

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО  
Факультет программной инженерии и компьютерной техники  
Дисциплина «Дискретная математика»

**Курсовая работа**  
Часть 2  
Вариант 113

Выполнил студент:  
Павленко Иван Дмитриевич  
Р3117

Проверил:  
Поляков Владимир Иванович

Санкт-Петербург, 2024 г.

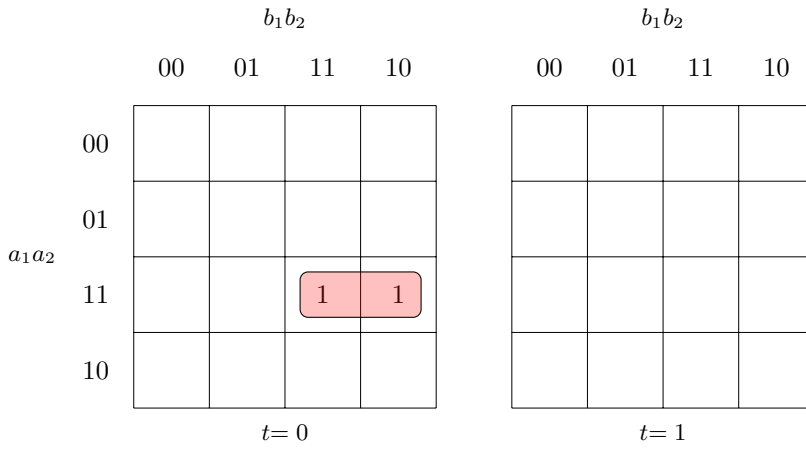
## Задание

Построить комбинационную схему, реализующую функцию  $C = A + 2$  при  $t = 0$  ( $A = a_1a_2b_1b_2$ ), и  $C = A + B$  при  $t = 1$  ( $A = a_1a_2$ ,  $B = b_1b_2$ ). При переносе устанавливается бит  $e$ .

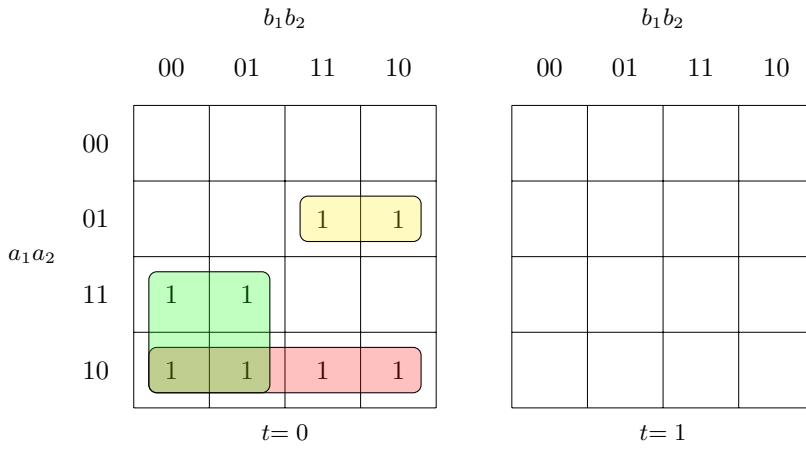
## Таблица истинности

№	$t$	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$e$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
4	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
6	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
7	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
8	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
9	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
10	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0
11	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
12	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0
13	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
14	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
15	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
16	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
18	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
19	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
20	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
21	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
22	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
23	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0
24	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
25	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1
26	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
27	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1
28	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
29	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0
30	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
31	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0

