Семинар 5

Варламов Антоний Михайлович

6 октября 2021 г.

1 Метод наименьших квадратов

$$x \xrightarrow{\mathcal{F}} y \tag{1}$$

Задача: найти $\mathcal{F}$.

1. Классика
2. $\mathcal{F} \sim F\left(x, p_1, p_2, \dots, p_n\right)$

Вопрос: *как искать* $p_1, p_2, \dots, p_n$?

$$\left(x_1, x_2, \dots, x_k\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(y_1, y_2, \dots, y_k\right) \tag{2}$$

$\left(x_1, x_2, \dots, x_k\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(y_1, y_2, \dots, y_k\right)$– *training set*
Критерий отбора параметров:

$$\| F\left(x, p_1, p_2, \dots, p_n\right) - \vec{y} \| \to \min_{p_1, p_2, \dots, p_n} \tag{3}$$

Данная постановка задачи – очень общая. Перейдем от такой постановки задачи к постановке задачи с методом МНК + линейной регрессией.

Пусть функция $f \in \mathcal{H}$. Требуется найти приближение:

$$f \in \mathcal{H} \sim F\left(x, p_1, p_2, \dots, p_n\right) = \sum_{j=1}^{n} p_j \varphi_j\left(x\right) \tag{4}$$

$\varphi_j\left(x\right)$ – так называемые базисные функции.
Исходная задача формулируется как:

$$\| \mathcal{F}\left(x\right) - F\left(x, p_1, p_2, \dots, p_n\right) \|_2^2 = \left(\mathcal{F}\left(x\right) - \sum_{j=1}^{n} p_j \varphi_j, \mathcal{F}\left(x\right) - \sum_{j=1}^{n} p_j \varphi_j\right) = \left(e\left(x\right), e\left(x\right)\right) \to \min_{p_1, p_2, \dots, p_n} \tag{5}$$

МНК:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}\left(x_1\right) \\ \vdots \\ \mathcal{F}\left(x_i\right) \\ \vdots \\ \mathcal{F}\left(x_n\right) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Условие ортогональности вектора ошибки: $\left(e, \varphi_k\right) = 0$

$$\left(\mathcal{F} - \sum p_j \varphi_j, \varphi_k\right) = 0 \tag{7}$$

$$\left(\mathcal{F}, \varphi_k\right) - \sum p_j \left(\varphi_j, \varphi_k\right) = 0 \tag{8}$$

$$M\vec{p} = \vec{f} \to \vec{p} = M^{-1}\vec{f} \tag{9}$$

На основе линейной регрессии можно построить полиномиальную регрессию

2 Приближение ортогональными функциями

$$\begin{pmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) & \cdots \\ (\varphi_2, \varphi_1) & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \tag{10}$$

условие ортогональности:

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij} \tag{11}$$

В таком случае матрица M – диагональная матрица.
Пример ортогональных функций – полиномы Лежандра

3 Программирование МНК

определим матрицу базисных функций:

$$S = \begin{pmatrix} \varphi_1 (\vec{x}) & \varphi_2 (\vec{x}) & \dots & \varphi_n (\vec{x}) \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$M_{ij} = (\varphi_i (\vec{x}), \varphi_j (\vec{x})) \tag{13}$$

$$S^T S = M \tag{14}$$

$$S^T S p = S y \tag{15}$$

Вернемся к понятию вектора ошибки:

$$e (x) = \mathcal{F} - F (x, p_1, p_2, \dots, p_m) \tag{16}$$

$$(e (x), e (x)) \to \min_{p_1, p_2, \dots, p_n} \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} [(e (x), e (x))] = 0 \tag{18}$$

$$F (x, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2) = b_1 \varphi (a_1 x + c_1) + b_2 \varphi (a_2 x + c_2) \tag{19}$$