

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Теория типов, ИТМО, М3235-М3239, осень 2022 года

Домашнее задание №1: «вводная лекция»

1. Напомним определения с лекций:

| Обозначение | лямбда-терм | название |
|-------------|-----------------------------------|------------|
| T | $\lambda a. \lambda b. a$ | истина |
| F | $\lambda a. \lambda b. b$ | ложь |
| Not | $\lambda x. x \ F \ T$ | отрицание |
| And | $\lambda x. \lambda y. x \ y \ F$ | конъюнкция |

Постройте лямбда-выражения для следующих булевских выражений:

- (a) Штрих Шеффера («и-не»)
- (b) Стрелка Пирса («или-не»)
- (c) Мажоритарный элемент от трёх аргументов (результат «истина», если истинны не менее двух аргументов)

2. Напомним определения с лекций:

$$f^{(n)} X ::= \begin{cases} X, & n = 0 \\ f^{(n-1)} (f X), & n > 0 \end{cases}$$

| Обозначение | лямбда-терм | название |
|-------------|--|--------------------|
| \bar{n} | $\lambda f. \lambda x. f^{(n)} x$ | чёрчевский нумерал |
| $(+1)$ | $\lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)$ | прибавление 1 |
| $IsZero$ | $\lambda n. n \ (\lambda x. F) \ T$ | проверка на 0 |

| Обозначение | лямбда-терм | название |
|-------------|--|-------------------------------|
| $MkPair$ | $\lambda a. \lambda b. (\lambda x. x \ a \ b)$ | создание пары |
| PrL | $\lambda p. p \ T$ | левая проекция |
| PrR | $\lambda p. p \ F$ | правая проекция |
| $Case$ | $\lambda l. \lambda r. \lambda c. c \ l \ r$ | case для алгебраического типа |
| InL | $\lambda l. (\lambda x. \lambda y. x \ l)$ | левая инъекция |
| InR | $\lambda r. (\lambda x. \lambda y. y \ r)$ | правая инъекция |

Используя данные определения, постройте выражения для следующих операций над числами:

- (a) Вычитание 1
- (b) Вычитание
- (c) Деление
- (d) Сравнение двух чисел ($IsLess$) — истина, если первый аргумент меньше второго (могут потребоваться пары и/или вычитания)
- (e) Делимость

3. Проредуцируйте выражение и найдите его нормальную форму:

- (a) $\bar{2} \ \bar{2}$
- (b) $\bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2}$
- (c) $\bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2}$

4. Напомним определение Y-комбинатора: $\lambda f. (\lambda x. f \ (x \ x)) \ (\lambda x. f \ (x \ x))$.

- (a) Покажите, что выражение $Y \ f$ не имеет нормальной формы;
- (b) Покажите, что выражение $Y \ (\lambda f. \bar{0})$ имеет нормальную форму.
- (c) Покажите, что выражение $Y \ (\lambda f. \lambda x. (IsZero \ x) \ \bar{0} \ (f \ Minus1 \ x)) \ 2$ имеет нормальную форму.
- (d) Какова нормальная форма выражения $Y \ (\lambda f. \lambda x. (IsZero \ x) \ \bar{0} \ ((+1) \ (f \ Minus1 \ x))) \ \bar{n}$?

