*А. В. Шпиленко*

# ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРСОНАЛОМ НА ПРЕДПРИЯТИИ

## 1. Критерии оптимизации управления персоналом

Наука об управлении персоналом и методы математического программирования для решения задач управления трудовыми ресурсами до сих пор не получили в нашей стране должного развития и применения. Однако в последнее время государственные и коммерческие структуры проявляют растущий интерес к научным методам управления персоналом. При решении задач подобного рода приходится учитывать множество различных по степени важности факторов, существование которых обусловлено взаимными требованиями, предъявляемыми друг к другу коллективом, отдельными индивидуумами и организацией.

Одной из основных проблем науки о руководстве является задача распределения трудовых ресурсов, которая включает в себя отбор, расстановку кадров и назначение на должности. Обычно отбор на работу в организации осуществляют исходя из текущих потребностей, хотя в некоторых случаях делаются попытки оценить «потенциал» будущего сотрудника с точки зрения его продвижения по службе. Иногда возникает необходимость найти компромиссное решение между отбором людей с наибольшей производительностью труда на данный момент и кандидатов с наивысшими возможностями в будущем.

Основной задачей распределения трудовых ресурсов является расстановка кадров (назначение на должности), обеспечивающая выполнение требуемых видов работ. Задачи распределения являются «зеркальным отображением» задач использования. Если в задачах распределения ресурсов структура работ считается заданной и требуется назначить их исполнителей, то в задачах использования ресурсов заданными являются исполнители, их возможности и индивидуальные характеристики и требуется определить структуру работ, которая позволила бы наилучшим образом использовать эти возможности. В большинстве случаев при управлении трудовыми ресурсами решаются одновременно обе задачи.

Задача распределения трудовых ресурсов решается в организации на двух уровнях управления. На верхнем уровне решается задача агрегированного планирования трудовых ресурсов, целью которой является определение численности групп сотрудников, необходимых каждой организации; часто эта численность выражается через потребность в человеко-часах и затратах на рабочую силу. Второй уровень – это непосредственное управление. Здесь результатом является фактическое назначение каждого конкретного исполнителя на конкретную работу, т. е. решение задачи, которая иногда называется задачей оптимального назначения и дает ответ на вопрос, как наиболее эффективно назначить n исполнителей на m работ.

Математическая модель задачи о назначениях в общем виде имеет следующую формулировку: найти оптимум целевой функции $F(\{x(i,j)\})$ при следующих ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} x(i,j) \le 1,\ j = 1,m;$$

$$\sum_{j=1}^{m} x(i,j) \le 1,\ i = 1,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x(i,j) = \min(n,m);$$

$$x(i,j) = 0,\ 1;\ i = 1,n,\ j = 1,m,$$

где $x(i,j) = 0$, если работа под номером j не выполняется работником под номером i, и $x(i,j) = 1$, если работа выполняется.

Данная модель требует, чтобы каждый исполнитель был назначен не более чем на одну работу и, соответственно, на каждую работу должен быть назначен не более чем один исполнитель. Для специалиста, использующего эту модель в реальных ситуациях, наиболее трудным моментом является определение соответствующей целевой функции. При этом возможно несколько подходов:

1. Максимизация (минимизация) суммы оценок назначений, иными словами, требование найти максимум (минимум) целевой функции:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c(i,j) * x(i,j),$$

здесь c(i,j) должна непосредственно выражаться через такие важные для организации показатели, как время выполнения работы, издержки производства, объем выпуска в единицу времени и т. д. Однако довольно часто осуществить это требование трудно, так как каждое значение c(i,j) есть точечная оценка, при получении которой существенную роль играет распределение ошибок.

2. Максимизация вероятности успешного выполнения каждым исполнителем работы, на которую он назначен, т. е. требование найти максимум целевой функции

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \log(\, p(i,j)\,) * x(i,j)\,,$$

где p(i,j) есть вероятность того, что исполнитель под номером i успешно выполнит работу под номером j ($0 \le p(i,j) \le 1$). Оценки вероятности того, что исполнитель с определенными характеристиками удовлетворительно выполнит каждую из работ, могут быть даны на основе статистических данных. Благодаря свойствам логарифмов целевая функция может быть выражена с помощью приведенной выше формулы. После введения понятия «вероятность успеха» или «неудачи» становится возможным рассмотрение других методов оценки значений c(i,j) и подходов к выбору целевой функции.

Среди специалистов нет единого мнения о предпочтительности той или иной целевой функции. Каждая конкретная задача управления требует внимательного обсуждения для выбора адекватной целевой функции.

## 2. Модели распределительного типа

**Модель о максимальном допустимом назначении.** Пусть имеется m должностей и кандидатов на эти должности. Для каждой пары кандидат i – должность j известно, может ли данный кандидат занимать данную должность. Задача о максимальном допустимом назначении состоит в том, чтобы назначить как можно больше кандидатов на должность при условии, что каждый кандидат может занять не более одной должности и каждую должность может занимать не более чем один кандидат. Введем для обозначения допустимости назначений величины b(i,j). При этом b(i,j) = 0, если кандидат может занимать должность, и b(i,j) = 1 в противном случае. Назначение обозначим x(i,j). При этом x(i,j) = 1, если кандидат i занимает должность j, и x(i,j) = 0 в противном случае. Тогда формальная постановка задачи будет выглядеть так:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x(i,j) \Rightarrow \max$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b(i,j) * x(i,j) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x(i,j) \le 1, \quad j = 1,m; \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x(i,j) \le 1, \quad i = 1,n;$$

$$x(i,j) = 0,\ 1;\ i = 1,n,\ j = 1,m.$$

Эту задачу можно описать на языке теории графов, используя понятия двудольного графа. Двудольным (бихроматическим) называется граф G(X,U) множество вершин которого X можно разбить на два подмножества $X = X_1 \cup X_2$ так, что выполняются следующие условия: $X_1 \cap X_2 = \varnothing$; для любого ребра $e = (x_1, x_2) \in U$, если $x_1 \in X_1$, то $x_2 \in X_2$, если $x_1 \in X_2$, то $x_2 \in X_1$. Иными словами, концы любого ребра принадлежат разным множествам. Поставим в соответствие каждому кандидату i вершину $x_i$ из множества $X_1$, каждой должности j – вершину $x_j$ из множества $X_2$. Обозначим допустимость назначения кандидата i на должность j введением ребра $(x_i, x_j)$ (заметим, что это ребро соответствует b(i,j) = 0 в формальной постановке (1)).

