Семинар 16

Варламов Антоний Михайлович

4 марта 2022 г.

1 Неявные методы Рунге-Кутты

В качестве примера неявных методов Рунге-Кутты рассмотрим семейство двухстадийных методов общего вида с таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & \beta_{11} & \beta_{12} \\ c_2 & \beta_{21} & \beta_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

Таблица 1: Таблица Бутчера для общего вида двухстадийных неявных методов Рунге- Кутты.

Вычислительные формулы, соответствующие данной таблице Бутчера:

$$\begin{cases} T_1 = t_n + c_1 \Delta t \\ T_2 = t_n + c_2 \Delta t \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} Y_1 = y_n + \Delta t \left(\beta_{11} \cdot f\left(T_1, Y_1\right) + \beta_{12} \cdot f\left(T_2, Y_2\right)\right) \\ Y_2 = y_n + \Delta t \left(\beta_{21} \cdot f\left(T_1, Y_1\right) + \beta_{22} \cdot f\left(T_2, Y_2\right)\right) \end{cases} \tag{2}$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \left(b_1 \cdot f\left(T_1, Y_1\right) + b_2 \cdot f\left(T_2, Y_2\right)\right) \tag{3}$$

Здесь, в отличие от явных методов Рунге-Кутты, на каждом шаге по времени необходимо решать систему нелинейных уравнений относительно величин Y_1, Y_2. Существенное преимущество неявных методов – их хорошая устойчивость.

2 Многошаговые методы

Перейдем к рассмотрению *многошаговых методов*. В отличии от методов Рунге-Кутты, где мы активно использовали дополнительные стадии в вычислениях, при применении многошаговых методов мы хотим использовать знания о решении в предыдущие моменты времени.

2.1 Методы Адамса

Методы Адамса являются представителем семейства многошаговых методов. Рассмотрим основную идею построения этих методов. Проинтегрируем исходное уравнение от t_n до t_{n+1}:

$$\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{du}{dt} = \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(t, u\right) dt \tag{4}$$

$$u_{n+1} - u_n = \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(t, u\right) dt \tag{5}$$

Интеграл в правой части последнего равенства можно вычислить приближенно, заменив исходную функцию $f(t, u)$ на её интерполянт по значением этой функции $L_k(t)$:

$$u_{n+1} - u_n = \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(t, u\right) dt \approx \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} L_k\left(t\right) dt \tag{6}$$

2.1.1 Явный метод Адамса 2-го порядка

Строим интерполянт по значениям функции $f(t,u)$ в моменты времени t_n, t_{n-1}. Эти значения будем обозначать f_n, f_{n-1}.

$$L_1 = f_n \cdot \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} + f_{n-1} \cdot \frac{t - t_n}{t_{n-1} - t_n} \tag{7}$$

Проинтегрируем интерполянт:

$$\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} L_1\left(t\right) dt = \frac{\Delta t}{2}\left(3 \cdot f_n - f_{n-1}\right) \tag{8}$$

Таким образом:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = \frac{3}{2} f_n - \frac{1}{2} f_{n-1} \tag{9}$$

2.1.2 Неявный метод Адамса 2-го порядка

Для построения неявного метода Адамса второго порядка рассматривается интерполянт по значениям в моменты времени t_{n+1}, t_n:

$$L_1 = f_{n+1} \cdot \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + f_n \cdot \frac{t - t_{n+1}}{t_n - t_{n+1}} \tag{10}$$

После интегрирования интерполянта, получаем схему:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(f_{n+1} - f_n\right) \tag{11}$$

С этой схемой мы уже встречались, она называется *неявный метод трапеций.*
С методами Адмаса есть несколько трудностей:

1. Необходимость наличия k точек для начала применения метода.
2. Возможные появления нефизических решений.

2.2 Многошаговый метод общего вида

Рассмотрим многошаговый метод общего вида:

$$y_n + \alpha_{-1} y_{n-1} + \alpha_{-2} y_{n-2} + \ldots + \alpha_{-k} y_{n-k} = \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n + \beta_{-1} f_{n-1} + \ldots + \beta_{-k} f_{n-k} \tag{12}$$

С общим видом связана следующая классификация:

1. $\beta_1 = 0 \rightarrow$ явный метод.
2. $\beta_1 \neq 0 \rightarrow$ неявный метод.

