Теоретические домашние задания

Теория типов, ИТМО, M3235-M3239, осень 2022 года

Домашнее задание №1: «вводная лекция»

1. Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
T	$\lambda a.\lambda b.a$	истина
F	$\lambda a.\lambda b.b$	ложь
Not	$\lambda x.x\ F\ T$	отрицание
And	$\lambda x.\lambda y.x\ y\ F$	конъюнкция

   Постройте лямбда-выражения для следующих булевских выражений:

   (a) Штрих Шеффера («и-не»)

   (b) Стрелка Пирса («или-не»)

   (c) Мажоритарный элемент от трёх аргументов (результат «истина», если истинны не менее двух аргументов)

2. Напомним определения с лекций:

$$f^{(n)}\ X ::= \begin{cases} X, & n = 0 \\ f^{(n-1)}\ (f\ X), & n > 0 \end{cases}$$

Обозначение	лямбда-терм	название
$\overline{n}$	$\lambda f.\lambda x.f^{(n)}\ x$	чёрчевский нумерал
$(+1)$	$\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x)$	прибавление 1
$IsZero$	$\lambda n.n\ (\lambda x.F)\ T$	проверка на 0

Обозначение	лямбда-терм	название
$MkPair$	$\lambda a.\lambda b.(\lambda x.x\ a\ b)$	создание пары
PrL	$\lambda p.p\ T$	левая проекция
PrR	$\lambda p.p\ F$	правая проекция
$Case$	$\lambda l.\lambda r.\lambda c.c\ l\ r$	case для алгебраического типа
InL	$\lambda l.(\lambda x.\lambda y.x\ l)$	левая инъекция
InR	$\lambda r.(\lambda x.\lambda y.y\ r)$	правая инъекция

   Используя данные определения, постройте выражения для следующих операций над числами:

   (a) Вычитание 1

   (b) Вычитание

   (c) Деление

   (d) Сравнение двух чисел ($IsLess$) — истина, если первый аргумент меньше второго (могут потребоваться пары и/или вычитания)

   (e) Делимость

3. Проредуцируйте выражение и найдите его нормальную форму:

   (a) $\overline{2}\ \overline{2}$

   (b) $\overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}$

   (c) $\overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}$

4. Напомним определение Y-комбинатора: $\lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$.

   (a) Покажите, что выражение $Y\ f$ не имеет нормальной формы;

   (b) Покажите, что выражение $Y\ (\lambda f.\overline{0})$ имеет нормальную форму.

   (c) Покажите, что выражение $Y\ (\lambda f.\lambda x.(IsZero\ x)\ \overline{0}\ (f\ Minus1\ x))\ 2$ имеет нормальную форму.

   (d) Какова нормальная форма выражения $Y\ (\lambda f.\lambda x.(IsZero\ x)\ \overline{0}\ ((+1)\ (f\ Minus1\ x)))\ \overline{n}$?

(e) Какова нормальная форма выражения $Y\ (\lambda f.\lambda x.(IsZero\ x)\ \overline{1}\ (Mul2\ (f\ Minus1\ x)))\ \overline{n}$?

(f) Определите с помощью Y-комбинатора функцию для вычисления n-го числа Фибоначчи.

5. Определим на языке Хаскель следующую функцию: `show_church n = show (n (+1) 0)` Убедитесь, что `show_church (\f -> \x -> f (f x))` вернёт 2. Пользуясь данным определением и его идеей, реализуйте следующие функции:

   (a) `int_to_church` — возвращает чёрчевский нумерал (т.е. функцию от двух аргументов) по целому числу. Каков точный тип результата этой функции?

   (b) сложение двух чёрчевских нумералов.

   (c) умножение двух чёрчевских нумералов.

   (d) можно ли определить вычитание 1 и вычитание? Что получается, а что — нет?

6. На лекции было использовано понятие свободы для подстановки.

   (a) Найдите лямбда-выражение, которое при однократной редукции требует переименования связанных переменных (редукция невозможна без переименования).

   (b) Заметим, что даже если мы запретим использовать одни и те же переменные в разных лямбда-абстракциях, это не будет решением проблемы переименований. Предложите лямбда-выражение, в котором (а) все лямбда-абстракции указаны по разным переменным; но (б) через некоторое количество редукций потребуется переименование связанных переменных.

7. Дадим определение: комбинатор — лямбда-выражение без свободных переменных.

   Также напомним определение:

$$S := \lambda x.\lambda y.\lambda z.x\ z\ (y\ z)$$
$$K := \lambda x.\lambda y.x$$
$$I := \lambda x.x$$

   Известна теорема о том, что для любого комбинатора X можно найти выражение P (состоящее только из скобок, пробелов и комбинаторов S и K), что $X =_\beta P$. Будем говорить, что комбинатор P *выражает* комбинатор X в базисе SK.

   Выразите в базисе SK:

   (a) $F = \lambda x.\lambda y.y$

   (b) $\overline{1}$

   (c) Not

   (d) Xor

   (e) InL

8. Чёрчевские нумералы соответствуют натуральным числам в аксиоматике Пеано.

   (a) Предложите «двоичные нумералы» — способ кодирования чисел, аналогичный двоичной системе (такой, при котором длина записи числа соответствует логарифму числового значения).

   (b) Предложите реализацию функции $(+1)$ в данном представлении.

   (c) Предложите реализацию лямбда-выражения преобразования числа из двоичного нумерала в чёрчевский.

   (d) Предложите реализацию функции сложения в данном представлении.

   (e) Предложите реализацию функции вычитания в данном представлении.

   (f) Какова вычислительная сложность арифметопераций с двоичными нумералами?

Домашнее задание №2: ещё о бестиповом лямбда-исчислении

1. Бесконечное количество комбинаторов неподвижной точки. Дадим следующие определения

$$L := \lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.r(thisisafixedpointcombinator)$$
$$R := LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL$$

   В данном определении терм R является комбинатором неподвижной точки: каков бы ни был терм F, выполнено $R\ F =_\beta F\ (R\ F)$.

(a) Докажите, что данный комбинатор — действительно комбинатор неподвижной точки.

(b) Пусть в качестве имён переменных разрешены русские буквы. Постройте аналогичное выражение по-русски: с 33 параметрами и осмысленной русской фразой в терме L; покажите, что оно является комбинатором неподвижной точки.

2. Напомним определение аппликативного порядка редукции: редуцируется самый левый из самых вложенных редексов. Например, в случае выражения $(\lambda x.I\ I)\ (\lambda y.I\ I)$ самые вложенные редексы — применения $I\ I$:

$$(\lambda x.\underline{I\ I})\ (\lambda y.\underline{I\ I})$$

и надо выбрать самый левый из них:

$$(\lambda x.\underline{I\ I})\ (\lambda y.I\ I)$$

(a) Проведите аппликативную редукцию выражения 2 2.

(b) Постройте выражение, использующее Y-комбинатор для вычисления факториала. Возможно ли его аппликативное вычисление, или оно не сможет завершиться?

(c) Найдите лямбда-выражение, которое редуцируется медленнее при нормальном порядке редукции, чем при аппликативном, даже при наличии мемоизации.

3. Будем говорить, что выражение A находится в *слабой заголовочной нормальной форме* (WHNF), если оно не имеет вид $A \equiv (\lambda x.P)\ Q$ (то есть, самый верхний терм его не является редексом). Выражение находится в *заголовочной нормальной форме* (HNF), когда его верхний терм — не редекс и не лямбда-абстракция с бета-редексами в теле.

Верно ли, что «нормальность» формы выражения может в процессе редукции только усиливаться (никакая — слабая заголовочная Н.Ф. — заголовочная Н.Ф. — нормальная форма)?

4. Заметим, что список в лямбда-выражении можно закодировать с помощью алгебраических типов. Напишите лямбда-выражение для:

(a) вычисления длины списка;

(b) функции *map* (построение нового списка из результатов применения функции к элементам старого);

(c) суммы списка целых чисел.

