Семинар 14

Варламов Антоний Михайлович

11 февраля 2022 г.

1 Решение ОДУ

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}\,(u,t) \\ \vec{u}\,(0) = \vec{u}_0 \end{cases} \tag{1}$$

Построим переход от дифференциальной к разностной формулировке. Для этого, в частности можно рассмотреть схему:

$$\frac{du}{dt} \approx \frac{u\,(t+\Delta t) - u\,(t)}{\Delta t} \tag{2}$$

Рассмотрим промежуток $[0;T]$. Введем стандартные обозначения:

$$\Delta t = \frac{T}{N_T}, \quad t_i = i \cdot \Delta t,\ i \in [0,N] \tag{3}$$

Для обозначения численного решения будем использовать y_i. Построим простейшую разностную схему:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_1}{\Delta t} = f\,(y_i, t_i)\,, \quad i \in [0,N]\,; \\ y_0 = u_0; \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим уравнение, где $f\,(u,t) = \lambda u$
Рассмотрим другое представление данной задачи:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} = \frac{f\,(y_{i+1}, t_{i+1}) + f\,(y_i, t_i)}{2} \tag{5}$$

Выразим y_{i+1}:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{2}\,(f\,(y_{i+1}, t_{i+1}) + f\,(y_i, t_i)) \tag{6}$$

$$f\,(u,t) = \lambda u \Rightarrow y_{i+1} = \frac{\left(1 + \frac{\Delta t \lambda}{2}\right)}{\left(1 - \frac{\Delta t \lambda}{2}\right)} y_i \tag{7}$$

Рассмотрим всю ту же задачу:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}\,(u,t) \\ \vec{u}\,(0) = \vec{u}_0 \end{cases} \tag{8}$$

Перейдем к операторному виду данного уравнения:

$$\hat{\mathbb{L}} = f \tag{9}$$

Где $\hat{\mathbb{L}} : U \to V,\ u \in D\,(\mathbb{L})\,, u \in U, f \in R\,(\mathbb{L})$
Операторное уравнение также может быть сведено к разностной схеме:

$$\mathbb{L}_n y_n = f_n, \quad y_n \in \mathbb{R}^{N_T}, f_n \in \mathbb{R}^{N_T} \tag{10}$$

Определим оператор проекции на сетку:

$$\mathbb{P}_h : U \to \mathbb{R}^{N_T} \tag{11}$$

Определение: *Решение разносного уравнения сходится к решению операторного уравнения, если*

$$\parallel \mathbb{P}_h u - y_n \parallel \leqslant C \cdot \Delta t^p \tag{12}$$

где p – порядок сходимости

Теорема *Если имеется аппроксимация, а также используемая схема устойчива, то имеется сходимость*

ОпределениеЪ *Разностная схема * аппроксимирует **, если:*

$$\parallel \mathbb{L}_h \left(\mathbb{P}_h u\right) - \mathbb{L} y_h \parallel \xrightarrow{\Delta t \to 0} 0 \tag{13}$$

$$\parallel \mathbb{L}_h \left(\mathbb{P}_h u\right) - \mathbb{L} y_h \parallel \leqslant C \Delta t^p \tag{14}$$

Рассмотрим выражение:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} = f\left(t_i, y_i\right) \tag{15}$$

Определим

$$r_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} - f\left(t_i, u_i\right) \tag{16}$$