Семинар 24

Варламов Антоний Михайлович

6 мая 2022 г.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \hat{A}\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \vec{f} \tag{1}$$

В качестве примера возьмем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - 4 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = f\left(x,t\right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - 3\frac{\partial u}{\partial x} + 3 \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = g\left(x,t\right) \end{cases} \tag{2}$$

Первое, что стоит сделать – выполнить проверку на принадлежность системы к гиперболическим системам.

Для этого необходимо определить спектр матрицы $\hat{A}$.

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1, 6 \tag{3}$$

Система будет гиперболической, если $\lambda\left(\hat{A}\right) \in \mathbb{R}$.

Далее следует найти левые собственные векторы для матрицы $\hat{A}$:

$$\xi^T \hat{A} = \lambda \xi^T \tag{4}$$

В таком случае, после транспонирования:

$$\hat{A}^T \xi = \lambda \xi \tag{5}$$

Значит, левый собственные вектора – собственные вектора **транспонированной матрицы** – $\hat{A}^T$

Для нашей матрицы левые собственные вектора будут следующие:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \xi_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Домножим исходное векторное уравнение на левый собственный вектор:

$$\xi_1^T \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \xi_1^T \hat{A}\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \xi_1^T \vec{f} \tag{7}$$

После преобразования, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\xi_1^T \vec{V}\right) + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\xi_1^T \vec{V}\right) = \xi_1^T \tag{8}$$

В таком случае можно определить *инвариант Римана*:

$$R_1 = \xi_1^T \vec{V}, R_2 = \xi_2^T \vec{V} \tag{9}$$

В терминах инвариантов, получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1}{\partial t} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial R_1}{\partial x} = \xi_1^T \vec{f} \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial R_2}{\partial x} = \xi_2^T \vec{f} \end{cases} \tag{10}$$

Данные инварианты *сохраняются* на характеристиках.

Для нашего условия, получаем:

$$R_1 = \xi_1^T \vec{V} = u + v \tag{11}$$

$$R_2 = \xi_2^T \vec{V} = 3u - 4v \tag{12}$$

Данный шаг сводит задачу к решению двух уравнений переноса.
Далее, можно проанализировать граничные условия.
Рассмотрим несколько вариантов:

$$u(x,0) = \varphi_1; v(x,0) = \varphi_2 \tag{13}$$

1. $u(0,t) = \psi_1(t), v(0,t) = \psi_2(t)$
2. $u(0,t) = \psi_1(t), v(1,t) = \psi_2(t)$
3. $u(0,t) + v(0,t) = \psi_1(t), v(1,t) = \psi_2(t)$
4. $u(0,t) = \psi_1(t), v(1,t) + u(1,t) = \psi_2(t)$

Для первого уравнения на инварианты Римана характеристики направлены «справа налево». Для решения задачи, R_1 необходимо знать или уметь вычислить на правой границе. Для второго уравнения характеристики направлены «слева направо», а значит нужно знать или уметь вычислить R_2 на левой границе.

Анализом возможности выразить инварианты, приходим к выводу о корректности 2 и 4 граничных условий.

Дальше можно пытаться найти схемы с различными условиями:

1. Монотонную
2. 2-го порядка

Для монотонной схемы подойдет «Левый или Правый уголок» (В зависимости от знака λ):

$$\frac{(R_1)_j^{n+1} - (R_1)_j^n}{\Delta t} - \lambda_1 \frac{(R_1)_{j+1}^n - (R_1)_j^n}{\Delta x} = (f_1)_j^n \tag{14}$$

Для схемы второго порядка можно использовать схему Лакса Вендрофа:

$$\frac{(R_1)_j^{n+1} - (R_1)_j^n}{\Delta t} + \lambda_1 \frac{(R_1)_{j+1}^n - (R_1)_{j-1}^{n1}}{2\Delta x} - \frac{\lambda_1^2 \Delta t}{2\Delta x^2}\left((R_1)_{j+1}^n - 2(R_1)_j^n + (R_1)_{j-1}^n\right) = 0 \tag{15}$$

При условии $\frac{|\lambda_1|\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1$

1 Эллиптические уравнения

Рассмотрим уравнение Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta\psi = f \\ \psi_{\partial\Omega} = g \end{cases} \tag{16}$$

Рассмотрим решение в «коробке»

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = f^2 \tag{17}$$

Формально зададим сетку:

$$x_i = i \cdot \Delta x, \Delta x = \frac{1}{N_x} \tag{18}$$

$$y_i = i \cdot \Delta y, \Delta y = \frac{1}{N_y} \tag{19}$$

$$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}}{\Delta y^2} = f_{i,j} \tag{20}$$

Данная схема имеет порядок $O\left(\Delta x^2, \Delta y^2\right)$.
Данное уравнение можно записать в матричном виде:

$$\hat{A}\vec{\psi} = \vec{f} \tag{21}$$

$$\vec{\psi} = \left[\psi_{1,1}, \psi_{2,1}, \ldots, \psi_{N_x-1}, \psi_{1,2}, \psi_{2,2}, \ldots, \psi_{N_x-1,N_y-1}\right] \tag{22}$$

При таком определении матрица $\hat{A}$ становится 5-ти диагональной, а решение задачи сводится к обращению данной матрицы.