Семинар 15

Варламов Антоний Михайлович

4 марта 2022 г.

1 Исследование разностных схем на аппроксимацию

Вернемся к задаче вида:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u,t), \ t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

Для приближенного решения данной задачи можно, например, воспользоваться явным методом Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta t} = f(y_i,t_i), \ i = 1..N_T - 1 \\ y_0 = u_0 \end{cases} . \tag{2}$$

Введем в рассмотрение понятие аппроксимации разностной схемой исходного дифференциального уравнения. Для этого перепишем уравнения (1) и разностную схему (2) в операторном виде.

Для уравнения (1) операторная запись – $\mathbb{L}(u) = \mathbb{F}$, где

$$\mathbb{L}(u) = \begin{cases} \frac{du}{dt} - f(t,u), & t > 0 \\ u(0), & t = 0 \end{cases}, \ F = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ u_0, & t = 0 \end{cases}. \tag{3}$$

Для разностной схемы (2) операторная запись – $\mathbb{L}_h y = \mathbb{F}_h$, где

$$\mathbb{L}_h = \begin{cases} \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} - f(y_{i-1}, t_{i-1}), & i \in [1, N_T] \\ y_0, & i = 0 \end{cases}, \mathbb{F}_h = \begin{cases} 0, & i \in [1, N_T] \\ u_0, & i = 0 \end{cases}. \tag{4}$$

В данном случае явная схема Эйлера рассматривается в качестве примера, аналогичным образом можно ввести операторную запись для любой другой схемы.

Будем говорить, что разностная схема $\mathbb{L}_h y = \mathbb{F}_h$ аппроксимирует исходное уравнение $\mathbb{L}(u) = \mathbb{F}$, если выполняется

$$\| r \| \equiv \| \mathbb{L}_h \mathbb{P}_h u - \mathbb{F}_h \| \xrightarrow{\Delta t \to 0} 0. \tag{5}$$

Здесь $\mathbb{P}_h u$ – проекция точного решения на сетку, которая может быть определена, например, как $(\mathbb{P}_h u)_i = u(t_i)$. Если удается показать, что

$$\| \mathbb{L}_h \mathbb{P} u - \mathbb{F}_h \| \leqslant C \cdot \Delta t^p, \tag{6}$$

то будем говорить, что разностная схема имеет порядок аппроксимации p.

Исследуем порядок аппроксимации для явной схемы Эйлера. Рассмотрим вектор невязки (компоненты проекции точного решения на сетку будем для краткости обозначать как u_i):

$$r_i \equiv \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} - f(t_i, u_i) \tag{7}$$

При этом:

$$u_{i+1} = u(t_{i+1}) = u(t_i + \Delta t) = u(t_i) + u'(t_i) \cdot \Delta t + \frac{u''(\theta_i)}{2} \Delta t^2, \ \theta_i \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{8}$$

Значит

$$r_i = \frac{1}{\Delta t} \left(u_i + u_i' \Delta t + \frac{u''(\theta_i)}{2} \Delta t^2 - u_i \right) - f(t_i, u_i) = \frac{\Delta t}{2} \cdot u''(\theta_i). \tag{9}$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что u_i – значение точного решения в точке t_i, а значит оно удовлетворяет в этой точке исходному уравнению, то есть $u_i' = f(t_i, u_i)$.

$$\| r_i \|_\infty = \max_i |r_i| = \max_i \left| \frac{\Delta t}{2} \cdot u''\left(\theta_i\right) \right| \leqslant \frac{M_2}{2} \Delta t, \tag{10}$$

$$M_2 = \max_{t \in [0,T]} |u''(t)|. \tag{11}$$

В качестве еще одного примера рассмотрим следующую схему и исследуем ее на аппроксимацию

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(f\left(t_{i+1}, y_{i+1}\right) + f\left(t_i, y_i\right)\right) \tag{12}$$

Данная схема называется неявный метод трапеций или схема Кранка-Николсон.

$$r_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} - \frac{1}{2}\left(f\left(t_{i+1}, y_{i+1}\right) + f\left(t_i, y_i\right)\right) \tag{13}$$

