Семинар 13

Варламов Антоний Михайлович

4 февраля 2022 г.

Содержание

Данный семинар посвящен понятию разностных уравнений. В первой части рассматриваются *линейные разностные стационарные уравнения*, а во второй *системы линейных разностных стационарных уравнений.*

1 Линейные разностные стационарные уравнения

1.1 Терминология

Определение Линейным разностным уравнением будем называть уравнение вида:

$$y_{k+n} + a_1 \cdot y_{k+n-1} + \ldots + a_n \cdot y_k = f_k \tag{1}$$

где $a_i \ \forall \ i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0, k \in \mathbb{N}_{\not{\,0}}$.
Для начала рассмотрим *однородное* уравнение: разностное уравнение, у которого нулевая правая часть ($f_k \equiv 0$):

1.2 Однородные разностные уравнения. Понятие характеристического многочлена уравнения и оператора трансляции. Корни характеристического многочлена и их кратность

$$y_{k+n} + a_1 \cdot y_{k+n-1} + \ldots + a_n \cdot y_k = 0 \tag{2}$$

Разберемся, в каком виде стоит пытаться искать решения такого уравнения. Введем *оператор сдвига:*

$$Ty_k = y_{k+1} \tag{3}$$

Рассмотрим важное свойство такого оператора:

$$T^n y_k = T^{n-1} T y_k = T^{n-1} y_{k+1} = T^{n-2} T y_{k+1} = \ldots = T y_{k+n-1} = y_{k+n} \tag{4}$$

Используя данный оператор, можно перейти к следующему виду разностного однородного уравнения:

$$\left(T^n + a_1 T^{n-1} + \ldots + a_n\right) y_k = 0 \tag{5}$$

Рассмотрим данное уравнение в виде:

$$\hat{L}(T) y_k = 0 \tag{6}$$

Рассматривая $\hat{L}\,(T)$ как многочлен относительно T, выполним *приведение* данного многочлена. В таком случае, получим:

$$\hat{L}\left(T\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(T-\lambda_i\right)^{\alpha_i} \tag{7}$$

Рассмотрим "простейший элемент"разложения $\left(T-\lambda_i\right)^{\alpha_i}$ и определим его действие на y_k:
Пусть $\alpha_i=1$. Тогда

$$\left(T-\lambda_i\right)y_k=y_{k+1}-\lambda_i y_k=0 \tag{8}$$

$$\Rightarrow y_k=\lambda_i^k \tag{9}$$

При $\alpha_i>1$:

$$\left(T-\lambda_i\right)^{\alpha_i}y_k \tag{10}$$

Как и в теории дифференциальных уравнений, воспользуемся следующим методом: Рассмотрим решения в виде $y_k=\lambda^k\varphi_k$. Оказывается, что в таком случае, используя свойства характеристического многочлена относительно кратности корня ($L^{(i)}\left(\lambda_0\right)=0\ \ \forall\, i\leqslant s-1$, где s – кратность корня λ_0) решениями (линейно независимыми) являются функции:

$$\begin{cases}\varphi_{k,0}=\lambda^k;\\ \varphi_{k,1}=\lambda^k\cdot k;\\ \varphi_{k,2}=\lambda^k\cdot k^2;\\ \vdots\\ \varphi_{k,s-1}=\lambda^k\cdot k^{s-1};\end{cases} \tag{11}$$

Таким образом, рассматривая возможные решения линейного разностного уравнения приходим к понятию характеристического многочлена:

$$\chi\left(\lambda\right)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n=0 \tag{12}$$

Важное замечание относительно корней характеристического многочлена. Так как по определению разностного уравнения n-ого порядка $a_n\neq 0$, то и $\lambda\neq 0$.

Для линейного стационарного разностного уравнения справедлив принцип линейности (суперпозиции) решения (Аналогично свойству линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами). Данные принцип выражается записывается следующим образом:

Если $y_I^k, y_{II}^k,\ldots$ – решения уравнения, то $\widetilde{y}=C_1y_I^k+C_2y_{II}^k+\ldots$ – также является решением.

Рассматривая все корни характеристического многочлена (с учетом их кратности), можно прийти к следующим выводам:
В том случае, когда все корни $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ и $\ \forall\, i,j\lambda_i\neq\lambda_j$, решения вида λ_i^k образуют ФСР.
Для доказательства этого факта рассмотрим определитель следующего вида:

$$\begin{vmatrix}\lambda_1^k & \lambda_2^k & \ldots & \lambda_n^k\\ \lambda_1^{k+1} & \lambda_2^{k+1} & \ldots & \lambda_n^{k+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{k+n-1} & \lambda_2^{k+n-1} & \ldots & \lambda_n^{k+n-1}\end{vmatrix} \tag{13}$$

