МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И
КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6
по дисциплине
«ИНФОРМАТИКА»

по теме:
РАБОТА С СИСТЕМОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ ВЁРСТКИ LaTeX

Вариант №81

Выполнил:
Студент группы P3117
Павленко И. Д.

Проверил:
Марухленко Д. С.

Санкт-Петербург 2024

С. Овчинников, И. Шарыгин

Метод бесконечного спуска

Какое иррациональное число самое «старое»? Несомненно, $\sqrt{2}$. Мы не знаем точно, кто первый доказал иррациональность этого числа, однако мы убеждены, что сделано было это примерно так.

Доказательство первое

Допустим, что число $\sqrt{2}$ рационально. Геометрически это означает, что диагональ квадрата длины c соизмерима с его стороной длины a, то есть найдутся отрезок длины d и целые числа m и n такие, что $c = dm, a = dn$. Отметим $m - 1$ точек на диагонали AC и $n - 1$ точек на стороне DC, делящие эти отрезки на кусочки длины d. Докажем, что треугольники ACD и KEC подобны. Отложим на $|AC|$ отрезок AK: $|AK| = |AD|$; на $|DC|$ - отрезок DE: $|DE| = |KC|$. Точки K и E попадут в отмеченные точки (рис 1). Докажем, что треугольники

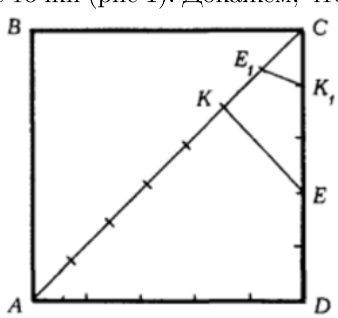

Рис. 1.

ACD и KEC подобны. Угол C у них общий. Достаточно, значит, проверить равенство $\frac{|KC|}{|EC|} = \frac{|CD|}{|AC|}$.

Заметим, что $|KC| = c-a, |EC| = 2a-c$. Поэтому $\frac{|KC|^2}{|EC|^2} = \frac{c^2+a^2-2ac}{c^2+4a^2-4ac}$. Поскольку $c^2 = 2a^2$, $\frac{|KC|^2}{|EC|^2} = \frac{3a^2-2ac}{6a^2-4ac} = \frac{1}{2} = \frac{|AD|^2}{|AC|^2}$.
Таким образом, $\triangle KEC$, подобный $\triangle ACD$, - прямоугольный равнобедренный, и мы можем проделать на его сторонах такое же построение, как на сторонах треугольника ACD. Отложим на $|EC|$ Отрезок EK_1: $|EK_1| = |KC|$; на $|KC|$ - отрезок KE_1: $|KE_1| = |K_1C|$. точки K_1 и E_1 вновь попадут в точки деления. Треугольник K_1CE, снова окажется прямоугольным равнобедренным. Для него мы тем же способом построим треугольник K_2CE_2; эту процедуру можно продолжать без конца. При этом треугольники K_jCE_j, становятся все мельче, но всякий раз точки K_j и E_j, будут попадать в первоначальные точки деления отрезков AC и CD. Но ведь этих точек только конечное число! А треугольников K_jCE_j бесконечно много. Это противоречие и доказывает иррациональность $\sqrt{2}$.

Прошли века... Появилось алгебраическое доказательство, пожалуй, более простое.

Доказательство второе

Иррациональность $\sqrt{2}$ означает, что у уравнения $x^2 = 2y^2$ нет решений в натуральных числах x, y. Допустим, что такие решения есть, и $x = m$, $y = n$ - одно из них.

Из уравнения следует, что m - четное число, $m = 2m_1$. Подставляя $m = 2m_1$ в уравнение, получаем $n^2 = 2m_1^2$, то есть $x = n$, $y = m_1$ - тоже решение. Отметим при этом, что $n < m$, $m_1 < n$. Теперь видно, что и n - четное число, $n = 2n_1$, следовательно, $m_1^2 = 2n_1^2$. Таким об-