Поиск максимального допустимого назначения сводится к поиску максимального множества ребер, имеющих общие концы. Множество ребер графа, не имеющих общих концов, называется паросочетанием. Таким образом, поиск максимального допустимого назначения эквивалентен поиску максимального паросочетания.

**Алгоритм о максимальном допустимом назначении.** Излагаемый ниже алгоритм основан на итеративном улучшении решения с применением на каждой итерации алгоритма поиска пути между двумя вершинами ориентированного графа [2].

Алгоритм начинает свою работу с построения паросочетания, которое нельзя увеличить за счет включения в него нового ребра. Очевидно, такое паросочетание можно построить, последовательно включая в него ребра графа, соединяющие не занятые паросочетанием вершины.

Опишем теперь, каким образом подобное паросочетание можно увеличить (или убедиться в его максимальности). Введем ориентацию на ребрах графа $G(X,U)$ следующим образом. Все ребра, входящие в паросочетание, ориентируем в одном направлении (например, от $X_1$ к $X_2$), а все остальные ребра – в противоположном (соответственно, от $X_2$ к $X_1$). В полученном ориентированном графе мы ищем путь из какой-либо незанятой вершины множества $X_2$ в какую-либо незанятую вершину множества $X_1$. Но достаточно найти хотя бы один такой путь. Если такой путь существует, то, очевидно, в нем чередуются ребра, не входящие в паросочетание и входящие в него. Причем первое и последнее ребра не входят в паросочетание. Поэтому если на этом пути ребра, не входящие в паросочетание, включить в него, а ребра, входящие в паросочетание, исключить, то количество ребер в паросочетании увеличится на 1 (такой путь называется увеличивающим). Если повторить ту же процедуру для паросочетания и увеличивающий путь не будет найден, то это означает, что данное паросочетание максимально.

**Модель расстановки работников на конвейере**. Задача о максимальном допустимом назначении имеет много применений, помимо уже описанного выше. Пусть, например, имеется $m$ работ и $n$ работников ($n \geq m$). Для каждого работника $i$ известно время выполнения им работы $j$ – $t(i,j)$. Как и прежде, требуется распределить работы между работниками (или, что то же самое, – расставить работников по рабочим местам) так, чтобы каждому работнику досталось не более одной работы и на каждую работу был поставлен не более чем один работник. Если время выполнения всех работ ограничено величиной $T$, то нельзя поручать работнику $i$ работу $j$ при $t(i,j) > T$. Подобная ситуация может возникнуть при расстановке рабочих по операциям на конвейере, если время на выполнение одной операции (определяющее скорость движения конвейера) ограничено величиной $T$. Поскольку при $t(i,j) > T$ работника $i$ нельзя ставить на выполнение операции $j$, то элементы матрицы

$B = |b(i,j)|$ определяются с помощью следующего правила: $b(i,j) = 0$, если $t(i,j) \le T$, и $b(i,j) = 1$, если $t(i,j) \ge T$.

На построенной таким образом матрице B решается задача о максимальном допустимом назначении. Если максимальное допустимое назначение содержит менее m значений $x(i,j) = 1$, то это означает, что данное множество работ невозможно выполнить за время T при данных условиях. Если решение содержит m значений $x(i,j) = 1$, то каждое из этих значений указывает, что работнику i следует поручить работу (операцию) j. Определяемое таким образом распределение работ допустимо.

**Модель поиска на узкие места**. Представим теперь, что по-прежнему известны времена $t(i,j)$, но время T (например, скорость конвейера) не задано. Задача состоит в отыскании такой расстановки работников по работам (операциям), чтобы максимальное время выполнения работы было минимальным (в случае конвейера это означает максимальную скорость его передвижения). Такую задачу о назначении называют задачей «на узкие места». Для ее решения можно упорядочить времена $t(i,j)$ по возрастанию: $t(i,j)_1 \le t(i,j)_2 \le \ldots \le t(i,j)_m \le \ldots \le t(i,j)_{m*n}$. Далее построим матрицу $B^m = |b(i,j)|$ такую, что $b(i,j)_1 = b(i,j)_2 = \ldots = b(i,j)_m = 0$, а все остальные $b(i,j) = 1$. Решим на этой матрице задачу о максимальном допустимом назначении. Если решение содержит m значений $x(i,j) = 1$, то оно определяет оптимальную расстановку работников. Если же нет, то мы переходим к новой матрице $B^{(m+1)}$, в которой по сравнению с матрицей $B_{(m)}$ изменено на нулевое значение $b(i,j)_{m+1}$. Продолжая этот процесс, мы в итоге получим решение, содержащее m значений $x(i,j) = 1$ (поскольку $n \ge m$). Нетрудно понять, что это решение будет соответствовать искомой оптимальной расстановке работников. Заметим, что при поиске максимального допустимого значения на матрице $B^{(k)}$ можно использовать в качестве начального приближения решение, полученное на матрице $B^{(k-1)}$.

*Пример. Пусть 4 работника претендуют на 3 рабочих места, и времена выполнения ими соответствующих работ изображены в таблице:*

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 3 |
| 2 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 2 | 2 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

*Соответствующая матрица $B^3$ и максимальное допустимое назначение на ней представлено ниже:*

$$\begin{matrix} 1 & \underline{0} & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \underline{1} \end{matrix}$$

*Поскольку максимальное допустимое назначение содержит не все 3 работы, мы должны увеличить количество нулевых элементов и перейти к матрице $B^4$:*

$$\begin{matrix} \underline{0} & 0 & 1 \\ 1 & \underline{0} & 1 \\ 1 & 1 & \underline{0} \end{matrix}$$

*Полученное решение содержит все 3 работы. Максимальное значение t(i,j) («узкое место») равно t(11) = 2. Название задачи на «узкие места» связано с тем, что скорость движения конвейера определяется максимальным значением t(i,j) из выбранных (i,j), которое и является «узким местом».*

**Модель оптимального назначения.** Дальнейшее усложнение задачи связано с тем, что назначение кандидата i на должность j может быть сопряжено с определенными затратами (например, на переподготовку, на оплату труда и т. п.). Обозначим эти затраты c(i,j). Матрица $C = |c(i,j)|$ называется матрицей затрат. Тогда задача состоит в распределении максимального количества кандидатов по должностям при минимальных суммарных затратах. Заметим, что если кандидат i не может занимать должность j (из-за несоответствия квалификации, из-за ограничений на время выполнения работы и пр.), то можно формально положить $c(i,j) = \infty$. Эту задачу называют задачей об оптимальном назначении. Ее аналитическую постановку можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c(i,j) * x(i,j) \Rightarrow \max$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x(i,j) = \min(n,m);$$

$$\sum_{i=1}^{n} x(i,j) \le 1,\ j = 1,m; \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x(i,j) \le 1, \quad i = 1,n;$$

$$x(i,j) = 0,\ 1;\ i = 1,n,\ j = 1,m.$$

Алгоритм решения этой задачи («венгерский метод») использует поиск максимального допустимого назначения и заключается в следующем. В каждой строке матрицы С находим минимальный элемент, вычитаем его из всех элементов данной строки. В каждом столбце полученной матрицы находим минимальный элемент и вычитаем его из всех элементов столбца. В полученной матрице находим максимальное допустимое назначение. Если

