## Теоретические домашние задания

Теория типов, ИТМО, М3235-М3239, осень 2022 года

## Домашнее задание №1: «вводная лекция»

1. Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
T	$\lambda a.\lambda b.a$	истина
F	$\lambda a. \lambda b. b$	ЛОЖЬ
Not	$\lambda x.x F T$	отрицание
And	$\lambda x.\lambda y.x\ y\ F$	конъюнкция

Постройте лямбда-выражения для следующих булевских выражений:

- (а) Штрих Шеффера («и-не»)
- (b) Стрелка Пирса («или-не»)
- (c) Мажоритарный элемент от трёх аргументов (результат «истина», если истинны не менее двух аргументов)
- 2. Напомним определения с лекций:

$$f^{(n)} X ::= \begin{cases} X, & n = 0 \\ f^{(n-1)} (f X), & n > 0 \end{cases}$$

Обозначение	лямбда-терм	название
$\overline{n}$	$\lambda f.\lambda x.f^{(n)}$ x	чёрчевский нумерал
(+1)	$\lambda n.\lambda f.\lambda x.n \ f \ (f \ x)$	прибавление 1
IsZero	$\lambda n.n \; (\lambda x.F) \; T$	проверка на 0

Обозначение	лямбда-терм	название
$\overline{MkPair}$	$\lambda a.\lambda b.(\lambda x.x \ a \ b)$	создание пары
PrL	$\lambda p.p T$	левая проекция
PrR	$\lambda p.p F$	правая проекция
Case	$\lambda l.\lambda r.\lambda c.c\ l\ r$	case для алгебраического типа
InL	$\lambda l.(\lambda x.\lambda y.x\ l)$	левая инъекция
InR	$\lambda r.(\lambda x.\lambda y.y \ r)$	правая инъекция

Используя данные определения, постройте выражения для следующих операций над числами:

- (а) Вычитание 1
- (b) Вычитание
- (с) Деление
- (d) Сравнение двух чисел (IsLess) истина, если первый аргумент меньше второго (могут потребоваться пары и/или вычитания)
- (е) Делимость
- 3. Проредуцируйте выражение и найдите его нормальную форму:
  - (a)  $\overline{2}$   $\overline{2}$
  - (b)  $\overline{2} \overline{2} \overline{2}$
  - (c)  $\overline{2} \overline{2} \overline{2} \overline{2} \overline{2} \overline{2} \overline{2} \overline{2}$
- 4. Напомним определение Y-комбинатора:  $\lambda f.(\lambda x.f(x x))(\lambda x.f(x x)).$ 
  - (a) Покажите, что выражение Y f не имеет нормальной формы;
  - (b) Покажите, что выражение  $Y(\lambda f.\overline{0})$  имеет нормальную форму.
  - (c) Покажите, что выражение Y ( $\lambda f.\lambda x.(IsZero~x)~\overline{0}~(f~Minus1~x)$ ) 2 имеет нормальную форму.
  - (d) Какова нормальная форма выражения  $Y(\lambda f.\lambda x.(IsZero\ x)\ \overline{0}\ ((+1)\ (f\ Minus1\ x)))\ \overline{n}?$

- (e) Какова нормальная форма выражения Y ( $\lambda f.\lambda x.(IsZero\ x)\ \overline{1}\ (Mul2\ (f\ Minus1\ x))) <math>\overline{n}$ ?
- (f) Определите с помощью Y-комбинатора функцию для вычисления n-го числа Фибоначчи.
- 5. Определим на языке Хаскель следующую функцию: show\_church n = show (n (+1) 0) Убедитесь, что show\_church (\f -> \x -> f (f x)) вернёт 2. Пользуясь данным определением и его идеей, реализуйте следующие функции:
  - (a) int\_to\_church возвращает чёрчевский нумерал (т.е. функцию от двух аргументов) по целому числу. Каков точный тип результата этой функции?
  - (b) сложение двух чёрчевских нумералов.
  - (с) умножение двух чёрчевских нумералов.
  - (d) можно ли определить вычитание 1 и вычитание? Что получается, а что нет?
- 6. На лекции было использовано понятие свободы для подстановки.
  - (а) Найдите лямбда-выражение, которое при однократной редукции требует переименования связанных переменных (редукция невозможна без переименования).
  - (b) Заметим, что даже если мы запретим использовать одни и те же переменные в разных лямбдаабстракциях, это не будет решением проблемы переименований. Предложите лямбда-выражение, в котором (a) все лямбда-абстракции указаны по разным переменным; но (б) через некоторое количество редукций потребуется переименование связанных переменных.
- 7. Дадим определение: комбинатор лямбда-выражение без свободных переменных.

Также напомним определение:

$$S := \lambda x.\lambda y.\lambda z.x \ z \ (y \ z)$$
  
$$K := \lambda x.\lambda y.x$$
  
$$I := \lambda x.x$$

Известна теорема о том, что для любого комбинатора X можно найти выражение P (состоящее только из скобок, пробелов и комбинаторов S и K), что  $X =_{\beta} P$ . Будем говорить, что комбинатор P выражает комбинатор X в базисе SK.

Выразите в базисе SK:

- (a)  $F = \lambda x.\lambda y.y$
- (b)  $\overline{1}$
- (c) Not
- (d) Xor
- (e) InL
- 8. Чёрчевские нумералы соответствуют натуральным числам в аксиоматике Пеано.
  - (a) Предложите «двоичные нумералы» способ кодирования чисел, аналогичный двоичной системе (такой, при котором длина записи числа соответствует логарифму числового значения).
  - (b) Предложите реализацию функции (+1) в данном представлении.
  - (с) Предложите реализацию лямбда-выражения преобразования числа из двоичного нумерала в чёрчевский.
  - (d) Предложите реализацию функции сложения в данном представлении.
  - (е) Предложите реализацию функции вычитания в данном представлении.
  - (f) Какова вычислительная сложность арифметопераций с двоичными нумералами?

