

# Семинар 25. Консультация к ПКР

Варламов Антоний Михайлович

13 мая 2022 г.

## 1 Задача 5

$$u'_t - cu'_x = 0, c > 0 \quad (1)$$

1. Смотрим на уравнение. Каноническое уравнение переноса:  $u'_t + cu'_x = 0, c > 0$
2. Выпускаем характеристику из верхнего узла. Судя по виду уравнения, характеристика «движется» слева направо.

$$u_m^{n+1} = u^* \quad (2)$$

3. Строим интерполяционный полином  $\mathbb{L}(x)$  и находим значение в точке  $x_m + c\Delta t$

$x_m - 2\Delta x$	$x_m - \Delta x$	$x_m$	$x_m + \Delta x$
$f_{m-2}^n$	$f_{m-1}^n$	$f_m^n$	$f_{m-2}^n$

Для простоты можно вычесть  $x_m$  и разделить все на  $\Delta x$ .

-2	-1	0	1
$f_{m-2}^n$	$f_{m-1}^n$	$f_m^n$	$f_{m-2}^n$

После чего вычислить значение в точке  $\sigma = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$

4. Для устойчивости проверить, не выходит ли характеристика за пределы шаблона.

## 2 Задача 2

1. Раскладываем схему в Ряд Тейлора. Находим все члены разложения без множителей  $\Delta x$  и  $\Delta t$ . Данные члены показывают, какую дифференциальную задачу аппроксимирует схема.
2. Находим члены с наименьшей скоростью убывания по  $\Delta t$  и  $\Delta x$ . Откуда получаем порядок аппроксимации. Важно проверить задачу на условную аппроксимацию (отношение  $\frac{\Delta x^n}{\Delta t^m}$ )
3. Для исследования на устойчивость находим шаблон разностной схемы, а дальше проверяем, чтобы характеристика не выходила за пределы шаблона.

## 3 Задача 1

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\Delta t} - a \frac{y_{m+1}^n - 2y_m^{n+1} - y_{m-1}^n}{\Delta x^2} = 0 \quad (3)$$

1. Исследование на аппроксимацию. Раскладываем схему в ряд Тейлора. Смотрим проекцию точного решения на сетку и рассматриваем остаточные члены.

Для данной схемы:

$$\frac{\Delta t}{2} u''_{tt} - \frac{a\Delta x^2}{12} u_x^{IV} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \cdot 2a \cdot u'_t \quad (4)$$

Порядок  $-O(\Delta t, \Delta x^2, \frac{\Delta t}{\Delta x^2})$

## 2. Исследование на устойчивость.

Пользуемся признаком Неймана:

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} - \frac{a}{\Delta x^2} \cdot (2 \cos \alpha - 2\lambda) = 0 \quad (5)$$

$$\lambda - 1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \cdot 2 (\cos \alpha - 1) = 0 \quad (6)$$

$$|\lambda| = \left| \frac{1 + 2\sigma^2 \cos \alpha}{1 + 2\sigma^2} \right| \leq \frac{1 + 2\sigma^2}{1 + 2\sigma^2} = 1 \quad (7)$$

## 4 Задача 4

$$u'_t = f(t, u) \quad (8)$$

### 1. Общий вид схем Адамса:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\Delta t} = \alpha_0 f^{n+1} + \alpha_1 f^n + \alpha_2 f^{n-1} + \dots + \alpha_k f^{n+1-k} \quad (9)$$

### 2. 3 порядок $\rightarrow$ 3 коэффициента

### 3. Так как схема явная $\rightarrow \alpha_0 = 0$ .

### 4. Раскладываем схему в ряд Тейлора, зануляем коэффициенты перед множителями со степенями $\Delta t$ .

### 5. После зануления коэффициентов получаем систему уравнений, решая которую находим коэффициенты.

### 6. Общий вид формул дифференцирования назад:

Явные:

$$\alpha_1 y^{n+1} + \alpha_2 y^n + \alpha_3 y^{n-1} + \dots = f^n \quad (10)$$

Неявные:

$$\alpha_1 y^{n+1} + \alpha_2 y^n + \alpha_3 y^{n-1} + \dots = f^{n+1} \quad (11)$$

## 5 Задача 3

Рекомендуется посмотреть в задачнике номер 14.8.9 или конспект 24 семинара.

## 6 Задача 5

Рекомендуется посмотреть в задачнике номер 12.8.9

## 7 Задача 6

$$\Delta u = f \quad (12)$$

Данная задача сводится к задаче обращения матрицы. В задачнике на стр. 264 приведена формула:

$$N_{iter} = \gamma \cdot |\ln \varepsilon| \quad (13)$$

Пару замечаний о методе простых итераций:

$$x^{n+1} = x^n + \tau (b - Ax^n) \quad (14)$$

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{2}{\lambda_{\text{max}} + \lambda_{\text{min}}} \quad (15)$$

$$q_{\text{опт}} = \frac{\lambda_{\text{max}} - \lambda_{\text{min}}}{\lambda_{\text{max}} + \lambda_{\text{min}}} \quad (16)$$

Тогда норма ошибки:

$$\| \delta^n \| = q \cdot \| \delta^{n-1} \| = q^n \| \delta^0 \| \quad (17)$$

$$\frac{\| \delta^n \|}{\| \delta^0 \|} = q^n \leq \varepsilon \quad (18)$$

$$n \cdot |\ln q| \geq |\ln \varepsilon| \quad (19)$$