Семинар 7

Варламов Антоний Михайлович

27 октября 2021 г.

1 Метод сжимающих отображений

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

$$x^6 - 5x - 2 = 0 \tag{2}$$

1. Локализуем корень:

$$f(1) = -6, \quad f(2) = 52 \tag{3}$$

$$\Rightarrow x^* \in [1, 2] \tag{4}$$

2. $f(x) \to x = g(x)$

   Есть несколько возможных вариантов такого перехода:

   (a) $x = \frac{x^6-2}{5}$

   (b) $x = \sqrt[6]{5x+2}$

   (c) $x = \frac{5}{x^4} + \frac{2}{x^5}$

   Для $x = \frac{x^6-2}{5}$:

$$x^{k+1} - \text{сжимающее?} \tag{5}$$

$$|g'(x)| = \left|\frac{1}{5} \cdot 6x^5\right| \tag{6}$$

$$\Rightarrow g'(1) = \frac{6}{5} > 1 \tag{7}$$

   Для $x = \sqrt[6]{5x+2}$:

$$g(x) = \sqrt[6]{5x+2} \tag{8}$$

$$g'(x) = \frac{5}{6}\frac{1}{(5x+2)^{\frac{5}{6}}} \tag{9}$$

$$|g'(x)| < 1 \tag{10}$$

$$g(2) < 2, \quad 2 > g(1) > 1 \tag{11}$$

   Для $x = \frac{5}{x^4} + \frac{2}{x^5}$:

$$g'(x) = \frac{-20}{x^5} - \frac{10}{x^6} \tag{12}$$

$$|g'(1)| = 30 \tag{13}$$

3. Определим количество итераций для заданной точности:

$$\left|x^{*}-x^{k}\right| \leqslant \varepsilon \tag{14}$$

$$q^{k}<\frac{\varepsilon}{\left|x^{1}-x^{0}\right|} \tag{15}$$

2 Метод Ньютона

Основан на линейном приближении функции.

$$f_{L}(x)=f\left(x_{k}\right)+f^{\prime}\left(x_{k}\right)\left(x-x_{k}\right)=0 \tag{16}$$

$$x_{k+1}=x_{k}+\frac{f\left(x_{k}\right)}{f^{\prime}\left(x_{k}\right)} \tag{17}$$

$$\left|x^{*}-x^{k+1}\right| \leqslant C\left|x^{*}-x^{k}\right|^{2} \tag{18}$$

В данном методе могут возникнуть проблемы связанные с наличием производной в формуле. Приблизив производную численным дифференцированием можно получить метод секущих.

Метод Ньютона является *сжимающим* отображением.

3 Многомерный случай

Постановка задачи:

$$\vec{F}(\vec{x})=\vec{0} \tag{19}$$

3.1 Метод Сжимающих отображений для многомерного случая

Пусть Y – полное метрическое пространство, $\rho(x, y), \rho(x, y)=\| x-y \|$, $\Omega \subset Y$ – замкнутое, G – сжимающее при $\vec{x} \in \Omega$

1. $G: \Omega \rightarrow \Omega$
2. $\rho(G(\vec{x}), G(\vec{y})) \leqslant q \rho(\vec{x}, \vec{y}), q<1$

Достаточное условие сжимающего отображения:

1. $G: \Omega \rightarrow \Omega$
2. $\| G^{\prime} \| \leqslant q<1$ G' – матрица Якоби

Лучше всего брать вторую норму матрицы Якоби или рассматривать ее спектральный радиус.

Рассмотрим пример:

$$\begin{cases}x+3 \ln x-y^{2}=0 \\ 2 x^{2}-x y-5 x+1=0\end{cases} \tag{20}$$

1. Локализуем корень:

$$\Omega: x^{*} \in[3,4], y^{*} \in[2,3] \tag{21}$$

$$\Omega=[3,4] \times[2,3] \tag{22}$$

2.

$$\begin{cases}x=y^{2}-3 \ln x \\ y=2 x-5+\frac{1}{x}\end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases}x_{k+1}=y_{k}^{2}-3 \ln x_{k} \\ y_{k+1}=2 x_{k}-5+\frac{1}{x_{k}}\end{cases} \tag{24}$$

3. Определим матрицу Якоби:

$$\| G'(x,y) \|_1 = \max\left(|2y|, \left|\frac{3}{x}\right| + \left|2 - \frac{1}{x^2}\right|\right) = |2y| > 1 \tag{25}$$

Придется рассматривать другой вариант:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x + 3\ln x} \\ x = \sqrt{\frac{xy+5x-1}{2}} \end{cases} \tag{26}$$

В таком случае $\| G'(x,y) \| < 1$

3.2 Метод Ньютона для многомерного случая

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \left[F'(\vec{x})\right]^{-1} \cdot F(\vec{x}) \tag{27}$$

4 Минимизация функций

Постановка задачи: Найти $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) \leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 0$

4.1 Метод дихотомии

Данный метод работает для *унимодальных* функций.

Функция является *унимодальной*, если $\exists\ \xi \in [a,b] : f(x_1) > f(x_2)\ \forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 < \xi, f(x_1) > f(x_2) \forall x_1, x_2 : x_1 > x_2 > \xi$

Пусть x^* – минимум функции. Локализуем минимум:

$$x^* \in [a,b], a_0 = a, b_0 = b, c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} \tag{28}$$

определим точку $y_k = \frac{a_k + c_k}{2}$

Возможные варианты:

1. $f(y_k) < f(c_k)$:

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k \\ b_{k+1} = c_k \\ c_{k+1} = y_k \end{cases} \tag{29}$$

2. $f(y_k) > f(c_k)$:

$$z_k = \frac{b_k + c_k}{2} \tag{30}$$

   (a) $f(z_k) > f(c_k)$:

$$\begin{cases} a_{k+1} = y_k \\ b_{k+1} = z_k \\ c_{k+1} = c_k \end{cases} \tag{31}$$

   (b) $f(z_k) < f(c_k)$:

$$\begin{cases} a_{k+1} = c_k \\ b_{k+1} = b_k \\ c_{k+1} = z_k \end{cases} \tag{32}$$

4.2 Метод градиентного спуска

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \alpha \nabla \Phi(\vec{x}_k) \tag{33}$$

4.3 Метод наискорейшего спуска

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \alpha \nabla \Phi \left(\vec{x}_k \right) \tag{34}$$

$$\alpha_k = argmin \left(\Phi \left(\vec{x}_k - \alpha_k \nabla \Phi \left(\vec{x}_k \right) \right) \right) \tag{35}$$

4.4 Метод покоординатного спуска

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = argmin_x \Phi \left(x, x_2^k, \ldots, x_n^k \right) \\ x_2^{k+1} = argmin_x \Phi \left(x_1^k, x, \ldots, x_n^k \right) \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = argmin_x \Phi \left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x \right) \end{cases} \tag{36}$$