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x(i,j) = \min(n,m),$$

то мы получаем оптимальное назначение. В противном случае мы должны использовать тот факт, что одновременно с поиском максимального допустимого назначения мы находим минимальное множество линий, покрывающих все нули матрицы. Напомним, что это множество состоит из непомеченных строк и помеченных столбцов. Перечеркнем эти линии. Выберем минимальный неперечеркнутый элемент (пусть он равен w). Вычтем w из каждого неперечеркнутого элемента матрицы и прибавим его к каждому дважды перечеркнутому элементу. На преобразованной таким образом матрице снова найдем максимальное допустимое назначение. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока не будет построено назначение, содержащее min (n,m) единичных элементов. Это назначение и будет оптимальным.

Задачу об оптимальном назначении можно поставить и как задачу поиска максимума целевой функции. Например, если учитывать, что в результате найма работника i на место j работодатель может получить доход a(i,j), то постановка задачи будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a(i,j) * x(i,j) \Rightarrow \max \qquad (3)$$

(если работник i не может выполнять работу j, то $a(i,j) = -\infty$). Очевидно, можно, положив

$$c(i,j) = \max_{i,j} a(i,j) - a(i,j),$$

переформулировать задачу максимизации (3) на задачу минимизации (2).

**3. Модели профессионального клиринга**

Разработка практических методов при подборе претендентов на рабочие места и отборе персонала на внутреннем рынке труда должна содействовать практической реализации его социальной роли, а также повышению эффективности и качества деятельности предприятий в развитии российской экономики.

**Модель взаимного выбора**. Допустим, распределение рабочих по рабочим местам осуществляется не в рамках одного предприятия, а имеет место взаимный подбор работников и работодателей. Процесс такого подбора носит название профессионального клиринга. Будем считать для простоты, что каждый работодатель предлагает ровно одно рабочее место. Как и в предыдущих разделах, будем считать, что работодатель j, наняв работника i, рассчитывает получить с его помощью доход $a(i,j) \geq 0$. Представим, что подбором занимается служба занятости, которой известны значения всех $a(i,j)$. Какими принципами следует руководствоваться при подборе? Было бы заманчиво осуществить его путем решения задачи (3). Но при этом надо учитывать, что работники и работодатели могут непосредственно договариваться друг с другом и если какой-либо паре «работник–работодатель» окажется выгоднее взаимно «объединиться», чем подчиниться принципу подбора (3), то они могут разрушить предлагаемое службой решение. Для того чтобы понять, может ли такое произойти, надо выяснить, в чем именно состоит выгода работника и работодателя. Каждый работодатель j может использовать некоторую часть $d(i,j) \geq 0$ своего дохода $a(i,j)$ на оплату труда работника i с тем, чтобы заинтересовать его согласиться работать именно на себя. Естественно, при этом часть дохода $a(i,j) - d(i,j) = e(i,j) \geq 0$ он хотел бы оставить себе. Таким образом, суммарная выгода работника i и работодателя j измеряется величиной $a(i,j)$ в случае, если работник i поступит работать на рабочее место j.

Итак, если после того, как осуществлен подбор по принципу (3), найдутся работник i и работодатель j, которые смогут распределить доход a(i,j) более выгодно для каждого, чем при этом подборе (3), то они смогут разрушить решение.

Докажем, что можно осуществить разумное распределение доходов между работниками и работодателями, при котором ни у одной пары «работник–работодатель» не возникнет желания разрушить подбор. Это возможно только при оптимальном в смысле (3) назначении. Действительно, пусть при некотором подборе {x(i,j)} работник $i_1$ назначен на место $j_1$, а на место $j_2$ подобран работник $i_2$. Для того чтобы у работника i и работодателя j не было желания разрушить предложенный подбор, должно соблюдаться правило

$$d(i_1,j_1) + e(i_2,j_2) \geq a(i_1,j_2). \qquad (4)$$

Поскольку неравенство (4) должно выполняться для всех работников i и работодателей j, то из него следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (d(i,j) - e(i,j)) * x(i,j) \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a(i,j) * x^1(i,j),$$

каков бы ни был подбор $x^1(i,j)$. А это означает, что подбор x(i,j) оптимален в смысле (3). Более того, можно доказать, что для любого оптимального подбора существует разумное распределение доходов.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий этот факт. Пусть матрица доходов имеет вид:

| | |
|---|---|
| ***8*** | *4* |
| *9* | ***7*** |

*В этой матрице строки соответствуют работникам, а столбцы – работодателям. Оптимальное назначение подчеркнуто. Казалось бы, работнику под номером 2 и работодателю под номером 1 выгодно нарушить это решение, объединившись друг с другом, и получить совместный доход 9. Но если в оптимальном решении доходы разделить следующим образом: d(11) = 3, e(11) = 5, d(22) = 5, e(22) = 2, то работнику под номером 2 и работодателю под номером 1 будет невыгодно нарушить это назначение, поскольку они не смогут одновременно повысить свои доходы.*

Данные рассуждения вводят нас в область «теории игр». Описанный процесс подбора является одним из примеров игры. Решения, которые невыгодно нарушать никакой группе участников игры, называются «устойчивыми». Не всякая игра имеет устойчивое решение. Если устойчивое решение существует, то оно не всегда единственно. В следующих разделах мы встретимся с различными ситуациями, возникающими в играх взаимного подбора.

**Профессиональный клиринг как игра взаимного подбора.** Как правило, при решении задачи профессионального клиринга значения ожидаемых доходов a(i,j) не известны. Вместо этого для каждого участника процедуры подбора (работника и работодателя) составляются 2 списка: список качеств («что есть») и список притязаний («что нужно»). Как и прежде, структуру данной задачи можно отобразить в виде двудольного графа G(X,U), где $X = X_1 \cup X_2$, причем вершины множества $X_1$ соответствуют работникам, а вершины множества $X_2$ – рабочим местам. Ребро (i,j) существует в том и только в том случае, когда качества рабочего места j соответствуют претензиям работника i и, наоборот, качества работника i соответствуют претензиям работодателя, предлагающего рабочее место j.

