

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО  
Факультет программной инженерии и компьютерной техники  
Дисциплина «Дискретная математика»

**Курсовая работа**  
Часть 1  
Вариант 89

Выполнил студент:  
Павленко Иван Дмитриевич  
Р3117

Проверил:  
Поляков Владимир Иванович

Санкт-Петербург, 2024 г.

Функция  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  принимает значение 1 при  $3 < |x_4 1x_5 - x_1 x_2 x_3| < 6$  и неопределенное значение при  $|x_4 1x_5 - x_1 x_2 x_3| = 1$

## Таблица истинности

№	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_4 1x_5$	$x_1 x_2 x_3$	$x_4 1x_5$	$x_1 x_2 x_3$	$f$
0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0
1	0	0	0	0	1	3	0	3	0	0
2	0	0	0	1	0	6	0	6	0	0
3	0	0	0	1	1	7	0	7	0	0
4	0	0	1	0	0	2	1	2	1	d
5	0	0	1	0	1	3	1	3	1	0
6	0	0	1	1	0	6	1	6	1	1
7	0	0	1	1	1	7	1	7	1	0
8	0	1	0	0	0	2	2	2	2	0
9	0	1	0	0	1	3	2	3	2	d
10	0	1	0	1	0	6	2	6	2	1
11	0	1	0	1	1	7	2	7	2	1
12	0	1	1	0	0	2	3	2	3	d
13	0	1	1	0	1	3	3	3	3	0
14	0	1	1	1	0	6	3	6	3	0
15	0	1	1	1	1	7	3	7	3	1
16	1	0	0	0	0	2	4	2	4	0
17	1	0	0	0	1	3	4	3	4	d
18	1	0	0	1	0	6	4	6	4	0
19	1	0	0	1	1	7	4	7	4	0
20	1	0	1	0	0	2	5	2	5	0
21	1	0	1	0	1	3	5	3	5	0
22	1	0	1	1	0	6	5	6	5	d
23	1	0	1	1	1	7	5	7	5	0
24	1	1	0	0	0	2	6	2	6	1
25	1	1	0	0	1	3	6	3	6	0
26	1	1	0	1	0	6	6	6	6	0
27	1	1	0	1	1	7	6	7	6	d
28	1	1	1	0	0	2	7	2	7	1
29	1	1	1	0	1	3	7	3	7	1
30	1	1	1	1	0	6	7	6	7	d
31	1	1	1	1	1	7	7	7	7	0

## Аналитический вид

### Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} x_5$$

### Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

# Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

## Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$			$K^1(f)$		$Z(f)$
$m_4$	00100	✓	$m_4-m_6$	001X0	10001
$m_6$	00110	✓	$m_4-m_{12}$	0X100	001X0
$m_{10}$	01010	✓	$m_{10}-m_{11}$	0101X	0X100
$m_{24}$	11000	✓	$m_9-m_{11}$	010X1	0101X
$m_9$	01001	✓	$m_{24}-m_{28}$	11X00	010X1
$m_{12}$	01100	✓	$m_6-m_{22}$	X0110	11X00
$m_{17}$	10001		$m_{12}-m_{28}$	X1100	X0110
$m_{11}$	01011	✓	$m_{11}-m_{15}$	01X11	X1100
$m_{28}$	11100	✓	$m_{28}-m_{29}$	1110X	01X11
$m_{22}$	10110	✓	$m_{28}-m_{30}$	111X0	1110X
$m_{15}$	01111	✓	$m_{22}-m_{30}$	1X110	111X0
$m_{29}$	11101	✓	$m_{11}-m_{27}$	X1011	1X110
$m_{27}$	11011	✓			X1011
$m_{30}$	11110	✓			

## Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы							
		0	0	0	0	1	1	1	1
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	0	0	1	0	1	1	1	1
	1	1	1	1	0	0	0	0	0
	0	0	1	1	0	0	0	1	1
	6	10	11	15	24	28	29		
	10001								
A	001X0	X							
	0X100								
	0101X		X	X					
	010X1			X					
	11X00				X	X			
B	X0110	X							
	X1100					X			
	01X11			X	X				
	1110X					X	X		
	111X0					X			
	1X110								
	X1011			X					

Ядро покрытия:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0101X \\ 01X11 \\ 11X00 \\ 1110X \end{array} \right\}$$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