Для упрощения выкладок воспользуемся свойством точного решения $u'(t_{i+1}) = f(t_{i+1}, u_{i+1})$, $u'(t_i) = f(t_i, u_i)$

$$r_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} - \frac{1}{2}\left(u_{i+1}' + u_i'\right) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \left(u_i + \Delta t \cdot u_i' + \frac{\Delta t^2}{2} u_i'' + \frac{\Delta t^3}{6} u_i'''\left(\theta_i\right) - u_i\right) - \tag{14}$$

$$-\frac{1}{2}\left(u_i' + u_i'' \Delta t + \frac{u'''\left(\xi_i\right)}{2} + u_i'\right) = \frac{\Delta t}{2} u_i'' + \frac{\Delta t^2}{6} u'''\left(\theta_i\right) - \frac{u_i'' \Delta t}{2} - \frac{u'''\left(\xi_i\right)}{4} \Delta t^2 = \tag{15}$$

$$= \Delta t^2 \left(\frac{u'''\left(\theta_i\right)}{6} - \frac{u'''\left(\xi_i\right)}{4}\right). \tag{16}$$

Отсюда видно, что схема имеет второй порядок аппроксимации.

1.1 Явные методы Рунге-Кутты

Данные методы являются многостадийными, то есть для выполнения одного шага по времени (переход от y_n к y_{n+1}), необходимо провести дополнительные вспомогательные вычисления.

Пример двухстадийной схемы Рунге-Кутты второго порядка:

$$\frac{\widetilde{y} - y_i}{\frac{\Delta t}{2}} = f\left(t_i, y_i\right) \quad \mapsto \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} = f\left(t_{i+\frac{1}{2}}, \widetilde{y}\right) \tag{17}$$

Перейдем к рассмотрению общего вида явных методов Р.-К. Для это введем вспомогательные величины:

$$T_i = t_n + c_i \Delta t, \tag{18}$$

$$Y_i = y_n + \Delta t \cdot \sum_{k=1}^{i-1} f\left(T_k, Y_k\right) \cdot \beta_{ik}. \tag{19}$$

Для явных методов договоримся, что первая стадия всегда тривиальная:

$$T_1 \equiv t_n, \tag{20}$$

$$Y_1 \equiv y_n. \tag{21}$$

Вычислив вспомогательные величины, можем сделать шаг по времени:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot \sum_{k=1}^{N_k} b_k \cdot f\left(T_k, Y_k\right) \tag{22}$$

N_k – количество стадий.

Существует зависимость между максимальным порядком аппроксимации и количеством стадий:

$$
\begin{aligned}
&2 \to 2\\
&3 \to 3\\
&4 \to 4\\
&5 \to 4 \text{ Первый барьер Бутчера}\\
&6 \to 5\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Для компактной записи методов Р.-К. используют так называемые *таблицы Бутчера.* Таблица Бутчера для общего вида:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & 0 & & & & & \\
c_2 & \beta_{21} & 0 & & & & \\
c_3 & \beta_{31} & \beta_{32} & 0 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & & \\
c_{N_k} & \beta_{N_k1} & \beta_{N_k2} & \beta_{N_k3} & \dots & \beta_{N_kN_{k-1}} & 0 \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{N_k-1} & b_{N_k}
\end{array}
$$

Таблица 1: Таблица Бутчера для общего вида явного метода Р.К. с числом стадий N_k.

Перепишем разностную схему (17) с использованием новых обозначений:

$$
\begin{cases}
Y_1 = y_n, T_1 = t_n,\ \text{(тривиаильная первая стадия)}\\
Y_2 = y_n + \frac{\Delta t}{2} \cdot f\left(T_1, Y_1\right),\ T_2 = t_n + \frac{\Delta t}{2}\\
y_{n+1} = y_n + \Delta t \left(0 \cdot f\left(T_1, Y_1\right) + f\left(T_2, Y_2\right)\right)
\end{cases}
\tag{24}
$$

Таблица Бутчера для данного метода:

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}
$$

Таблица 2: Таблица Бутчера для описанного выше метода

Напоследок, выпишем таблицу классического метода Рунге-Кутты:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

Таблица 3: Таблица Бутчера классического метода Рунге-Кутты 4 порядка

Условия на коэффициенты методов Р.-К. для достижения заданного порядка аппроксимации:

$$
\begin{cases}
\sum\limits_k \beta_{ik} = c_i & \text{0 порядок, необязательные условия Рунге}\\
\sum b_i = 1 & \text{1 порядок}\\
\sum b_i c_i = \frac{1}{2} & \text{2 порядок}\\
\begin{cases}
\sum b_i c_i^2 = \frac{1}{3}\\
\sum\limits_i \sum\limits_j b_j \beta_{ji} c_i = \frac{1}{6}
\end{cases} & \text{3 порядок}
\end{cases}
\tag{25}
$$