В матричной постановке по-прежнему графу G(X,U) соответствует матрица $B = |b(i,j)|$, причем b(i,j) = 0, если в графе G(X,U) существует ребро (i,j), и b(i,j) = 1 в противном случае. Любое паросочетание в графе G(X,U) (множество допустимых нулей в матрице B) соответствует допустимому подбору работников на рабочие места. Максимальное паросочетание (множество допустимых нулей) соответствует допустимому подбору максимального числа работников на рабочие места. Решив задачу о максимальном допустимом назначении, можно найти такой подбор. Однако применение этого подхода в реальных ситуациях сталкивается с двумя серьезными трудностями. Первая из них связана с тем, что обе стороны (как работник, так и работодатель) могут получать неоправданные преимущества, повышая свои уровни притязаний.

Например, из рисунка 1 видно, что работник 2 будет подобран на рабочее место 1, даже если для этого места более предпочтителен работник 1. Причиной здесь мог оказаться высокий уровень притязаний работника 2, из-за которого для этого работника не нашлось других подходящих мест. Аналогичная ситуация имеет место в отношении рабочего места 2 и работника 3. Здесь уже работодатель, располагающий местом 2, добивается нужного ему подбора путем повышения уровня притязаний. Вторая трудность автоматизированного клиринга состоит в жесткой фиксации предлагаемых решений. Дело в том, что человек не склонен доверять и подчиняться компьютеризированному решению своих проблем. Так, в примере, изображенном на рисунке 1, работник 1 может напрямую договориться с работодателем 1 (если они предпочитают друг друга иным вариантам) и аналогично работник 3 может договориться с работодателем 3.

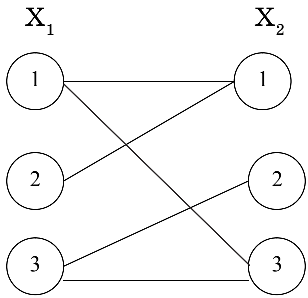


*Рис. 1.*

*В результате автоматизированное решение будет разрушено. Еще более наглядно этот эффект иллюстрируется на примере брачного подбора. Если вершины множества $X_1$ соответствуют юношам, а вершины множества $X_2$ – девушкам, то никакая клиринговая служба не объединит пары согласно «оптимальному» решению, если, например, юноша 1 и девушка 1 предпочитают друг друга тем партнерам, которых им предлагает служба. Таким образом, мы снова приходим к понятию устойчивости, но на этот раз основанием для решения может служить лишь информация о взаимных предпочтениях участников процедуры. Сформулируем понятие устойчивости в данном случае.*

*<u>Неустойчивым</u> называется такое назначение работников на рабочие места, при котором существует двое работников a и b, назначенных, соответственно, на места A и B, причем b предпочитает A по отношению к B и A предпочитает работника b по отношению к работнику a (см. рис. 2).*

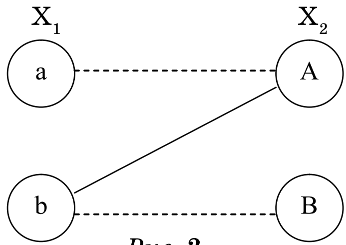


*Рис. 2.*

Неустойчивое назначение

Назначение, предпочтительное для работника b и рабочего места A

*Назначение, не являющееся неустойчивым, называется устойчивым. Рассмотрим два примера. Пусть имеется 3 работника a, b, c и 3 рабочих места A, B, C. Их взаимные ранжирования отображены в таблице:*

| **A** | **B** | **C** |
|---|---|---|
| 1,3 | 2,2 | 3,1 |
| 3,1 | 1,3 | 2,2 |
| 2,2 | 3,1 | 1,3 |

*Числа до запятых обозначают ранжирование рабочих мест работниками, числа после запятых – ранжирование работников работодателями. В этом примере существуют 6 назначений, из которых 3 являются устойчивыми. Первое – каждый работник получает место по своему выбору. Второе – каждый работодатель получает работника по своему выбору. Третье – все получают свой второй выбор. Остальные 3 назначения неустойчивы. В следующем примере 4 работника претендуют на 4 рабочих места, и их взаимные ранжирования отображены в таблице:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1,3 | 2,3 | **3,2** | 4,3 |
| 1,4 | 1,4 | 3,3 | **2,2** |
| **2,2** | 1,4 | 3,4 | 4,1 |
| 4,1 | **2,2** | 3,1 | 1,4 |

*Здесь имеется единственное устойчивое назначение (оно выделено в таблице). Заметим, что ни один участник подбора не получает своего первого выбора. Но если бы кто-либо* *попытался улучшить свое положение, ему бы это не удалось, поскольку он не сможет найти партнера, которому тоже выгодно с ним объединиться.*

Пусть в общем случае, как и в предыдущих примерах, каждый участник процедуры выражает свои предпочтения путем упорядочения альтернатив. Тогда имеет место следующая теорема.

***Теорема 4.1.*** Устойчивое назначение всегда существует (Теорема Гейла и Шепли).

***Доказательство*** проведем конструктивно. Сначала опишем процедуру, а затем докажем, что она всегда строит устойчивое назначение. На первом этапе каждый работник обращается к первому работодателю согласно своему ранжированию. Каждый работодатель, получивший более одной заявки, отвергает все, кроме лучшей, согласно своему ранжированию. На втором этапе каждый отвергнутый работник обращается ко второму работодателю согласно своему ранжированию. Каждый работодатель, на место которого вновь поступили заявки, выбирает лучшую (для себя) из вновь полученных и уже имеющейся заявки (если таковая у него есть). Остальные заявки отвергаются. После не более чем $n^2 - 2n + 2$ этапов каждое рабочее место будет заполнено (поскольку каждый работник не делает более одной попытки занять одно и то же место). В этот момент процедура завершается.

Докажем, что полученное назначение устойчиво. Действительно, пусть работник x не назначен на место y, но он предпочитает его тому месту, на которое назначен в результате процедуры. Это значит, что по ходу процедуры он пытался занять место y и был затем отвергнут. Значит, на место y сейчас назначен более предпочтительный работник, чем x. Таким образом, неустойчивости нет.

Условие равенства количества работников и рабочих мест несущественно. Если $n < m$, то процедура завершается, когда каждый работник либо получит место, либо получит отказ от всех мест. Несущественным является также требование о том, чтобы в ранжирование каждого работника входили все места и наоборот. Если какое-либо место не подходит для работника, он может быть не включен в соответствующее ранжирование. В этом случае процедура завершается, когда каждый работник либо получит место, либо получит отказ от всех мест, которые присутствуют в его ранжировании. Процедура, очевидно, обобщается на случай, когда некоторые работодатели имеют в своем распоряжении несколько мест.