- (e) Какова нормальная форма выражения $Y (\lambda f. \lambda x. (IsZero\ x) \bar{1} (Mul2\ (f\ Minus1\ x))) \bar{n}$?
 - (f) Определите с помощью Y -комбинатора функцию для вычисления n -го числа Фибоначчи.
5. Определим на языке Хаскель следующую функцию: `show_church n = show (n (+1) 0)` Убедитесь, что `show_church (\f -> \x -> f (f x))` вернёт 2. Пользуясь данным определением и его идеей, реализуйте следующие функции:
- (a) `int_to_church` — возвращает чёрчевский нумерал (т.е. функцию от двух аргументов) по целому числу. Каков точный тип результата этой функции?
 - (b) сложение двух чёрчевских нумералов.
 - (c) умножение двух чёрчевских нумералов.
 - (d) можно ли определить вычитание 1 и вычитание? Что получается, а что — нет?
6. На лекции было использовано понятие свободы для подстановки.
- (a) Найдите лямбда-выражение, которое при однократной редукции требует переименования связанных переменных (редукция невозможна без переименования).
 - (b) Заметим, что даже если мы запретим использовать одни и те же переменные в разных лямбда-абстракциях, это не будет решением проблемы переименований. Предложите лямбда-выражение, в котором (a) все лямбда-абстракции указаны по разным переменным; но (б) через некоторое количество редукций потребуются переименование связанных переменных.
7. Дадим определение: комбинатор — лямбда-выражение без свободных переменных.
- Также напомним определение:

$$\begin{aligned} S &:= \lambda x. \lambda y. \lambda z. x \ z \ (y \ z) \\ K &:= \lambda x. \lambda y. x \\ I &:= \lambda x. x \end{aligned}$$

Известна теорема о том, что для любого комбинатора X можно найти выражение P (состоящее только из скобок, пробелов и комбинаторов S и K), что $X =_{\beta} P$. Будем говорить, что комбинатор P *выражает* комбинатор X в базисе SK .

Выразите в базисе SK :

- (a) $F = \lambda x. \lambda y. y$
 - (b) \bar{I}
 - (c) Not
 - (d) Xor
 - (e) InL
8. Чёрчевские нумералы соответствуют натуральным числам в аксиоматике Пеано.
- (a) Предложите «двоичные нумералы» — способ кодирования чисел, аналогичный двоичной системе (такой, при котором длина записи числа соответствует логарифму числового значения).
 - (b) Предложите реализацию функции $(+1)$ в данном представлении.
 - (c) Предложите реализацию лямбда-выражения преобразования числа из двоичного нумерала в чёрчевский.
 - (d) Предложите реализацию функции сложения в данном представлении.
 - (e) Предложите реализацию функции вычитания в данном представлении.
 - (f) Какова вычислительная сложность арифметопераций с двоичными нумералами?

Домашнее задание №2: ещё о бестиповом лямбда-исчислении

1. Бесконечное количество комбинаторов неподвижной точки. Дадим следующие определения

$$\begin{aligned} L &:= \lambda abcdefghijklmnopqrstuvwxyzr.(thisisa fixedpointcombinator) \\ R &:= LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL \end{aligned}$$

В данном определении терм R является комбинатором неподвижной точки: каков бы ни был терм F , выполнено $R\ F =_{\beta}\ F\ (R\ F)$.

- (a) Докажите, что данный комбинатор — действительно комбинатор неподвижной точки.
- (b) Пусть в качестве имён переменных разрешены русские буквы. Постройте аналогичное выражение по-русски: с 33 параметрами и осмысленной русской фразой в терме L ; покажите, что оно является комбинатором неподвижной точки.
2. Напомним определение аппликативного порядка редукции: редуцируется самый левый из самых вложенных редексов. Например, в случае выражения $(\lambda x. I I) (\lambda y. I I)$ самые вложенные редексы — применения $I I$:

$$(\lambda x. \underline{I I}) (\lambda y. \underline{I I})$$

и надо выбрать самый левый из них:

$$(\lambda x. \underline{I I}) (\lambda y. I I)$$

- (a) Проведите аппликативную редукцию выражения 2 2.
- (b) Постройте выражение, использующее Y -комбинатор для вычисления факториала. Возможно ли его аппликативное вычисление, или оно не сможет завершиться?
- (c) Найдите лямбда-выражение, которое редуцируется медленнее при нормальном порядке редукции, чем при аппликативном, даже при наличии мемоизации.
3. Будем говорить, что выражение A находится в *слабой заголовочной нормальной форме* (WHNF), если оно не имеет вид $A \equiv (\lambda x. P) Q$ (то есть, самый верхний терм его не является редексом). Выражение находится в *заголовочной нормальной форме* (HNF), когда его верхний терм — не редекс и не лямбда-абстракция с бета-редексами в теле.