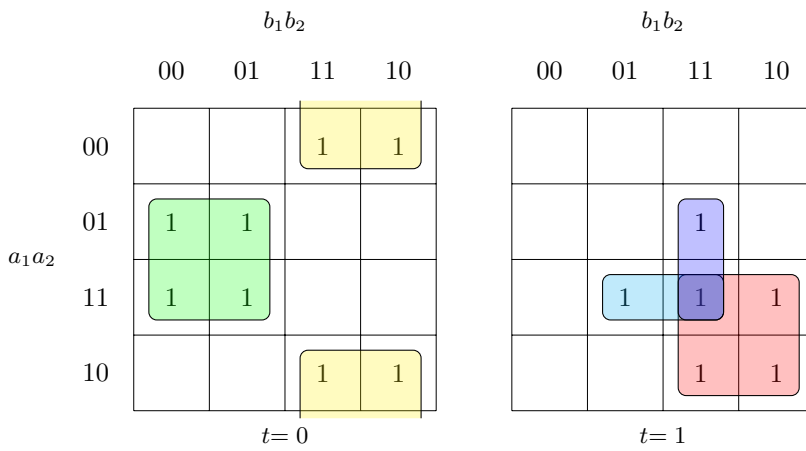
# Минимизация булевых функций на картах Карно



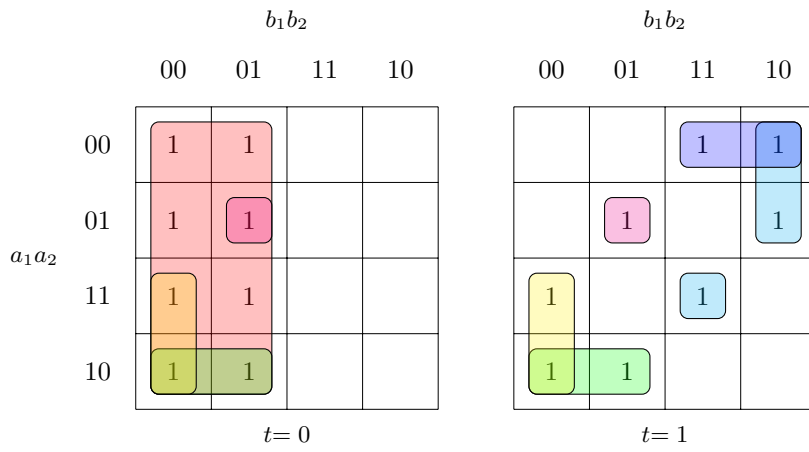
$$e = a_1 a_2 b_1 \bar{t} \quad (S_Q = 4)$$



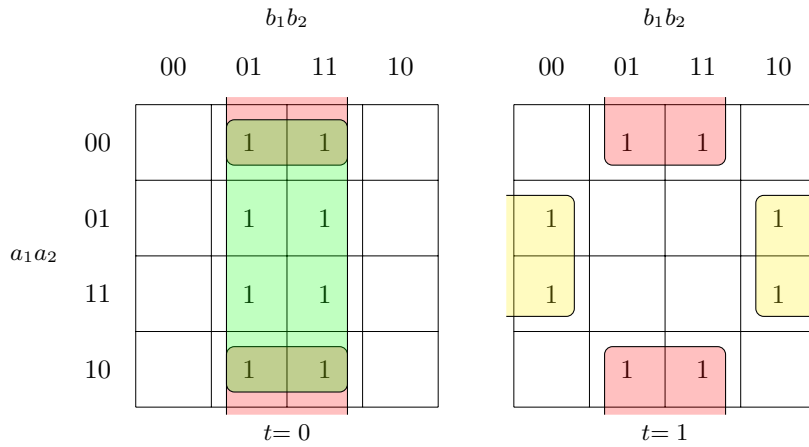
$$c_1 = a_1 \bar{a}_2 \bar{t} \vee a_1 \bar{b}_1 \bar{t} \vee \bar{a}_1 a_2 b_1 \bar{t} \quad (S_Q = 13)$$



$$c_2 = a_1 b_1 t \vee a_2 \bar{b}_1 \bar{t} \vee \bar{a}_2 b_1 \bar{t} \vee a_1 a_2 b_2 t \vee a_2 b_1 b_2 t \quad (S_Q = 22)$$



