

Семинар 1

Варламов Антоний Михайлович

7 октября 2021 г.

Содержание

1	Элементы теории абстрактных групп	1
1.1	Определение абстрактной группы	1
1.2	Определение подгруппы	3
1.3	Определение сопряженной и нормальной подгруппы	3
1.4	Определение центра группы	3
2	Действие групп на множестве	4
3	Гомоморфизм групп	4

1 Элементы теории абстрактных групп

1.1 Определение абстрактной группы

Начнем изложение с приведения определения группы

Definition 1 *Группа – множество, на котором задана бинарная операция, " \cdot " : $G \times G \rightarrow G$, $g_1 \cdot g_2 = g_3$ удовлетворяющая следующим свойствам:*

1. Ассоциативность

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3$$

2. Существование правой единицы

$$\exists e : g \cdot e \forall g \in G \quad g \cdot e = g$$

3. Существование обратного правого элемента

$$\forall g \in G \exists g^{-1} : g \cdot g^{-1} = e$$

Как видно из определения, понятие абстрактной группы не подразумевает коммутативности бинарной операции.

Definition 2 *Абелева группа – группа с коммутативной бинарной операцией.*

Рассмотрим некоторые следствия из определения абстрактной группы:

Consequence 1 *Обратный элемент к единичному: $e^{-1} = e$.*

Действительно, домножим обе части равенства на единичный элемент слева:

$$e^{-1} = e \mid \cdot e \tag{1}$$

$$e \cdot e^{-1} = e \cdot e \tag{2}$$

По определению правой единицы, правая часть равна e . В то же время, по определению правого обратного элемента левая часть равна e , что приводит к верному равенству.

Consequence 2 *Обратный элемент к обратному элементу элемента равен самому этому элементу.*

Рассмотрим выражение $(g^{-1})^{-1} = g$. Домножим справа на обратный элемент g^{-1} .

$$(g^{-1})^{-1} = g \mid \cdot g^{-1} \quad (3)$$

$$(g^{-1})^{-1} \cdot g^{-1} = g \cdot g^{-1} \quad (4)$$

$$(g^{-1})^{-1} \cdot g^{-1} = e \quad (5)$$

А так как по определению $g \cdot g^{-1} = e$, то следствие оказывается верным.

Consequence 3 Обратный элемент к произведению элементов g_1 и g_2 есть произведение обратных элементов g_2^{-1} и g_1^{-1} .

Домножим выражение $(g_1 \cdot g_2)^{-1} = g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}$ слева на произведение $g_1 g_2$:

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot (g_1 \cdot g_2)^{-1} = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_2^{-1} g_1^{-1} \quad (6)$$

Воспользуемся свойством ассоциативности группового умножения и определением обратного правого элемента:

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot (g_1 \cdot g_2)^{-1} = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_2^{-1}) \cdot g_1^{-1} \quad (7)$$

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot (g_1 \cdot g_2)^{-1} = g_1 \cdot e \cdot g_1^{-1} \quad (8)$$

Воспользовавшись еще раз определением правого обратного и правого единичного элемента, получаем:

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot (g_1 \cdot g_2)^{-1} = g_1 \cdot g_1^{-1} \quad (9)$$

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot (g_1 \cdot g_2)^{-1} = e \quad (10)$$

Получили верное равенство, значит свойство верно. Дадим еще несколько определений:

Definition 3 Число элементов группы называется порядком группы.

Если порядок группы конечен, то такая группа называется конечной. В противном случае группа называется бесконечной.

Приведем некоторые примеры групп:

Example 1 $(\mathbb{Z}, +)$ – группа целых чисел по сложению. Свойства следуют из алгебраических свойств множества целых чисел. Группа является абелевой.

Example 2 $(\mathbb{Z}/\{0\}, \cdot)$ – группа целых чисел без нуля по умножению. Свойства аналогично следуют из алгебраических свойств целых чисел. Группа является абелевой.

Example 3 $(\mathbb{Q}, +)$ – группа рациональных чисел по сложению. Нейтральным элементом является 0, обратным является число противоположное данному. Группа является абелевой.

Example 4 $(\mathbb{R}, +)$ – группа действительных чисел по сложению. Нейтральным элементом является 0, обратным является число противоположное данному. Группа является абелевой.