*В качестве иллюстрации процедуры подбора рассмотрим гипотетическую ситуацию. В подборе участвуют три работника: Андреев, Борисов и Володин, и три фирмы-работодателя: А (2 вакансии), Б и В. Ранжирование, представленное фирмами и работниками, таково:*

| Ранжирование фирм | | Ранжирование работников | |
|---|---|---|---|
| Фирма А<br>(2 места) | 1. Володин<br>2. Борисов<br>3. Андреев | Андреев | 1. Фирма Б<br>2. Фирма А |
| | | Борисов | 1. Фирма А |
| Фирма Б<br>(1 место) | 1. Борисов<br>2. Володин<br>3. Андреев | | 2. Фирма Б<br>3. Фирма В |
| | | Володин | 1. Фирма Б |
| Фирма В<br>(1 место) | 1. Борисов | | 2. Фирма А |

*Процесс обработки ранжирования идет следующим образом. Сначала предлагаются места в фирме А двум наиболее предпочтительным для нее работникам, Володину и Борисову. Поскольку Борисов поставил фирму А на первое место, этот подбор фиксируется. Володин поставил фирму А на второе место, поэтому этот подбор определяется как условный. Далее предлагается место в фирме Б Борисову, но, поскольку Борисов уже подобран для фирмы А, это предложение фирмы Б отвергается от имени Борисова. Затем предлагается место в фирме Б второму по предпочтительности для этой фирмы кандидату Володину. Поскольку Володин предпочитает это предложение месту в фирме А, его условный подбор в фирму А аннулируется и он подбирается для фирмы Б. Затем предлагается место в фирме В Борисову, но, поскольку Борисов уже подобран для фирмы А, это предложение от фирмы В отвергается. Фирма В не указала других кандидатов, поэтому ее место остается при подборе незаполненным. Фирма А имеет еще одно незанятое место, которое предлагается следующему кандидату из списка фирмы А, Андрееву. Поскольку это единственное предложение,* *полученное Андреевым, он подбирается для фирмы А. Теперь подбор завершен, поскольку в каждой фирме либо заняты все места, либо же она сделала предложения всем желательным работникам. Заметим, что в процессе подбора никакая альтернатива не была пропущена. Володин удерживал место, поставленное им вторым номером в ранжировании, до тех пор, пока не получил предложение и не был подобран на наиболее предпочтительное для себя место. Только после этого был введен в дело Андреев. Выбор любого работника или фирмы не может быть внесен в окончательный подбор до тех пор, пока не сделаны все потенциально возможные предложения и не произведены соответствующие акты принятия или отказа от предложении. Поэтому работники и фирмы не могут попасть в невыгодное положение из-за того, что они поставят на первые места в своих списках наиболее предпочтительные фирмы и наиболее предпочтительных работников, даже если вероятность принятия соответствующего предложения очень невелика. Также ни один клиент не может обеспечить себе односторонних преимуществ за счет повышения уровня притязаний. Это видно на примере фирмы В, которая не получила работника из-за того, что не включила в свой список альтернативных кандидатур. Все клиенты должны быть заранее предупреждены о возможности подобной ситуации.*

Как было видно из первого примера данного раздела, может существовать несколько устойчивых назначений для данной системы ранжирования. Какое из устойчивых назначений является более предпочтительным? Ответ на этот вопрос зависит от того, чьи интересы мы защищаем – работников или работодателей. Можно доказать, что назначение, вычисляемое предложенным алгоритмом, является оптимальным с точки зрения работников в том смысле, что каждый работник в результате будет устроен не хуже, чем при любом другом устойчивом назначении. Чтобы построить оптимальное назначение с точки зрения работодателей, надо взаимно заменить в тексте процедуры «работники» и «рабочие места». Изложенная процедура профессионального подбора широко используется на практике.

**Модель организации горизонтальной карьерой.** Современные методы управления персоналом предполагают активное использование горизонтальных перемещений работников в рамках одной фирмы. Такие перемещения, являющиеся обычным инструментом управления на большинстве японских и на многих американских фирмах, позволяют повысить мотивацию и социальную защищенность работников и быстро реагировать на изменения рыночной ситуации. Задача управления этим процессом состоит в выборе такого взаимного перемещения работников одного административного уровня, чтобы все места оставались занятыми, работники перемещались только на подходящие для них места и интересы работников были учтены. Структура этой задачи аналогична структуре задачи одностороннего клиринга (например, квартирного) и может быть представлена в виде ориентированного графа. Вершины орграфа соответствуют должностям, занимаемым работниками, подлежащими перемещению (рис. 3).

Ребро из одной вершины в другую существует тогда и только тогда, когда возможно перемещение работника с должности, соответствующей первой вершине, на должность, соответствующую второй вершине. Петля в некоторой вершине означает, что соответствующий работник может оставаться на своем месте. Допустимому перемещению соответствует такое множество ребер, при котором в каждую вершину входит ровно одно ребро и из каждой вершины выходит ровно одно ребро. Очевидно, такое множество ребер образует множество непересекающихся циклов, покрывающих вершины орграфа.

*Например, в графе на рисунке 3 имеются 4 допустимых перемещения: {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)}(тождественное), {(1,1), (2,2), (3,3), (4,5), (5,4)}, {(1,2), (2,3), (3,1), (4,4), (5,5)} и {(1,2), (2,3), (3,1), (4,5), (5,4)}. Построим матрицу смежности B орграфа задачи, в которой каждой вершине $i$ соответствует строка $i$ и столбец $j$, а элемент $b(i,j) = 0$, если существует ребро из вершины $i$ в вершину $j$ и $b(i,j) = 1$ в противном случае.*

