Семинар 19

Варламов Антоний Михайлович

25 марта 2022 г.

1 Общая теория уравнений в частных производных

До этого момента мы рассматривали задачи, в которых так или иначе возникали вопросы об эволюции по времени. Однако в реальности чаще встречаются задачи не только временной эволюции, но и пространственного распределения.

некоторыми примерами таких задач являются:

1. Уравнение диффузии:
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = k^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{1}$$

2. Уравнение переноса
$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + a\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

3. Волновое уравнение
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{3}$$

1.1 Решение уравнения диффузии

Рассмотрим решение диффузионного уравнения. Существуют различные варианты рассмотрения данной задачи: как краевую задачу или как задачу Коши. Рассмотрим следующую интерпретацию:

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial t} = k^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, t\in[0,T], x\in[a,b] \\ \psi(x,0) = \varphi(x) \\ \psi(a,t) = l \\ \psi(b,t) = r \end{cases} \tag{4}$$

Для дальнейшего построения численного решения введем сетку:
Рассмотрим временно-координатную сетку следующего вида:

$$\begin{cases} t_n = n\cdot\Delta t, \Delta t & = \frac{T}{N_t}, n\in[0,N_T] \\ x_k = a + k\cdot\Delta x, \Delta x & = \frac{b-a}{N_x}, k\in[0,N_x] \end{cases} \tag{5}$$

После введения сетки построим разностное приближение нашей задачи:

$$\psi_k^n \approx \psi_{t_n,x_k} \tag{6}$$

$$\frac{\psi_m^{n+1}-\psi_m^n}{\Delta t} = k^2\cdot\frac{\psi_{m+1}^n - 2\psi_m^n + \psi_{m-1}^n}{\Delta x^2} \tag{7}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m\in[2,N_x-2] \\ m=0: \psi_0^n = l \\ m=N_x: \psi_{N_x}^n = r \end{cases} \\ \begin{cases} m\in[1,N_x-1], \\ m=0: \ldots \\ m=N_x: \ldots \end{cases} \end{array}\right. \tag{8}$$

Однако можно задать и неявную дискретизацию:

$$\frac{\psi_m^{n+1}-\psi_m^n}{\text{ﬄ}\Delta t}=\frac{k^2}{\Delta x^2}\cdot\left(\psi_{m+1}^{n+1}-2\psi_m^{n+1}+\psi_{m-1}^{n+1}\right) \tag{9}$$

$$\vec{\psi}^n=\left(\psi_1^n,\ldots,\psi_{N_x-1}^n\right) \tag{10}$$

$$\frac{\vec{\psi}^{n+1}-\vec{\psi}^n}{\Delta t}=\frac{k^2}{\Delta x^2}\cdot\hat{A}\cdot\vec{\psi}^{n+1} \tag{11}$$

$$\left(\mathbb{I}-\frac{k^2}{\Delta x^2}\cdot\hat{A}\right)\cdot\vec{\psi}^{n+1}=\vec{\psi}^n \tag{12}$$

$$\vec{\psi}^{n+1}=\left(\mathbb{I}-\frac{k^2\Delta t}{\Delta x^2}\hat{A}\right)^{-1}\cdot\vec{\psi}^n \tag{13}$$

1.2 Метод прямых

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=k^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{14}$$

Введем только пространственную сетку, сохранив эволюцию по времени непрерывной:

$$\begin{cases}\frac{d\psi_m}{dt}=k^2\cdot\frac{\psi_{m+1}(t)-2\psi_m(t)+\psi_m-1(t)}{\Delta x^2}\\ m\in[1,N_x-1]\end{cases} \tag{15}$$

После чего приходим к:

$$\frac{d\vec{\psi}\,(t)}{dt}=\hat{A}\cdot\vec{\psi}\,(t)\,\vec{\psi}\,(0)=\vec{\psi}_0 \tag{16}$$

Пример: можно воспользоваться методом трапеций:

$$\frac{du}{dt}=f\,(t,u) \tag{17}$$

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}=\frac{1}{2}\left(f\left(t^{n+1},u^{n+1}\right)+f\left(t^n,u^n\right)\right) \tag{18}$$