Example 5 $(\mathbb{C}, +)$ – группа действительных чисел по сложению. Нейтральным элементом является 0, обратным является число противоположное данному. Группа является абелевой.

Example 6 $(Z_n = \{z \in \mathbb{C}, z = \sqrt[n]{1}\}, \cdot)$ – группа комплексных корней n -ой степени из 1 по умножению. Групповая структура следует из алгебраических свойств комплексных чисел: $e^{i \cdot \frac{a}{2\pi k}} \cdot e^{i \cdot \frac{b}{2\pi k}} = e^{i \cdot \frac{a+b}{2\pi k}}$. Нейтральным элементом является единица.

Example 7 S_n – группа перестановок порядка n с операцией композиции.

Example 8 V – векторное пространство. Векторное пространство обладает групповой структурой, следующей из определения векторного пространства.

Example 9 $GL(V)$ – группа обратимых преобразований векторного пространства с операцией композиции. Групповой единицей является тождественное преобразование, обратным элементом – обратное к данному преобразование векторного пространства, существующее по построению.

1.2 Определение подгруппы

Definition 4 Подгруппа – подмножество исходного множества, $H \subset G$ которое само является группой: $H \subset G$.

Из определения видно, что выполняются очевидные свойства:

1. Замкнутость по операции:

$$h_1, h_2 \in H, h_1 h_2 \in H$$

2. Существование обратного:

$$h \in H, h^{-1} \in H$$

3. Наличие групповой единицы:

$$e \in H$$

Замечание: в любой неабелевой группе можно выделить абелеву подгруппу.

1.3 Определение сопряженной и нормальной подгруппы

Дадим определение сопряженной подгруппы. Рассмотрим произвольную подгруппу H для группы G . Выберем групповой элемент $g, g \in G, g \notin H$.

Definition 5 Множество $\{ghg^{-1} | h \in H\}$, обладающее групповой структурой, называется подгруппой сопряженной к подгруппе H .

Если рассмотренная выше сопряженная подгруппа характеризуется тем, что:

$$\forall g \in G, g \cdot H \cdot g^{-1} \neq H$$

То такая подгруппа называется нормальной или инвариантной. Приведем пример нормальной сопряженной подгруппы:

Example 10 Ранее мы рассматривали группу $GL(n)$ – группу обратимых преобразований пространства размерности n . В такой группе можно рассмотреть следующую подгруппу:

$$SL(n) = \{g | g \in GL(n), \det g = 1\}$$

Такая группа называется группой ортогональных преобразований пространства. Доказательство того факта, что множество подобных преобразований является группой относительно операции композиции довольно тривиально. Замкнутость относительно операции композиции следует из свойств детерминанта матриц, единичный элемент исходной группы удовлетворяет условию на элементы подгруппы (единичная матрица), обратные существуют по определению $GL(n)$.

Свойство инвариантности (нормальности) данной группы индуцируется свойством детерминанта матриц:

$$\det(ghg^{-1}) = \det(g) \det(h) \det(g^{-1}) = d \cdot 1 \cdot d^{-1} = 1$$

1.4 Определение центра группы

Рассмотрим понятие центра: $c_G = \{c, |gc = cg \forall g \in G\}$

Свойства:

1. Центр – подгруппа

$$2. c_1 c_2 g = g c_1 c_2$$

Рассмотрим группу $GL(3, \mathbb{R})$. Все матрицы, которую коммутируют в этой группе – матрицы пропорциональные единичной $g = \lambda I, \lambda \neq 0$

Смежные классы

$G \supset H, g_1 \sim g_2$, если $g_1 = g_2 h, h \in H$ Проверим свойства:

$$1. g \sim g, g = ge$$

$$2. g_1 \sim g_2, \leftrightarrow g_2 \sim g_1, g_1 = g_2 h, g_2 = g_1 h^{-1}$$

$$3. g_1 \sim g_2, g_2 \sim g_3, \Rightarrow g_1 \sim g_3, g_1 = g_2 h_1, g_2 = g_3 h_2, \Rightarrow g_1 = g_3 h_2 h_1$$

Отношение эквивалентности разбивает множество на непересекающиеся классы эквивалентности.

G/H – фактор пространство G по H .

Любой выбранный элемент смежного класса называется его представителем. Обозначается как правило $[g]$.

