ПОТОКОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ФОПФ/ФПФЭ 2019/2020

по вычислительной математике III курс 5 семестр

№ группы	Фамилия студента	Оценка	Фамилия проверяющего

Вариант 1

<table>
<tr><td colspan="2">Внимание! Без ответа на КВ контрольная работа не проверяется.</td></tr>
<tr><td>КВ</td><td>(4) Доказать теорему о погрешности алгебраической интерполяции.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>(4) Доказать, что в методе наискорейшего спуска решения СЛАУ Ax=f с самосопряженной матрицей две последовательные невязки ортогональны друг другу.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Для таблично заданной функции

<table>
<tr><td>x_i</td><td>–4</td><td>–3</td><td>–2</td><td>–1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>f_i</td><td>–31</td><td>–8</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>17</td></tr>
</table>
а) (4) восстановить ее значение в точке $x^* = 0.5$ с помощью интерполяционного многочлена наивысшей степени. Обязательно привести таблицу разделенных разностей. (1) Глядя на эту таблицу, какое предположение о функции вы можете сделать? (3) Найти первую производную табличной функции в первой и последней точках таблицы с максимальной точностью. Какой интерполяционный многочлен – вперед или назад, – лучше использовать для нахождения производной в первой точке? А в последней?
б) (4) Вычислить значение определенного интеграла от данной табличной функции методом трапеций, сделать уточнение результата экстраполяцией Ричардсона. Сравнить полученный результат с вычислением интеграла методом Симпсона.
в) (2) Уточнить результат метода трапеций по формуле Эйлера–Маклорена, сравнить результат с вычислениями по формуле Симпсона.
г) (2) Воспользовавшись выводом о функции из пункта а) объяснить, почему экстраполяция Ричардсона дает результат, совпадающий с уточнением метода трапеций по формуле Эйлера–Маклорена.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Для поиска локального минимума функции $f(x,y) = x^3/3 - x + y^2$ используется метод наискорейшего спуска. (2) Найти направление наискорейшего спуска из начального приближения: $x^{(0)} = -1.5,\ y^{(0)} = 1$.
(2) Сойдется ли метод наискорейшего спуска из данного начального приближения к точке локального экстремума?</td></tr>
<tr><td>4</td><td>(4) Отделите корни уравнения $e^x - 2x - 1 = 0$. Предложите метод простой итерации, сходящийся к положительному корню уравнения. Задайте начальное приближение. Оцените число итераций, необходимое для достижения точности $\varepsilon = 10^{-6}$.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>(4) Методом обратной интерполяции найти корень нелинейного уравнения, используя приведенную таблицу значений функции.

<table>
<tr><td rowspan="2">$2x\cos x - (x-2)^2 = 0$</td><td>x</td><td>3.65</td><td>3.7</td><td>3.75</td><td>3.8</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>1.118</td><td>0.355</td><td>–0.463</td><td>–1.330</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>6</td><td>(4) Предложите алгоритм, как пользуясь программой, реализующей метод трапеций для численного интегрирования произвольных регулярных функций с заданным шагом, вычислить следующий интеграл с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$: $\int_0^4 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}dx$.</td></tr>
</table>

(*продолжение на обороте*)

7	**(3)** Построить квадратуру Гаусса–Кристоффеля с двумя узлами для вычисления интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-x^2}dx$, для справки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2}dx = \begin{cases} \sqrt{\pi}, & n=0 \\ 0, & n=1,3 \\ \sqrt{\pi/2}, & n=2 \end{cases}$. Какова алгебраическая степень точности полученной квадратурной формулы?
8	Для численного решения задачи Коши $u' = 2u, \quad 0 \le x \le X, \quad u(0)=1,$ предлагается воспользоваться разностной задачей: $\frac{1}{h}(2y_{n+1} - 3y_n + y_{n-1}) = 4y_n - 2y_{n-1}, \quad n = 1,2,\ldots,N-1, \quad h = \frac{X}{N},$ $y_0 = 1 + 2h, \quad y_1 = 1 + 3h.$ а) **(4)** Найти порядок аппроксимации разностной задачи. б) **(4)** Найти точное решение разностной задачи. в) **(4)** Показать сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной.

ПОТОКОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ФОПФ/ФПФЭ 2019/2020

по вычислительной математике III курс 5 семестр

№ группы	Фамилия студента	Оценка	Фамилия проверяющего

Вариант 2

	Внимание! Без ответа на КВ контрольная работа не проверяется.
КВ	(**4**) Оптимальное расположение узлов алгебраической интерполяции. Доказать необходимую теорему о многочленах Чебышёва.
1	(**4**) Доказать, что константа Лебега не зависит от длины отрезка, а зависит только от взаимного расположения точек интерполяции на нем, т.е. если система узлов $\{t_i\}_{i=0}^{n}$ и отрезок [c,d] получены линейным преобразованием $t = kx + p$ из системы $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ и отрезка [a,b], то константа Лебега не изменится.
2	Для таблично заданной функции x_i: –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 f_i: 44, 10, –6, –10, –8, –6, –10 а) **(4)** восстановить ее значение в точке $x^* = -1.5$ с помощью интерполяционного многочлена наивысшей степени. Обязательно привести таблицу разделенных разностей. **(1)** Глядя на эту таблицу, какое предположение о функции вы можете сделать? **(3)** Найти первую производную табличной функции в первой и последней точках таблицы с максимальной точностью. Какой интерполяционный многочлен – вперед или назад, – лучше использовать для нахождения производной в первой точке? А в последней? б) **(4)** Вычислить значение определенного интеграла от данной табличной функции методом трапеций, сделать уточнение результата экстраполяцией Ричардсона. Сравнить полученный результат с вычислением интеграла методом Симпсона. в) **(2)** Уточнить результат метода трапеций по формуле Эйлера–Маклорена, сравнить результат с вычислениями по формуле Симпсона. г) **(2)** Воспользовавшись выводом о функции из пункта а) объяснить, почему экстраполяция Ричардсона дает результат, совпадающий с уточнением метода трапеций по формуле Эйлера–Маклорена.
3	Для поиска локального минимума функции $f(x,y) = x^2 - x + 2y^3 + 3y^2$ используется метод наискорейшего спуска. **(2)** Найти направление наискорейшего спуска из начального приближения: $x^{(0)} = -0.5, y^{(0)} = -0.5$. **(2)** Сойдется ли метод наискорейшего спуска из данного начального приближения к точке локального экстремума?
4	Отделите корни уравнения $x^3 - \sin x - 1 = 0$. Предложите метод простой итерации, сходящийся к положительному корню уравнения. Задайте начальное приближение. Оцените число итераций предложенного метода для нахождения решения с двумя верными значащими цифрами.
5	**(4)** Методом обратной интерполяции найти корень нелинейного уравнения, используя приведенную таблицу значений функции. $\sin x - e^x = 0$ x: –4., –3.5, –3., –2.5 $f(x)$: 0.738, 0.320, –0.191, –0.681
6	(**4**) Предложите алгоритм, как пользуясь программой, реализующей метод трапеций для численного интегрирования произвольных регулярных функций с заданным шагом, вычислить следующий интеграл с точностью ε = 10^{-6} : $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-\cos\sqrt[4]{x}}dx$.

(*продолжение на обороте*)

7	**(3)** Построить квадратуру Гаусса–Кристоффеля с двумя узлами для вычисления интеграла $I(f)=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$, для справки $\int_{-1}^{1}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}\pi, & n=0\\ 0, & n=1,3\\ \pi/2, & n=2\end{cases}$. Какова алгебраическая степень точности полученной квадратурной формулы?
8	Для численного решения задачи Коши $u'=3u, \quad 0\le x\le X, \quad u(0)=1,$ предлагается воспользоваться разностной задачей: $\frac{1}{h}(3y_{n+1}-5y_n+2y_{n-1})=9y_n-6y_{n-1}, \quad n=1,2,\dots,N-1, \quad h=\frac{X}{N},$ $y_0=1+3h, \quad y_1=1+5h.$ а) **(4)** Найти порядок аппроксимации разностной задачи. б) **(4)** Найти точное решение разностной задачи. в) **(4)** Показать сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной.