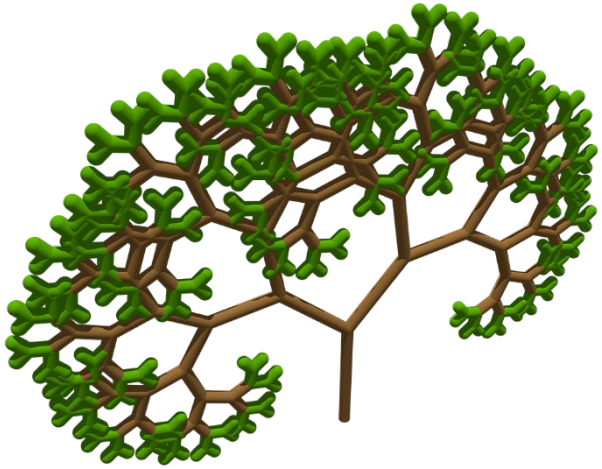
Algoritmos
Estructuras de Datos I

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad Nacional de Tucumán
2023

UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMÁN
facet
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGÍA

Árbol Binario



ARBOL BINARIO

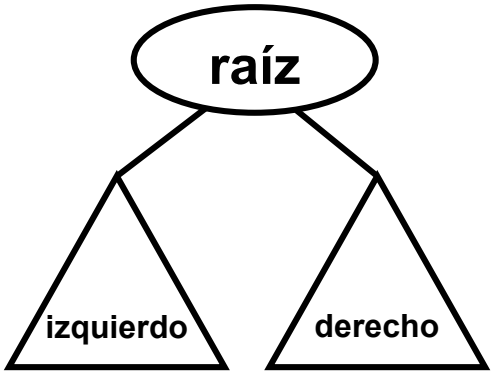
Los arboles binarios son un caso particular de arboles tales que en ellos, cada nodo tiene a lo sumo 2 hijos.

Un árbol binario es un conjunto finito T tal que:

- esta vacío

  o

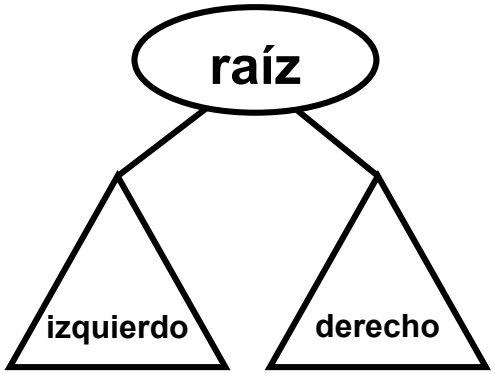
- está compuesto de una *raíz*
  y dos subárboles binarios
  llamados *subárbol izquierdo*
  y *subárbol derecho*.



ARBOL BINARIO

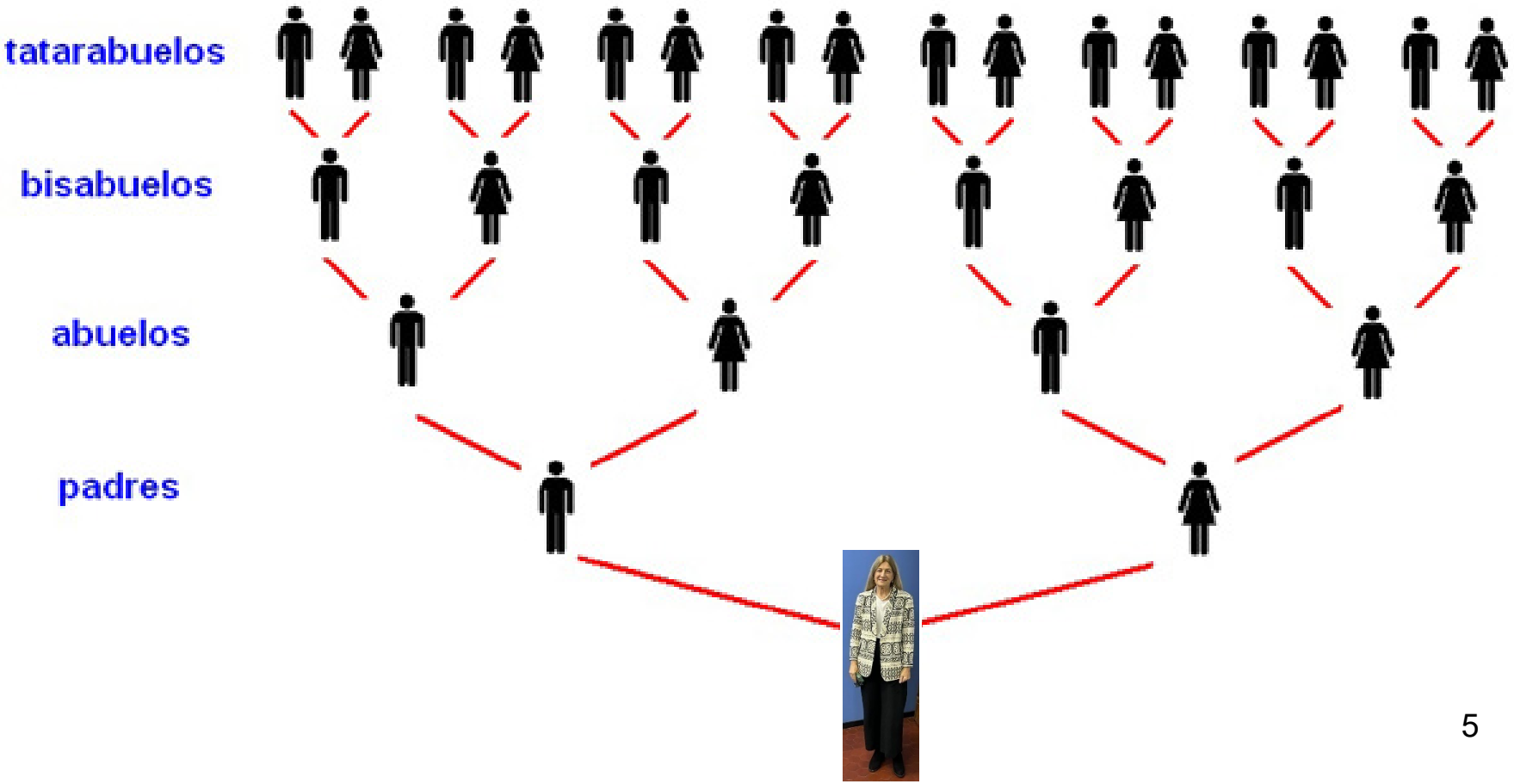
Hay numerosas aplicaciones de arboles binarios como:

- los arboles genealógicos,
- los arboles de expresión,
- los arboles que representan partidos entre dos equipos en un campeonato,
- los arboles para codificar, los arboles de decisión,
- y muchas mas.



ARBOL BINARIO

Ejemplo: árbol genealógico



ARBOL BINARIO(ITEM) - AB(ITEM)

Especificación algebraica - OPERACIONES:

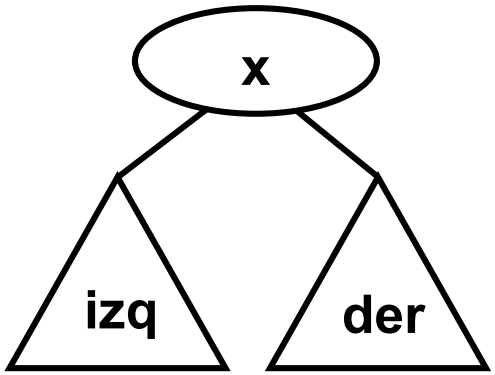
A) Sintaxis:

ABVACIO	: → AB
ARMARAB	: AB X ITEM X AB → AB
ESABVACIO	: AB → BOOLEAN
IZQUIERDO	: AB → AB
RAIZ	: AB → ITEM U {indefinido}
DERECHO	: AB → AB
PERTENECE	: AB X ITEM → BOOLEAN

ARBOL BINARIO(ITEM) - AB(ITEM)