В качестве примера рассмотрим двухшаговый неявный метод общего вида:

$$y_n + \alpha_{-1} y_{n-1} + \alpha_{-2} y_{n-2} = \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n + \beta_{-1} f_{n-1} \tag{13}$$

Для определения свободных коэффициентов α_i, β_i можно потребовать, чтобы схема обладала максимальным порядком аппроксимации. Есть несколько вариантов исследования схемы на аппроксимацию:

1. Вариант основанный на разложении в ряд Тейлора. При этом для упрощения выкладок стоит заменить

$$f_{n+1} \rightarrow u'_{n+1} \tag{14}$$
$$f_n \rightarrow u'_n \tag{15}$$
$$f_{n-1} \rightarrow u'_{n-1} \tag{16}$$

2. Второй подход основан на алгебраической точности схемы. Нужно потребовать, чтобы схема была точна для решений исходного ОДУ, являющихся полиномами как можно более высокой степени:

$$u = 1 \tag{17}$$
$$u = t \tag{18}$$
$$u = t^2 \tag{19}$$
$$\vdots \tag{20}$$
$$u = t^n \tag{21}$$

Рассмотрим второй вариант подробнее:
Для полиномов 0 степени:

$$u = const = 1, u' = f = 0; \tag{22}$$

Подставляем в нашу схему:

$$1 + \alpha_{-1} + \alpha_{-2} = \beta_1 \cdot 0 + \beta_0 \cdot 0 + \beta_{-2} \cdot 0 = 0 \tag{23}$$

Для полиномов 1 степени:

$$u = t, u' = 1; \tag{24}$$

$$t_n + \alpha_{-1}\left(t_n - \Delta t\right) + \alpha_{-2}\left(t_n - 2\Delta t\right) = \beta_1 + \beta_0 + \beta_{-1} \tag{25}$$

Преобразуем:

$$t_n\left(1 + \alpha_{-1} + \alpha_{-2}\right) - \Delta t \alpha_{-1} - 2\Delta \alpha_{-2} = \beta_1 + \beta_0 + \beta_{-1} \tag{26}$$

Используя условие на полином 0 степени, множитель $1 + \alpha_{-1} + \alpha_{-2} = 0$. Выписывая аналогичные условия для полиномов больших степеней, получаем условия на коэффициенты.

3 Устойчивость

Ранее было получено, что:

$$\text{сходимость} \to \text{аппроксимация} + \text{устойчивость} \tag{27}$$

Для исследования схем будем рассматривать уравнение:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \lambda u, \Re\left(\lambda\right) \leqslant 0 \\ u\left(0\right) = u_0 \end{cases} \tag{28}$$

Данное уравнение называется *Уравнение Далквиста.*
Решением будет являться:

$$u\left(t\right) = u_0 \exp\left(\lambda t\right) \tag{29}$$

Для такого решения:

$$\left|u\left(t + \Delta t\right)\right| \leqslant \left|u\left(t\right)\right| \tag{30}$$

Рассмотрим явную схему Эйлера для решения уравнение Далквиста:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = \lambda y_n \tag{31}$$

$$y_{n+1} = \left(1 + \Delta t \lambda\right) y_n \tag{32}$$

$$y_n = \left(1 + z\right)^n y_0 \tag{33}$$

Для устойчивости мы хотим, чтобы численное решение не возрастало Для условия $|y_{n+1}| \leqslant |y_n| \to |1+z| \leqslant 1$. Данная область представляет собой окружность с центром в точке (-1) в комплексной плоскости.

Если λ – действительное, получаем:

$$|1+\Delta t\lambda| \leqslant 1 \Rightarrow \Delta t \leqslant \frac{2}{|\lambda|} \tag{34}$$

Рассмотрим теперь применение неявного метода трапеций для решения уравнение Далквиста:

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta t} = \frac{\lambda}{2}\left(y_{n+1}+y_n\right) \tag{35}$$

$$y_{n+1} = \frac{1+\frac{\Delta t\lambda}{2}}{1-\frac{\Delta t\lambda}{2}} y_n = \frac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}} y_n = R\left(z\right) y_n \tag{36}$$

Условие на функцию $R\left(z\right)$:

$$|R\left(z\right)| \leqslant 1 \tag{37}$$

Решение данного неравенства – вся левая комплексная полуплоскость, то есть метод устойчив при любом выборе Δt.

Еще один пример – неявный метод Эйлера:

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta t} = \lambda y_{n+1} \tag{38}$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{1-z} y_n \tag{39}$$

Условие на z:

$$\left|\frac{1}{1-z}\right| \leqslant 1 \tag{40}$$

Область устойчивости – внешность шара радиуса 1 с центром в точке 1.

Для методов Рунге-Кутты есть явное выражение для функции устойчивости $R(z)$.

Обозначим таблицу Бутчера следующим образом:

$$\begin{array}{c|c} \vec{c} & A \\ \hline & \vec{b}^T \end{array}$$

В таком случае, получаем следующее выражение:

$$R\left(Z\right) = \frac{\det\left(\mathbb{I} - zA + z\vec{e}\cdot\vec{b}^T\right)}{\det\left(\mathbb{I} - zA\right)} \tag{41}$$

Для явных методов Рунге-Кутты выражение для функции $R(z)$ значительно упрощается, если Порядок аппроксимации = количество стадий. В этом случае:

$$R\left(Z\right) = \sum_{k=0}^{N_k} \frac{z^k}{k!}, \tag{42}$$

где N_k - количество стадий (порядок аппроксимации) метода. То есть функции $R(z)$ в данном случае – обрезанное разложение экспоненты в ряд Тейлора.