Задание 1, осень 2021

Срок сдачи: 03.10.2021

1(4) На лекции давалось такое определение группы: 1) ассоциативность группового умножения; 2) существование хотя бы одной правой единицы, $ge = g$ для любого g; 3) существование для любого g хотя бы одного правого обратного элемента, $gg^{-1} = e$.

Исходя из этого определения, доказать

а) единственность единичного элемента e и его перестановочность с любым элементом группы,

б) единственность обратного элемента g^{-1} и его перестановочность с элементом g.

2(2) Рассмотрим целочисленные матрицы размера 2×2, $\left(\begin{smallmatrix} m & n \\ p & q \end{smallmatrix}\right)$.

При каких условиях на целые числа m, n, p и q эти матрицы образуют матричную группу?

3(3) Доказать, что если любой элемент g из группы G удовлетворяет свойству $g^2 = e$, то G — абелева группа.

4(3) Доказать, что если в группе G существует элемент $g_0 \neq e$ со свойством $g_0^2 = e$ и он единственный, то $gg_0 = g_0 g$ для любого элемента $g \in G$.

5(2) Пусть S — некоторое подмножество группы G. Подмножество $C(S) = \{c \,|\, cs = sc, c \in G, s \in S\}$ называется *централизатором* S. Подможество $N(S) = \{n \,|\, nSn^{-1} = S, n \in \in G\}$ называется *нормализатором* S.

1. Показать, что централизатор $C(S)$ является подгруппой G.
2. Показать, что нормализатор $N(S)$ является подгруппой G и $C(S) \subset N(S)$.
3. Показать, что если S является подгруппой G, то $S \subset N(S)$ — инвариантная подгруппа $N(S)$.

6(2) Будем считать два элемента g_1 и g_2 из группы G эквивалентными, если найдется такой элемент $g \in G$, что $g_1 = gg_2g^{-1}$. Доказать, что это, действительно, отношение эквивалентности: удовлетворяет свойствам рефлексивности, симметричности и транзитивности. (Классы эквивалентности по такому отношению называются *сопряженными* классами).

7(3) Пусть H — подгруппа группы G и фактор-пространство G/H состоит из двух "точек" (смежных классов). Показать, что H — нормальная подгруппа.

8(3) Доказать, что порядок подгруппы конечной группы делит порядок группы (теорема Лагранжа).

9(3) Показать, что для любого элемента g конечной группы выполняется $g^N = e$, где N — прядок группы.

10(2) Показать, что конечная группа простого порядка является циклической (циклической называется группа, которая порождается одним элементом).

11(4) Доказать, что любая конечная группа с числом элементов, не превышающих пяти является абелевой.

12(3) Доказать, что у бесконечной группы число подгрупп бесконечно.

13(2) Пусть $\mathbb{R}^+$ — группа действительных чисел по сложению, а $\mathbb{Z}$ — подгруппа целых чисел. Описать фактор-пространство $\mathbb{R}^+/\mathbb{Z}$.

14(2) Пусть $\mathbb{R}^*$ — множество ненулевых действительных чисел, рассматриваемое как группа по умножению, а $\mathbb{R}_+$ — подгруппа положительных чисел. Найти фактор-группу $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+$.

15(2) Пусть $\mathbb{C}^*$ — множество ненулевых комплексных чисел, рассматриваемое как группа по умножению, а $\mathrm{U}(1)$ — подгруппа комплексных чисел с модулем равным единице. Найти фактор-группу $\mathbb{C}^*/\mathrm{U}(1)$.

16(3) Рассматриваем множество целых чисел $\mathbb{Z}$ как абелеву группу относительно сложения.

Пусть n — фиксированное натуральное число, а $n\mathbb{Z} = \{np \mid p \in \mathbb{Z}\}$ — подгруппа $\mathbb{Z}$, состоящая из чисел, которые делятся без остатка на n.

Показать, что фактор-группа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ является циклической группой порядка n.

17(3) Пусть G — множество действительных матриц вида $\begin{pmatrix} d_1 & a \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ (a — любое число, а $d_1 d_2 \neq 0$).

1. Показать, что это множество образует матричную группу.
2. Найти центральную подгруппу. Найти фактор-группу группы G по ее центральной подгруппе.
3. Показать, что множество H матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ является инвариантной абелевой подруппой. Найти фактор группу G/H.
4. Найти фактор-группу группы G по подгруппе, состоящей из матриц с единичным детерминантом.

18(1) Является ли групповое множество однородным пространством относительно левых (правых) сдвигов? Является ли групповое множество однородным пространством относительно преобразований подобия?

19(3) Рассмотрим M^3 — трехмерное пространство Минковского со скалярным произведением $(x, y) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2$ $(x, y \in M^3)$. Множество всех обратимых линейных преобразований M^3, которые не изменяют указанное скалярное произведение, называется трехмерной группой Лоренца. Описать все орбиты группы Лоренца в пространстве M^3.