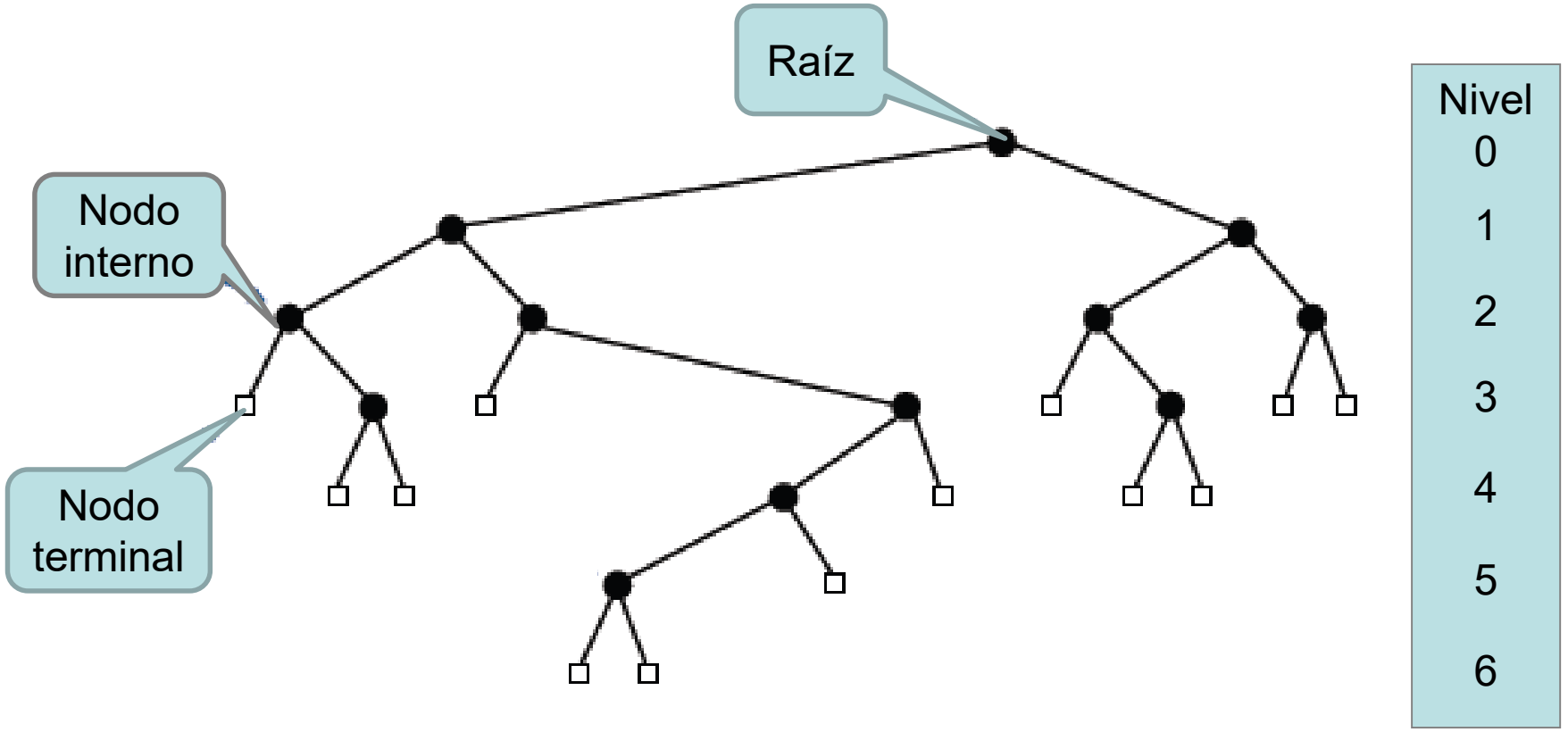
B) Semántica: $\forall$ izq,der $\in$ AB, $\forall$ x,y $\in$ ITEM

ESABVACIO(ABVACIO) ≡TRUE
ESABVACIO(ARMARAB(izq,x,der)) ≡ FALSE
IZQUIERDO(ABVACIO) ≡ ABVACIO
IZQUIERDO(ARMARAB(izq,x,der)) ≡ izq
RAIZ(ABVACIO) ≡ indefinido
RAIZ(ARMARAB(izq,x,der)) ≡ x
DERECHO(ABVACIO) ≡ ABVACIO
DERECHO(ARMARAB(izq,x,der)) ≡ der
PERTENECE(ABVACIO,y) ≡ FALSE
PERTENECE(ARMARAB(izq,x,der),y) ≡ x=y OR
PERTENECE(izq,y) OR
PERTENECE(der,y)



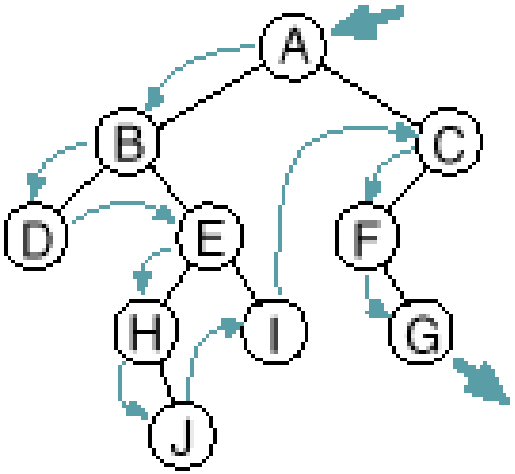
donde = es la operación que me permite comparar 2 objetos del tipo item

ARBOL BINARIO

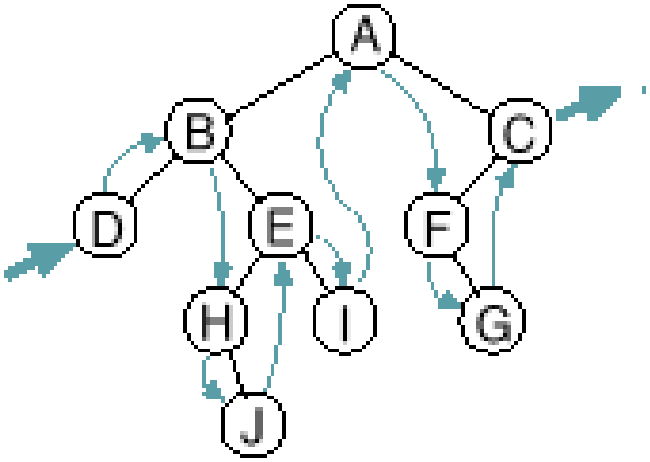


Recorrido de un AB

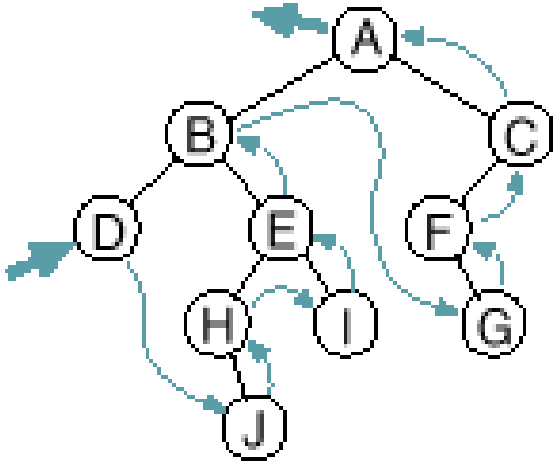
Orden Previo



Orden Simétrico



Orden Posterior

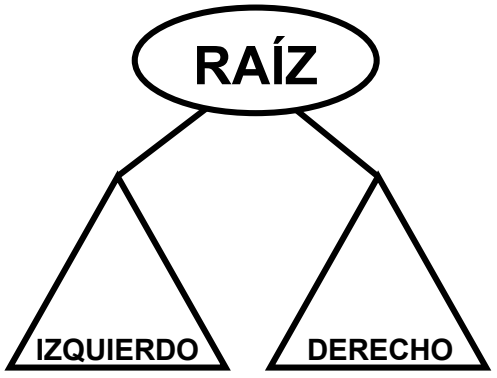


Listado en Orden Previo: **< A,B,D,E,H,J,I,C,F,G >**
Listado en Orden Simetrico: **< D,B,H,J,E,I,A,F,G,C >**
Listado en Orden Posterior: **< D,J,H,I,E,B,G,F,C,A >**