5. Базис SKI не единственный. Рассмотрим базис $BCKW$:

$$\begin{aligned} B &= \lambda x.\lambda y.\lambda z.x\ (y\ z) \\ C &= \lambda x.\lambda y.\lambda z.x\ z\ y \\ K &= \lambda x.\lambda y.x \\ W &= \lambda x.\lambda y.x\ y\ y \end{aligned}$$

(a) Покажите, что базис $BCKW$ позволяет выразить любое выражение из базиса SKI.

(b) Покажите, что любое выражение из базиса $BCKW$ может быть выражено в базисе SKI.

Домашнее задание №3: просто-типизированное лямбда-исчисление

1. Пусть фиксирован тип чёрчевского нумерала $\eta = (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$. Найдите тип для следующих конструкций и постройте доказательство:

(a) $\overline{2}$ (покажите, что его тип — η).

(b) $(+1)$.

(c) $Plus$.

(d) Mul (не каждая реализация умножения имеет тип в просто-типизированном лямбда исчислении; вам требуется найти нужную)

2. Имеет ли тип — и какой:

(a) операция вычитания 1 (выраженная через «трюк зуба мудрости»)? Общий ответ не требуется, достаточно рассмотреть какую-то одну реализацию.

(b) операция вычитания ($\lambda m.\lambda n.m\ (-1)\ n$)?

(c) операция возведения в степень ($Power ::= \lambda m.\lambda n.n\ m$)?

(d) функция $\lambda x.Power\ x\ x$?

3. Каков тип:

   (a) комбинаторов S и K;

   (b) истины и лжи.

4. Рассмотрим полную интуиционистскую логику, с конъюнкцией, дизъюнкцией и ложью. Какой тип у следующих конструкций, и какие правила вывода интуиционистской логики им соответстсвуют (ответ требует демонстрации корректности этих правил для данных конструкций — то есть вывод про тип результата применения правила должен всегда иметь место для выражений соответствующего вида):

   (a) Упорядоченная пара (MkPair, PrL, PrR).

   (b) Алгебраический тип (InL: $\lambda x.\lambda a.\lambda b.a\ x$, InR: $\lambda x.\lambda a.\lambda b.b\ x$, Case).

5. Докажите лемму о редукции (subject reduction lemma): если $A \twoheadrightarrow_\beta B$ и $\vdash A : \tau$, то $\vdash B : \tau$.

   Верно ли обратное: если $A \twoheadrightarrow_\beta B$ и $\vdash B : \tau$, то $\vdash A : \tau$?

6. Как мы уже разбирали, $\not\vdash x\ x : \tau$ в силу дополнительных ограничений правила

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau}\ x \notin FV(\Gamma)$$

   Найдите лямбда-выражение N, что $\not\vdash N : \tau$ в силу ограничений правила

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.N : \sigma \to \tau}\ x \notin FV(\Gamma)$$

7. Верно ли, что $S = B(BW)(BBC)$? Если нет, то как правильно?

Домашнее задание №4: «Изоморфизм Карри-Ховарда»

1. Предложим альтернативные аксиомы для конъюнкции:

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta}\ \text{Введ. \&} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta \quad \Gamma, \alpha, \beta \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma}\ \text{Удал. \&}$$

   (a) Предложите лямбда-выражения, соответствующие данным аксиомам; поясните, как данные выражения абстрагируют понятие «упорядоченной пары».

   (b) Выразите изложенные в лекции аксиомы конъюнкции через приведённые в условии.

   (c) Выразите приведённые в условии аксиомы конъюнкции через изложенные в лекции.

2. *Вполне упорядоченным* множеством назовём такое линейно-упорядоченное отношением ($\prec$) множество S (и такой порядок назовём *полным*), что какое бы ни было множество $U \subseteq S$, в U найдётся наименьший элемент.

