Семинар 8

Варламов Антоний Михайлович

3 ноября 2021 г.

1 Интерполяция

Пусть имеется информация в виде:

x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_0	y_1	$\dots$	y_n

Таблица 1:

Постановка задачи:

Пусть имеется некоторый отрезок $[a, b]$, на котором имеются узлы $\{x_i\}_{i=0}^{n}, x_0 = a, x_n = b$. Будем считать также $f_i \approx f(x)$.

Интерполят Обозначим функцией $L(x)$. Данная функция должна удовлетворять интерполяционным условиям:

1. $L(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i(x)$. $\varphi_i(x)$ – базисные функции интерполяции. Базисные функции линейно независимы на отрезке $[a, b]$.

2. $L(x_0) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i(x_0)$, $L(x_k) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i(x_k)$

Интерполяционные условия – условия на коэффициенты разложения интерполянта по базисным функциям. Данные условия приводят к линейной системе уравнений. В матричнм виде можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

1.1 Алгебраическая интерполяция

Если в качестве базисных функций взять полиномы: $\varphi_i = x^i$

В таком случае можно построить так называемую матрицу Ванждермонда:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

1.2 Интерполяция в форме Лагранжа

Рассмотрим в качестве базисных функций функции *Лагранжа:*

$$l_i(x) = \prod_{k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \tag{3}$$

В таком случае $l_i(x)$ – полином степени n

Интерполянт в таком случае:

$$L\left(x\right) = \sum \alpha_i l_i\left(x\right) \tag{4}$$

Рассмотрим функции Лагранжа на узлах сетки:

$$l_i\left(x_k\right) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \begin{cases} k = i : \frac{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_n)} = 1 \\ k \neq i : \frac{x_k - x_k}{x_i - x_k} l_i\left(x_k\right) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Откуда делаем вывод, что $l_i\left(x_k\right) = \delta_{ik}$.
Интерполянт при этом:

$$L\left(x_k\right) = \sum \alpha_i l_i\left(x\right) = \alpha_k \Rightarrow \alpha_k = f_k \tag{6}$$

$$L\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} f_i l_i\left(x\right) \tag{7}$$

Последнее уравнение и описывает интерполяцию в форме Лагранжа.

x	1	2	4
y	7	8	10

Таблица 2:

Пример 1

$$L\left(x\right) = 7 \cdot \frac{\left(x-2\right)\left(x-4\right)}{\left(1-2\right)\left(1-4\right)} + 8 \cdot \frac{\left(x-1\right)\left(x-4\right)}{\left(2-1\right)\left(2-4\right)} + 10 \cdot \frac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}{\left(4-1\right)\left(4-2\right)} \tag{8}$$

1.3 Теорема про алгебраическую интерполяцию

1. Пусть $f\left(x\right) - n - 1$ раз непрерывно дифференцируема на $[a, b]$
2. $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – различны
3. $L\left(x\right)$ – алгебраический интерполяционный полином

Тогда $\forall\ x \in [a, b]$:

$$E\left(x\right) = f''\left(x\right) - L\left(x\right) = \frac{f^{(n-1)}\left(\xi\left(x\right)\right)}{(n-1)!}\omega\left(x\right), \quad \omega\left(x\right) = \prod_{i=0}^{n}\left(x - x_i\right) \tag{9}$$

$$\left|E\left(x\right)\right| \leqslant \frac{M_{n-1}}{(n+1)!}\left|\omega\left(x\right)\right| \tag{10}$$

Пример 2 $f\left(x\right) = \frac{1}{x}, x_0 = 2, x_1 = 4$

$$L\left(x\right) = \frac{1}{2}\frac{x-4}{2-4} + \frac{1}{4}\frac{x-2}{4-2}, x \in [a, b] \tag{11}$$

$$f'\left(x\right) = -\frac{1}{x^2}, f''\left(x\right) = \frac{1}{2x^3} \tag{12}$$

$$M_2 = 2\frac{1}{x_0^3} = \frac{1}{4} \tag{13}$$

$$\max_{x \in [a,b]}\left|\omega\left(x\right)\right| = \max_{x \in [2,4]}\left|\left(x-2\right)\left(x-4\right)\right| \tag{14}$$

$$x^* = \frac{x_0 + x_1}{2}, \omega\left(x^*\right) = \frac{\left(x_1 - x_0\right)^2}{4} = 1 \tag{15}$$

$$E \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max\left|\omega\left(x\right)\right| = \frac{1}{8} \tag{16}$$