Смежные классы для неабелевых групп бывают правые и левые. Если подгруппа, по которой берется отношение эквивалентности – нормальная подгруппа, то левые и правые смежные классы совпадают.

Если H – нормальная подгруппа, то G/H – факторгруппа.

Рассмотрим свойства:

1. $g_1 H, g_2 H, g_1 H g_2 H = g_1 g_2 g_2^{-1} H g_2 H = g_1 g_2 H$
2. $(gH)^{-1} = g^{-1} H$
3. $e' = eH$

Рассмотрим $GL^+(n, \mathbb{R}) \supset SL(n, \mathbb{R})$.

$g = \sqrt[n]{\det g} I \cdot g \frac{1}{\sqrt[n]{\det g}} I$ Что приводит к факторизации нашей группы множеством \mathbb{R}^+ .

2 Действие групп на множестве

Классифицируем действия:

1. Сдвиги $g : G \leftarrow G g_1 \leftarrow g_2 = g g_1$
2. Преобразование подобия (сопряжения) $g : G \leftarrow G g_1 \leftarrow g_2 = g g_1 g^{-1}$

Возьмем множество M , и множество T – обратимых преобразований множества M в себя. Действие группы G на множестве M реализовано тогда, когда $\forall g \in G \exists t \in T$ и $g_1 g_2 \leftarrow t_{g_1 g_2} = t_{g_1} \cdot t_{g_2}$, $e \leftarrow t_e = i$, $g^{-1} \leftarrow t_{g^{-1}} = t_g^{-1}$

Если $x \in M, g \leftarrow t_g$, то $t_g(x) = y \equiv gx = y$.

$h \in G, h \leftarrow gh \leftarrow g_2 g_1 h$

$h \in G, h \leftarrow gh g^{-1} \leftarrow g_2 g_1 h g_1^{-1} g_2^{-1} = g_2 g_1 h (g_2 g_1)^{-1}$

Рассмотрим понятие орбиты: $M \supset M_x, M_x = Gx$.

Введем $x \sim y \Leftrightarrow y = gx$. Данное отношение – отношение эквивалентности. Такое отношение эквивалентности разбивает пространство на непересекающиеся классы эквивалентности – орбиты.

Однородное пространство.

Пространство M называется однородным, если оно состоит из одной орбиты.

Возьмем точку x из однородного пространства M_x . Рассмотрим множество $H_x \subset G = \{h | hx = x\}$ В таком случае, H_x – подгруппа, которая называется стационарной подгруппой точки x . Рассмотрев другую точку y и ее стационарную подгруппу H_y , получаем, что группа H_y является сопряженной для группы H_x .

Утверждение – однородное пространство находитесь во взаимнооднозначном соответствии с факторпространством G/H_x

Охарактеризуем факторпространство представителями: $[g] \cdot g = [g] h$. Рассмотрим точку $y = gx = [g] h = [g] x$

Рассмотрим в качестве примера группу SO_3

Орбита вектора – S^2 . В таком случае $\mathbb{R}^3 = \bigcup_{r>0} S_r^2 \cup \vec{0}$

Значит, $S^2 \approx SO_3/SO_2$

3 Гомоморфизм групп

Гомоморфизм групп – отображение $\Phi : G \leftarrow G'$ со свойством сохранения группового умножения:

$\Phi(g_1 g_2) = \Phi(g_1) \Phi(g_2)$

Некоторые свойства:

$\Phi(e) = e$

$\Phi(g^{-1}) = (\Phi(g))^{-1}$

Для $\forall G$ существует тривиальный гомоморфизм в единичный элемент.

Рассмотрим образ гомоморфизма: $\Im \Phi \subset G'$

образ гомоморфизма – подгруппа в G' .

Ядро гомоморфизма – $\ker \Phi \subset G, \ker \Phi = \{k | \Phi(k) = e'\}$

Ядро гомоморфизма – подгруппа в группе G (к тому же элементарной

Если есть нетривиальный гомоморфизм группы в группу обратимых преобразований пространства, то определено действие группы на пространстве.

Гомоморфизм – отображение $G/\ker \Phi \leftarrow G'$

Пример:

$G \supset H, \pi : G \leftarrow G/H, H$ – инвариантная подгруппа.

Изоморфизм – гомоморфизм $\Phi : G \rightarrow G'$, такой что $\Phi^{-1} : G' \rightarrow G$