Семинар 3

Варламов Антоний Михайлович

22 сентября 2021 г.

1 Матричные нормы

На прошлом семинаре обсуждались вопросы, касающиеся понятий векторных норм, матричных норм, в том числе и подчиненных норм.

Рассматривались нормы l_1, l_2, l_∞.

Замечание: На физтехе "другие обозначения"для норм. Это важно!

$$\parallel A \parallel = \sup_{x \neq 0} \frac{\parallel Ax \parallel}{\parallel x \parallel} = \max_{\parallel y \parallel = 1} \parallel Ay \parallel \tag{1}$$

$$\parallel A \parallel_\infty = \max_{\|x\|=1} \left(\max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \right) \tag{2}$$

Получим некоторую оценку для описанного выражения:

$$\parallel A \parallel_\infty \leqslant \max_{\|x\|=1} \left(\max_i \sum |a_{ij}| \, |x_j| \right) \leqslant \max_{\|x\|=1} \left(\max_i \sum || \, a_{ij} \right) \tag{3}$$

Докажем достижимость оценки.

$$let \quad i_0 : \max_i \sum |a_{ij}| = \sum_j |a_{i_0 j}| \tag{4}$$

Рассмотрим вектор $x_0 = \left(sign\left(a_{i_0 1}\right), sign\left(a_{i_0 2}\right), \ldots, sign\left(a_{i_0 N}\right), \right)^T$

В таком случае:

$$\left(Ax_0\right)_{i_0} = \sum a_{i_0 j} x_j = \sum |a_{i_0 j}| \tag{5}$$

2 СЛАУ

Рассмотрим уравнение:

$$Ax = b \tag{6}$$

Проведем замену: $b \to b + \Delta b$. В таком случае $x \to x + \Delta x$. Получаем новое уравнение:

$$A\left(x + \Delta x\right) = b + \Delta b \tag{7}$$

Для такой системы нас интересует число: $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$

Можно перейти к системе вида:

$$A\Delta x = \Delta b \tag{8}$$

В таком случае:

$$\Delta x = A^{-1} \Delta b \tag{9}$$

Разделим все на $\parallel x \parallel$ и рассмотрим норму:

$$\frac{\parallel \Delta x \parallel}{\parallel x \parallel} = \frac{\parallel A^{-1} b \parallel}{\parallel x \parallel} \leqslant \frac{\parallel A^{-1} \parallel \parallel \Delta b \parallel}{\parallel x \parallel} = \frac{\parallel A^{-1} \parallel \parallel b \parallel}{\parallel x \parallel} \cdot \frac{\parallel \Delta b \parallel}{\parallel b \parallel} = \tag{10}$$

$$= \frac{\parallel A^{-1} \parallel \parallel Ax \parallel}{\parallel x \parallel} \cdot \frac{\parallel \Delta b \parallel}{\parallel b \parallel} \leqslant \parallel A^{-1} \parallel \parallel A \parallel \cdot \frac{\parallel \Delta b \parallel}{\parallel b \parallel} = \mu\left(A\right) \tag{11}$$

Введем еще одно обозначение:

$$\nu(A,b) = \frac{\| A^{-1} \| \| Ax \|}{\| x \|} \tag{12}$$

Рассмотрим пример:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Для такой матрицы:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}, \quad \| A \|_\infty = 19, \quad \| A^{-1} \|_\infty = 19, \quad \mu = 19 \cdot 19 = 361 \tag{14}$$

2.1 Методы решения СЛАУ

1. Метод Гаусса
2. Метод Крамера

Данные методы называются прямыми (получение точных решений за конечное число операции).

Для приближенного решения можно использовать итерационные методы. Такие методы характеризуются тем, что:

$$x^k \xrightarrow{k\to\infty} x : \ \| x^k - x \| = \| e^k \| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \tag{15}$$

2.2 Итерационные методы

Поговорим еще немного об обозначениях:

$$x^k, e^k = x - x^k \tag{16}$$

$$x = x^k + e^k \tag{17}$$

Однако вектор e^k не наблюдаем.

$$Ae^k = b - Ax^k \tag{18}$$

Введем обозначения вектора невязки:

$$r^k = b - Ax^k \tag{19}$$

При выполнении $\| r^k \| \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Rightarrow \| e^k \| \xrightarrow{k\to\infty} 0$

При обращении матрицы возникает операция $\frac{1}{a}$. Так как такая операция довольно неудобна, сделаем замену: $a = 1 - t$ и проведем разложение в ряд Тейлора.