AB
Aplicación: listado en orden simétrico

Como usuario del ADT AB, algoritmo recursivo

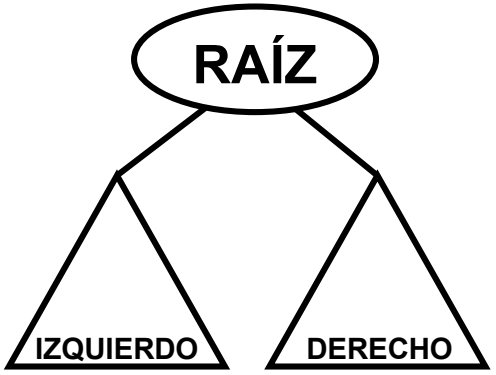
ALGORITMO **Orden Simetrico** (T)
ENTRADA : T $\in$ AB(ITEM)
SALIDA : listado de los nodos de T en orden simétrico
    Si NOT ESABVACIO(T) entonces
        Orden Simetrico (IZQUIERDO(T))
        ESCRIBIR (RAIZ(T))
        Orden Simetrico (DERECHO(T))
Fin



AB
Aplicación: es nodo hoja

Como usuario del ADT AB, función recursiva

Funcion **eshoja** (T) **:** AB → BOOL
    Retorna
        ESABVACIO(IZQUIERDO(T)) AND
        ESABVACIO(DERECHO(T))
Fin

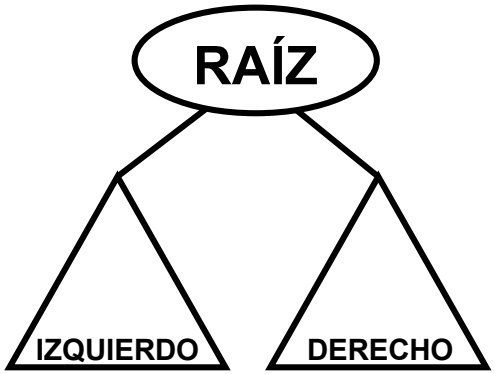


Nota: invocar eshoja con AB no vacío.

AB
Aplicación: numero de nodos hojas

Como usuario del ADT AB, función recursiva

```
Funcion NumeroHojas (T) :  AB → entero ≥ 0
    Si ESABVACIO(T) entonces
          Retorna  0
    sino Si eshoja (T) entonces
          Retorna  1
          sino
                Retorna NumeroHojas (IZQUIERDO(T)) +
                        NumeroHojas (DERECHO(T))
Fin
```



AB
Aplicación: cuenta un item

Como usuario del ADT AB, función recursiva

```
Funcion cuenta (T, x) :  AB x ITEM → entero ≥ 0
    Si ESABVACIO(T) entonces
          Retorna  0
    sino Si RAIZ(T) = x entonces
                  Retorna  1 +  cuenta (IZQUIERDO(T),x) +
                                cuenta (DERECHO(T),x)
          sino
                  Retorna cuenta (IZQUIERDO(T),x) +
                          cuenta (DERECHO(T),x)
Fin
```

AB
Aplicación: altura del árbol

Como usuario del ADT AB, función recursiva

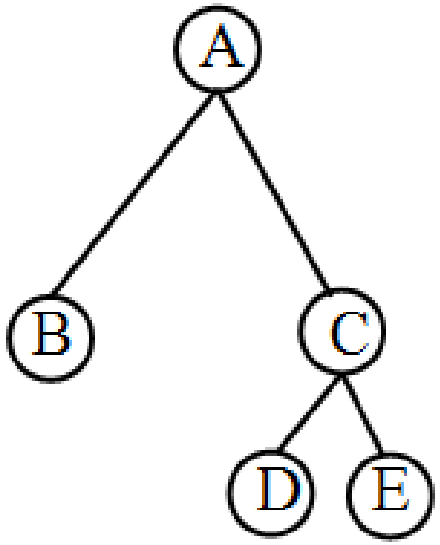
```
Funcion Altura (T) :  AB → entero ≥ 0
    Si ESABVACIO (T) OR eshoja (T) entonces
          Retorna  0
    sino
          Retorna 1 +  MAXIMO ( Altura(IZQUIERDO(T)),
                                Altura(DERECHO(T))  )
Fin
```

NOTA: *MAXIMO es una funcion auxiliar que determina el mayor de 2 numeros enteros.*

AB
Aplicación: listado de nodos por nivel

Como usuario del ADT AB, diseñar un algoritmo iterativo para un **listado por niveles** de un ab.

Ejemplo:

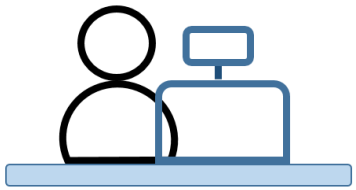


Listado por Nivel: < A, B, C, D, E >

AB
Aplicación: listado de nodos por nivel

Algoritmo iterativo para un **listado por niveles** de un ab:

- Se necesita como estructura auxiliar una *fila de arboles*.
- En cada nivel k=0,1,2,.. se ponen en la fila todos los arboles cuya raíz se encuentre en ese nivel.
- De esa fila se va sacando de a uno los árboles, se lista la raíz y se incluye sus dos subárboles asociados al final de la fila.
- Se continúa hasta llegar a las hojas y hasta que la fila quede vacía.

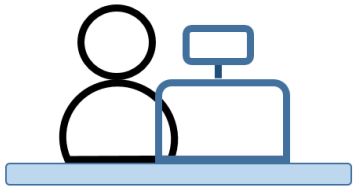


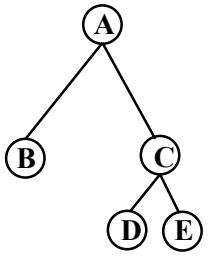
AB
Aplicación: listado de nodos por nivel

Ejemplo:

Inicial: Listado por Nivel: < >

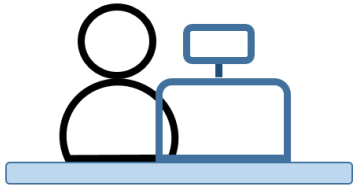
Fila:

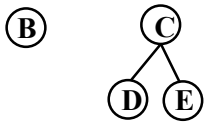




Después del Paso 1: Listado por Nivel: < A >

Fila:

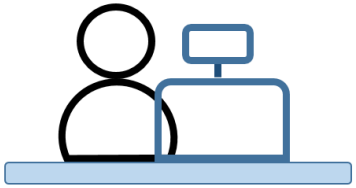


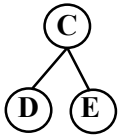


AB
Aplicación: listado de nodos por nivel

Después del Paso 2 : Listado por Nivel: < A, B >

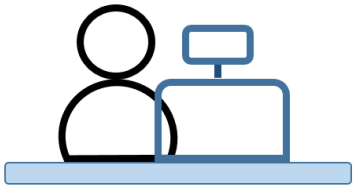
Fila:





Después del Paso 3: Listado por Nivel: < A, B, C >

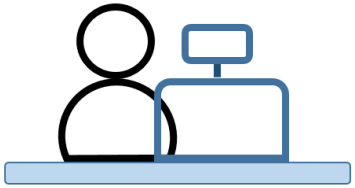
Fila:



D E

Después del Paso 4: Listado por Nivel: < A, B, C, D >

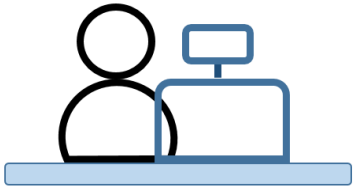
Fila:



E

Después del Paso 5: Listado por Nivel: < A, B, C, D, E >

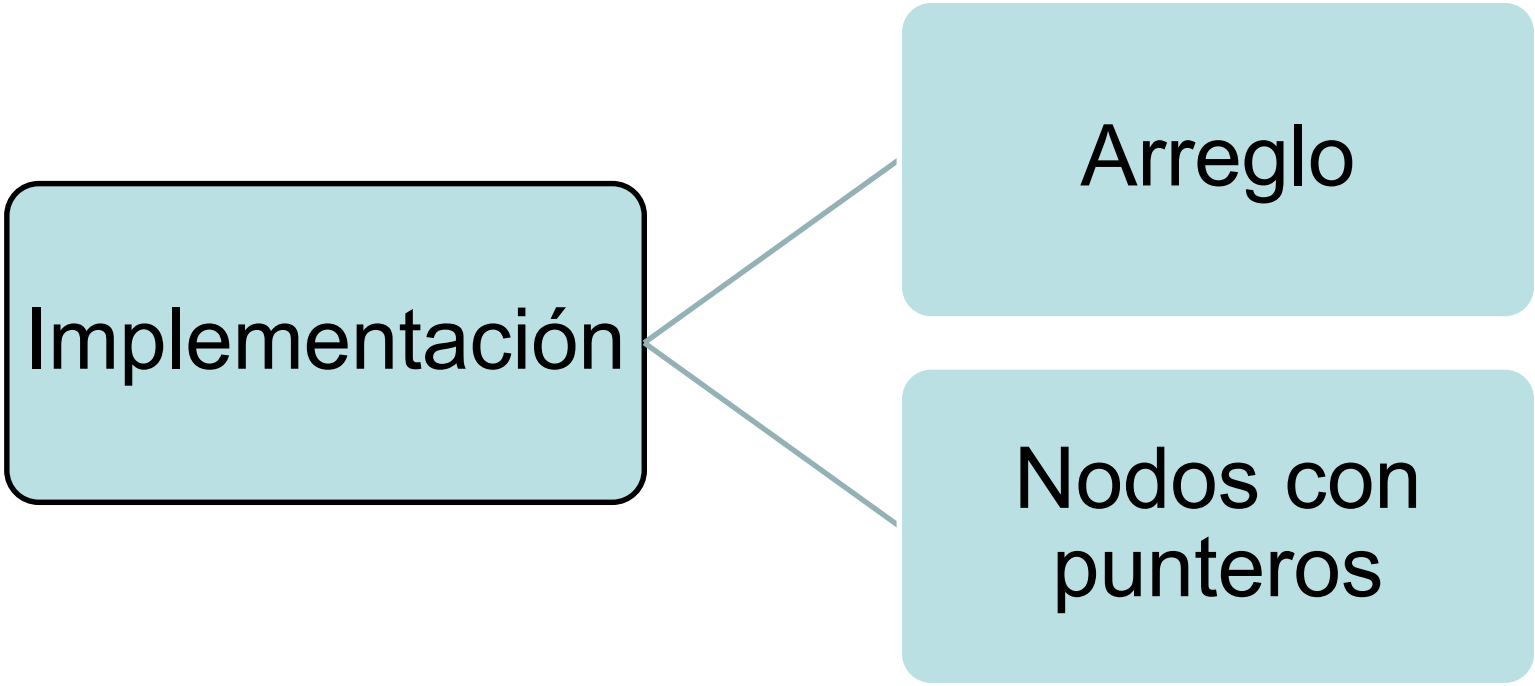
Filavacia:



AB
Aplicación: listado de nodos por nivel

```
ALGORITMO Niveles (T)
ENTRADA : T ∈ AB(ITEM)
SALIDA : listado de nodos  por nivel
AUXILIAR:  F∈ FILA(AB), TAUX ∈ AB(ITEM)
    Si NOT ESABVACIO(T) entonces
          F ← FILAVACIA  ;        ENFILA(F,T)
          Mientras NOT ESFILAVACIA(F) hacer
              TAUX ← FRENTE(F);  DEFILA(F);  ESCRIBIR(RAIZ(TAUX))
              SI NOT ESABVACIO(IZQUIERDO(TAUX)) entonces
                    ENFILA(F, IZQUIERDO(TAUX))
              SI NOT ESABVACIO(DERECHO(TAUX)) entonces
                    ENFILA(F, DERECHO(TAUX))
Fin
```

Arbol Binario



Ventajas y Desventajas?
Costos?

Implementación AB

Arreglo:

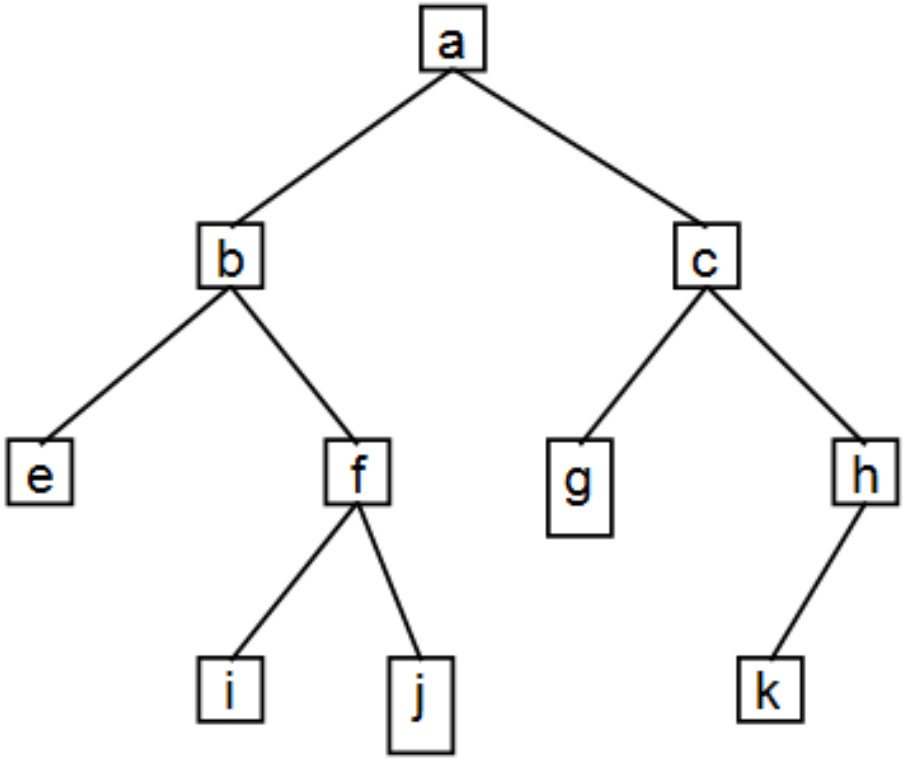
	item	izq	der
0	a	1	2
1	b	3	4
2	c	5	6
3	e	-1	-1
4	f	7	8
5	g	-1	-1
6	h	9	-1
7	i	-1	-1
8	j	-1	-1
9	k	-1	-1
10			

IndiceRaiz=0

IndiceLibre=10

Costo de las operaciones?

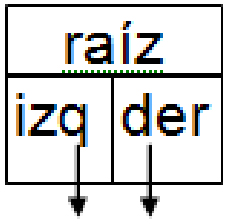
Ejemplo:



Implementación AB

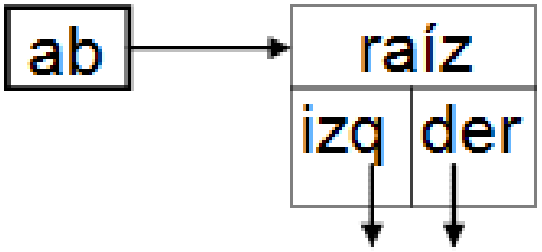
Nodos con punteros:

Nodo:

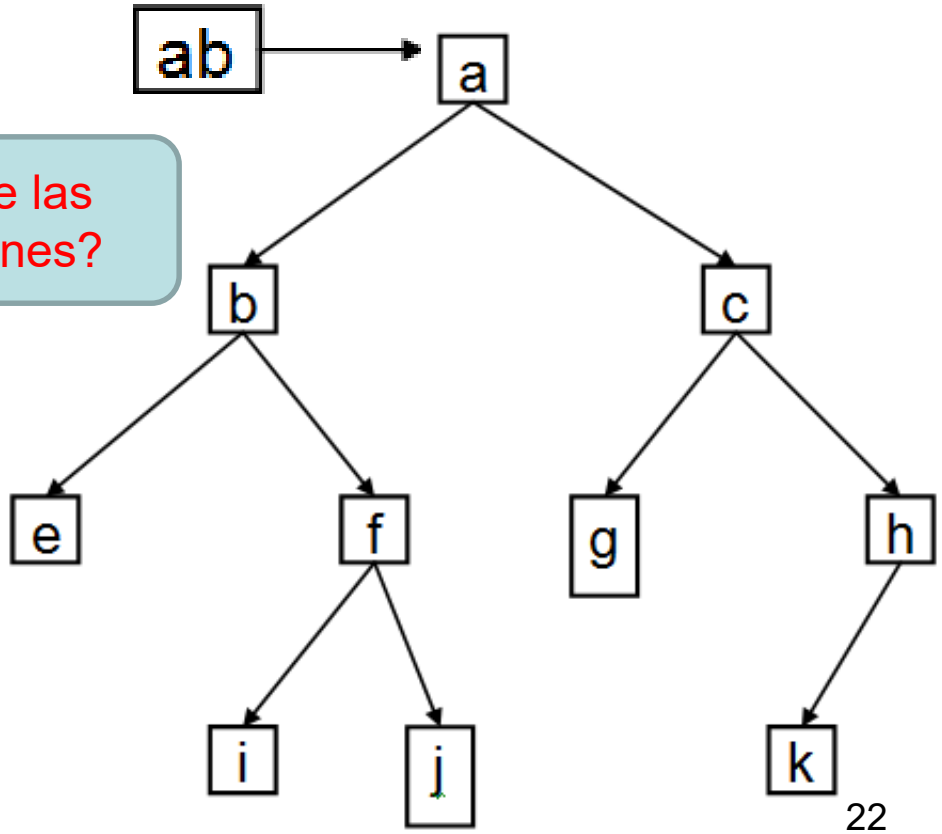


Costo de las operaciones?