$$c_3 = \bar{b}_1 \bar{t} \vee a_1 \bar{a}_2 \bar{b}_1 \vee a_1 \bar{b}_1 \bar{b}_2 \vee \bar{a}_1 b_1 \bar{b}_2 t \vee \bar{a}_1 \bar{a}_2 b_1 t \vee \bar{a}_1 a_2 \bar{b}_1 b_2 \vee a_1 a_2 b_1 b_2 t \quad (S_Q = 32)$$



$$c_4 = \bar{a}_2 b_2 \vee b_2 \bar{t} \vee a_2 \bar{b}_2 t \quad (S_Q = 10)$$

## Преобразование системы булевых функций

$$\begin{cases} e = a_1 a_2 b_1 \bar{t} & (S_Q^e = 4) \\ c_1 = a_1 \bar{a}_2 \bar{t} \vee a_1 \bar{b}_1 \bar{t} \vee \bar{a}_1 a_2 b_1 \bar{t} & (S_Q^{c_1} = 13) \\ c_2 = a_1 b_1 t \vee a_2 \bar{b}_1 \bar{t} \vee \bar{a}_2 b_1 \bar{t} \vee a_1 a_2 b_2 t \vee a_2 b_1 b_2 t & (S_Q^{c_2} = 22) \\ c_3 = \bar{b}_1 \bar{t} \vee a_1 \bar{a}_2 \bar{b}_1 \vee a_1 \bar{b}_1 \bar{b}_2 \vee \bar{a}_1 b_1 \bar{b}_2 t \vee \bar{a}_1 \bar{a}_2 b_1 t \vee \bar{a}_1 a_2 \bar{b}_1 b_2 \vee \\ \quad \vee a_1 a_2 b_1 b_2 t & (S_Q^{c_3} = 32) \\ c_4 = \bar{a}_2 b_2 \vee b_2 \bar{t} \vee a_2 \bar{b}_2 t & (S_Q^{c_4} = 10) \end{cases} \quad (S_Q = 81)$$

Проведем раздельную факторизацию системы.

