又由点 P 在椭圆上有 $b^2u^2+a^2v^2-a^2b^2=0$，

$$\therefore b^2[\frac{(a^2-mn+m^2)x-a^2m}{m(x-n)}]^2+a^2[\frac{(a^2-mn)y}{m(x-n)}]^2-a^2b^2=0.$$

上式整理得

$$b^2[a^2-mn+m^2)^2-a^2m^2]x^2-2a^2b^2m(a^2-2mn+m^2)x+a^2(a^2-mn)^2y^2+a^2b^2m^2(a^2-n^2)=0 \cdots (*)$$

1° 若（$a^2-mn+m^2)^2-a^2m^2=0$，

即 $n=\frac{a^2}{m}+m\pm a$ 时，$(*)$ 式可化为

$$y^2=-\frac{2b^2}{m}(x-\frac{a^2+m^2}{2m}),$$

它表示的曲线（即点 R 的轨迹，以下同）为抛物线．

2° 若 $(a^2-mn+m^2)^2-a^2m^2\neq 0$，则 $(*)$ 式可化为

$$\frac{[x-\frac{a^2m(t-mn)}{t^2-a^2m^2}]^2}{\frac{a^2m^2(a^2-mn)^2(m-n)^2}{(t^2-a^2m^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2m^2(m-n)^2}{t^2-a^2m^2}}=1 \cdots (**)$$

其中 $t=a^2-mn+m^2$．

（ⅰ）当 $n>\frac{a^2}{m}+m+a$ 或 $n<\frac{a^2}{m}+m-a$，即 $t^2-a^2m^2>0$ 时，方程 $(**)$ 表示的曲线为椭圆或圆，特别地，当 $n=\frac{a^2+m^2}{2m}$ 时，方程 $(**)$ 变为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，此时变换为椭圆到自身的变换；

（ⅱ）当 $\frac{a^2}{m}+m-a<n<\frac{a^2}{m}+m+a$，即 $t^2-a^2m^2<0$ 时，方程 $(**)$ 表示的曲线为双曲线．

综上，定理 1 得证．

参考文献

[1]姜坤崇．圆锥曲线之间的一个变换．数学通报，2003（10），25-26

[2]姜坤崇．圆锥曲线两个性质的推广．数学通报，2003（3），24-25

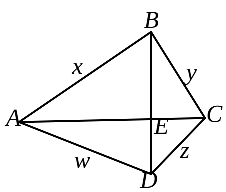
边长确定的四边形面积最大值定理

王兵权　　河北省河间市第一中学（062450）

《数学通报》2009 年第 11 期有如下一个数学问题：

1817　四边之长分别为定值的凸四边形的两对角线互相垂直，求此四边形面积的最大值．

如图，设四边形 $ABCD$ 的四边之长依次为 x，y，z，w，贺斌老师利用柯西不等式求得最大面积为 $\frac{1}{2}(xz+yw)$．



由于对角线互相垂直，所以 $x^2-y^2=w^2-z^2=AE^2-CE^2$，$x^2+z^2=y^2+w^2$，即两组对边边长平方之和相等，这里对四边形进行了限制．

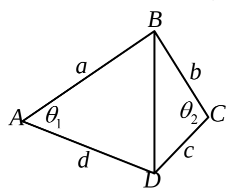
对此自然会有进一步的思考：给出四条线段（任三边之和大于第四边），由其构成的四边形面积有无最大值、何时取得最大值、有无一般规律？

笔者对此进行了探究，得到如下定理：

定理 若给出四条线段 a，b，c，d，当其组成的四边形为圆的内接四边形时，面积最大．

证明 显然四边形面积最大时一定是凸四边形．

如图，凸四边形 $ABCD$ 的四边之长依次为 a，b，c，d，一组对角分别为 θ_1，θ_2，连接 BD，则四边形面积



$$S=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta CBD}=\frac{1}{2}ab\sin\theta_1+\frac{1}{2}cd\sin\theta_2,$$

$$2S=ab\sin\theta_1+cd\sin\theta_2 \cdots (1)$$

在 ΔABD 与 ΔCBD 中，由余弦定理得：

$$a^2+b^2-2ab\cos\theta_1=c^2+d^2-2cd\cos\theta_2,$$

从而 $$\frac{(a^2+b^2)-(c^2+d^2)}{2}=ab\cos\theta_1-cd\cos\theta_2 \cdots (2)$$

（1）与（2）平方相加，整理得：

$$4S^2=-[\frac{(a^2+b^2)-(c^2+d^2)}{2}]^2+a^2b^2+c^2d^2-2abcd\cos(\theta_1+\theta_2).$$

