Семинар 20

Варламов Антоний Михайлович

1 апреля 2022 г.

На прошлом занятии было сделано утверждение:

$$\textit{Аппроксимация} + \textit{Устойчивость} \rightarrow \textit{Сходимость}$$

Кроме того, был затронут *метод линий.*

При обсуждении вопросов устойчивости активно используется *Спектральный признак Неймана*:

$$\psi_m^n = \lambda^n \cdot e^{i\alpha m} \tag{1}$$

$$\Delta t, \Delta x : |\lambda| \leqslant 1 \ \forall \ \ \alpha \tag{2}$$

Рассмотрим аппроксимацию по пространству:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \approx \frac{\psi_{m+1}(t) - 2\psi_m + \psi_{m-1}(t)(t)}{\Delta x^2} \tag{3}$$

$$\frac{d\psi_m(t)}{dt} = a(t) \cdot e^{i\alpha m} \tag{4}$$

$$\frac{da(t)}{dt} \cdot e^{i\alpha m} = \frac{e^{i\alpha m}}{\Delta x^2} \cdot (2\cos\alpha - 2) = \frac{-4}{\Delta x^2} \cdot sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) a(t) \tag{5}$$

$$\Rightarrow \frac{da(t)}{dt} = \frac{-4}{\Delta x^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) a(t) = \lambda \cdot a(t) \tag{6}$$

Получаем уравнение Далквиста:

$$\frac{da(t)}{dt} = \lambda a(t) \tag{7}$$

$$\lambda \leqslant 0, \lambda \in \mathbb{R}, \quad |1 + \Delta t \lambda| \leqslant 1 \tag{8}$$

$$\Rightarrow \Delta t \leqslant \frac{2}{\max\limits_{\alpha} \lambda(\alpha)} \tag{9}$$

Значит для данного примера:

$$\Delta t \leqslant \frac{2 \cdot \Delta x^2}{4} = \frac{\Delta x^2}{2} \ \Rightarrow \ \ \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leqslant \frac{1}{2} \tag{10}$$

Рассмотрим так называемый метод "Чехарды"(leapfrog):

$$\frac{\psi_m^{n+1} - \psi_m^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\psi_{m+1}^n - 2\psi_m^n + \psi_{m-1}^n}{\Delta x^2} \tag{11}$$

Опуская вычисления:

$$|Im\lambda| \cdot \Delta t \leqslant 1 \tag{12}$$

Значит, данный метод неприменим к данной задаче.

0.1 Метод Неопределенных коэффициентов

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \gamma\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \tag{13}$$

Рассмотрим пространственно временную сетку: x_m, t_n
Построим разностуню схему в виде:

$$a\psi_m^{n+1} + b\psi_{m-1}^n + c\psi_m^n + d\psi_{m+1}^n = 0 \tag{14}$$

Потребуем заданную аппроксимацию:

$$\begin{cases} a+b+c+d=0; \\ a\cdot dt = 1; \\ -(b-d)\cdot dx = \gamma; \frac{(b+d)dx^2}{2} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{dt} \\ c = \frac{-1}{dt} \\ b = -d \\ b = -\frac{\gamma}{2dx} \end{cases} \tag{15}$$

Значит, получаем схему:

$$\frac{\psi_m^{n+1} - \psi_m^n}{\Delta t} + \gamma\frac{\psi_{m+1}^n - \psi_{m-1}^n}{2\Delta x} = 0 \to O\left(dt, dx^2\right) \tag{16}$$

Но, для данного уравнения:

$$\psi_t' = -\gamma\psi_x' \Rightarrow \psi_{tt}'' = -\gamma\left(\psi_x'\right)_t' = \gamma^2\cdot\psi_{xx}'' \tag{17}$$

Получаем:

$$\frac{a\psi_{tt}''}{2}\cdot dt^2 + \frac{\psi_{xx}''\left(b+d\right)dx^2}{2} = \psi_{xx}''\left(\frac{\gamma^2 a}{2}dt^2 + \frac{dx^2}{2}\right) \tag{18}$$

В таком случае, схема приобретет вид:

$$\frac{\psi_m^{n+1} - \psi_m^n}{\Delta t} + \gamma\frac{\psi_{m+1}^n - \psi_{m-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\gamma^2\Delta t}{2}\left(\psi_{m+1}^n - 2\psi_m^n + \psi_{m-1}^n\right) = 0 \tag{19}$$

Данная схема имеет название *схема Лакса Вендроффа*