada *n* en un tiempo:

$$T(n) \in O(P(n))$$

Algoritmo eficiente: Algoritmo de complejidad polinomial

- Un algoritmo es eficiente si tiene un *tiempo polinómico* de ejecución.
- Si un algoritmo ***no*** es eficiente se lo denomina algoritmo de *tiempo exponencial*.

Algoritmos no eficientes

Los ejemplos de problemas más populares para los que *no se conocen algoritmos eficientes* son:

- viajante de comercio
- ciclo hamiltoniano
- satisfactibilidad de una fórmula booleana
- coloreado óptimo de grafos

Todos los algoritmos conocidos para estos problemas son *no eficientes*, de modo que son algoritmos inútiles cuando el tamaño de la entrada *n* crece mucho.

Problemas-Algoritmos

Entre los problemas que se resuelven con una computadora existen algunos para los cuales no se conocen ningún algoritmo eficiente que los resuelva, tampoco se ha demostrado que tienen una dificultad intrínseca.

El dilema es:

- **el algoritmo que lo resuelve es ineficiente**
- **el problema en sí mismo es difícil de resolver**

- Podría ser que todavía no se ha encontrado un algoritmo eficiente para resolverlo…
- Podría ser que el problema sea intrínsecamente difícil, pero todavía no se lo ha podido demostrar…

Problemas

Los problemas se pueden dividir en 2 grandes grupos:

CLASE DE PROBLEMAS

PROBLEMAS P

pueden resolverse en tiempo polinómico

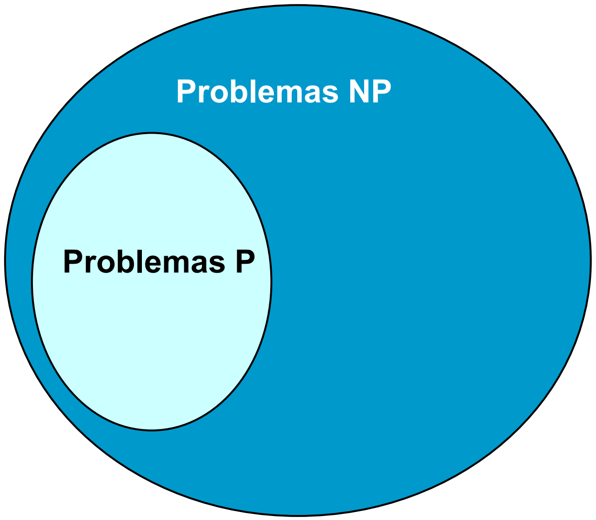
PROBLEMAS NP

no se conoce algoritmo en tiempo polinómico

Problemas P y NP

- Es fácil de ver que:

  $P \subset NP$



- **Problema abierto:**

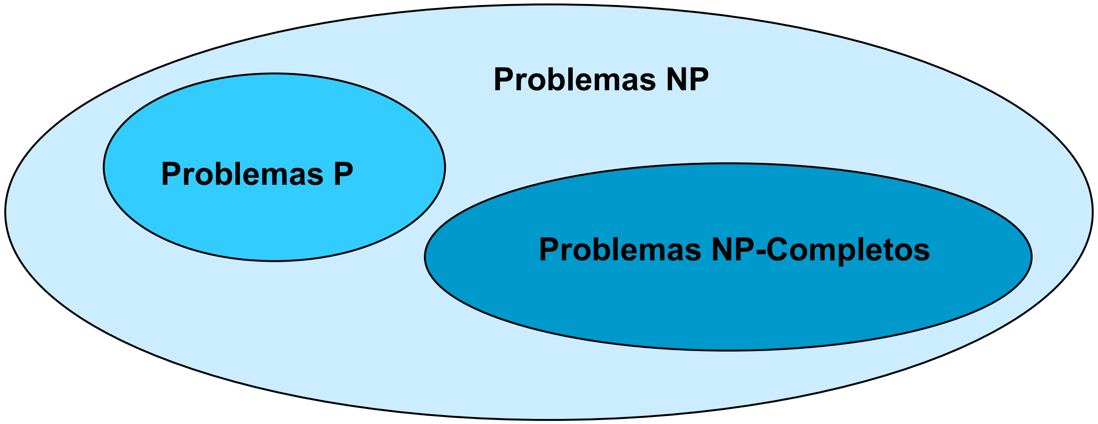
  es $P \neq NP$?

