Семинар 9

Варламов Антоний Михайлович

10 ноября 2021 г.

1 Интерполяция

Постановка задачи:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline f_0 & f_1 & \dots & f_n \\ \hline \end{array} \to P_n\left(x\right) \tag{1}$$

$$P_n\left(x\right) = \sum \alpha_i x^i \tag{2}$$

Запись интерполянта в форме Лагранжа:

$$L_n\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot l_i\left(x\right) \tag{3}$$

где базисные функции:

$$l_i\left(x\right) = \prod_{k \neq i} \frac{x - x_i}{x_i - x_k} \tag{4}$$

Ошибка интерполяции оценивается как:

$$\left|E\left(x\right)\right| = \left|f\left(x\right) - P_n\left(x\right)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{(n+1)!} \cdot \omega\left(x\right)\right| \tag{5}$$

где $\omega\left(x\right) = \prod\limits_{k=0}^{n}\left(x - x_k\right)$
Приведем оценки $\left|\max \omega\left(x\right)\right|$:
Для равномерной сетки:

$$\left|\omega\left(x\right)\right| \leqslant \frac{h^{n+1} n!}{4}, \quad h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n+1} \tag{6}$$

Как видно, ошибка интерполяции имеет двойную природу. Ошибка складывается из ошибок, связанных с интерполируемой функцией и ошибок, связанных с сеткой , на которой происходит интерполяция. Значит, если есть возможность выбирать сетку, то можно минимизировать ошибки сетки. Общая постановка задачи:

$$\min_{x_0, x_1, \dots, x_i, \dots x_n} \max_{x \in [a,b]} \left|\omega\left(x\right)\right| \tag{7}$$

Данная задача решена, решение – разбиение через нули полиномов Чебышева:

$$x_i = \frac{1}{2}\left(b + a - (b - a) \cdot \cos\left(\frac{2i+1}{2\left(n+1\right)}\pi\right)\right) \tag{8}$$

В таком случае, для сетки Чебышева:

$$\left|\omega\left(x\right)\right| \leqslant \frac{2\left(b-a\right)^{n+1}}{4^{n+1}} \tag{9}$$

Интерполяция сходится не всегда. Классический пример несходящегося интерполяционного процесса– функция Рунге:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{1 + \left(5x\right)^2}, x \in [-1, 1] \tag{10}$$

Рассмотрим, как влияют ошибки входных данных:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ \hline f_0 & f_1 & \ldots & f_n \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|l|l|l|l|}\hline x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ \hline f_0 & f_1 & \ldots & f_n \\ \hline f_0+\delta f_0 & f_1+\delta f_1 & \ldots & f_n+\delta f_0 \\ \hline \end{array} \tag{11}$$

При условии:

$$|\delta f_i| \leqslant \varepsilon \ \forall \ i \tag{12}$$

В таком случае можно построить два интерполянта:

$$P_n(x,f) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot f_i \tag{13}$$

$$P_n(x,f+\delta f) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot (f_i+\delta f) \tag{14}$$

$$|P_n(x,f+\delta f) - P_n(x,f)| \leqslant \varepsilon \left|\sum l_i(x)\right| \leqslant \varepsilon \sum |l_i(x)| \leqslant \varepsilon \max_x \sum |l_i(x)| \tag{15}$$

Где $\sum |l_i(x)| = \lambda_n(x)$ – функция Лебега, а $\max\limits_x \sum |l_i(x)| = \Lambda_n$ – константа Лебега.

Приведем некоторые оценки:

Uniform grid

$$\Lambda_n \leqslant \frac{2^{n+3}}{n} \tag{16}$$

Cheb grid

$$\Lambda_n \leqslant \frac{2}{\pi}\log(n+1)+1 \tag{17}$$

$$|E| \leqslant E^{method} + e^{roundcing} \tag{18}$$

1.1 Интерполяция в форме Ньютона

Построим интерполянт в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) = \sum_{i=0}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i}(x-x_j) \tag{19}$$

Для определения коэффициентов необходимо записать интерполяционные условия.

Если матрицу, полученную при записи интерполяционных условий диагонализовать , то метод сведется к методу Лагранжа.

1.2 Разделенные разности

Введем так называемые разделенные разности различных порядков:

$$f[x_0] \rightleftharpoons f_0 \tag{20}$$

$$f[x_0,x_1] \rightleftharpoons \frac{f_1-f_0}{x_1-x_0} = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} \tag{21}$$

$$f[x_0,\ldots,x_n] \rightleftharpoons \frac{f[x_1,\ldots,x_n]-f[x_0,\ldots,x_{n-1}] \rightleftharpoons}{x_n-x_0} \tag{22}$$

В таком случае:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \tag{23}$$

$$P_n(x) = a_0 + (x-x_0)\cdot(a_1+(x-x_1)(a_2+\ldots)\ldots) \tag{24}$$

1.3 Метод обратной интерполяции

$$]\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline f_0 & f_1 & \dots & f_n \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline f_0 & f_1 & \dots & f_n \\ \hline x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline \end{array} \tag{25}$$

$$x^* \rightarrow x(0) \simeq p_n(0) \tag{26}$$

Пример

$$\sin(x) - \exp(x) = 0 \tag{27}$$

для следующих данных:

x_i	-4	-3.5	-3	-2.5
f_i	0.738	0.321	-0.191	-0.681

(28)

Необходимо построить обратный интерполянт и найти $P(0)$