семинар 23

Варламов Антоний Михайлович

22 апреля 2022 г.

1 Решение уравнений мелкой воды

Рассмотрим гиперболическую систему уравнений мелкой воды:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial t} = -H\frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \tag{1}$$

Запишем схему аппроксимации для такой системы:

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\Delta t} = -g\frac{h_{m+1}^n-h_{m-1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{h_m^{n+1}-h_m^n}{\Delta t} = -H\frac{u_{m+1}^n-u_{m-1}^n}{2\Delta x} \end{cases} \tag{2}$$

Охарактеризуем данную схему:

1. Аппроксимация. Порядок аппроксимации данной схемы $O\left(\Delta t, \Delta x^2\right)$
2. Устойчивость

   $$\begin{pmatrix} u \\ h \end{pmatrix}_m^n = \lambda^n \cdot \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{h} \end{pmatrix} \cdot e^{-\alpha m} \tag{3}$$

   Получаем условие:

   $$\begin{cases} \frac{\lambda-1}{\Delta t} \cdot \hat{u} = -gi\frac{\sin\alpha}{\Delta x}\hat{h} \\ \frac{\lambda-1}{\Delta t} \cdot \hat{h} = -Hi\frac{\sin\alpha}{\Delta x}\hat{u} \end{cases} \tag{4}$$

   Получаем матрицу:

   $$\hat{A} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda-1}{\Delta t} & ig\frac{\sin\alpha}{\Delta x} \\ iH\frac{\sin\alpha}{\Delta x} & \frac{\lambda-1}{\Delta t} \end{pmatrix} \tag{5}$$

   $$\det A = \left(\frac{\lambda-1}{\Delta t}\right)^2 + gH\frac{\sin^2\alpha}{\Delta x^2} = 0 \tag{6}$$

   Используя данное условие, выражаем λ и рассматриваем вопрос устойчивости. Конкретно для данной схемы приходим к выводу неустойчивости схемы.

2 Решение волнового уравнения

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = k^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{7}$$

Для данного уравнения используем схему:

$$\frac{\psi_m^{n+1} - 2\psi_m^n + \psi_m^{n-1}}{\Delta t^2} = k^2\frac{\psi_{m+1}^n - 2\psi_m^n + \psi_{m-1}^n}{\Delta x^2} \tag{8}$$

Повторим исследование:

1. Аппроксимация. Схема имеет порядок аппроксимации $O\left(\Delta t^2, \Delta x^2\right)$

2. Устойчивость

$$\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\Delta t^2} = \lambda \frac{k^2}{\Delta x^2}\left(-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \tag{9}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = \lambda \frac{k^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}\left(-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \tag{10}$$

$$\lambda^2 + \lambda\left(-2 + 4\sigma\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) + 1 = 0 \tag{11}$$

Хотим

$$\begin{cases} |\lambda| \leqslant 1, \text{ корни не кратные} \\ |\lambda| < 1, \text{ корни кратные} \end{cases} \tag{12}$$

Из теоремы Виета:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \overline{\lambda_2} \tag{13}$$

$$D = \left(-2 + 4\sigma\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4 < 0 \tag{14}$$

$$\left(-4 + 4\sigma\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 4\sigma\sin^2\frac{\alpha}{2} < 0 \tag{15}$$

$$\sigma^2\sin^2\frac{\alpha}{2} < 1 \Rightarrow \sigma < 1 \tag{16}$$

Это означает, что:

$$\frac{k\Delta t}{\Delta x} < 1 \tag{17}$$

Для данного уравнения можно дополнительно провести исследование с помощью характеристик.

2.1 Задание начальных условий для волнового уравнения

Для корректной постановки задачи необходимо:

$$\psi(0, x) = \alpha(x) \mapsto \psi_m^0 \psi_t'(0, x) = \beta(x) \tag{18}$$

Представим

$$\psi_m^1 = \psi_m^0 + \Delta t \left(\psi_t'\right)_m^0 \tag{19}$$

В таком случае:

$$\psi_m^1 = \alpha_m + \Delta t \cdot \beta_m \tag{20}$$

Если разложить функцию дальше, получим:

$$\psi_m^1 = \psi_m^0 + \Delta t \left(\psi_t'\right)_m^0 + \frac{\Delta t^2}{2}\left(\psi_{tt}''\right)_m^0 = \psi_m^0 + \Delta t \left(\psi_t'\right)_m^0 + \frac{\Delta t^2}{2} k^2 \cdot \left(\psi_{xx}''\right) \tag{21}$$

В таком случае:

$$\psi_m^1 = \alpha_m + \Delta t \cdot \beta_m + \frac{\Delta t^2}{2} \cdot k^2 \cdot \frac{\alpha_{m+1} - 2\alpha_m + \alpha_{m-1}}{\Delta x^2} \tag{22}$$