Верно ли, что «нормальность» формы выражения может в процессе редукции только усиливаться (никакая — слабая заголовочная Н.Ф. — заголовочная Н.Ф. — нормальная форма)?

4. Заметим, что список в лямбда-выражении можно закодировать с помощью алгебраических типов. Напишите лямбда-выражение для:
- (a) вычисления длины списка;
- (b) функции *map* (построение нового списка из результатов применения функции к элементам старого);
- (c) суммы списка целых чисел.
5. Базис SKI не единственный. Рассмотрим базис $BCKW$:

$$B = \lambda x. \lambda y. \lambda z. x (y z)$$

$$C = \lambda x. \lambda y. \lambda z. x z y$$

$$K = \lambda x. \lambda y. x$$

$$W = \lambda x. \lambda y. x y y$$

- (a) Покажите, что базис $BCKW$ позволяет выразить любое выражение из базиса SKI .
- (b) Покажите, что любое выражение из базиса $BCKW$ может быть выражено в базисе SKI .

Домашнее задание №3: просто-типизированное лямбда-исчисление

1. Пусть фиксирован тип чёрчевского нумерала $\eta = (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$. Найдите тип для следующих конструкций и постройте доказательство:
- (a) $\bar{2}$ (покажите, что его тип — η).
- (b) $(+1)$.
- (c) *Plus*.
- (d) *Mul* (не каждая реализация умножения имеет тип в просто-типизированном лямбда исчислении; вам требуется найти нужную)
2. Имеет ли тип — и какой:
- (a) операция вычитания 1 (выраженная через «трюк зуба мудрости»)? Общий ответ не требуется, достаточно рассмотреть какую-то одну реализацию.

- (b) операция вычитания $(\lambda m. \lambda n. m \ (-1) \ n)$?
- (c) операция возведения в степень $(Power ::= \lambda m. \lambda n. n \ m)$?
- (d) функция $\lambda x. Power \ x \ x$?
3. Каков тип:
- (a) комбинаторов S и K ;
- (b) истины и лжи.
4. Рассмотрим полную интуиционистскую логику, с конъюнкцией, дизъюнкцией и ложью. Какой тип у следующих конструкций, и какие правила вывода интуиционистской логики им соответствуют (ответ требует демонстрации корректности этих правил для данных конструкций — то есть вывод про тип результата применения правила должен всегда иметь место для выражений соответствующего вида):
- (a) Упорядоченная пара (MkPair, PrL, PrR).
- (b) Алгебраический тип (InL: $\lambda x. \lambda a. \lambda b. a \ x$, InR: $\lambda x. \lambda a. \lambda b. b \ x$, Case).
5. Докажите лемму о редукции (subject reduction lemma): если $A \rightarrow_\beta B$ и $\vdash A : \tau$, то $\vdash B : \tau$.
Верно ли обратное: если $A \rightarrow_\beta B$ и $\vdash B : \tau$, то $\vdash A : \tau$?
6. Как мы уже разбирали, $\nvdash x \ x : \tau$ в силу дополнительных ограничений правила

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} \quad x \notin FV(\Gamma)$$

Найдите лямбда-выражение N , что $\nvdash N : \tau$ в силу ограничений правила

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. N : \sigma \rightarrow \tau} \quad x \notin FV(\Gamma)$$

7. Верно ли, что $S = B(BW)(BBC)$? Если нет, то как правильно?

