

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Теория типов, ИТМО, М3235-М3239, осень 2022 года

Домашнее задание №1: «вводная лекция»

1. Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
T	$\lambda a. \lambda b. a$	истина
F	$\lambda a. \lambda b. b$	ложь
Not	$\lambda x. x \ F \ T$	отрицание
And	$\lambda x. \lambda y. x \ y \ F$	конъюнкция

Постройте лямбда-выражения для следующих булевских выражений:

- (a) Штрих Шеффера («и-не»)
- (b) Стрелка Пирса («или-не»)
- (c) Мажоритарный элемент от трёх аргументов (результат «истина», если истинны не менее двух аргументов)

2. Напомним определения с лекций:

$$f^{(n)} X ::= \begin{cases} X, & n = 0 \\ f^{(n-1)} (f X), & n > 0 \end{cases}$$

Обозначение	лямбда-терм	название
\bar{n}	$\lambda f. \lambda x. f^{(n)} x$	чёрчевский нумерал
$(+1)$	$\lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)$	прибавление 1
$IsZero$	$\lambda n. n \ (\lambda x. F) \ T$	проверка на 0

Обозначение	лямбда-терм	название
$MkPair$	$\lambda a. \lambda b. (\lambda x. x \ a \ b)$	создание пары
PrL	$\lambda p. p \ T$	левая проекция
PrR	$\lambda p. p \ F$	правая проекция
$Case$	$\lambda l. \lambda r. \lambda c. c \ l \ r$	case для алгебраического типа
InL	$\lambda l. (\lambda x. \lambda y. x \ l)$	левая инъекция
InR	$\lambda r. (\lambda x. \lambda y. y \ r)$	правая инъекция

Используя данные определения, постройте выражения для следующих операций над числами:

- (a) Вычитание 1
- (b) Вычитание
- (c) Деление
- (d) Сравнение двух чисел ($IsLess$) — истина, если первый аргумент меньше второго (могут потребоваться пары и/или вычитания)
- (e) Делимость

3. Проредуцируйте выражение и найдите его нормальную форму:

- (a) $\bar{2} \ \bar{2}$
- (b) $\bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2}$
- (c) $\bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2}$

4. Напомним определение Y-комбинатора: $\lambda f. (\lambda x. f \ (x \ x)) \ (\lambda x. f \ (x \ x))$.

- (a) Покажите, что выражение $Y \ f$ не имеет нормальной формы;
- (b) Покажите, что выражение $Y \ (\lambda f. \bar{0})$ имеет нормальную форму.
- (c) Покажите, что выражение $Y \ (\lambda f. \lambda x. (IsZero \ x) \ \bar{0} \ (f \ Minus1 \ x)) \ 2$ имеет нормальную форму.
- (d) Какова нормальная форма выражения $Y \ (\lambda f. \lambda x. (IsZero \ x) \ \bar{0} \ ((+1) \ (f \ Minus1 \ x))) \ \bar{n}$?

- (e) Какова нормальная форма выражения $Y (\lambda f. \lambda x. (IsZero\ x)\ \bar{1}\ (Mul2\ (f\ Minus1\ x)))\ \bar{n}$?
 - (f) Определите с помощью Y -комбинатора функцию для вычисления n -го числа Фибоначчи.
5. Определим на языке Хаскель следующую функцию: `show_church n = show (n (+1) 0)` Убедитесь, что `show_church (\f -> \x -> f (f x))` вернёт 2. Пользуясь данным определением и его идеей, реализуйте следующие функции:
- (a) `int_to_church` — возвращает чёрчевский нумерал (т.е. функцию от двух аргументов) по целому числу. Каков точный тип результата этой функции?
 - (b) сложение двух чёрчевских нумералов.
 - (c) умножение двух чёрчевских нумералов.
 - (d) можно ли определить вычитание 1 и вычитание? Что получается, а что — нет?
6. На лекции было использовано понятие свободы для подстановки.
- (a) Найдите лямбда-выражение, которое при однократной редукции требует переименования связанных переменных (редукция невозможна без переименования).
 - (b) Заметим, что даже если мы запретим использовать одни и те же переменные в разных лямбда-абстракциях, это не будет решением проблемы переименований. Предложите лямбда-выражение, в котором (a) все лямбда-абстракции указаны по разным переменным; но (б) через некоторое количество редукций потребуются переименование связанных переменных.
7. Дадим определение: комбинатор — лямбда-выражение без свободных переменных.
- Также напомним определение:

$$\begin{aligned} S &:= \lambda x. \lambda y. \lambda z. x \ z \ (y \ z) \\ K &:= \lambda x. \lambda y. x \\ I &:= \lambda x. x \end{aligned}$$

Известна теорема о том, что для любого комбинатора X можно найти выражение P (состоящее только из скобок, пробелов и комбинаторов S и K), что $X =_{\beta} P$. Будем говорить, что комбинатор P *выражает* комбинатор X в базисе SK .