Для задачи диффузии:

$$\frac{\vec{\psi}^{n+1}-\vec{\psi}^n}{\Delta t}=\frac{1}{2}\cdot\left(\hat{A}\vec{\psi}^{n+1}=\hat{A}\vec{\psi}^n\right) \tag{19}$$

1.3 Исследование сходимости

Аналогично с ОДУ для линейных уравнений в частных производных справедливо утверждение: *Аппроксимация + Устойчивость = Сходимость*

1.3.1 Исследование на аппроксимацию

Рассмотрим ранее описанную схему:

$$\frac{\psi^{n+1}-\psi^n}{\Delta t}=k^2\frac{\psi_{m+1}^n-2\psi_m^n+\psi_{m-1}^n}{\Delta x^2} \tag{20}$$

u – проекция точного решения на сетку.

$$r_m^n=\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\Delta t}-k^2\frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n}{\Delta x^2} \tag{21}$$

$$u_{m\pm1}^n=u_m^n\pm\Delta x\cdot u_m^{xn}+\frac{\Delta x^2}{2}u_m^{xxn}\pm\frac{\Delta x^3}{6}u_m^{xxxn}+\frac{\Delta x^4}{24}u_m^{(IV)n}\left(\Theta_{1,2}\right) \tag{22}$$

$$u_m^{n+1}=u_m^n+\Delta t u_m^{tn}+\frac{\Delta t^2}{2}u_m^{ttn}\left(\xi\right) \tag{23}$$

$$r_m^n = u_m^{tn} - k^2 u_m^{xxn} + \frac{\Delta t}{2} u^{tt}\left(\xi\right) - \frac{\Delta x^2}{24}\left(u^{(IV)n}\left(\theta_1\right) + u^{(IV)n}\left(\theta_2\right)\right) \tag{24}$$

$$\| \, r \, \|_\infty = \frac{\Delta t}{2} \cdot \max_{x\in[a,b];t\in[0,T]} \left|u^{tt}\left(t,x\right)\right| + \frac{\Delta x^2}{12} \cdot \max_{x\in[a,b];t\in[0,T]} \left|u^{(IV)n}\left(t,x\right)\right| \tag{25}$$

1.3.2 Исследование на устойчивость

Рассмотрим *спектральный признак* или признак *Фон Неймана*:
Рассмотрим всю ту же схему:

$$\frac{\psi_m^{n+1} - \psi_m^n}{\Delta t} = k^2 \cdot \frac{\psi_{m+1}^n - 2\psi_m^n + \psi_{m-1}^n}{\Delta x^2} \tag{26}$$

Идея спектрального метода – исследование асимптотики собственной функции:

$$\psi_m^n = \lambda^n e^{i\alpha m} \tag{27}$$

$$\frac{\left(\lambda_m^{n+1} - \lambda_m^n\right) e^{i\alpha m}}{\Delta t} = k^2 \cdot \frac{k^2 \lambda^n}{\Delta x^2}\left(e^{i\alpha(m+1)} - 2e^{i\alpha m} + e^{i\alpha(m-1)}\right) \tag{28}$$

После сокращения, получаем:

$$\lambda - 1 = \frac{k^2 \Delta t}{\Delta x^2}\left(\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2\cos\alpha} - 2\right) \tag{29}$$

$$\lambda = 1 - \frac{4\Delta t k^2}{\Delta x^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \tag{30}$$

$$|\lambda| \leqslant 1, \quad \forall \alpha \tag{31}$$

$$\left|1 - \frac{4\Delta t k^2}{\Delta x^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}\right| \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{4\Delta t k^2}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leqslant 2 \tag{32}$$

$$\frac{4k^2 \Delta t}{\Delta x^2} \leqslant 2 \tag{33}$$

$$\frac{k^2 \Delta t}{\Delta x^2} \leqslant \frac{1}{2} \tag{34}$$

$$\sigma_n = \frac{k^2 \Delta t}{\Delta x^2} - \quad \text{Параболическое число Куранта} \tag{35}$$