Семинар 2

Варламов Антоний Михайлович

7 октября 2021 г.

Содержание

1 Гомоморфизмы

$$\Phi : G \to G' \tag{1}$$

$$\ker \Phi = \{e\}, \Im\Phi = G' \tag{2}$$

Example 1 *Группа левых сдвигов:* $G : g \to Lg$, $Lg\left(h\right) = gh$. *Группа левых сдвигов изморфна самой себе.*

Классификация гомоморфизмов строится на основе комбинации ядра и образа гомоморфизма

$$\begin{array}{cc} Ker & Im \\ G & \{e'\} \\ < G & < G' \\ \{e\} & G' \end{array} \tag{3}$$

Пример накрытия: $G \supset H$ – инвариантная, $\pi : G \to G/H$

$$g \to \hat{g} : G \to G \tag{4}$$

$$\hat{g}\left(h\right) = ghg^{-1} \tag{5}$$

$$g_1 g_2 \to \hat{g_1 g_2}\left(h\right) = g_1 g_2 h g_2^{-1} g_1^{-1} = \hat{g}_1\left(\hat{g_2}\left(h\right)\right) \tag{6}$$

В таком случае $Ker = C_g$ – центр группы G

$$z = x + iy, 1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Theorem 1

$$\Phi : G \to G', Im\Phi \approx G/Ker\Phi \tag{8}$$

Доказательство: $\psi : G/Ker\Phi \to G'$, *в таком случае:*

$$\psi\left(gK\right) = \Phi\left(g\right) \tag{9}$$

$$\psi\left(g_1 K g_2 K\right) = \psi\left(g_1 g_2 K\right) = \Phi\left(g_1 g_2\right) = \Phi\left(g_1\right)\Phi\left(g_2\right) = \psi\left(g_1 K\right)\psi\left(g_2 K\right) \tag{10}$$

$$\psi\left(K\right) = \Phi\left(e\right) = e' \tag{11}$$

Пример применения:

$$G \to \hat{G} \tag{12}$$

$$\hat{G} \approx G/C_g \tag{13}$$

Изоморфное отображение группы самой в себя называется автоморфизмом
Группа всех автоморфизмов – $AutG$
Пример автоморфизма – $\hat{G}$

$$AutG \supset \hat{G} \tag{14}$$

Такая группа называется группой внутренних автоморфизмов
Пусть $G \supset H$ – нормальная подгруппа Тогда сопряжение элементами H – внутренний автоморфизм, внешними будут сопряжения с элементами G
Группа внутренних автоморфизмов –инвариантная подгруппа.
Нужно показать $\Phi^{-1} \circ \hat{g} \circ \Phi$ – преобразование подобия.

$$\Phi \circ \hat{g} \circ \Phi^{-1}\ (h) = \Phi \circ \hat{g} \circ \Phi^{-1} \left(\Phi \left(\widetilde{h}\right)\right) = \Phi\left(g\right) \tag{15}$$

2 Алгебраическая классификация групп

Все группы делятся на два больших класса: полупростые и неполупростые