Семинар №1

Варламов Антоний Михайлович

8 сентября 2021 г.

Содержание

1 Численное дифференцирование

Численное дифференцирование может потребоваться при:

1. Нет аналитической функции (пример – экспериментальные данные
2. Функция сложная
3. Решение дифференциальных уравнений

$$u'_t = F(u); \tag{1}$$

$$\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} = F(u(t)) \tag{2}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3}$$

Направленная разность (разностная схема)

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{4}$$

Центральная разностная схема

Анализ схемы:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(f(x) + f'(x)\cdot h + \frac{h^2}{2!}\cdot f''(x) - f(x)\right) = f'(x) + \frac{h}{2}\cdot f''(\Theta) \tag{5}$$

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = \frac{h}{2}\cdot |f''(\Theta)| \le \frac{h}{2} M_2 \tag{6}$$

$$M_2 = max\,|f''(x)| \tag{7}$$

Порядок сходимости:

$$err \le C \cdot h^p \tag{8}$$

p - порядок сходимости

Разностная схема – схема первого порядка

Анализ схемы центральных разностей

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \tag{9}$$

$$\frac{1}{2h}\left(f(x)+h\cdot f'(x)+\frac{h^2}{2}\cdot f''(x)+\frac{h^3}{6}\cdot f'''(\Theta_1)\right)- \tag{10}$$

$$\frac{1}{2h}\left(\left(f(x)-h\cdot f'(x)+\frac{h^2}{2}\cdot f''(x)-\frac{h^3}{6}\cdot f'''(\Theta_2)\right)\right)= \tag{11}$$

$$f'(x)-\frac{h^2}{12}\left(f'''(\Theta_1)+f'''(\Theta_2)\right) \tag{12}$$

$$\left|f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\right| = \frac{h^2}{12}\left|f'''(\Theta_1)+f'''(\Theta_2)\right| \le \frac{h^2}{6}\cdot M_3 \tag{13}$$

$$\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h} = \tag{14}$$

$$\frac{1}{4h^2}\left(f(x+2h)-f(x)-f(x)+f(x+2h)\right) \tag{15}$$

$$= \frac{1}{4h^2}\left(f(x+2h)-2f(x)+f(x+2h)\right) \tag{16}$$

Пусть имеется отрезок $[a;b]$. Наложим на отрезок сетку с шагом $h = \frac{b-a}{N}$. В таком случае:

$$x_i = a + h\cdot i, i \in [0, N] \tag{17}$$

$$x_{i+1} = x_i + h \tag{18}$$

$$x_{i-1} = x_i - h \tag{19}$$

Будем считать:

$$f(x_i) \equiv f_i \tag{20}$$

$$f'(x_i) = \frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h} \tag{21}$$

Для граничных точек можно использовать:

$$\frac{f_{i+1}-f_i}{h} \tag{22}$$

2 Метод неопределенных коэффициентов

Рассмотрим на примере. Определим значение f_i''
Пусть схема будет иметь вид:

$$f_i'' = \alpha f_{i+1} + \beta f_i + \gamma f_{i-1} + \delta \ldots = \tag{23}$$

$$\alpha\left(f_i + h\cdot f_i' + \frac{h^2}{2}f_i'' + \frac{h^3}{6}f_i''' + \frac{h^4}{24}f^{IV}(\Theta)\right) + \beta\cdot f_i + \gamma\left(f_i - h\cdot f_i' + \frac{h^2}{2}f_i'' - \frac{h^3}{6}f_i''' + \frac{h^4}{24}f^{IV}(\Theta)\right) = \tag{24}$$

$$(\alpha+\beta+\gamma) + h\cdot f_i'(\alpha-\gamma) + \frac{h^2}{2}\cdot(\alpha+\gamma) + \frac{h^3}{6}\cdot(\alpha-\gamma) + \frac{h^4}{24}\cdot f^{IV}(\alpha+\gamma) \tag{25}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \alpha-\gamma = 0 \\ \frac{h^2}{2}(\alpha+\gamma) = 1 \end{cases} \tag{26}$$

Решением данной системы являются:

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{h^2} \tag{27}$$

$$\beta = -\frac{2}{h^2} \tag{28}$$

В таком случае:

$$f_i'' \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} \tag{29}$$

$$\frac{h^4}{24} \cdot f^{IV} \left(\alpha + \gamma\right) \approx ch^2 M_4 \tag{30}$$