因此，当 $\cos(\theta_1+\theta_2)=-1$ 时 S 有最大值，而

$0<\theta_1+\theta_2<2\pi$，故 $\theta_1+\theta_2=\pi$ 时，既四边形为圆的内接四边形时面积有最大值，且

$$S_{\max}=\sqrt{\frac{1}{4}\{-[\frac{(a^2+b^2)-(c^2+d^2)}{2}]^2+a^2b^2+c^2d^2+2abcd\}}$$

$$=\sqrt{\frac{4(ab+cd)^2-[(a^2+b^2)-(c^2+d^2)]^2}{16}}$$

$$=\sqrt{\frac{[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]}{16}}，$$

记 $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$，

则 $S_{max}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$．

定理得证．

由上述证明过程不难得出：

定理 边长分别为 a，b，c，d 的圆的内接四边形面积为 $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$，其中 $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$．

上述结论形式优美，可与三角形海伦公式相媲美，且由上式可以看出，四条线段的地位相当，所以不论以何种方式连接，面积的最大值不变．因此，对于问题 1817，我们可以调整线段的连接顺序，使长度分别为 x,z 与 y,w 的边相邻，因为 $x^2+z^2=y^2+w^2$，显然其外接圆的直径为 $\sqrt{x^2+z^2}$，此时四边形可分为两个直角三角形，其面积为 $\dfrac{1}{2}(xz+yw)$．

参考文献

[1]贺斌．数学问题解答 1817．数学通报，2009（11），63-64

一个生活小游戏的概率计算及拓展

黄锦华[1, 2]

1 福建师范大学数学与计算机科学学院（350007） 2 福建省南安国光中学（362321）

生活中，很多女生喜欢玩一种“打结许愿“的游戏：一个女生一把握住八根绳子的中段，露出头尾，而另一个女生先许个愿，然后将八根的绳子头部两两打结，共打成四个结，绳子尾部也一样处理．之后抖开绳子，如果八根绳子恰好形成一个封闭的大圆环，那么这个女生的愿望就会实现；如果绳子形成若干个小圆环，那么幸运女神暂时不会光临．

在这个游戏中，八根绳子连成一个封闭大圆环的概率是多少？

很显然，这是一个古典概型的问题．解题的关键在于选取合适的数学模型，构造相应的样本空间，求出样本点总数 n 和事件 A 包含的样本点数 m，然后运用公式 $P(A)=\dfrac{m}{n}$，便可算出事件 A 的概率．而样本空间 Ω 的构造，可以根据解题的需要从不同的角度灵活选择，只要保持样本空间中基本事件的等可能性即可．我们可以尝试构造几种不同的数学模型来解决这个问题．

解法一 （1）若将符合游戏规则的所有可能结果作为样本空间 Ω，则 Ω 包含样本点总数可分为绳头的连接法、绳尾的连接法这两步来运算．

绳头的连接法的计算可化归为平均分堆问题，即把八个绳子平均分成四堆，每堆两个，方法数为 $\dfrac{C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2}{4!}$．

而绳尾的连接法同理也是 $\dfrac{C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2}{4!}$．

因此 Ω 包含样本点总数 $n=(\dfrac{C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2}{4!})^2$．

（2）设事件 A 为：八根绳子抖开后恰好形成一个封闭大圆环，则事件 A 包含的样本点数可化归为圆排列问题，即八个互异元素排成一个圆圈，所以 $m=7!$．

（3）由（1）（2）可得 $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{7!}{(\dfrac{C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2}{4!})^2}=\dfrac{16}{35}$.

解法二 （1）在绳子尾部未打结的情况下，绳头怎么连接都不改变最后的结果．所以我们可认为绳头的连接结果是“①②③④⑤⑥⑦⑧”，而把绳尾的连接方法数作为样本空间 Ω．