Простые импликанты		0-кубы
		0
		0
		1
		1
		0
		6
A	001X0	X
B	X0110	X

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = A \vee B$$

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \left\{ \begin{matrix} T \\ A \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0101X \\ 01X11 \\ 11X00 \\ 1110X \\ 001X0 \end{matrix} \right\} \quad C_2 = \left\{ \begin{matrix} T \\ B \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0101X \\ 01X11 \\ 11X00 \\ 1110X \\ X0110 \end{matrix} \right\}$$

$$S_1^a = 20 \quad S_1^b = 25 \quad S_2^a = 20 \quad S_2^b = 25$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \left\{ \begin{matrix} 0101X \\ 01X11 \\ 11X00 \\ 1110X \\ 001X0 \end{matrix} \right\}$$

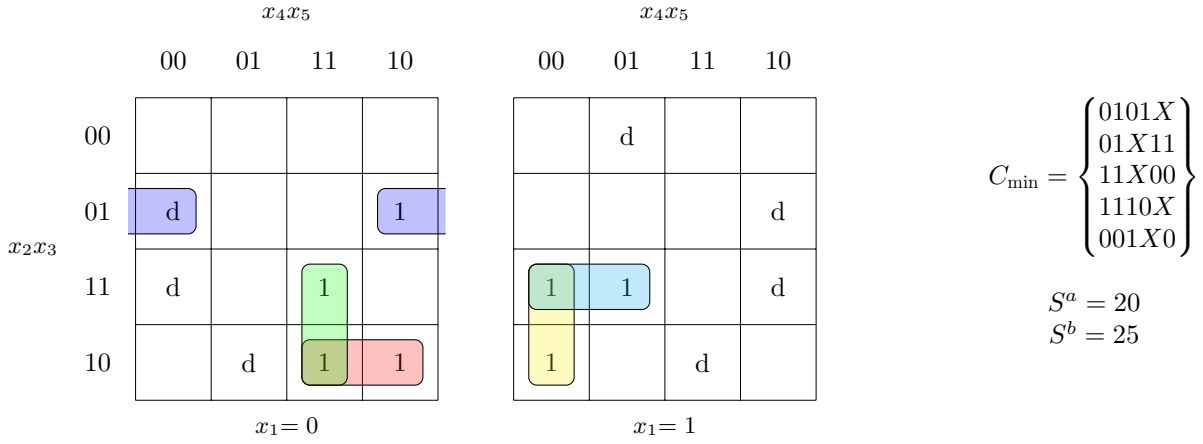
$$S^a = 20 \quad S^b = 25$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_5}$$

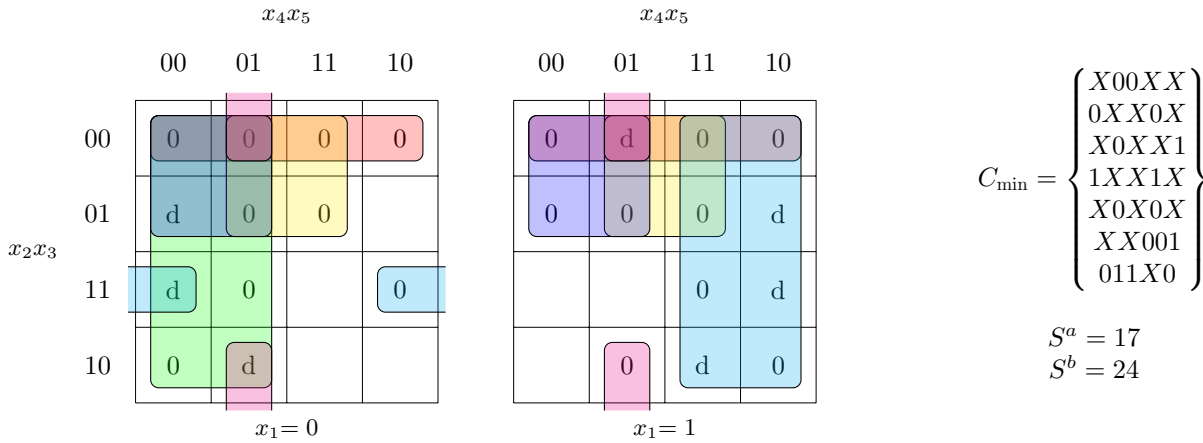
# Минимизация булевой функции на картах Карно