*Este es **El Problema** abierto*
más importante de teoría de la computación.

Problemas NP completos

- Fueron caracterizados en 1971 por Stephen Cook. Todos los *problemas NP completos son equivalentes desde el punto de vista computacional* . Esto significa que se puede pasar de un problema a otro problema de NP con por una transformación polinómica..

- Ejemplo del problemas de este tipo son: SAT, agente viajero, ciclo hamiltoniano en un grafo, coloreado de un mapa con 3 colores.



Técnicas algorítmicas(1)

Técnicas de diseño de Algoritmos

- Fuerza bruta
- Recursión
- Dividir para Conquistar (Divide & Conquer)
- Programación dinámica
- Técnica ambiciosa (Greedy)
- Vuelta atrás (Backtracking)
- Ramificación y poda (Branch and Bound)
- Algoritmos Probabilistas.

Recursión

Un objeto es ***recursivo*** cuando se define en función de si mismo.

El concepto de recursividad se usa mucho en la matemática pero también en la computación.

Una **función** se dice *recursiva* si *se invoca a si misma*.

Ej. La definición recursiva de la función factorial:

n!: entero ≥0 → entero ≥1

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Recursión

El uso de la recursión permite escribir algoritmos **sencillos y concisos**.

```
FUNCION Fac(n) : entero ≥0 → entero ≥1
        SI n=0 ENTONCES
                retorna (1)
        SINO
                retorna ( n * Fac (n-1) )
 FIN
```

Recursión

Principios generales del análisis recurrente

Dado un problema que trata información de un cierto tipo y de un tamaño, se quiere reducir el problema, expresando el tratamiento de la información de ***igual tipo*** pero de ***menor tamaño*****.**

Es importante hacer una análisis del problema para encontrar un medio de *seccionar* esta información en *subinformaciones* de igual tipo.

Recursión

Problema **P** con información:
- Tipo: **T**
- Tamaño: **n**

Principio de seccionamiento

Problema **P’** con información:
- Tipo: **T’** $\equiv$ **T**
- Tamaño: **n’** $<$ **n**

Recursión

Este tipo de análisis requiere gran precisión y se puede guiar con las siguientes etapas:

- definición de las informaciones tratadas
- principio de seccionamiento
- expresión de los cálculos
- comprobación de las soluciones obtenidas

La búsqueda de las relaciones de recurrencia es la parte central del trabajo de análisis. Puede hacerse de manera deductiva o de manera directa inductiva.

Recursión-Ejemplo x^n

Calcular x^n, cuando n es un entero positivo o nulo y x es un numero real.

pot(x,n) : real x entero ≥0 → real

1) Algoritmo1 usando *iteración*:

Se define como el producto de n copias de x.

x*x*x….x (n veces)

2) Algoritmo2 usando ***recursión***:

Se define x^n en función de x^{n-1}

$x^n = x * x^{n-1}$ si $n \geq 1$

$x^0 = 1$

Ejemplo x^n- Algoritmo 1

Algoritmo de potencia iterativo:

```
FUNCION pot1(x,n) : real x entero ≥0 → real
        SI n=0 ENTONCES
                p ←1
        SINO
                p ← x
                PARA i=1,n-1 HACER
                        p ← p*x
        retorna (p)
 FIN
```

- La complejidad de pot1 Є **O(n)**

Ejemplo x^n- Algoritmo 2

Algoritmo de potencia usando recursión:

```
FUNCION pot2(x,n) : real x entero ≥0 → real
        SI n=0 ENTONCES
                retorna (1)
        SINO
                retorna ( x * pot2(x,n-1) )
FIN
```

- La complejidad de pot2 Є **O(n)**
- **Como se calcula la complejidad en las funciones recursivas?**

Recursión

Si se tienen funciones recursivas, se debe asociar una función de tiempo desconocida T(n).

- Se plantea una ***recurrencia para T(n)***, donde n mide el tamaño de la entrada al proceso.
- Se *generaliza* la ecuación para T(n) en términos de T(k) para distintos valores de k.
- Se *particulariza* para algún valor apropiado de k llegando al caso base.