Домашнее задание №4: «Изоморфизм Карри-Ховарда»

1. Предложим альтернативные аксиомы для конъюнкции:

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \ \& \ \beta} \text{ Введ. } \& \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \ \& \ \beta \quad \Gamma, \alpha, \beta \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma} \text{ Удал. } \&$$

- (a) Предложите лямбда-выражения, соответствующие данным аксиомам; поясните, как данные выражения абстрагируют понятие «упорядоченной пары».
- (b) Выразите изложенные в лекции аксиомы конъюнкции через приведённые в условии.
- (c) Выразите приведённые в условии аксиомы конъюнкции через изложенные в лекции.
2. *Вполне упорядоченным* множеством назовём такое линейно-упорядоченное отношение (\prec) множество S (и такой порядок назовём *полным*), что какое бы ни было множество $U \subseteq S$, в U найдётся наименьший элемент.
- (a) Покажите, что неотрицательные вещественные числа $[0, +\infty)$ — не вполне упорядоченное множество. Существуют ли конечные и счётные не вполне упорядоченные множества?
- (b) Определим лексикографический порядок на \mathbb{N}^n : положим, что $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \prec \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$, если найдётся такой k , что $a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$, но $a_k < b_k$. Покажите, что такой порядок — полный.
- (c) Пусть S вполне упорядочено отношением (\prec) , определим $a \succ b := b \prec a$. Пусть $a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ \dots$ — строго монотонно убывающая последовательность значений из S . Покажите, что данная последовательность всегда имеет конечную длину.

3. Поясним название «алгебраические типы» — это семейство составных типов, позволяющих строить «алгебраические» выражения на типах:

| название | обозначение | алгебраический смысл |
|-----------------------------|----------------------------|-----------------------|
| тип-сумма, «алгебраический» | $\alpha \vee \beta$ | $\alpha + \beta$ |
| тип-произведение, пара | $\alpha \& \beta$ | $\alpha \times \beta$ |
| тип-степень, функция | $\alpha \rightarrow \beta$ | β^α |

Название «алгебраический» закрепилось в первую очередь за типом-суммой (видимо потому, что остальные типы имеют устоявшиеся названия), однако, может быть отнесено и к другим типам.

Поясните «типовый» (программистский) смысл следующих алгебраических тождеств — и постройте программы на Хаскеле, их доказывающие:

- (a) $\gamma \times (\alpha + \beta) = \gamma \times \alpha + \gamma \times \beta$.
 (b) $\gamma^{\alpha \times \beta} = (\gamma^\alpha)^\beta$. Как называется данное тождество?
 (c) $\gamma^{\alpha + \beta} = \gamma^\alpha \times \gamma^\beta$.

4. Напомним, что $\neg\alpha \equiv \alpha \rightarrow \perp$. Найдите лямбда-выражения, доказывающие:

- (a) Формулу де-Моргана $\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\alpha \& \neg\beta$.
 (b) Контрапозицию $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$.
 (c) Закон исключённого третьего после применения теоремы Гливленко $\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$.

5. Какие аксиомы соответствуют базису *BCKW*? Покажите, что аксиома, соответствующая *S*, доказывается в этой аксиоматике.
 6. Выразите в Хаскеле *Y*-комбинатор. Каков его тип?
 7. Покажите, что типовая система Хаскеля противоречива.

Домашнее задание №5: «Реконструкция типа лямбда-выражений в просто-типизированном исчислении»

1. На лекции вводилась метрика для доказательства завершаемости алгоритма унификации: упорядоченная тройка $\langle x, y, z \rangle$, где x — количество уравнений в разрешённой форме (уравнений вида $a = \theta$, причём a входит в систему ровно один раз), z — количество уравнений типа $a = a$ и $\theta = b$. Смысл же параметра y не был раскрыт.

Каким взять параметр для y , чтобы получившаяся метрика строго монотонно убывала при каждом применении правил унификации?

