Семинар 15

Варламов Антоний Михайлович

15 апреля 2022 г.

1 Уравнение переноса

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + c\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

Для решения данного уравнения необходимо задать граничное условие вида:

$$\begin{cases} \psi\left(0,x\right) = \psi_0\left(x\right) \\ \psi\left(t,0\right) = \psi_l\left(t\right) \end{cases} \tag{2}$$

На прошлом семинаре были рассмотрены три схемы:

1. $\frac{\psi_m^{n+1}+\psi_m^n}{\Delta t} + c\frac{\psi_{m+1}^n-\psi_{m-1}^n}{2\Delta x} = 0$
2. $\frac{\psi_m^{n+1}+\psi_m^n}{\Delta t} + c\frac{\psi_m^n-\psi_{m-1}^n}{\Delta x} = 0$
3. $\frac{\psi_m^{n+1}+\psi_m^n}{\Delta t} + c\frac{\psi_{m+1}^n-\psi_m^n}{\Delta x} = 0$

Для первой мы сделали вывод: Схема имеет порядок аппроксимации $O\left(\Delta t, \Delta x^2\right)$ и неустойчива. Для двух других порядок аппроксимации будет $O\left(\Delta t, \Delta x\right)$. Исследуем на устойчивость оставшиеся схемы:

$$\psi_m^n = \lambda^n e^{i\alpha m} \tag{3}$$

После подстановки, для второй схемы получим:

$$\frac{\lambda-1}{\Delta t} + \frac{1-e^{i\alpha}}{\Delta x} = 0 \tag{4}$$

$$\lambda = 1 - \frac{c\Delta t}{\Delta x} + \frac{c\Delta t}{\Delta x}\cdot e^{-i\lambda} = 1-\sigma+\sigma\cdot e^{-i\alpha} \tag{5}$$

Условие устойчивости:

$$|\lambda| \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \sigma \leqslant 1 \tag{6}$$

]

Для третьей схемы после той же подстановки:

$$\frac{\lambda-1}{\Delta t} + c\frac{e^{i\alpha}-1}{\Delta x} = 0 \tag{7}$$

$$\lambda = 1+\sigma-\sigma\cdot e^{i\alpha} \tag{8}$$

Условие устойчивости:

$$-1 \leqslant \sigma \leqslant 0 \tag{9}$$

Попробуем получить обобщение для двух последних схем:
Рассмотрим функции:

$$\varphi^+\left(c\right) = \frac{c+|c|}{2} \tag{10}$$

$$\varphi^-\left(c\right) = \frac{c-|c|}{2} \tag{11}$$

Тогда $\forall\, c:$

$$c = \varphi^{+}\left(c\right) + \varphi^{-}\left(c\right) \tag{12}$$

Рассмотрим схему вида:

$$\frac{\psi_m^{n+1} - \psi_m^n}{\Delta t} + \varphi^{+}\left(c\right) \cdot \frac{\psi_m^n - \psi_{m-1}^n}{\Delta x} + \varphi^{-}\left(c\right) \cdot \frac{\psi_{m+1}^n - \psi_m^n}{\Delta x} = 0 \tag{13}$$

Приведем схему к следующему виду:

$$\frac{\psi_m^{n+1} - \psi_m^n}{\Delta t} + c\frac{\psi_{m+1}^n - \psi_{m-1}^n}{2\Delta} - \frac{|c|}{2\Delta x} \cdot \left(\psi_{m+1}^n - 2\psi_m^n + \psi_{m-1}^n\right) = 0 \tag{14}$$

$$\psi_m^{n+1} = \psi_m^n + \frac{\sigma}{2} \cdot \left(\psi_{m+1}^n - \psi_{m-1}^n\right) - \frac{|\sigma|}{2} \cdot \left(\psi_{m+1}^n - 2\psi_m^n + \psi_{m-1}^n\right) \tag{15}$$

Вспомним схему Лакса-Вендроффа:

$$\frac{\psi_m^{n+1} - \psi_m^n}{\Delta t} + c\frac{\psi_{m+1}^n - \psi_{m-1}^n}{2\Delta x} - \frac{c^2\Delta t}{2\Delta x^2}\left(\psi_{m+1}^n - 2\psi_m^n + \psi_{m-1}^n\right) = 0 \tag{16}$$

Исследуем схему на устойчивость:

$$\lambda - 1 + \frac{\sigma}{2}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) - \frac{\sigma^2}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} - 2\right) = \lambda - 1 + i\sigma\sin\alpha - \sigma^2\left(\cos\alpha - 1\right) = 0 \tag{17}$$

$$\lambda = 1 - \sigma^2\left(\cos\alpha - 1\right) + i\sigma\sin\alpha \tag{18}$$

$$|\lambda|^2 = \left(1 - \sigma^2\left(\cos\alpha - 1\right)\right)^2 + \sigma^2\sin^2\alpha \tag{19}$$

$$|\lambda|^2 = 1 + \sigma^4 - \sigma^2 - 2\left(\sigma^4 - \sigma^2\right)\cos\alpha + \left(\sigma^4 - \sigma^2\right)\cos^2\alpha = 1 + \sigma^2\left(\sigma^2 - 1\right)\left(1 - \cos\alpha\right)^2 \tag{20}$$

$$1 + \sigma^2\left(\sigma^2 - 1\right)\left(1 - \cos\alpha\right)^2 \leqslant 1 \Rightarrow |\sigma| \leqslant 1 \tag{21}$$

2 Характеристики

Вернемся к уравнению:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + c\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \tag{22}$$

Характеристика – кривая в пространстве $\gamma \in (x, t)$ для которой $\psi\left(\gamma\right) = const$.
Для рассматриваемого уравнения *характеристика* определиться как:

$$x = ct \tag{23}$$

$$\psi_m^{n+1} = \psi\left(x_m - c\Delta t\right) \approx L\left(\psi_m^n, \psi_{m-1}^n, x_m - c\Delta t\right) = \psi_m^n\frac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}} + \psi_{m-1}^n\frac{x - x_m}{x_{m-1} - x_m} \tag{24}$$

$$L\left(\psi_m^n, \psi_{m-1}^n, x_m - c\Delta t\right) = \psi_m^n\frac{x_m - c\Delta t - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}} + \psi_{m-1}^n\frac{-c\Delta t}{x_{m-1} - x_m} = \left(1 - \sigma\right)\psi_m^n + \sigma\psi_{m-1}^n \tag{25}$$