$$\begin{cases} e = a_1 a_2 b_1 \bar{t} & (S_Q^e = 4) \\ c_1 = a_1 \bar{t} (\bar{a}_2 \vee \bar{b}_1) \vee \bar{a}_1 a_2 b_1 \bar{t} & (S_Q^{c_1} = 11) \\ c_2 = a_2 b_2 t (a_1 \vee b_1) \vee a_1 b_1 t \vee a_2 \bar{b}_1 \bar{t} \vee \bar{a}_2 b_1 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 19) \\ c_3 = \bar{b}_1 \bar{t} (\bar{a}_2 \vee \bar{b}_2) (a_1 \bar{b}_1 \vee \bar{a}_1 b_1 t) \vee \bar{a}_1 a_2 \bar{b}_1 b_2 \vee a_1 a_2 b_1 b_2 t & (S_Q^{c_3} = 26) \\ c_4 = b_2 (\bar{a}_2 \vee \bar{t}) \vee a_2 \bar{b}_2 t & (S_Q^{c_4} = 9) \end{cases} \quad (S_Q = 69)$$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= a_2 b_2, \quad \overline{\varphi_0} = \overline{a_2} \vee \overline{b_2} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_0 = a_2 b_2 & (S_Q^{\varphi_0} = 2) \\ e = a_1 a_2 b_1 \bar{t} & (S_Q^e = 4) \\ c_1 = a_1 \bar{t} (\overline{a_2} \vee \overline{b_1}) \vee \overline{a_1} a_2 b_1 \bar{t} & (S_Q^{c_1} = 11) \\ c_2 = \varphi_0 t (a_1 \vee b_1) \vee a_1 b_1 t \vee a_2 \overline{b_1} \bar{t} \vee \overline{a_2} b_1 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 18) \\ c_3 = \overline{\varphi_0} (a_1 \overline{b_1} \vee \overline{a_1} b_1 t) \vee \overline{b_1} \bar{t} \vee \varphi_0 \overline{a_1} \overline{b_1} \vee \varphi_0 a_1 b_1 t & (S_Q^{c_3} = 22) \\ c_4 = b_2 (\overline{a_2} \vee \bar{t}) \vee a_2 \overline{b_2} t & (S_Q^{c_4} = 9) \end{array} \right. \\ (S_Q = 67) \end{aligned}$$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_1 b_1 t \\ \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_1 = a_1 b_1 t & (S_Q^{\varphi_1} = 3) \\ \varphi_0 = a_2 b_2 & (S_Q^{\varphi_0} = 2) \\ e = a_1 a_2 b_1 \bar{t} & (S_Q^e = 4) \\ c_1 = a_1 \bar{t} (\overline{a_2} \vee \overline{b_1}) \vee \overline{a_1} a_2 b_1 \bar{t} & (S_Q^{c_1} = 11) \\ c_2 = \varphi_1 \vee \varphi_0 t (a_1 \vee b_1) \vee a_2 \overline{b_1} \bar{t} \vee \overline{a_2} b_1 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 15) \\ c_3 = \varphi_0 \varphi_1 \vee \overline{\varphi_0} (a_1 \overline{b_1} \vee \overline{a_1} b_1 t) \vee \overline{b_1} \bar{t} \vee \varphi_0 \overline{a_1} \overline{b_1} & (S_Q^{c_3} = 20) \\ c_4 = b_2 (\overline{a_2} \vee \bar{t}) \vee a_2 \overline{b_2} t & (S_Q^{c_4} = 9) \end{array} \right. \\ (S_Q = 65) \end{aligned}$$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= a_2 b_1, \quad \overline{\varphi_2} = \overline{a_2} \vee \overline{b_1} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_2 = a_2 b_1 & (S_Q^{\varphi_2} = 2) \\ \varphi_1 = a_1 b_1 t & (S_Q^{\varphi_1} = 3) \\ \varphi_0 = a_2 b_2 & (S_Q^{\varphi_0} = 2) \\ e = \varphi_2 a_1 \bar{t} & (S_Q^e = 3) \\ c_1 = \varphi_2 \overline{a_1} \bar{t} \vee \overline{\varphi_2} a_1 \bar{t} & (S_Q^{c_1} = 8) \\ c_2 = \varphi_1 \vee \varphi_0 t (a_1 \vee b_1) \vee a_2 \overline{b_1} \bar{t} \vee \overline{a_2} b_1 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 15) \\ c_3 = \varphi_0 \varphi_1 \vee \overline{\varphi_0} (a_1 \overline{b_1} \vee \overline{a_1} b_1 t) \vee \overline{b_1} \bar{t} \vee \varphi_0 \overline{a_1} \overline{b_1} & (S_Q^{c_3} = 20) \\ c_4 = b_2 (\overline{a_2} \vee \bar{t}) \vee a_2 \overline{b_2} t & (S_Q^{c_4} = 9) \end{array} \right. \\ (S_Q = 64) \end{aligned}$$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \overline{b_1} \bar{t} \\ \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_3 = \overline{b_1} \bar{t} & (S_Q^{\varphi_3} = 2) \\ \varphi_2 = a_2 b_1 & (S_Q^{\varphi_2} = 2) \\ \varphi_1 = a_1 b_1 t & (S_Q^{\varphi_1} = 3) \\ \varphi_0 = a_2 b_2 & (S_Q^{\varphi_0} = 2) \\ e = \varphi_2 a_1 \bar{t} & (S_Q^e = 3) \\ c_1 = \varphi_2 \overline{a_1} \bar{t} \vee \overline{\varphi_2} a_1 \bar{t} & (S_Q^{c_1} = 8) \\ c_2 = \varphi_1 \vee \varphi_3 a_2 \vee \varphi_0 t (a_1 \vee b_1) \vee \overline{a_2} b_1 \bar{t} & (S_Q^{c_2} = 14) \\ c_3 = \varphi_3 \vee \varphi_0 \varphi_1 \vee \overline{\varphi_0} (a_1 \overline{b_1} \vee \overline{a_1} b_1 t) \vee \varphi_0 \overline{a_1} \overline{b_1} & (S_Q^{c_3} = 18) \\ c_4 = b_2 (\overline{a_2} \vee \bar{t}) \vee a_2 \overline{b_2} t & (S_Q^{c_4} = 9) \end{array} \right. \\ (S_Q = 63) \end{aligned}$$