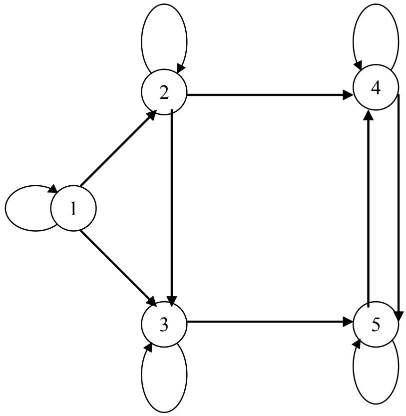


*Рис. 3.*

*Допустим теперь, что каждая вершина имеет петлю, тогда по крайней мере одно допустимое перемещение (тождественное) обязательно существует. Какое из допустимых перемещений целесообразно выбрать? Здесь опять можно воспользоваться понятием устойчивости. Предположим, мы выяснили предпочтения работников в виде ранжирования предлагаемых рабочих мест (включая нынешнее рабочее место для каждого работника). Нам хотелось бы переместить работников таким образом, чтобы не существовало ни одной группы работников (в частности, состоящей из одного работника), которая могла бы разрушить предложенное перемещение путем взаимной договоренности. Такое желание могло бы возникнуть, если бы у этой группы нашлось взаимное перемещение, при котором ни один ее член не ухудшил бы своего положения по сравнению с предложенным перемещением, но хоть один улучшил бы. Иначе говоря, приказ о перемещении не должен противоречить интересам работников. В частности, это условно означает, что ни один работник не получает места, которое он сам оценил хуже, чем нынешнее (иначе бы он просто не пожелал это место уступить). Группа участников процесса подбора (рассматриваемого нами как игра), которая может действовать сообща, носит в «теории игр» название коалиции. Описанное нами условие устойчивости вполне аналогично условию устойчивости для взаимного подбо-*

*ра, только при взаимном подборе мы рассматривали коалиции из двух участников.*

Докажем, что в описанной задаче устойчивое решение существует и оно единственно. Вначале опишем алгоритм, при помощи которого данное решение строится. Пусть N – множество всех участников процедуры. Выберем произвольного участника $i \in N$. Пусть $i^1$ наиболее предпочитаемое участником i место. Перейдем к участнику $i^1$. Пусть $i^{11}$ – наиболее предпочитаемое участником $i^1$ место. Перейдем к участнику $i^{11}$. Продолжая процесс подобным образом, мы в конце концов вернемся к одному из ранее просмотренных мест (участников). Обозначим его $i_1$. Таким образом, мы построим такой цикл $S = \{i_1, i_{2,\dots,} i_s = 0\}$, при котором каждый участник $i_j$ предпочитает в наибольшей степени место $i_{j+1}$. Этот цикл S (в частности, содержащий одного участника) мы включаем в перемещение, а его членов исключаем из дальнейшего рассмотрения. Далее мы проделываем ту же процедуру среди участников, входящих в множество N\S. Здесь мы всякий раз выбираем место, наиболее предпочитаемое очередным участником среди мест, входящих в множество N\S. В результате мы построим цикл $S_2(N \setminus S_1)$. Далее процедура построения цикла повторяется на множестве $(N \setminus S_1) \setminus S_2$ и т. д. до исчерпания множества N.

Мы докажем, что перемещение, содержащее циклы $S_1, S_2, \dots, S_k$, так что $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k = N$, устойчиво и что это – единственное устойчивое перемещение. Предположим, что перемещение не устойчиво. Рассмотрим минимальную коалицию S, участники которой могут, действуя сообща, разрушить построенное нами перемещение. Очевидно, члены коалиции S могут это сделать, образовав несколько циклических перестановок. Но если этих перестановок больше одной, то хотя бы одна из них тоже будет образовывать «разрушающую» коалицию. А поскольку коалиция S минимальна, то циклическая перестановка в S должна быть одной. Пусть q – минимальный номер, для которого $S \cap S_1 \neq \varnothing$. Тогда $S \cap (S_1 \cup \dots \cup S_{q-1}) = \varnothing$. Поскольку $S \neq S_q$, то существует пара $i_t \in S$, $i_{t+1} \in S$, причем $i_t \in S_q$, $i_{t+1} \in (S_q \cup S_{q+1} \cup \dots \cup S_k)$, $i_{q+1}$ следует за $i_t$ в перестановке S и не следует за $i_t$ в перестановке $S_q$. Тогда по построению $S_q$ место, следующее за $i_t$ в цикле $S_q$, является более предпочтительным для участника $i_t$, чем место $i_{t+1}$. Значит, коалиция S невыгодна участнику $i_t$ и не может разрушить построенное нами перемещение.

Единственность устойчивого перемещения докажем по индукции. Во-первых, любое устойчивое перемещение должно содержать цикл $S_1$ (иначе коалиция $S_1$, обеспечивающая всем своим участникам получение лучшего места, разрушила бы данное перемещение). Предположим далее, что устойчивое перемещение содержит циклы $S_1, S_2, ..., S_q$. Докажем, что оно обязательно должно содержать цикл $S_{q+1}$. Если бы это было не так, то все участники, входящие в $S_{q+1}$, получили бы при предлагаемом перемещении места не лучше, чем в цикле $S_{q+1}$, а хотя бы одно – менее предпочтительное (это следует из способа построения $S_{q+1}$). Поэтому коалиция $S_{q+1}$ разрушила бы данное перемещение. Таким образом, устойчивое перемещение должно содержать цикл $S_{q+1}$. Итак, мы доказали, что любое устойчивое перемещение содержит циклы $S_1$, $S_2, ..., S_q$, т. е. оно единственно.

Содержательная интерпретация доказанного факта состоит в том, что при внимательном отношении к сотрудникам администрация может организовать их горизонтальное перемещение, не нарушая интересов ни одного из них.

**Модель распределения однородных работ**. Иногда матрица стоимостей имеет такой вид, что задача назначения решается значительно проще, чем в общем случае. Рассмотрим один из таких специальных случаев. Для простоты изложения предположим, что количество работ совпадает с количеством работников ($n = m$).

Пусть распределяемые работы однотипны. Работники отличаются по своей квалификации, причем квалификация каждого работника $i$ оценивается вероятностью $p_i$ успешного выполнения им произвольной работы. Заметим, что тогда вероятность невыполнения им работы есть $1 - p_i$. Для каждой из работ известны вознаграждение за ее успешное выполнение $c_j$ и штраф за невыполнение («срыв») работы $s_j$. Отметим, что сумма $(c_j + s_j)$ может служить мерой «ответственности» или «важности» работы $j$. По-прежнему требуется так распределить работы между исполнителями, чтобы выполнялись ограничения задачи назначения, а общий ожидаемый доход был максимальным.