Arbol Binario:



Ejemplo:



Implementación AB

En la representación del árbol con punteros, hay muchos punteros nulos. Si hay m nodos en un árbol binario, hay 2m enlaces de los cuales m+1 enlaces son vacios, de manera que la mitad del espacio reservado para punteros esta desperdiciado.

Perlis y Thornton idearon un procedimiento para aprovechar estos enlaces, usándolos para señalar otros nodos del árbol.

Este nuevo apuntador se llama ***hilo*** o ***hilván*** o ***hebra.*** Un árbol binario con hilvanes se denomina ***hilvanado.***

Implementación AB

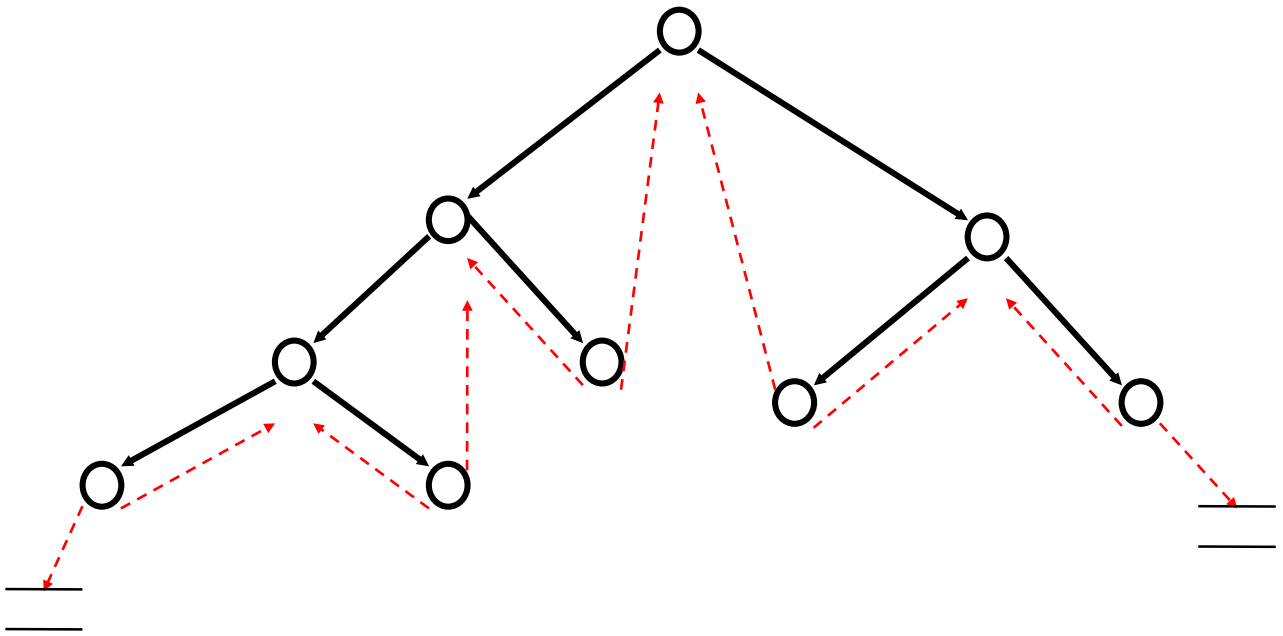
Por ejemplo: Se podría simplificar el recorrido en orden simétrico en el árbol con:

- Un enlace nulo a izquierda de un nodo puede ser reemplazado por un enlace al nodo que se listaría antes del nodo en orden simétrico.
- Un enlace nulo a derecha puede ser reemplazado por un puntero al nodo siguiente en orden simétrico.

Para implementar un árbol hilvanado se debe incluir en cada nodo un campo que indique si cada puntero es un verdadero puntero o es un hilván.

Implementación AB

Por ejemplo:



Formas de un AB

Desequilibrado o sesgado (skewed):

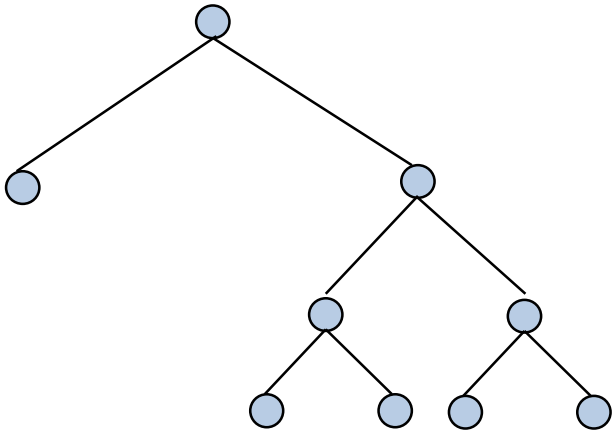
Por ejemplo:

- Este tipo de árbol tiene altura (n-1) para n nodos.

Formas de un AB

Estrictamente Binario: si todo nodo del árbol, tiene dos hijos o es una hoja.

Por ejemplo:



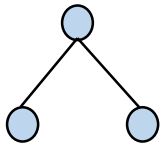
- El numero de hojas de un ab estrictamente binario es el numero de nodos internos mas uno.

Formas de un AB

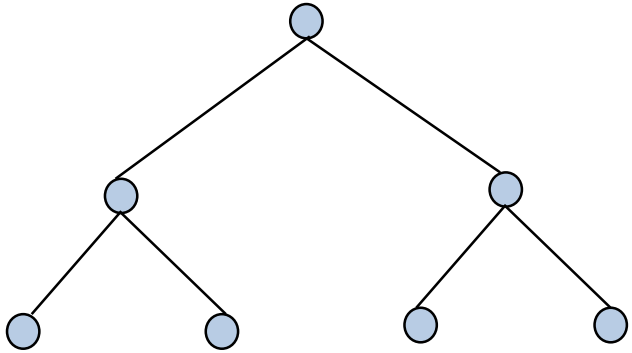
Completo: es un ab estrictamente binario que tiene todas sus hojas en el mismo nivel.

Por ejemplo:

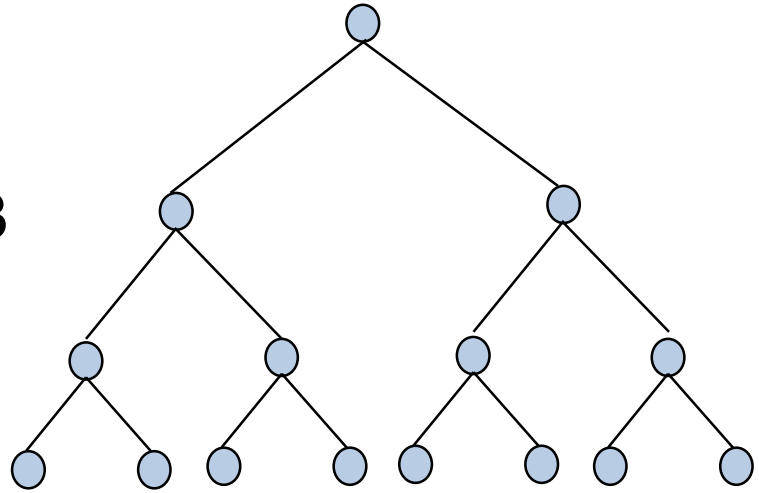
h=1



h=2



h=3



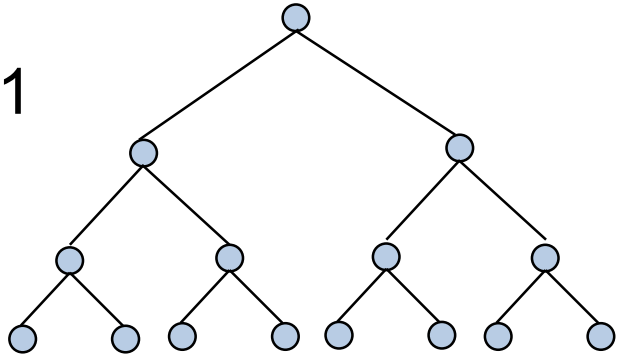
Formas de un AB

Un árbol binario completo de altura h tiene:

- Número de nodos en el nivel k : 2^k
- Número total de nodos:

$$n = 2^0+2^1+2^2+\ldots+2^h = \sum 2^i = 2^{h+1} -1$$

- Número de hojas : 2^h
- Número de nodos no terminales : 2^h-1



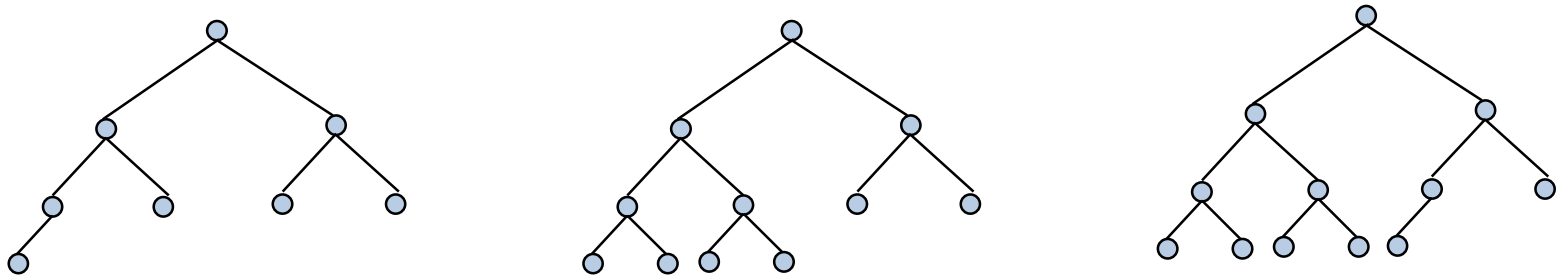
- Altura: $h = \log_2 (n+1) -1$

Un ab completo es el ab que tiene el número máximo de nodos para una dada altura.

Formas de un AB

Casi completo - cuasi completo:

Por ejemplo:



- En el ultimo nivel los nodos se ubican de izquierda a derecha.
- Número de nodos del penúltimo nivel = 2^h.
- Número de nodos del ultimo nivel es como mínimo 1 y como máximo 2^h.

APLICACIÓN:
Árbol de Expresión

Se puede usar arboles binarios para representar *expresiones aritméticas*.

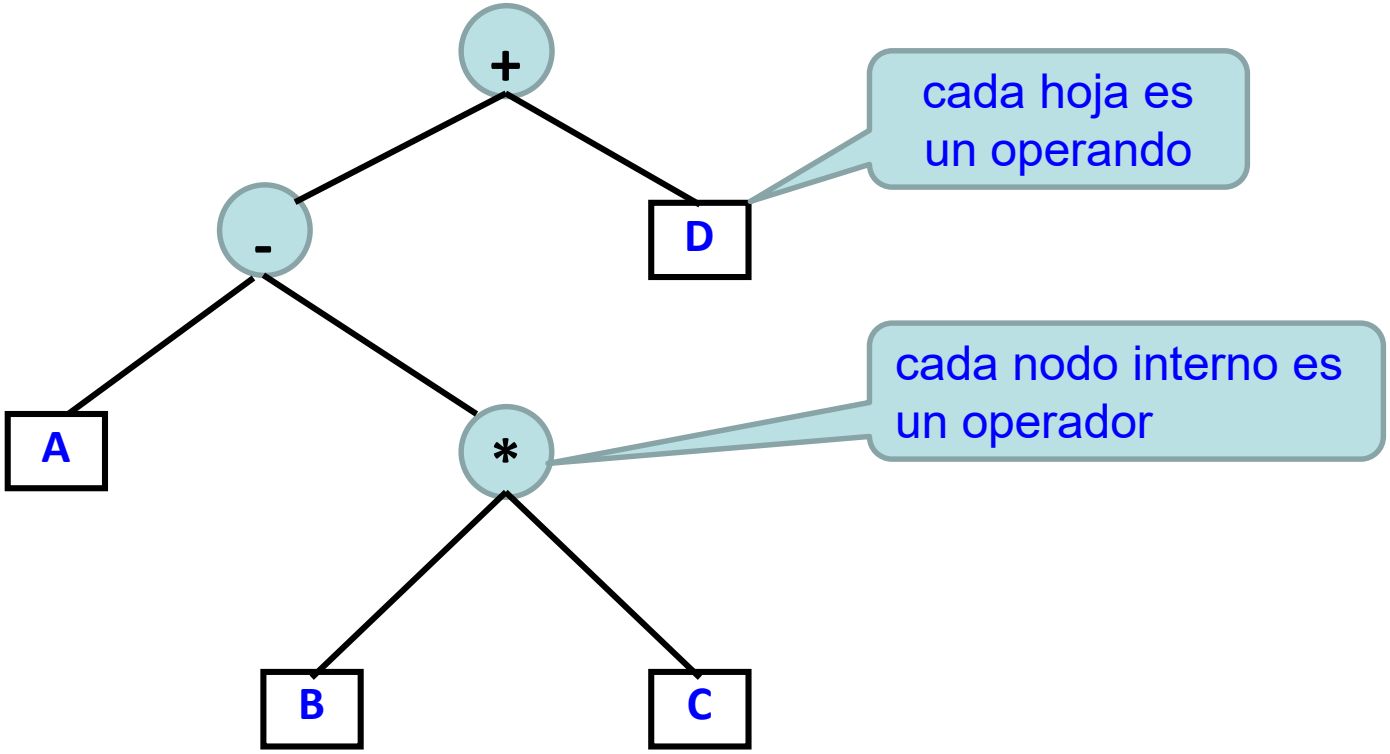
Se representa cada operando como una hoja y cada operador como un nodo no terminal cuyos hijos izquierdo y derecho son los operandos asociados al mismo.

En este caso el tipo de la información asociada a los nodos de un mismo árbol es de distinto tipo:

- los nodos internos son operadores,
- las hojas son operandos.

APLICACIÓN:
Árbol de Expresión

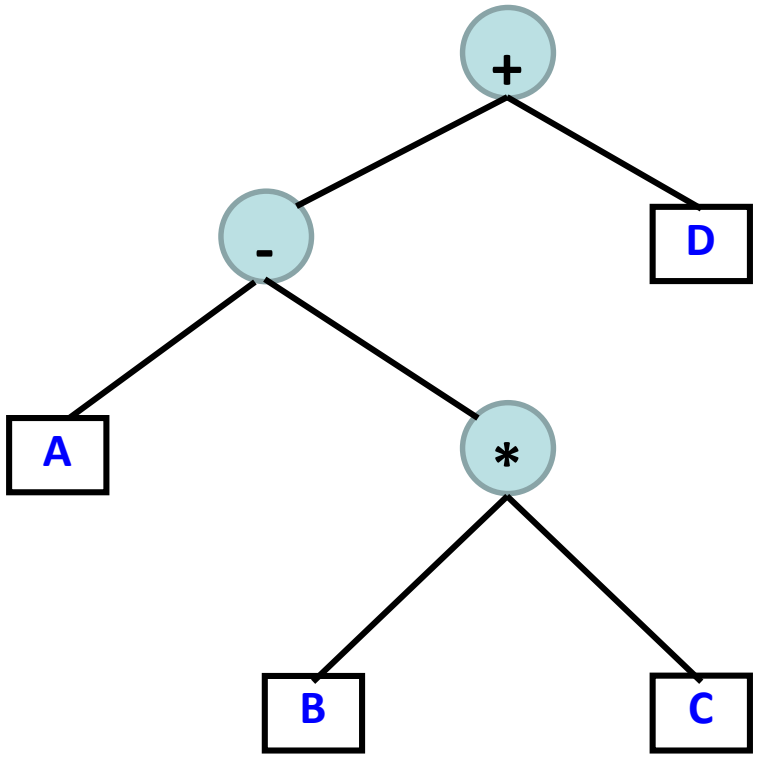
Así por ejemplo la expresión : A - B * C + D se puede representar con:



APLICACIÓN:
Árbol de Expresión

Un listado ***orden previo*** del árbol binario de expresión produce la expresión aritmética ***prefija***.

