Семинар 11

Варламов Антоний Михайлович

24 ноября 2021 г.

1 Экстраполяция Ричардсона

Рассмотрим равномерную сетку: $x \in [a, b]\,, x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} = a + h \cdot i$
С заданной на данной сетке функцией f_i
При использовании метода трапеций для численного интегрирования можно получить оценку погрешности:

$$|I - I_h| \leqslant \frac{b-a}{12} \cdot M_2 h^2 \leqslant \varepsilon \tag{1}$$

В таком случае:

$$I_h = I + C \cdot h^2 \tag{2}$$

Рассмотрим на нашей сетке более грубую сетку, т.е. сетку с шагом $2h$

$$I_{2h} = I + C_1 (2h)^2 \approx I + C (2h)^2 \tag{3}$$

При условии $C_1 \approx C + hX$. Рассмотрим выражение

$$I_h - I_{2h} = Ch^2 - C (2h)^2 = c \cdot h^2 \left(1 - 2^2\right) \tag{4}$$

$$\Rightarrow C \cdot h^2 = \frac{I_{2h} - I_h}{2^2 - 1} = \frac{I_{2h} - I_h}{3} = E \tag{5}$$

Получив данное выражение, можем определить так называемый поправленный интеграл:

$$I^* = I_h - E = \frac{4I_h - I_{2h}}{3} \tag{6}$$

Данный подход к получению уточненного численного значения называется *экстраполяция Ричардсона*.
Раскрыв все выражения на самом деле получается метод Симпсона. Условно, можно записать следующее равенство: Метод трапеций + Экстраполяция Ричардсона = Метод Симпсона.

2 численное интегрирование несобственных интегралов

2.1 Несобственные интегралы I рода

Постановка задачи:

$$\int\limits_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx = I, I-? \tag{7}$$

Один из методов – попробовать заменить переменную

$$x \mapsto t^2, \Rightarrow I = \int\limits_0^1 \cos\left(t^2\right) dt \tag{8}$$

Другой метод – разбиение исходного интеграла на интегрирование по частям:

$$I = \sqrt{x}\cos(x)\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 \sqrt{x}\sin(x)\, dx \tag{9}$$

Еще один метод – попробовать представить интеграл в виде:

$$I = \int\limits_0^s \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx + \int\limits_s^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx \tag{10}$$

В таком случае для нашей интегрируемой функции выполняется оценка:

$$\int\limits_0^s \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx \leqslant \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{s} \tag{11}$$

$$2\sqrt{s} \leqslant \varepsilon \to \sqrt{s} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow s \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4} \tag{12}$$

В случае достижение машинной точности можно использовать более точное разложение.
Еще один метод – метод Регуляризации.

$$\int\limits_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx \tag{13}$$

$$\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2} + \dots \tag{14}$$

Рассмотрим тогда интеграл вида:

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx + \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \tag{15}$$

Для получения возможности определения ошибки следует брать большее количество слагаемых в разложении функции.

Метод Регуляризации также называется методом Канторовича.

2.2 Несобственные интегралы II рода

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^5} dx \tag{16}$$

Метод 1. Представим в виде:

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^5} dx = \int\limits_0^M \frac{1}{1+x^5} dx + \int\limits_M^\infty \frac{1}{1+x^5} dx \tag{17}$$

Условие на M:

$$\int\limits_M^\infty \frac{1}{1+x^5} dx \leqslant \varepsilon \tag{18}$$

Что дает оценку:

$$M \geqslant \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{4}} \tag{19}$$

Метод 2. Представим в виде:

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^5}dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^5}dx + \int\limits_1^\infty \frac{1}{1+x^5}dx \tag{20}$$

Для второго интеграла выполним замену:

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{1+x^5}dx = \left|x = \frac{1}{t}\right| = \int\limits_0^1 \frac{t^3}{1+t^5}dt \tag{21}$$

Рассмотрим другой пример:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} \tag{22}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)} \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + x^{\frac{3}{2}} + \ldots \tag{23}$$

$$\int\limits_0^1 \frac{f\,(t)}{\sqrt{t}}dt = \left|t = x^2, dt = 2xdx\right| = \int\limits_0^1 \frac{f\,(x^2)}{x}2xdx = \int\limits_0^1 f\,(x^2)\,dx \tag{24}$$

В более общем виде:

$$\int\limits_0^1 f\,(x)\,dx \sim \int\limits_0^1 \frac{g\,(t)}{t^k}dt = \left|t = x^p, dt = px^{p-1}dx\right| = p\int\limits_0^1 g\,(x^p)\,x^{-k\cdot p+p-1}dx \tag{25}$$

Условие на p:

$$-k\cdot p + p - 1 = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{1-k} \tag{26}$$

Еще один пример:

$$\int\limits_0^1 x\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx \to \int\limits_0^s x\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx + \int\limits_s^1 x\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx \tag{27}$$

Для первого слагаемого:

$$\int\limits_0^s x\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx \leqslant \int\limits_0^s xdx \leqslant \varepsilon \Rightarrow s \leqslant \sqrt{\varepsilon} \tag{28}$$

Для второго слагаемого:

$$x \to \frac{1}{t} \tag{29}$$

В таком случае:

$$\int\limits_1^\infty \frac{\sin t}{t^3}dt \tag{30}$$

После чего второй интеграл можно представить как сумму двух интегралов.
Еще один пример:

$$\int\limits_0^\infty x\cos\left(x^3\right)dx \tag{31}$$

$$\int\limits_0^\infty x\cos\left(x^3\right)dx = \int\limits_0^1 x\cos\left(x^3\right)dx + \int\limits_1^\infty x\cos\left(x^3\right)dx \tag{32}$$

$$\int_1^\infty x\cos\left(x^3\right)dx = \left|t = x^3\right| = \frac{1}{3}\int_1^\infty \frac{\cos t}{\sqrt[3]{t}}dt \tag{33}$$

$$\frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{\cos(t)}{\sqrt[3]{t}}dt = -\frac{1}{3}\sin(1) + \frac{1}{9}\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t^{\frac{4}{3}}} \tag{34}$$

При этом

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t^{\frac{4}{3}}} = \int_0^M \frac{\sin(t)}{t^{\frac{4}{3}}} + \int_M^\infty \frac{\sin(t)}{t^{\frac{4}{3}}} \tag{35}$$

Крайний пример:

$$\int_0^1 \frac{\log\left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right)}{x}dx \tag{36}$$

Рассмотрим подкоренное выражение:

$$\frac{\log\left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right)}{x} \xrightarrow{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{x}{3} + \dots \tag{37}$$

Заменяя переменные, получаем:

$$\int_0^1 \frac{\log\left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right)}{x}dx \to \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{\log(1+t)}{t}dt \tag{38}$$

При регуляризации, получим следующее представление:

$$\int_0^1 \left(\frac{\log\left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right)}{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}\right)dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}\right)dx \tag{39}$$