Очевидно, доход, получаемый от каждой работы $j$, есть случайная величина $e_j$, которая может принимать два значения $c_j$ и $(-s_j)$. Общий доход $e$ есть сумма доходов от каждой работы:

$$e = \sum_{j=1}^{m} e_j .$$

Ожидаемый общий доход согласно свойству математического ожидания есть сумма ожидаемых доходов от каждой работы:

$$Ee = E\left(\sum_{j=1}^{n} e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} E(e_j).$$

В случае, если работа j будет поручена работнику i, случайная величина $e_j$ будет принимать значение $c_j$ с вероятностью $p_i$, а значение $(-s_j)$ с вероятностью $(1 - p_j)$. Тогда ожидаемый доход от данной работы будет равен $Ee_j = e_{ij} = c_j * p_j - s_j * (1 - p_j) = -s_j + p_j * (c_j + s_j)$. Если составить матрицу $\| e_{ij} \|$, то задача оптимального распределения работ между работниками состоит в выборе множества из элементов этой матрицы (по одному в каждой строке и каждом столбце), сумма которых максимальна. Т. е. это задача на максимум об оптимальном назначении с матрицей $\| e_{ij} \|$. Можно было бы решить ее стандартным способом. Однако в данном случае задача решается значительно проще.

Докажем, что ожидаемый доход будет максимален, если более ответственные работы поручать более квалифицированным работникам. Действительно, допустим противное, например, работник i более квалифицирован, чем работник q, т. е. $p_i > p_j$, а ему поручена работа k, которая является менее ответственной, чем работа под номером j, порученная работнику q, т. е. $(c_k + s_k) < (c_j + s_j)$. Тогда ожидаемый доход от выполнения двух работ k и j равен $e_{ik} + e_{qj} = -s_k + p_i * (c_k + s_k) - s_j + p_i *(c_j + s_j) - (p_i - p_q) * [(c_j + s_j)] - (c_k + s_k) < e_{ij} + e_{kq}$. Таким образом, если поручить работнику i более ответственную работу j, отдав менее ответственную работу k менее квалифицированному работнику q, то ожидаемый доход от двух работ k и j увеличится. Итак, мы установили, что оптимальное назначение предполагает более квалифицированному работнику поручать более ответственную работу (факт, очевидный с точки зрения здравого смысла).

Хорошо понятно, что такое назначение можно построить, предварительно упорядочив работников по их квалификации, а работы – по их ответственности так, что $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$ , $(c_1 + s_1) \geq (c_2 + s_2) \geq \ldots \geq (c_n + s_n)$. Если далее построить матрицу $\|e_{ij}\|$, то оптимальное назначение будет состоять из диагональных элементов, а максимальный ожидаемый доход равен $e_{1,1} + e_{2,2} + e_{n,n} = [c_1p_1 - s_1(1 - p_1)] + [c_2p_2 - s_2(1 - p_2)] + ... + [c_np_n - s_n(1 - p_n)]$. Вообще говоря, в некоторых случаях ожидаемый доход может быть отрицательным. Выполнение работы, ожидаемый доход от которой отрицателен, представляется абсурдным в большинстве реальных ситуаций. (Правда, иногда все же приходится выполнять подобные работы из соображений рекламы, престижа, как «нагрузку» к другим работам и т. п.) Опишем модификацию алгоритма для ситуации, когда разрешено отказываться от невыгодных работ.

Как и прежде, упорядочим работников по их квалификации $p_1 > p_2 > ... > p_n$, а работы – по ответственности $(c_1 + s_1) > (c_2 + s_2) > ... > (c_n + s_n)$. На шаге 1 производится попытка назначить работника под номером 1 на работу под номером 1. Если ожидаемый доход от этого $e_1,_1 > 0$, то это назначение закрепляется. Иначе от работы 1 следует отказаться (никакой другой работник не выполнит ее с положительным доходом). На произвольном шаге j алгоритма пытаемся назначить наиболее квалифицированного из незанятых работников i на работу j(i<j). Если $e_1,_1 >$ 0, то это назначение закрепляется, иначе от работы j следует отказаться.

Предлагаемый алгоритм легко обобщить на случай $n \neq m$. Если $n > m$, то вводим $n - m$ фиктивных работ, для каждой из которых $c_j = s_j = 0$. Если $n < m$, то вводим $m - n$ фиктивных работников, для каждого из которых $p_i = 0$. Решив задачу на полученной таким образом квадратной матрице $e_i,_j$, мы должны затем учесть, что работник, получивший фиктивную работу, на самом деле окажется свободен, а работа, на которую назначен фиктивный работник, останется невыполненной (от нее надо отказаться).

Как уже отмечалось выше, результаты этого раздела не противоречат здравому смыслу, т. е. для получения большей прибыли следует более ответственную работу поручать более квалифицированному работнику. Если распределение работ происходит в рамках одной фирмы, то оно осуществляется приказом управляющего, который руководствуется вышеприведенным принципом. Примечательно, однако, то, что в условиях свободного рынка труда мы также наблюдаем подобную тенденцию. Теперь мы можем объяснить и это, учитывая результаты, приведенные выше. Действительно, при свободном взаимном подборе работников и работодателей устойчивым будет подбор с максимальным общим доходом. Но мы только что установили, что максимальный общий (ожидаемый) доход будет получен, если более квалифицированные работники выполняют более ответственную работу. Таким образом, должно наблюдаться такое перемещение рабочей силы, которое ведет к повышению более квалифицированных работников до соответствующего уровня ответственности работы. Эти соображения противоречат известному из фольклора принципу Питера: «служебный рост каждого работника останавливается на должности, превышающей уровень его компетентности».

**Модели управления рабочим временем**. При планировании времени выполнения работ широко используются сетевые методы. Их суть состоит в следующем. Пусть требуется выполнить некоторый комплекс взаимосвязанных работ. При этом известно, какие из работ нельзя выполнять до завершения некоторых других. Известны также оценки (детерминированные или вероятностные) времени выполнения каждой из работ, а также минимальных интервалов от окончания определенных работ до начала зависимых работ. Например, при строительстве дома кладку стен нельзя начинать до закладки фундамента, снятие опалубки нельзя производить до окончания бетонирования плюс некоторое время на высыхание бетона. В то же время очевидно, что некоторые работы могут производиться одновременно. Такие работы называются независимыми (например, циклевка полов и клейка обоев). Задача управляющего состоит в том, чтобы расставить персонал и раздать задания (с указанием сроков выполнения) с тем, чтобы за заданное время (или за кратчайшее время) выполнить комплекс работ. Для решения этой задачи строится модель комплекса работ в виде ориентированного графа G = (V, E), каждая вершина которого соответствует некоторой работе, а ребро (u, v) существует, если работу v нельзя начать, не окончив работу u. Ребру (u, v) приписывается вес c (u, v), равный оценке времени, от начала работы u и до начала работы v. Вводятся также две особые вершины: s, соответствующая началу всего комплекса работ, и t, соответствующая окончанию комплекса.