## Определение МДНФ



$$f = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_5}$$

## Определение МКНФ



$$f = (x_2 \vee x_3) (x_1 \vee x_4) (x_2 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_4}) (x_2 \vee x_4) (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_5)$$

# Преобразование минимальных форм булевой функции

## Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} x_2 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_5} \quad S_Q = 25 \quad \tau = 2$$

$$f = x_1 x_2 \overline{x_4} (x_3 \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} x_2 x_4 (\overline{x_3} \vee x_5) \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_5} \quad S_Q = 19 \quad \tau = 3$$

$$\varphi = x_3 \overline{x_5}$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_3} \vee x_5$$

$$f = x_1 x_2 \overline{x_4} (x_3 \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \overline{\varphi} \vee \varphi \overline{x_1} \overline{x_2} \quad S_Q = 19 \quad \tau = 4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = x_1 x_2 \overline{x_4} (x_3 \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} x_2 x_4 (\overline{x_3} \vee x_5) \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_5} \quad S_Q = 19 \quad \tau = 3$$

## Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_2 \vee x_3) (x_1 \vee x_4) (x_2 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_4}) (x_2 \vee x_4) (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_5) \quad S_Q = 24 \quad \tau = 2$$

$$f = (x_2 \vee x_3 \overline{x_5}) (x_4 \vee x_1 x_2 (x_3 \vee \overline{x_5})) (\overline{x_1} \vee \overline{x_4}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_5) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 4$$

$$\varphi = x_3 \overline{x_5}$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_3} \vee x_5$$

$$f = (x_2 \vee \varphi) (x_4 \vee x_1 x_2 (x_3 \vee \overline{x_5})) (\overline{x_1} \vee \overline{x_4}) (\overline{\varphi} \vee x_1 \vee \overline{x_2}) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = (x_2 \vee x_3 x_4 \overline{x_5}) (x_1 \vee x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_4}) (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_5) \quad S_Q = 21 \quad \tau = 3$$

## Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$

## Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_1 x_2 \overline{x_4} (x_3 \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1} x_2 x_4 (\overline{x_3} \vee x_5) \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_5} \quad (S_Q = 19, \tau = 3)$$

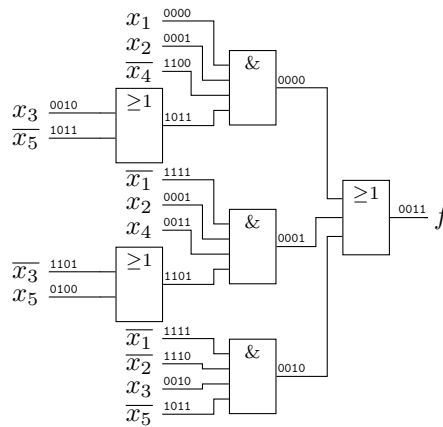
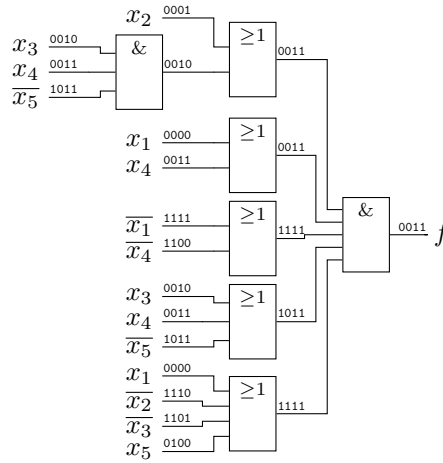


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_2 \vee x_3 x_4 \overline{x_5}) (x_1 \vee x_4) (\overline{x_1} \vee \overline{x_4}) (x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_5) \quad (S_Q = 21, \tau = 3)$$



## Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_1 x_2 \overline{x_4} \overline{x_3} x_5} \overline{x_1} x_2 x_4 \overline{\varphi} \varphi \overline{x_1} \overline{x_2}}} \quad (S_Q = 24, \tau = 6)$$

$$\varphi = x_3 \overline{x_5}$$

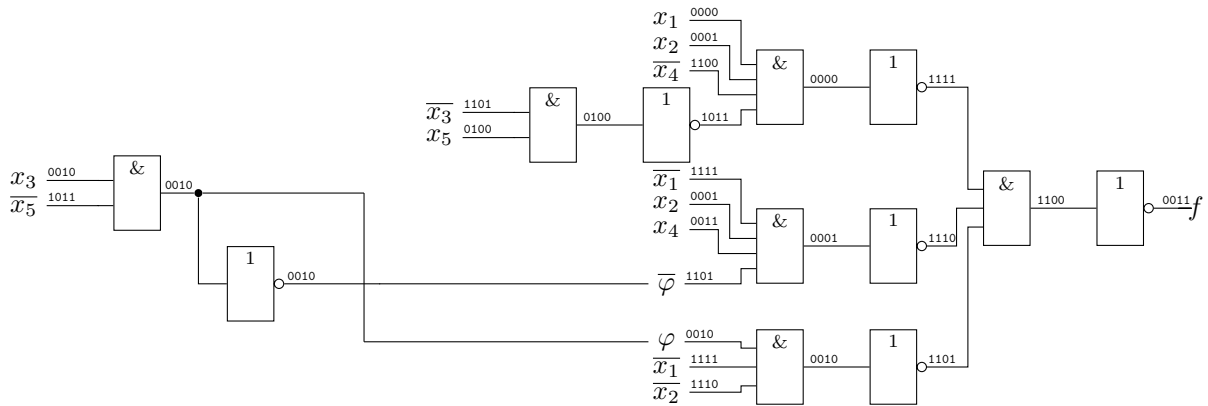
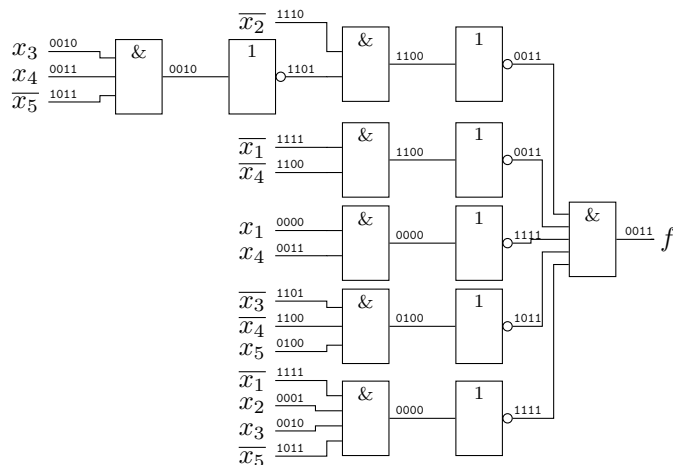


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{\overline{x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \overline{x_1} \overline{x_4} \overline{x_1} x_4 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_5}}}} \quad (S_Q = 27, \tau = 5)$$



## Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

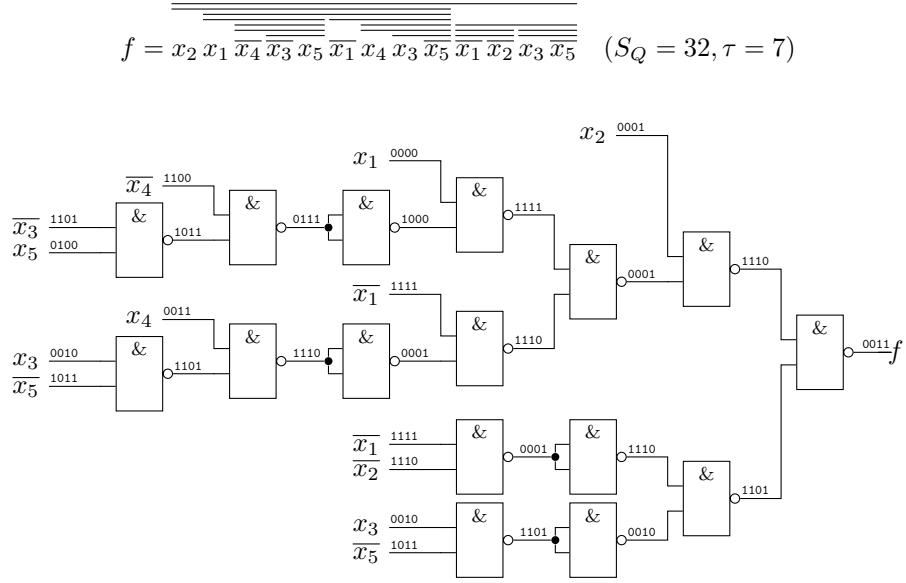


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