Проведем раздельную факторизацию системы.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_3 = \overline{b_1} \bar{t} \\ \varphi_2 = a_2 b_1 \\ \varphi_1 = a_1 b_1 t \\ \varphi_0 = a_2 b_2 \\ e = \varphi_2 a_1 \bar{t} \\ c_1 = \bar{t} (\varphi_2 \overline{a_1} \vee \overline{\varphi_2} a_1) \\ c_2 = \varphi_1 \vee \varphi_3 a_2 \vee \varphi_0 t (a_1 \vee b_1) \vee \overline{a_2} b_1 \bar{t} \\ c_3 = \varphi_3 \vee \overline{\varphi_0} (a_1 \overline{b_1} \vee \overline{a_1} b_1 t) \vee \varphi_0 (\varphi_1 \vee \overline{a_1} \overline{b_1}) \\ c_4 = b_2 (\overline{a_2} \vee \bar{t}) \vee a_2 \overline{b_2} t \end{array} \right. \begin{array}{l} (S_Q^{\varphi_3} = 2) \\ (S_Q^{\varphi_2} = 2) \\ (S_Q^{\varphi_1} = 3) \\ (S_Q^{\varphi_0} = 2) \\ (S_Q^e = 3) \\ (S_Q^{c_1} = 8) \\ (S_Q^{c_2} = 14) \\ (S_Q^{c_3} = 18) \\ (S_Q^{c_4} = 9) \end{array}$$

$(S_Q = 63)$

Проведем совместную декомпозицию системы.

$$\varphi_4 = \overline{a_1} \overline{b_1}, \quad \overline{\varphi_4} = a_1 \vee b_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_4 = \overline{a_1} \overline{b_1} \\ \varphi_3 = \overline{b_1} \bar{t} \\ \varphi_2 = a_2 b_1 \\ \varphi_1 = a_1 b_1 t \\ \varphi_0 = a_2 b_2 \\ e = \varphi_2 a_1 \bar{t} \\ c_1 = \bar{t} (\varphi_2 \overline{a_1} \vee \overline{\varphi_2} a_1) \\ c_2 = \varphi_1 \vee \varphi_3 a_2 \vee \varphi_0 \overline{\varphi_4} t \vee \overline{a_2} b_1 \bar{t} \\ c_3 = \varphi_3 \vee \varphi_0 (\varphi_1 \vee \varphi_4) \vee \overline{\varphi_0} (a_1 \overline{b_1} \vee \overline{a_1} b_1 t) \\ c_4 = b_2 (\overline{a_2} \vee \bar{t}) \vee a_2 \overline{b_2} t \end{array} \right. \begin{array}{l} (S_Q^{\varphi_4} = 2) \\ (S_Q^{\varphi_3} = 2) \\ (S_Q^{\varphi_2} = 2) \\ (S_Q^{\varphi_1} = 3) \\ (S_Q^{\varphi_0} = 2) \\ (S_Q^e = 3) \\ (S_Q^{c_1} = 8) \\ (S_Q^{c_2} = 12) \\ (S_Q^{c_3} = 16) \\ (S_Q^{c_4} = 9) \end{array}$$