2. Применив алгоритм, рассказанный на лекции, найдите тип для комбинатора *S*.
 3. Применив алгоритм, рассказанный на лекции, покажите отсутствие типа у *Y*-комбинатора.
 4. Исчислением предикатов второго порядка назовём исчисление со следующим языком:

$$\Phi ::= x | (\Phi \rightarrow \Phi) | (\forall x. \Phi)$$

Содержательное отличие от исчисления высказываний — наличие квантора всеобщности и правил вывода для его введения и удаления:

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \forall p. \phi} (p \notin FV(\Gamma)) \quad \frac{\Gamma \vdash \forall p. \phi}{\Gamma \vdash \phi[p := \Theta]}$$

Докажите, что следующие связки могут быть выражены в таком исчислении (то есть, покажите, что соответствующие формулы удовлетворяют соответствующим правилам вывода для интуиционистского исчисления высказываний):

- (a) $\psi \& \varphi := \forall g. (\psi \rightarrow \varphi \rightarrow g) \rightarrow g$
 (b) $\psi \vee \varphi := \forall g. (\psi \rightarrow g) \rightarrow (\varphi \rightarrow g) \rightarrow g$
 (c) $\perp := \forall a. a$
 (d) $\exists a. \psi := \forall g. (\forall a. (\psi \rightarrow g)) \rightarrow g$

Для квантора существования правила вывода следующие:

$$\frac{\Gamma \vdash \phi[p := \psi]}{\Gamma \vdash \exists p. \phi} \quad \frac{\Gamma \vdash \exists p. \phi \quad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi} (p \notin FV(\Gamma, \psi))$$

Домашнее задание №6: «Логика второго порядка и система F»

1. Требуется ли свобода для подстановки в правилах с квантором?

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \forall p. \phi} (p \notin FV(\Gamma)) \quad \frac{\Gamma \vdash \forall p. \phi}{\Gamma \vdash \phi[p := \theta]}$$

Если да — приведите пример доказуемой при отсутствии свободы для подстановки, но некорректной формулы. Если нет — предложите доказательство корректности правил при любых подстановках.

2. Пусть $\Gamma \vdash \varphi$. Всегда ли можно перестроить доказательство φ , добавив ещё одну гипотезу: $\Gamma, \psi \vdash \varphi$? Если нет, каковы могли бы быть ограничения на ψ ?
3. Пусть $\Gamma \vdash \forall x. \varphi$. Верно ли тогда, что $\Gamma \vdash \forall y. \varphi[x := y]$? Если это неверно в общем случае, возможно, это верно при каких-то ограничениях? В случае наличия ограничений приведите надлежащие контрпримеры.
4. Перенесите в систему F из бестипового лямбда-исчисления следующие функции (приведите выражение, укажите его тип и докажите его):
 - (a) инъекции и *case* (операции с алгебраическим типом);
 - (b) истина, ложь, исключающее или;
 - (c) черчёвский нумерал (он должен иметь тип $\forall \alpha. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$) и инкремент;
 - (d) возведение в степень: $\lambda m. \lambda n. n \ m$;
 - (e) вычитание единицы (трюк зуба мудрости) и вычитание.
5. Напомним определения с лекции:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi[\alpha := \theta]}{\Gamma \vdash (\text{pack } M, \theta \text{ to } \exists \alpha. \varphi) : \exists \alpha. \varphi} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \exists \alpha. \varphi \quad \Gamma, x : \varphi \vdash N : \psi}{\Gamma \vdash \text{abstype } \alpha \text{ with } x : \varphi \text{ in } M \text{ is } N : \psi} \quad \alpha \notin FV(\Gamma, \psi)$$

Покажите, что *pack* и *abstype* могут быть заданы так:

$$\text{pack } M, \theta \text{ to } \exists \alpha. \varphi = \Lambda \beta. \lambda x^{\forall \alpha. \varphi \rightarrow \beta}. x \theta M$$

$$\text{abstype } \alpha \text{ with } x : \varphi \text{ in } M \text{ is } N : \psi = M \psi (\Lambda \alpha. \lambda x^{\varphi}. N)$$

То есть, соответствующие правила вывода будут выполнены для так заданных выражений.

6. У правил вывода с кванторами для системы F есть ограничения. Покажите, что эти ограничения существенны: что без них с помощью кванторов можно типизировать лямбда-выражения, разрушающие систему F (то есть, нарушающие какие-то её существенные свойства, например, делающие её противоречивой).
7. (a) Разработайте интерфейс и реализацию для абстрактного типа данных «множество» (функции создания пустого множества, добавления, удаления, проверки наличия элемента в множестве). Напишите тестовую программу, использующую данный АТД.
(b) Сделайте по АТД «множество» соответствующий экзистенциальный тип в системе F , перенесите его в Хаскель и дайте реализацию этого типа. Приспособьте тест из предыдущего пункта.
8. Переформулируйте систему F в исчислении по Карри: укажите новые схемы аксиом для кванторов всеобщности и существования.
9. Переформулируйте операции *abstype* и *pack* для исчисления по Карри, укажите соответствующие им лямбда-выражения и покажите, что эти выражения соответствуют аксиомам.

Домашнее задание №7: «Типовая система Хиндли-Милнера»

1. Приведите правило вывода (обозначавшееся на лекции как $7'$), типизирующее `let` для рекурсивной функции:

```
let rec x = A in B
```

Покажите, что это правило делает систему противоречивой.

2. Покажите, что если два логических выражения в логике второго порядка эквивалентны ($\vdash \varphi \rightarrow \psi$ и $\vdash \psi \rightarrow \varphi$), то соответствующие типы либо одновременно обитаемы, либо одновременно необитаемы.
3. Покажите, как по значению типа $\forall \alpha. \beta \rightarrow \varphi(\alpha)$ строить значение типа $\beta \rightarrow \forall \alpha. \varphi(\alpha)$ и наоборот $\alpha \notin FV(\beta)$.
4. Типовая система Хиндли-Милнера типизирована по Чёрчу. Измените правила и язык так, чтобы она стала типизирована по Карри.
5. *О выразительной силе НМ.* Заметим, что список — это «параметризованные» числа в аксиоматике Пеано. Число — это длина списка, а к каждому штриху мы присоединяем какое-то значение. Операции добавления и удаления элемента из списка — это операции прибавления и вычитания единицы к числу.

Рассмотрим тип «бинарного списка»:

```
type 'a bin_list = Nil | Zero of (('a*'a) bin_list) | One of 'a * (('a*'a) bin_list);;
```

Если бы такое можно было выразить в типовой системе Хиндли-Милнера, то операция добавления элемента к списку записалась бы на языке Окамль вот так (сравните с прибавлением 1 к числу в двоичной системе счисления):

```
let rec add elem lst = match lst with
  Nil -> One (elem,Nil)
  | Zero t1 -> One (elem,t1)
  | One (hd,t1) -> Zero (add (elem,hd) t1)
```

- (a) Какой тип имеет `add` (обратите внимание на ключевое слово `rec`: для точного указания соответствующего лямбда-выражения и вывода типа необходимо использовать Y -комбинатор)? Считайте, что семейство типов `bin_list 'a` предопределено, и обозначается как τ_a . Также считайте, что определены функции `roll` и `unroll` с надлежащими типами.
 - (b) Какой ранг имеет тип этой функции? Почему этот тип не выразим в типовой системе Хиндли-Милнера?
 - (c) Предложите функцию для удаления элемента списка (головы).
 - (d) Предложите функцию для эффективного соединения двух списков (источник для вдохновения — сложение двух чисел в столбик).
 - (e) Предложите функцию для эффективного выделения n -го элемента из списка.
6. Рассмотрим следующий код на Окамле, содержащий определения чёрчевских нумералов и некоторых простых операций с ними:

```
let zero = fun f x -> x;;
let plus1 a = fun f -> fun x -> a f (f x);;
let power m n = n m;;

let two = plus1 (plus1 zero);;
let two2 = fun f x -> f (f x);;

let e = power two two;;      (* не компилируется *)
let e2 = power two2 two2;;   (* компилируется и работает *)
```

Поясните, почему:

- (a) определение $e2$ компилируется и работает;
- (b) определение e не компилируется.

Пояснение должно содержать необходимые фрагменты вывода типа в системе Хиндли-Милнера, или должно показывать, что нужного вывода типа не существует.

7. Какой ранг имеют экзистенциальный тип и тип монады **ST** из Хаскеля?