Семинар 18

Варламов Антоний Михайлович

11 марта 2022 г.

1 Решение краевых задач

Раньше мы имели дело с решениями задач Коши, которые можно было интерпретировать как решение задачи эволюции. Краевые же задачи скорее относятся к задачам поиска стационарных решений.

$$\mathbb{L}y = f \tag{1}$$

$$\mathbb{L}y = \frac{d}{dx}\left(g\left(x\right)\frac{dy}{dx}\right) + q\left(x\right)\frac{dy}{dx} - p\left(x\right)y = f\left(x\right) \tag{2}$$

Для простоты будем рассматривать задачу в одномерном пространстве.

Можно провести некоторую интерпретацию составляющих уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(g\left(x\right)\frac{dy}{dx}\right) & - \text{Диффузионный процесс или процесс теплопереноса} \\ q\left(x\right)\frac{dy}{dx} & - \text{трение или перенос вещества скоростью} \\ p\left(x\right)y & - \text{сток или источник вещества} \end{cases} \tag{3}$$

Более общая постановка требует наличия граничных условий, постановка которых может быть произведена несколькими вариантами:

1. Граничные условия Дирихле
$$\begin{cases} y\left(a\right) = \varphi_a \\ y\left(b\right) = \varphi_b \end{cases} \tag{4}$$

2. Граничные условия Неймана
$$\begin{cases} \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=a} = \chi_a \\ \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=b} = \chi_b \end{cases} \tag{5}$$

3. Смешанные условия
$$dy\left(a\right) + \beta\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=a} = \Phi_a \tag{6}$$

Рассмотрим пример:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x\right), x \in \left[a, b\right]; \\ y\left(a\right) = \varphi_a; \\ y\left(b\right) = \varphi_b; \end{cases} \tag{7}$$

Для построения численного решения необходимо:

1. Сетка

$$h = \frac{b-a}{N} \tag{8}$$

$$x_i = a + ih, i \in \left[0, N\right] \tag{9}$$

2. Приближение второй производной

$$\frac{d^2}{dx^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2} = f_i, & i \in [2, N-2]\,; \\ \frac{y_2-2y_1+\varphi_a}{h^2} = f_1, & i = 1; \\ \frac{\varphi_b-2y_{N-1}+y_{N-2}}{h^2} = f_{N-1}, & i = N-1; \end{cases} \tag{11}$$

Данные выражения можно интерпретировать как систему уравнений, для которой существует матричное представление.

3. Матричное представление

$$\begin{cases} \vec{y} = \left(y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}\right)^T \\ \vec{f} = \left(f_1 - \frac{\varphi_a}{h^2}, f_2, \ldots, f_{N-2}, f_{N-1} - \frac{\varphi_b}{h^2}\right)^T \\ A \cdot \vec{y} = \vec{f} \end{cases} \tag{12}$$

Где матрица имеет вид:

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 1 & -2 \end{pmatrix}, (Ax, x) \leqslant 0 \tag{13}$$

4. Обращение матрицы и получение решения:

$$\vec{y} = A^{-1}\vec{f} \tag{14}$$

Рассмотрим чуть подробнее описанный метод. Для этого рассмотрим выражения:

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dx^2} = f\left(x\right) \\ u\left(a\right) = \varphi_a \\ u\left(b\right) = \varphi_b \end{cases} \tag{15}$$

$$r_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - f_i = \tag{16}$$

$$= \frac{u_i + hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' + \frac{h^3}{6}u_i''' + \frac{h^4}{24}u_i^{(IV)} - 2u_i + u_i - hu_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' - \frac{h^3}{6}u_i''' + \frac{h^4}{24}u_i^{(IV)}}{h^2} - f_i = \tag{17}$$

$$= u_i'' - f_i + \frac{h^2}{24}\left(u_i^{(IV)}\left(\theta_1\right) + u_i^{(IV)}\left(\theta_2\right)\right) \tag{18}$$

$$\max\left|r_i\right| = \parallel r_i \parallel_\infty \leqslant \frac{h^2}{24} \cdot 2M_4 \tag{19}$$

Рассмотрим теперь другие граничные условия:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} \approx \frac{u\left(a+h\right) - u\left(a\right)}{h} \tag{20}$$

В таком случае:

$$i = 0 : \frac{y_1 - y_0}{h} = \chi_a \tag{21}$$

$$i = 1 : \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} = f_1 \tag{22}$$

$$\vdots \tag{23}$$

Матрица приобретет другой вид:

$$
A' = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}
-1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\
1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\
0 & \dots & \dots & \dots & 1 & -2
\end{pmatrix} \tag{24}
$$

Что приводит к потери порядка аппроксимации. Методов борьбы с этим существует несколько, вот одни из них:

1. Взять лучшее приближение производной в определении граничных условий:

$$
\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} \approx \frac{1}{2h}\left(-3y_0 + 4y_1 - y_2\right) \tag{25}
$$

$$
A'' = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}
-3h & 2h & -h & \dots & \dots & 0\\
1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\
0 & \dots & \dots & \dots & 1 & -2
\end{pmatrix} \tag{26}
$$

2. *Метод фиктивной точки.* Идея данного метода заключается в следующем:

$$
i = 0 : \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} = f_0 \tag{27}
$$

С другой стороны,

$$
\frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = \chi_a \to y_{-1} = -2h\chi_a + y_1 \tag{28}
$$

$$
\frac{y_1 - 2y_0 + y_1 - 2h\chi_a}{h^2} = f_0 \tag{29}
$$

Для такой схемы матрица будет иметь вид:

$$
A''' = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix}
-2 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0\\
1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\
0 & \dots & \dots & \dots & 1 & -2
\end{pmatrix} \tag{30}
$$

Метод пристрелки. Рассмотрим уравнение вида:

$$
\begin{cases}
\frac{d^2u}{dx^2} - u^2 = f(x)\\
u(a) = \varphi_a\\
u(b) = \varphi_b
\end{cases} \tag{31}
$$

$$
\begin{cases}
\frac{d^2u}{dx^2} - u^2 = f(x)\\
u(a) = \varphi_a\\
u(b) = \varphi_b
\end{cases}
\to
\begin{cases}
\frac{du}{dx} = z\\
\frac{dz}{dx} - u^2 = f(x)\\
u(a) = \varphi_a\\
z(a) = \alpha
\end{cases} \tag{32}
$$

После перехода получаем $u(b)$, которое в общем случае

$$u(b) \neq \varphi_b \tag{33}$$

Однако, не стоит забывать, что на самом деле нами был введен дополнительный параметр, относительно которого необходимо решить уравнение:

$$u(b, \alpha) - \varphi_b = 0; \tag{34}$$