$(S_Q = 62)$

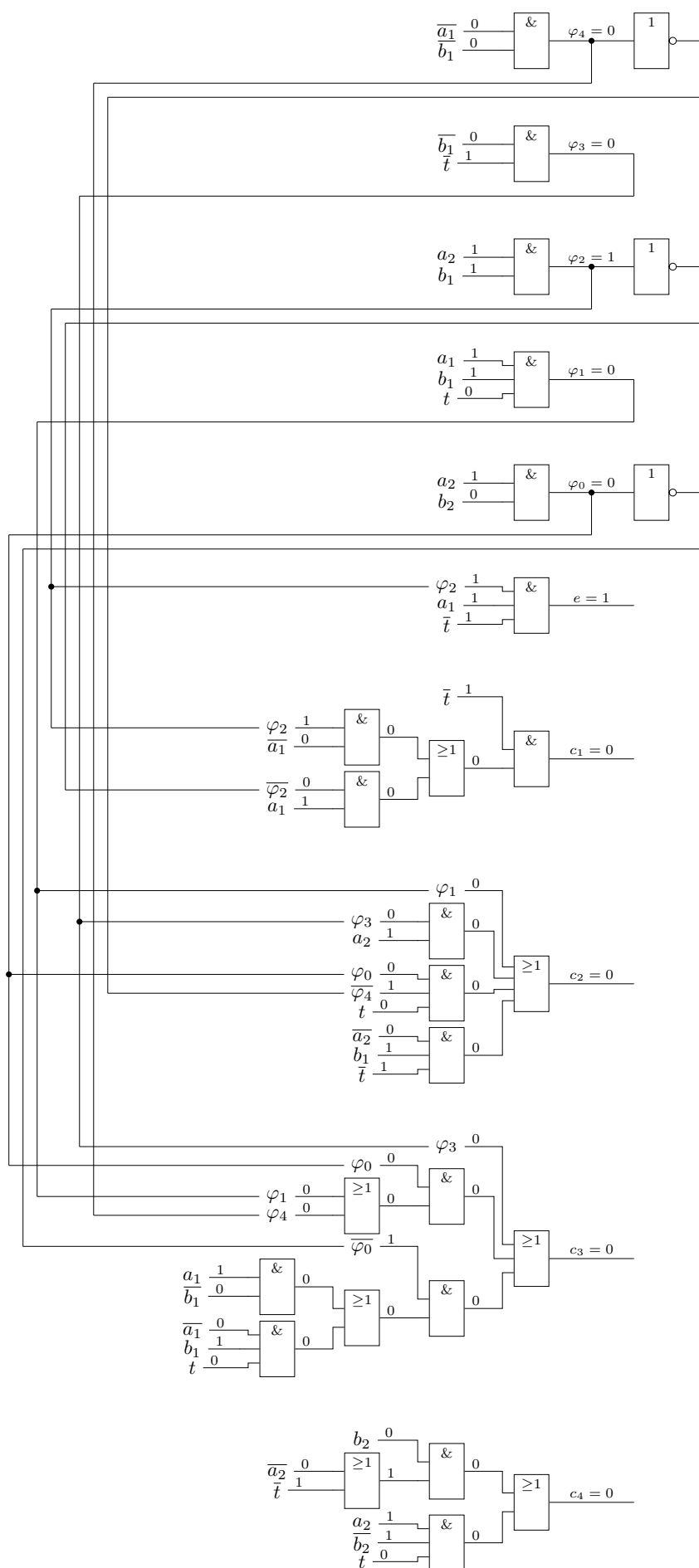
## Синтез комбинационной схемы в булевом базисе

Будем анализировать схему на следующем наборе аргументов:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, b_1 = 1, b_2 = 0, t = 0$$

Выходы схемы из таблицы истинности:

$$e = 1, c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0$$



Цена схемы:  $S_Q = 62$ . Задержка схемы:  $T = 5\tau$ .