## Домашнее задание №2: ещё о бестиповом лямбда-исчислении

1. Бесконечное количество комбинаторов неподвижной точки. Дадим следующие определения

$$\begin{split} L := \lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.r(thisisafixedpointcombinator) \\ R := LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL\\ \end{split}$$

В данном определении терм R является комбинатором неподвижной точки: каков бы ни был терм F, выполнено R  $F =_{\beta} F$  (R F).

- (а) Докажите, что данный комбинатор действительно комбинатор неподвижной точки.
- (b) Пусть в качестве имён переменных разрешены русские буквы. Постройте аналогичное выражение по-русски: с 33 параметрами и осмысленной русской фразой в терме L; покажите, что оно является комбинатором неподвижной точки.
- 2. Напомним определение аппликативного порядка редукции: редуцируется самый левый из самых вложенных редексов. Например, в случае выражения  $(\lambda x.I\ I)\ (\lambda y.I\ I)$  самые вложенные редексы применения  $I\ I$ :

$$(\lambda x.\underline{I}\underline{I}) (\lambda y.\underline{I}\underline{I})$$

и надо выбрать самый левый из них:

$$(\lambda x.I\ I)\ (\lambda y.I\ I)$$

- (а) Проведите аппликативную редукцию выражения 2 2.
- (b) Постройте выражение, использующее *Y*-комбинатор для вычисления факториала. Возможно ли его аппликативное вычисление, или оно не сможет завершиться?
- (с) Найдите лямбда-выражение, которое редуцируется медленнее при нормальном порядке редукции, чем при аппликативном, даже при наличии мемоизации.
- 3. Будем говорить, что выражение A находится в слабой заголовочной нормальной форме (WHNF), если оно не имеет вид  $A \equiv (\lambda x.P) \ Q$  (то есть, самый верхний терм его не является редексом). Выражение находится в заголовочной нормальной форме (HNF), когда его верхний терм не редекс и не лямбда-абстракция с бета-редексами в теле.

Верно ли, что «нормальность» формы выражения может в процессе редукции только усиливаться (никакая — слабая заголовочная Н.Ф. — заголовочная Н.Ф. — нормальная форма)?

- 4. Заметим, что список в лямбда-выражении можно закодировать с помощью алгебраических типов. Напишите лямбда-выражение для:
  - (а) вычисления длины списка;
  - (b) функции map (построение нового списка из результатов применения функции к элементам старого);
  - (с) суммы списка целых чисел.
- 5. Базис SKI не единственный. Рассмотрим базис BCKW:

$$B = \lambda x.\lambda y.\lambda z.x \ (y \ z)$$

$$C = \lambda x.\lambda y.\lambda z.x \ z \ y$$

$$K = \lambda x.\lambda y.x$$

$$W = \lambda x.\lambda y.x \ y \ y$$

- (a) Покажите, что базис BCKW позволяет выразить любое выражение из базиса SKI.
- (b) Покажите, что любое выражение из базиса BCKW может быть выражено в базисе SKI.

## Домашнее задание №3: просто-типизированное лямбда-исчисление

- 1. Пусть фиксирован тип чёрчевского нумерала  $\eta = (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$ . Найдите тип для следующих конструкций и постройте доказательство:
  - (a)  $\bar{2}$  (покажите, что его тип  $\eta$ ).
  - (b) (+1).
  - (c) Plus.
  - (d) Mul (не каждая реализация умножения имеет тип в просто-типизированном лямбда исчислении; вам требуется найти нужную)
- 2. Имеет ли тип и какой:
  - (a) операция вычитания 1 (выраженная через «трюк зуба мудрости»)? Общий ответ не требуется, достаточно рассмотреть какую-то одну реализацию.

- (b) операция вычитания  $(\lambda m.\lambda n.m (-1) n)$ ?
- (c) операция возведения в степень ( $Power := \lambda m. \lambda n. n. m$ )?
- (d) функция  $\lambda x.Power \ x \ x$ ?
- 3. Каков тип:
  - (a) комбинаторов S и K;
  - (b) истины и лжи.
- 4. Рассмотрим полную интуиционистскую логику, с конъюнкцией, дизъюнкцией и ложью. Какой тип у следующих конструкций, и какие правила вывода интуиционистской логики им соответстсвуют (ответ требует демонстрации корректности этих правил для данных конструкций то есть вывод про тип результата применения правила должен всегда иметь место для выражений соответствующего вида):
  - (a) Упорядоченная пара (MkPair, PrL, PrR).
  - (b) Алгебраический тип (InL:  $\lambda x.\lambda a.\lambda b.a$  x, InR:  $\lambda x.\lambda a.\lambda b.b$  x, Case).
- 5. Докажите лемму о редукции (subject reduction lemma): если  $A \twoheadrightarrow_{\beta} B$  и  $\vdash A : \tau$ , то  $\vdash B : \tau$ . Верно ли обратное: если  $A \twoheadrightarrow_{\beta} B$  и  $\vdash B : \tau$ , то  $\vdash A : \tau$ ?
- 6. Как мы уже разбирали,  $\forall x: \tau$  в силу дополнительных ограничений правила

$$\overline{\Gamma,x:\tau \vdash x:\tau} \ x \not\in FV(\Gamma)$$

Найдите лямбда-выражение N, что  $\not\vdash N$  :  $\tau$  в силу ограничений правила

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.N : \sigma \rightarrow \tau} \ x \not\in FV(\Gamma)$$

7. Верно ли, что S = B(BW)(BBC)? Если нет, то как правильно?