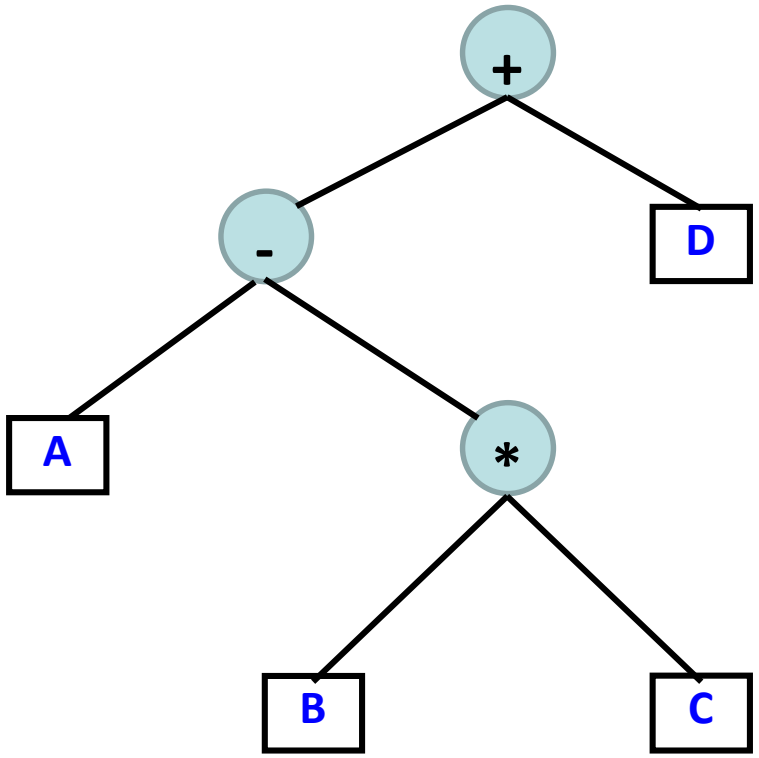
Ejemplo: + - A * B C D



APLICACIÓN:
Árbol de Expresión

Un listado en ***orden simétrico*** de un árbol binario de expresión produce la expresión aritmética ***infija*** **sin paréntesis.**

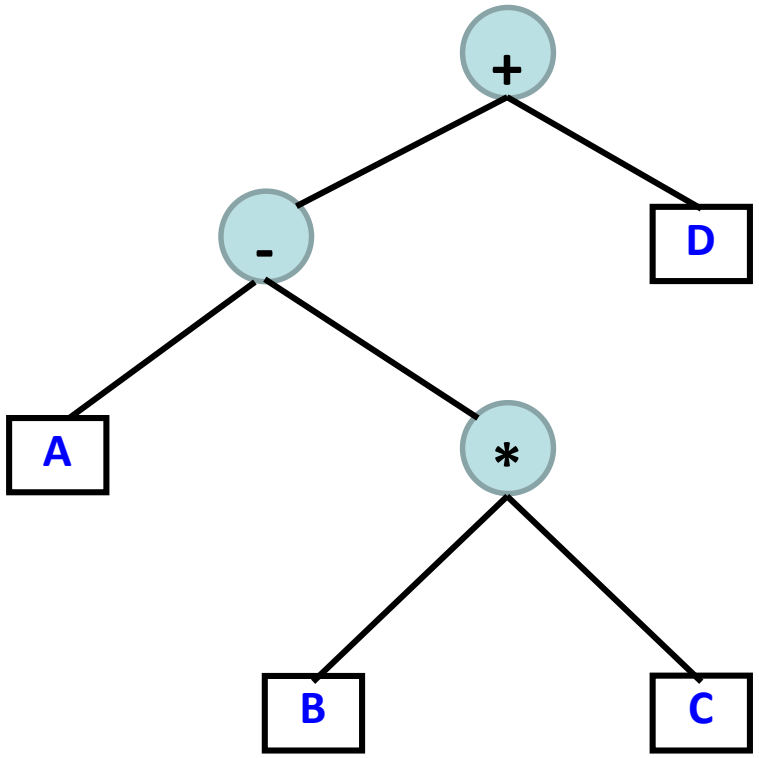
Ejemplo: A - B * C + D



APLICACIÓN:
Árbol de Expresión

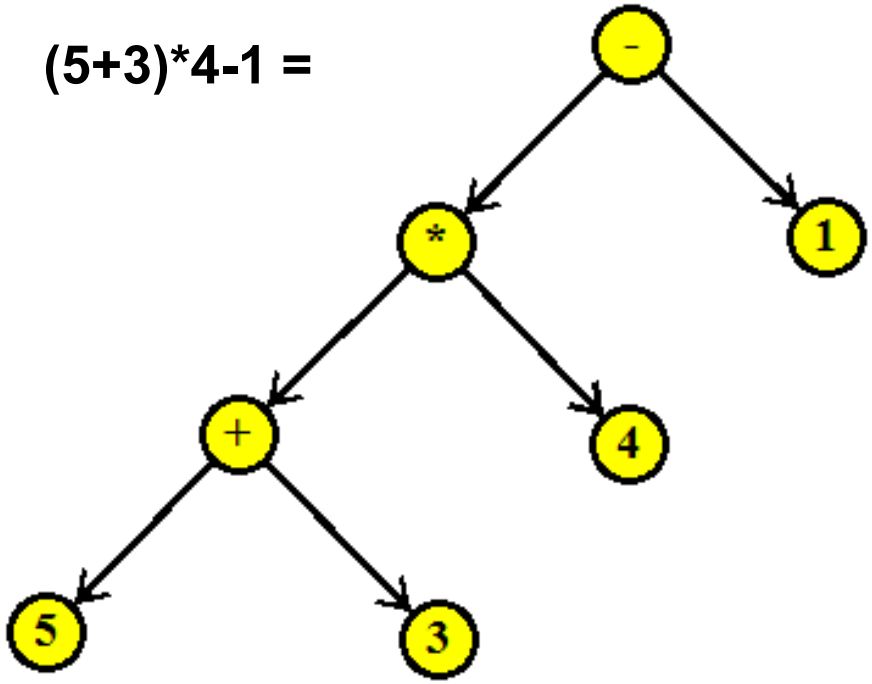
Un listado ***orden posterior*** del árbol binario de expresión produce la expresión aritmética ***postfija*****.**