Воспользовавшись свойствами определителя, нетрудно перейти к виду:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\lambda_1^k & \lambda_2^k & \ldots & \lambda_n^k\\ \lambda_1^{k+1} & \lambda_2^{k+1} & \ldots & \lambda_n^{k+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{k+n-1} & \lambda_2^{k+n-1} & \ldots & \lambda_n^{k+n-1}\end{vmatrix} &= \lambda_1^k\cdot\begin{vmatrix}1 & \lambda_2^k & \ldots & \lambda_n^k\\ \lambda_1 & \lambda_2^{k+1} & \ldots & \lambda_n^{k+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{k+n-1} & \ldots & \lambda_n^{k+n-1}\end{vmatrix} =\\ \lambda_1^k\lambda_2^k\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & \lambda_n^k\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n^{k+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{k+n-1}\end{vmatrix} &= \prod_{i=1}^{n}\lambda_i^k\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1}\end{vmatrix} =\\ \prod_{i=1}^{n}\lambda_i^k\cdot W\left(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\right)\neq 0 &\end{aligned} \tag{14}$$

Так как определитель Вандермонда отличен от 0 для попарно различных чисел.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий алгоритм нахождения решения разностного уравнения в том случае, когда все корни имеют кратность равную 1:

Пример 1.

$$y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 0 \tag{15}$$

Характеристический многочлен $\chi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$

Находим корни характеристического уравнения:

$$\chi(\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \tag{16}$$

Таким образом ФСР данного уравнения будет представлена двумя решениями:

$$\begin{cases} y_k^1 = (-2)^k \\ y_k^2 = 1^k \equiv 1 \end{cases} \tag{17}$$

Значит общее решение уравнения:

$$\widetilde{y}_k = C_1 \cdot (-2)^k + C_2 \tag{18}$$

Рассмотрим ФСР разностного уравнения в том случае, когда существуют корни кратности больше 1. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, (s \in \mathbb{N}, 1 \leqslant s < n)$ – корни характеристического многочлена $\chi(\lambda)$ исходного уравнения, а $m_1, m_2, \ldots, m_s, \left(\sum\limits_{i=1}^{s} m_i = n\right)$ – кратности данных корней.

Так как для "простейшего элемента"разложения характеристического многочлена решением является ФСР следующего вида:

$$\begin{cases} \varphi_{k,0} = \lambda^k; \\ \varphi_{k,1} = \lambda^k \cdot k; \\ \varphi_{k,2} = \lambda^k \cdot k^2; \\ \vdots \\ \varphi_{k,s-1} = \lambda^k \cdot k^{s-1}; \end{cases} \tag{19}$$

то общее решение такого уравнения будет выглядеть следующим образом:

$$\widetilde{y}_k = \sum_{i=0}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} \left(C_{ij} \cdot k^j \cdot \lambda_i^k\right) \tag{20}$$

Пример 2.

$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 0 \tag{21}$$

Характеристический многочлен: $\chi(\lambda) = (\lambda - 2)^2$

У данного многочлена единственный корень $\lambda_1 = 2$ кратности $m = 2$.

В таком случае, общее решение представляется в виде:

$$\widetilde{y}_k = (C_1 + C_2 \cdot k)(2)^k \tag{22}$$

1.3 Комплекснозначные решения разностного уравнения. Приведение к действительному виду

Немного вернемся к представлению характеристического многочлена, а конкретно, скажем пару слов о итоговом виде, в котором мы его записали. Как известно, разложение многочлена на простые линейные множители возможно в поле комплексных чисел, но не действительных. Значит, необходимо дополнительно рассматривать комплекснозначные значения корней характеристического многочлена. Для данного рассмотрения используем две Леммы:

Лемма 1: *Функция $y_k = u_k + iv_k$ является решением стационарного разностного однородного уравнения тогда и только тогда, когда $u_k = \operatorname{Re} y_k, v_k = \operatorname{Im} y_k$ – решения этого уравнения.*

Лемма 2: *Если $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ – комплексный корень кратности m характеристического многочлена, то и $\vec{\lambda_0} = \alpha - i\beta$ также является корнем той же кратности.*

Используя данные Леммы нетрудно перейти к новому виду записи решения уравнения, характеристический многочлен которого имеет комплекснозначный корень кратности m.

$$\begin{cases} u_{lk} = k^l \lambda^k \cos k\varphi \\ v_{lk} = k^l \lambda^k \sin k\varphi \end{cases} \tag{23}$$

Где $l \in [0, m-1]$. Рассмотрим конкретный пример:
Пример 3.

$$y_{k+2} + y_k = 0 \tag{24}$$

Переходя к характеристическому многочлену, получаем:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \tag{25}$$

В таком случае, удобно представить полученные корни в виде:

$$\lambda = \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right); \tag{26}$$

$$\lambda^k = \exp\left(i\frac{k\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \tag{27}$$

Выделяя действительную часть полученных выражений, получаем, что:

$$\widetilde{y}_k = {}_1 \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \tag{28}$$

Итак, на этом обсуждение однородных уравнений заканчивается. Дальше возникает естественный вопрос, а что делать если исходное уравнение было неоднородным? Как измениться алгоритм рассуждений в зависимости от вида правой части уравнения? Ответим на эти вопросы, рассматривая *неоднородные уравнения*

1.4 Неоднородные разностные уравнения. Метод Вариации постоянной. Построение общего решения неоднородного уравнения с использованием частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного. Квазимногочлены в правой части неоднородного разностного уравнения