Выразите в базисе SK :

- (a) $F = \lambda x. \lambda y. y$
 - (b) $\bar{1}$
 - (c) Not
 - (d) Xor
 - (e) InL
8. Чёрчевские нумералы соответствуют натуральным числам в аксиоматике Пеано.
- (a) Предложите «двоичные нумералы» — способ кодирования чисел, аналогичный двоичной системе (такой, при котором длина записи числа соответствует логарифму числового значения).
 - (b) Предложите реализацию функции $(+1)$ в данном представлении.
 - (c) Предложите реализацию лямбда-выражения преобразования числа из двоичного нумерала в чёрчевский.
 - (d) Предложите реализацию функции сложения в данном представлении.
 - (e) Предложите реализацию функции вычитания в данном представлении.
 - (f) Какова вычислительная сложность арифметопераций с двоичными нумералами?

Домашнее задание №2: ещё о бестиповом лямбда-исчислении

1. Бесконечное количество комбинаторов неподвижной точки. Дадим следующие определения

$$\begin{aligned} L &:= \lambda abcdefghijklmnopqrstuvwxyzr.r(\text{this is a fixed point combinator}) \\ R &:= LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL \end{aligned}$$

В данном определении терм R является комбинатором неподвижной точки: каков бы ни был терм F , выполнено $R\ F =_{\beta}\ F\ (R\ F)$.

- (a) Докажите, что данный комбинатор — действительно комбинатор неподвижной точки.
 - (b) Пусть в качестве имён переменных разрешены русские буквы. Постройте аналогичное выражение по-русски: с 33 параметрами и осмысленной русской фразой в терме L ; покажите, что оно является комбинатором неподвижной точки.
2. Напомним определение аппликативного порядка редукции: редуцируется самый левый из самых вложенных редексов. Например, в случае выражения $(\lambda x. I I) (\lambda y. I I)$ самые вложенные редексы — применения $I I$:

$$(\lambda x. \underline{I I}) (\lambda y. \underline{I I})$$

и надо выбрать самый левый из них:

$$(\lambda x. \underline{I I}) (\lambda y. I I)$$

- (a) Проведите аппликативную редукцию выражения 2 2.
 - (b) Постройте выражение, использующее Y -комбинатор для вычисления факториала. Возможно ли его аппликативное вычисление, или оно не сможет завершиться?
 - (c) Найдите лямбда-выражение, которое редуцируется медленнее при нормальном порядке редукции, чем при аппликативном, даже при наличии мемоизации.
3. Будем говорить, что выражение A находится в *слабой заголовочной нормальной форме* (WHNF), если оно не имеет вид $A \equiv (\lambda x. P) Q$ (то есть, самый верхний терм его не является редексом). Выражение находится в *заголовочной нормальной форме* (HNF), когда его верхний терм — не редекс и не лямбда-абстракция с бета-редексами в теле.

Верно ли, что «нормальность» формы выражения может в процессе редукции только усиливаться (никакая — слабая заголовочная Н.Ф. — заголовочная Н.Ф. — нормальная форма)?

4. Заметим, что список в лямбда-выражении можно закодировать с помощью алгебраических типов. Напишите лямбда-выражение для:
- (a) вычисления длины списка;
 - (b) функции *map* (построение нового списка из результатов применения функции к элементам старого);
 - (c) суммы списка целых чисел.

5. Базис SKI не единственный. Рассмотрим базис $BCKW$:

$$\begin{aligned} B &= \lambda x. \lambda y. \lambda z. x (y z) \\ C &= \lambda x. \lambda y. \lambda z. x z y \\ K &= \lambda x. \lambda y. x \\ W &= \lambda x. \lambda y. x y y \end{aligned}$$

- (a) Покажите, что базис $BCKW$ позволяет выразить любое выражение из базиса SKI .
- (b) Покажите, что любое выражение из базиса $BCKW$ может быть выражено в базисе SKI .