Ejemplo: A B C * - D +

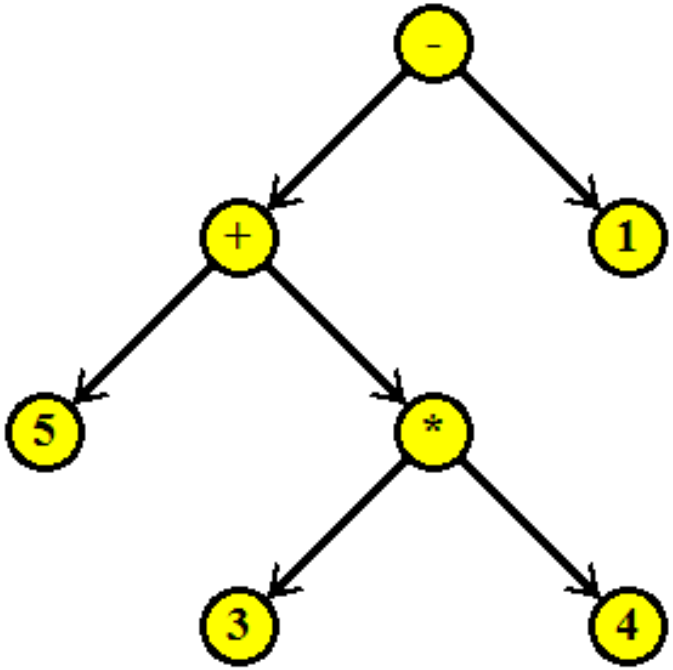


APLICACIÓN:
Árbol de Expresión

(5+3)*4-1 =



5+3*4-1 =



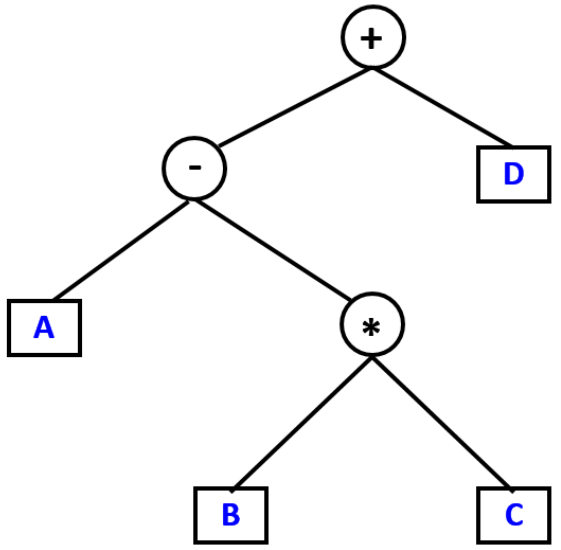
APLICACIÓN:
Árbol de Expresión

Construcción de un árbol de expresión a partir de una expresión aritmética infija:

1) Se pasa la expresión aritmética de infija a postfija
2) Se construye el ab con ayuda de una *pila de arboles*.

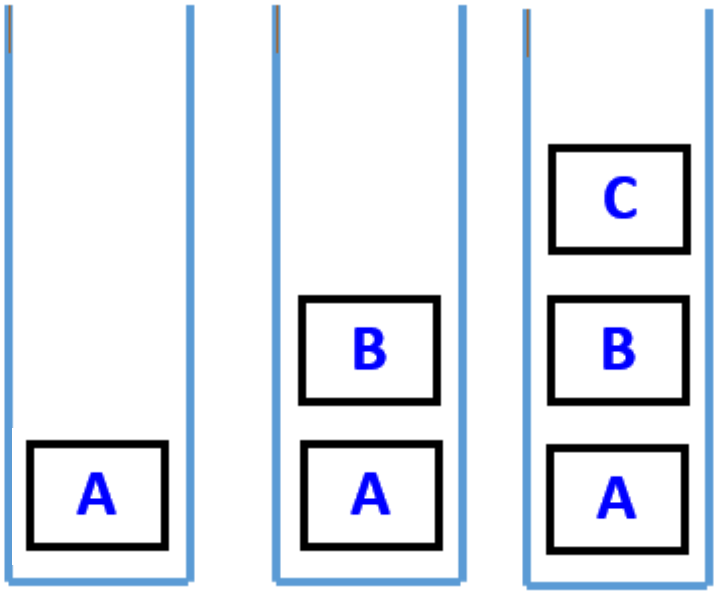
Ejemplo:

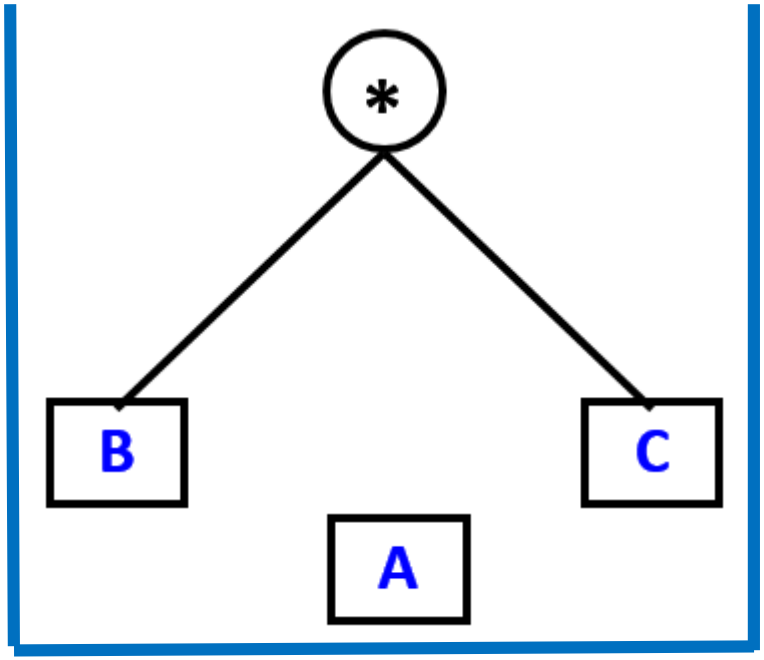
Expresión Infija: **A - B * C + D**
Expresión Posfija: **A B C * - D +**



APLICACIÓN:
Árbol de Expresión: **A B C * - D +**

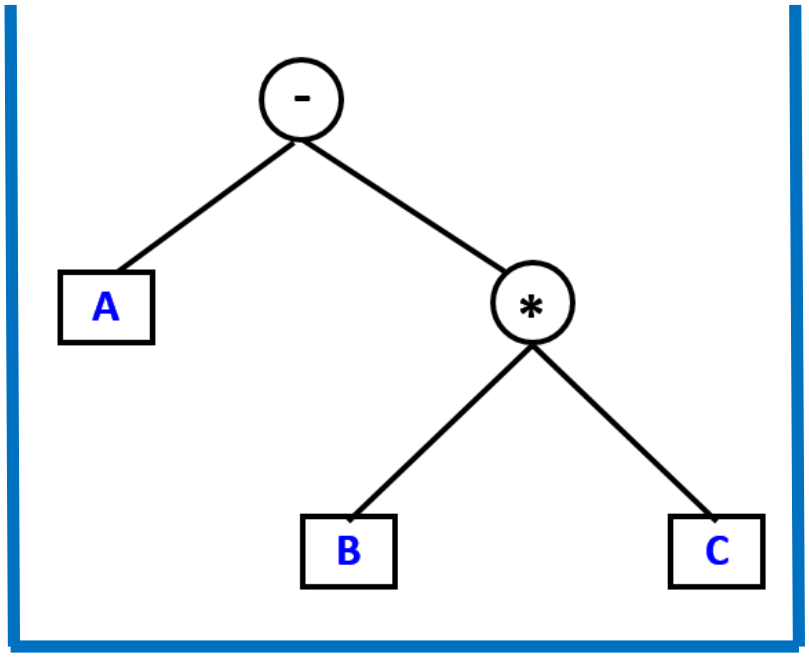
A	B	C	*

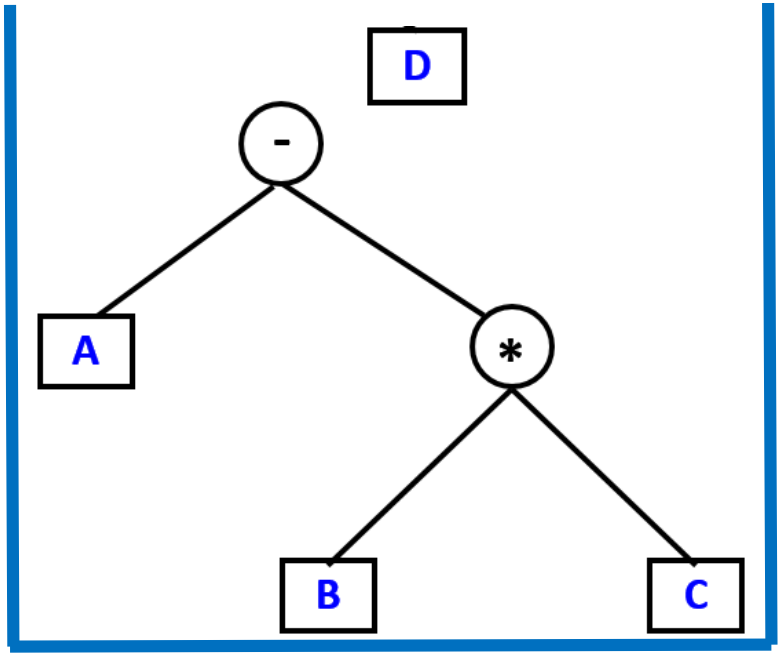




APLICACIÓN:
Árbol de Expresión: **A B C * - D +**

-	D





APLICACIÓN:
Árbol de Expresión: **A B C * - D +**

+