   (a) Покажите, что неотрицательные вещественные числа $[0, +\inf)$ — не вполне упорядоченное множество. Существуют ли конечные и счётные не вполне упорядоченные множества?

   (b) Определим лексикографический порядок на $\mathbb{N}^n$: положим, что $\langle a_1, a_2, \dots a_n \rangle \prec \langle b_1, b_2, \dots b_n$, если найдётся такой k, что $a_1 = b_1$, ..., $a_{k-1} = b_{k-1}$, но $a_k < b_k$. Покажите, что такой порядок — полный.

   (c) Пусть S вполне упорядочено отношением ($\prec$), определим $a \succ b := b \prec a$. Пусть $a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ \dots$ — строго монотонно убывающая последовательность значений из S. Покажите, что данная последовательность всегда имеет конечную длину.

3. Поясним название «алгебраические типы» — это семейство составных типов, позволяющих строить «алгебраические» выражения на типах:

название	обозначение	алгебраический смысл
тип-сумма, «алгебраический»	$\alpha \vee \beta$	$\alpha + \beta$
тип-произведение, пара	$\alpha \,\&\, \beta$	$\alpha \times \beta$
тип-степень, функция	$\alpha \to \beta$	β^α

   Название «алгебраический» закрепилось в первую очередь за типом-суммой (видимо потому, что остальные типы имеют устоявшиеся названия), однако, может быть отнесено и к другим типам.

   Поясните «типовый» (программистский) смысл следующих алгебраических тождеств — и постройте программы на Хаскеле, их доказывающие:

   (a) $\gamma \times (\alpha + \beta) = \gamma \times \alpha + \gamma \times \beta$.
   (b) $\gamma^{\alpha \times \beta} = (\gamma^\alpha)^\beta$. Как называется данное тождество?
   (c) $\gamma^{\alpha + \beta} = \gamma^\alpha \times \gamma^\beta$.

4. Напомним, что $\neg\alpha \equiv \alpha \to \bot$. Найдите лямбда-выражения, доказывающие:

   (a) Формулу де-Моргана $\neg(\alpha \vee \beta) \to \neg\alpha \,\&\, \neg\beta$.
   (b) Контрапозицию $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$.
   (c) Закон исключённого третьего после применения теоремы Гливенко $\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$.

5. Какие аксиомы соответствуют базису $BCKW$? Покажите, что аксиома, соответствующая S, доказывается в этой аксиоматике.

6. Выразите в Хаскеле Y-комбинатор. Каков его тип?

7. Покажите, что типовая система Хаскеля противоречива.

Домашнее задание №5: «Реконструкция типа лямбда-выражений в просто-типизированном исчислении»

1. На лекции вводилась метрика для доказательства завершаемости алгоритма унификации: упорядоченная тройка $\langle x, y, z\rangle$, где x — количество уравнений в разрешённой форме (уравнений вида $a = \theta$, причём a входит в систему ровно один раз), z — количество уравнений типа $a = a$ и $\theta = b$. Смысл же параметра y не был раскрыт.

   Каким взять параметр для y, чтобы получившаяся метрика строго монотонно убывала при каждом применении правил унификации?

2. Применив алгоритм, рассказанный на лекции, найдите тип для комбинатора S.

3. Применив алгоритм, рассказанный на лекции, покажите отсутствие типа у Y-комбинатора.

4. Исчислением предикатов второго порядка назовём исчисление со следующим языком:

$$\Phi ::= x | (\Phi \to \Phi) | (\forall x.\Phi)$$

   Содержательное отличие от исчисления высказываний — наличие квантора всеобщности и правил вывода для его введения и удаления:

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \forall p.\phi}(p \notin FV(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall p.\phi}{\Gamma \vdash \phi[p := \Theta]}$$

   Докажите, что следующие связки могут быть выражены в таком исчислении (то есть, покажите, что соответствующие формулы удовлетворяют соответствующим правилам вывода для интуиционистского исчисления высказываний):