*На рисунке 4 изображен пример такого графа. Он соответствует комплексу из четырех работ, две из которых – u и v*

*– можно начинать сразу и независимо друг от друга, работа w может быть начата лишь после выполнения работ u и v, а работа x – после выполнения работы u. На ребрах указаны соответствующие длительности в неделях.*

*Нетрудно понять, что длительность выполнения всего комплекса работ не может быть меньше суммарного веса ребер самого длинного пути из s в t (так называемого критического пути). Все работы, вершины которых лежат на критическом пути, называются критическими работами. Задержка выполнения любой из этих работ приведет к задержке выполнения всего комплекса. Например, на рисунке 4 критический путь {s, u, w, t}, работы u, v – критические. Время выполнения комплекса не может быть меньше 6 недель. Если в распоряжении менеджера имеется достаточно персонала для параллельного выполнения работ, то можно добиться того, что проект будет выполнен за 6 недель. При этом работы x и v, не являясь критическими, имеют «запас» по две недели. Т. е. если выполнение каждой из этих работ будет задержано в пределах двух недель, то срок выполнения комплекса работ не изменится.*

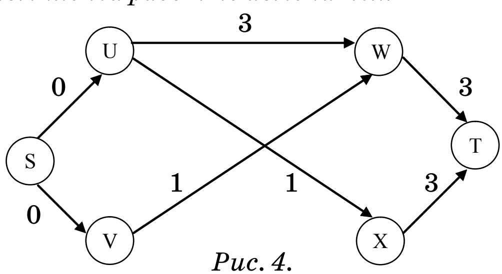


*Рис. 4.*

*Подсчитав сроки начала и запасы времени для всех работ, можно составить расписание, или сетевой график. Для комплекса работ из нашего примера сетевой график выглядит следующим образом:*

| работа | u | v | x | w |
|---|---|---|---|---|
| начало | 0 | 0 | 2 | 3 |
| окончание (крайний срок) | 3 | 3 | 6 | 6 |

*Несмотря на кажущуюся законченность описанной методики, при ее практическом применении возникли трудности, в парадоксальной форме обобщенные С. Паркинсоном.*

*Один из его законов гласит: работа, как правило, не выполняется за отведенное для нее время, независимо от того, какова трудоемкость работы и каково это время. Это означает, что, оценив трудоемкость работ, составив сетевой график и раздав задания с указанием сроков исполнения, менеджер не может рассчитывать на то, что указанные сроки будут выдержаны.*

Рассмотрим упрощенный вариант математической модели, позволяющий раскрыть причину этого эффекта и указать пути его преодоления. Пусть время выполнения некоторой работы A – случайная величина. И пусть работа A может быть разбита (хотя бы мысленно) на 2 подзадания $A_1$ и $A_2$. Пусть $T_1$ и $T_2$ – случайные длительности работ $A_1$ и $A_2$. В сетевом планировании исходят из того, что время T выполнения работы A не зависит от заданного срока выполнения и есть $T = T_1 + T_2$. Но закон Паркинсона указывает, что это не так. Если на выполнение работы A отведено время d, то $T = T(d)$. Для формулировки модели введем слагаемое w – «растягивание» времени работы, вводимое работником в зависимости от оценки своих возможностей уложиться в заданный срок. Тогда $T(d) = T_1 + T_2 + w(d)$. Если первое задание выполнено за время $T_1$, то запас времени оценивается работником как $d - T_1 - ET_2$, где $ET_2$ – математическое ожидание (среднее значение) длительности $T_2$. Основная гипотеза состоит в том, что если оценка запаса времени положительна, то работа растягивается ровно на это время, иначе растягивания не происходит: $w(d) = (d - T_1 - ET_2)^+$. Подставив это выражение в формулу для времени выполнения работы A, получим $T(d) = T_1 + T_2 + (d - T_1 - ET_2)^+$. Из элементарных свойств математического ожидания вытекает, что $E(d - T_1 - ET_2)^+ \geq 1 - ET_1 - ET_2$. Но отсюда следует, что $ET(d) \geq ET_1 + ET_2 + d - ET_1 - ET_2 = d$. Последний факт: $ET(d) \geq d$ есть математическое выражение сформулированного выше эмпирического закона Паркинсона. Дадим две более точные его формулировки: ожидаемое время выполнения работ больше, чем время, отведенное на эту работу менеджером, независимо от того, какое именно время реально требуется для ее выполнения. Иными словами, работник будет в среднем выполнять работу дольше, чем запланировано, даже если план не напряженный.

Поскольку очевидно, что w(d) – неубывающая величина, то менеджеру, естественно, надо стремиться задать срок выполнения работы d как можно меньшим (более напряженным). Но также ясно, что необоснованно маленькие значения d, т. е. $d < ET_1 + ET_2$, нежелательны, поскольку это нечестно по отношению к работникам. Подобная практика рано или поздно будет распознана исполнителями, и это будет иметь вредные последствия.

В идеале, если менеджер может точно оценить $ET_1 + ET_2$, он должен отвести на работу ровно столько времени, сколько требуется: $d = ET_1 + ET_2$, а не столько, сколько указано в сетевом графике. Подобная идеальная ситуация, однако, труднореализуема, поскольку кроме формальных заданий от менеджера работники путем неформальных коммуникаций получают информацию о заданиях и сроках их выполнения у смежников и о реальном состоянии дел на смежных участках работы.

Похожим образом выводится еще одна важная формулировка закона Паркинсона: если $d_1 > d_2$, то $ET(d_1) > ET(d_2)$. Или в словесной форме: чем большее время отведено на работу, тем в среднем дольше она будет выполняться.

До сих пор речь шла об одном типе работника (см. основную гипотезу) – о так называемом растягивающем работу. Его поведение характеризуется тем, что он начинает работу немедленно после получения задания. Возможен работник с другим типом поведения, его можно назвать «загруженным работником». Он откладывает начало работы А до тех пор, пока времени не останется «в обрез». Тогда у него не будет причин растягивать работу. Для такого работника ожидаемое время завершения работы задается формулой $ET'(d) = ET_1 + ET_2 + (d - ET_1 - ET_2)^+ = \max\{d, ET_1 + ET_2\}$. Нетрудно видеть, что $ET(d) > ET'(d) > d$. Иными словами, «загруженный работник», который первоначально откладывает работу, в среднем оканчивает работу раньше, чем «растягивающий работник». Это еще один вариант закона Паркинсона. Очевидное следствие из этого закона для менеджмента состоит в том, что, держа работников постоянно в «загруженном» состоянии (например, давая дополнительные задания), можно повысить их среднюю производительность без ущерба для основного проекта.