Recursión-Ejemplo pot2

FUNCION pot2(x,n) : real x entero ≥0 → real

    SI n=0 ENTONCES
        retorna (1)
    SINO   **// n ≥ 1**
        retorna (x * **pot2(x,n-1)**)
FIN

Sea T(n) el tiempo para calcular pot2, su forma recurrente:

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{si } n = 0 \\ c + T(n-1) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

c,d son constantes

Recursión-Ejemplo pot2

Sea T(n) el tiempo para calcular pot2 definido por:

si $n = 0$ $\quad T(n) = d$

si $n \geq 1$ $\quad T(n) = c + T(n-1)$ $\quad$ c,d son constantes

desarrollando la recurrencia:

si $n \geq 1$ $\quad T(n)=c+T(n-1)$

si $n-1 \geq 1$, $n \geq 2$ $\quad T(n-1)=c+T(n-2)$, $\quad T(n)=2*c+T(n-2)$

si $n-2 \geq 1$, $n \geq 3$ $\quad T(n-2)=c+T(n-3)$, $\quad T(n)=3*c+T(n-3)$

…generalizando:

$\forall\ n \geq k$ $\quad T(n)=k*c+T(n-k)$

en particular, vale para n=k entonces:

si $n=k$ $\quad T(n)=n*c+T(n-n)=n*c+T(0)= n*c+d$

entonces $T(n) \in O(n)$

Recursión-Ejemplo Factorial

FUNCION **Factorial** (n) : entero $\geq 0 \rightarrow$ entero ≥ 1

SI n=0 OR n=1 ENTONCES retorna (1)

SINO retorna (n * **Factorial** (n-1))

FIN

Sea T(n) el tiempo para calcular Factorial(n):

$$T(n) = \begin{cases} d & \text{si } 0 \leq n \leq 1 \\ c + T(n-1) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

c,d son constantes

Recursión-Ejemplo Factorial

Sea T(n) el tiempo para calcular Factorial(n)

si $n \leq 1$ $T(n) = d$

si $n > 1$ $T(n) = c + T(n-1)$ c,d son constantes

desarrollando la recurrencia:

si $n>1$ $T(n)=c+T(n-1)$

si $n-1>1$, $n>2$ $T(n-1)=c+T(n-2)$, $T(n)=2*c+T(n-2)$

si $n-2>1$, $n>3$ $T(n-2)=c+T(n-3)$, $T(n)=3*c+T(n-3)$

…generalizando:

$\forall\ n>k$ $T(n)=k*c+T(n-k)$

en particular, vale para $n=k+1$ entonces:

si $n=k+1$ $T(n)=(n-1)*c+T(1)=c*n-c+d$

entonces $T(n) \in O(n)$

Recursión-Ejemplo Binario

Escribir una función recursiva que muestre el código binario de un entero dado.

Ej. $(25)_{10} \rightarrow (11001)_2$

Cociente (25 / 2) = 12	Resto (25 / 2) = 1
Cociente (12 / 2) = 6	Resto (12 / 2) = 0
Cociente (6 / 2) = 3	Resto (6 / 2) = 0
Cociente (3 / 2) = 1	Resto (3 / 2) = 1

Recursión-Ejemplo Binario

```
Función Binario (n) :Entero≥1 en base 10
                        → escribe secuencia de dígitos binarios
    Si n = 1 ENTONCES
        Escribir (n)
    SINO                        // es n > 1
        Binario(n/2)
        Escribir (n mod 2)
FIN
```

Relación de recurrencia:

$T(n) = d$ si $n = 1$

$T(n) = c + T(n/2)$ si $n \geq 2$ c,d son constantes

Recursión-Ejemplo Binario

Sea

si $n = 1$ $T(n) = d$

si $n \geq 2$ $T(n) = c + T(n/2)$ c,d son constantes

Si $n \geq 2$ $T(n) = c + T(n/2)$

Si $n/2 \geq 2$, $n \geq 4$ $T(n/2) = c + T(n/4)$ $T(n) = 2*c + T(n/4)$

Si $n/4 \geq 2$, $n \geq 8$ $T(n/4) = c + T(n/8)$ $T(n) = 3*c + T(n/8)$

…generalizando:

$\forall\ n \geq 2^k$ $T(n) = k*c + T(n/2^k)$

Vale para $n=2^k$ $T(n) = c * \log_2 n + T(1) = c * \log_2 n + d$

$k = \log_2 n$

entonces $T(n) \in O(\log_2 n)$ para Binario