В таком случае:

$$A = \mathbb{I} - T \tag{20}$$

$$(\mathbb{I} - T)^{-1} = \sum_k T^k \tag{21}$$

В таком случае, получаем:

$$A^{-1} = \sum_k (\mathbb{I} - A)^k \tag{22}$$

Ряд, написанный выше называется рядом Неймана. Условия сходимости такого ряда:

$$\begin{cases} \| \mathbb{I} - A \| < 1 \\ \rho(\mathbb{I} - A) < 1 \end{cases} \tag{23}$$

Где $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$

В таком случае:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathbb{I} - A\right)^k b \tag{24}$$

$$x^k = \sum_{m=0}^{k} \left(\mathbb{I} - A\right)^m b \tag{25}$$

$$x^{k+1} = \sum_{m=0}^{k} \left(\mathbb{I} - A\right)^m b \cdot \left(\mathbb{I} - A\right) + \left(\mathbb{I} - A\right)^0 \cdot b \tag{26}$$

$$x^{k+1} = \left(\mathbb{I} - A\right) x^k + b = x^k + b - Ax^k = x^{k+1} = x^k + r^k \tag{27}$$

Рассмотрим некоторое преобразование исходного уравнения:

$$Ax = b \to P^{-1}Ax = P^{-1}b, \tag{28}$$

где P – невырожденная. Такое преобразование называется предобуславливание.
В таком случае:

$$x^{k+1} = x^k + P^{-1}r^k \tag{29}$$

Условия применимости метода:

$$\begin{cases} \| \mathbb{I} - P^{-1}A \| < 1 \\ \rho \left(\mathbb{I} - P^{-1}A\right) < 1 \end{cases} \tag{30}$$

Рассмотрим некоторые приемы работы с P:

1.
$$P = \frac{1}{\tau} \to P^{-1} = \tau \tag{31}$$

   Тогда:

$$x^{k+1} = x^k + \tau r^k \tag{32}$$

   Данный метод называется МПИ или Метод Ричардсона

2.
$$D\left(A\right) \to D \tag{33}$$

$$x^{k+1} = x^k + D^{-1}r^k \tag{34}$$

   D – диагональная матрица с диагональю матрицы A.

3.
$$A = L + D + U, \quad P = L + D \tag{35}$$

   Данный метод называется методом Гаусса-Зейделя

Рассмотрим некоторые действия с ошибками:

$$x^{k+1} - x = x^k - x + P^{-1}r^k \tag{36}$$

$$e^k = x - x^k \tag{37}$$

$$e^{k+1} = e^k - P^{-1}r^k = e^k - P^{-1}\left(b - Ax^k\right) = e^k - P^{-1}\left(Ae^k\right) \tag{38}$$

$$= \left(\mathbb{I} - P^{-1}A\right) e^k; \Rightarrow \| e^{k+1} \| \leqslant \| \mathbb{I} - P^{-1}A \| \| e^k \| \tag{39}$$

Рассмотрим сходимость методов. Выберем в качестве примера метод Ричардсона.

$$x^{k+1} = x^k + \alpha r^k \tag{40}$$

Рассмотрим условие:

$$\rho\left(\mathbb{I}-\alpha A\right)<1 \tag{41}$$

$$\lambda_i\left(\mathbb{I}-\alpha A\right)=1-\alpha\lambda_i\left(A\right) \tag{42}$$

В таком случае, получаем систему:

$$\begin{cases} \left|1-\alpha\lambda_{\max}\left(A\right)\right|<1 \\ \left|1-\alpha\lambda_{\min}\left(A\right)\right|<1 \end{cases} \tag{43}$$

Пусть $\lambda_{\max}>0, \lambda_{\min}>0$. Отсюда следует, что $\alpha>\frac{2}{\lambda_{\max}}$
Оптимальное значение параметра (максимальная скорость сходимости):

$$\alpha^*=\frac{2}{\lambda_{\min}+\lambda_{\max}} \tag{44}$$

Пусть q – скорость сходимости. $\parallel e^{k+1}\parallel\leqslant q\parallel e^k\parallel$
Оптимальное значение скорости сходимости:

$$q_{opt}=\frac{\mu\left(A\right)-1}{\mu\left(A\right)+1} \tag{45}$$

Можно применять метод симметризации:

$$Ax=b\to A^TAx=A^Tb,\quad A^TA>0 \tag{46}$$

$$x^{k+1}=x^k+\alpha\left(A^Tb-A^TAx^k\right) \tag{47}$$