Семинар 4

Варламов Антоний Михайлович

29 сентября 2021 г.

1 СЛАУ

Итерационные методы:

$$x_{k+1} = x_k + P^{-1} \cdot r_k \tag{1}$$

где $r_k = b - Ax_k$ – вектор невязки.
$e_k = x - x_k$, В таком случае: $Ae_k = r_k \to r_k = 0 \to e_k = 0$
Необходимое и достаточное условие сходимости:

$$\rho \left(\mathbb{I} - P^{-1} A \right) < 1 \tag{2}$$

Достаточное условие:

$$\| \mathbb{I} - P^{-1} A \| < 1 \tag{3}$$

Кроме того, выполняется соотношение:

$$\| e_{k+1} \| = \| \left(\mathbb{I} - P^{-1} A \right) e_k \| \leqslant \| S \| \cdot \| e_k \| \tag{4}$$

$$\| e_{k+1} \| \leqslant q \cdot \| e_k \| \leqslant q^2 \| e_{k-1} \| \leqslant \dots \tag{5}$$

$$\rho (A) \leqslant \| A \| \tag{6}$$

$$\| e_{k+1} \|_2 \leqslant |\lambda_{\max} (S)| \leqslant \| e_k \|_2 \tag{7}$$

Метод Ричардсона:
$P^{-1} = \tau$
Работает для $= A^T > 0$; $0 < \tau < \frac{2}{\lambda_{\max}}$

$$\tau_{\text{оптим}} = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$$

$$q_{\text{оптим}} = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$$

Метод Якоби:
$P^{-1} = D^{-1}, \quad A = D + L + U$

$$x_{k+1} = x_k + D^{-1} r_k$$

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}, |a_{ij}|$$

Есть также метод Гаусса-Зейделя

2 Спектральные задачи

Общая постановка: $Ax = \lambda x$

$$Ax = \lambda x \to \sum_{i=0}^{n-1} b_i \lambda^i = 0$$

Как правило интерес представляет не полный спектр, а частные проявления:

1. $\max |\lambda_i|$
2. $\max \lambda_i$
3. $\min |\lambda_i|$
4. $\min \lambda_i$

Пусть $\lambda_i \in \mathbb{R}$, а также:

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \dots \tag{8}$$

$$A^k x = \sum \lambda_i^k \alpha_i z_i = \lambda_1^k \alpha_1 \left(z_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} z_2 + \dots \right) \to \lambda_1^k \alpha_1 z_1 \tag{9}$$

Выше описан так называемый степенной метод.
Идейно его можно описать как:

$$\begin{aligned} x_0 &= a && (10)\\ fork &= 1, \dots && (11)\\ x_k &= A \cdot x_{k-1} && (12)\\ \lambda_k &= \frac{(x_k, x_{k-1})}{(x_{k-1}, x_{k-1})} && (13) \end{aligned}$$

Однако такой метод очень быстро переполнит норму вектора. Для избежания такого исхода необходимо проводить нормировку вектора на каждой итерации.

Рассмотрим практическую задачу:

$$\begin{cases} T''_{xx} = f(x) \\ T(0) = \alpha \\ T(2\pi) = \beta \end{cases} \tag{14}$$

Идея решения – замена производных численными производными.

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} = f_i, i \in [2, N-2] \tag{15}$$

Для узла 1: $\frac{T_2 - 2T_1}{h^2} = f_1 - \frac{\alpha}{h}$,
Для узла N-1: $\frac{T_n - 2T_{N-1}}{h^2} = f_{n-2} - \frac{\beta}{h}$
Введем вектора:

$$f = \left(f_1 - \frac{\alpha}{h^2}, f_2, \dots, f_{N-2}, f_{N-1} - \frac{\beta}{h^2} \right)^T \tag{16}$$

В таком случае матрица будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{17}$$