   (a) $\psi \,\&\, \varphi := \forall g.(\psi \to \varphi \to g) \to g$
   (b) $\psi \vee \varphi := \forall g.(\psi \to g) \to (\varphi \to g) \to g$
   (c) $\bot := \forall a.a$
   (d) $\exists a.\psi := \forall g.(\forall a.(\psi \to g)) \to g$

   Для квантора существования правила вывода следующие:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi[p := \psi]}{\Gamma \vdash \exists p.\varphi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists p.\varphi \quad \Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}(p \notin FV(\Gamma, \psi))$$

Домашнее задание №6: «Логика второго порядка и система F»

1. Требуется ли свобода для подстановки в правилах с квантором?

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \forall p.\phi}(p \notin FV(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall p.\phi}{\Gamma \vdash \phi[p := \theta]}$$

   Если да — приведите пример доказуемой при отсутствии свободы для подстановки, но некорректной формулы. Если нет — предложите доказательство корректности правил при любых подстановках.

2. Пусть $\Gamma \vdash \varphi$. Всегда ли можно перестроить доказательство φ, добавив ещё одну гипотезу: $\Gamma, \psi \vdash \varphi$? Если нет, каковы могли бы быть ограничения на ψ?

3. Пусть $\Gamma \vdash \forall x.\varphi$. Верно ли тогда, что $\Gamma \vdash \forall y.\varphi[x := y]$? Если это неверно в общем случае, возможно, это верно при каких-то ограничениях? В случае наличия ограничений приведите надлежащие контрпримеры.

4. Перенесите в систему F из бестипового лямбда-исчисления следующие функции (приведите выражение, укажите его тип и докажите его):

   (a) инъекции и *case* (операции с алгебраическим типом);

   (b) истина, ложь, исключающее или;

   (c) черчёвский нумерал (он должен иметь тип $\forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$) и инкремент;

   (d) возведение в степень: $\lambda m.\lambda n.n\ m$;

   (e) вычитание единицы (трюк зуба мудрости) и вычитание.

5. Напомним определения с лекции:

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi[\alpha := \theta]}{\Gamma \vdash (\text{pack } M, \theta \text{ to } \exists\alpha.\varphi) : \exists\alpha.\varphi} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \exists\alpha.\varphi \qquad \Gamma, x : \varphi \vdash N : \psi}{\Gamma \vdash \text{abstype } \alpha \text{ with } x : \varphi \text{ in } M \text{ is } N : \psi}\ \alpha \notin FV(\Gamma, \psi)$$

   Покажите, что pack и abstype могут быть заданы так:

$$\textbf{pack } M, \theta \textbf{ to } \exists\alpha.\varphi = \Lambda\beta.\lambda x^{\forall\alpha.\varphi\to\beta}.x\theta M$$

$$\textbf{abstype } \alpha \textbf{ with } x : \varphi \textbf{ in } M \textbf{ is } N : \psi = M\psi(\Lambda\alpha.\lambda x^{\varphi}.N)$$

   То есть, соответствующие правила вывода будут выполнены для так заданных выражений.

6. У правил вывода с кванторами для системы F есть ограничения. Покажите, что эти ограничения существенны: что без них с помощью кванторов можно типизировать лямбда-выражения, разрушающие систему F (то есть, нарушающие какие-то её существенные свойства, например, делающие её противоречивой).

7. (a) Разработайте интерфейс и реализацию для абстрактного типа данных «множество» (функции создания пустого множества, добавления, удаления, проверки наличия элемента в множестве). Напишите тестовую программу, использующую данный АТД.

   (b) Сделайте по АТД «множество» соответствующий экзистенциальный тип в системе F, перенесите его в Хаскель и дайте реализацию этого типа. Приспособьте тест из предыдущего пункта.

8. Переформулируйте систему F в исчислении по Карри: укажите новые схемы аксиом для кванторов всеобщности и существования.

9. Переформулируйте операции abstype и pack для исчисления по Карри, укажите соответствующие им лямбда-выражения и покажите, что эти выражения соответствуют аксиомам.