Семинар 21

Варламов Антоний Михайлович

8 апреля 2022 г.

1 Задача XIII.7.3

Рассмотрим схему

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\Delta t} = \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^{n+1} + y_{m+1}^n}{h^2} \tag{1}$$

Вспомним условие устойчивости для явной схемы: (на примере Явной схемы Эйлера)

$$\sigma^2 = \frac{\Delta t}{h} \leqslant \frac{1}{2} \tag{2}$$

Для неявной схемы:

$$\sigma^2 \leqslant 0 \tag{3}$$

1.1 Аналогичность схеме Эйлера

Преобразуем:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\Delta t} = \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^{n+1} + y_{m+1}^n}{h^2} - \frac{2y_m^n}{h^2} + \frac{2y_m^n}{h^2} \tag{4}$$

Получим:

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\Delta t} = \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2} - \frac{2}{h^2}\left(y_m^{n+1} - y_m^n\right) \tag{5}$$

$$\left(y_m^{n+1} - y_m^n\right)\left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2}{h^2}\right) = \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2} \tag{6}$$

$$\frac{1}{\Delta t'} = \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2}{h^2}\right) \tag{7}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t \cdot h^2}{2\Delta t + h^2} = \Delta t\left(\frac{1}{1 + \frac{2\Delta t}{h^2}}\right) \leqslant \Delta t \tag{8}$$

1.2 Исследование на устойчивость

Условие устойчивости для данной схемы:

$$\frac{\Delta t'}{h^2} \leqslant \frac{1}{2} \tag{9}$$

$$\frac{\Delta t}{h^2}\left(\frac{1}{1 + \frac{2\Delta t}{h^2}}\right) \leqslant \frac{1}{2} \tag{10}$$

$$\sigma^2 \cdot \left(\frac{1}{1 + 2\sigma^2}\right) \leqslant \frac{1}{2} \tag{11}$$

Данное условие выполняется для любых σ. Значит, схема Алена-Чена безусловно устойчива

1.3 Исследование на аппроксимацию

Вектор невязки:

$$r_m^n = \frac{\Delta t}{2} y_t' + y_x^{(IV)} \cdot \frac{\Delta x^2}{12} + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \cdot y_t' \dots \tag{12}$$

Значит, необходимо, чтобы:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \to 0 \tag{13}$$

Как правило, для подобных схем используется обозначение:

$$O\left(\Delta t, \Delta x^2, \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) \tag{14}$$

Подобными схемами являются Схема Ричардсона или исследуемая Схема Алана-Чена

Небольшое Лирическое Отступление

В реальности существует список методов, использующихся для построения аппроксимаций:

1. Finite element Method
2. Finite volume Method
3. Spectral element Method
4. Discontious Galerkin Method

2 Задача XIII.9.3

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} = \frac{y_{m-1}^n - 2y_m^n + y_{m+1}^n}{h^2} \tag{15}$$

$$\psi_t' = \psi_{xx}'' \tag{16}$$

$$\psi_{tt}'' = \psi_{xxt}''' = \psi_x^{(IV)} \tag{17}$$

Значит, получаем:

$$\left(\frac{\Delta t}{2} - \frac{\Delta x^2}{12}\right) \psi_x^{(IV)} \tag{18}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x^2}{6} \to O\left(\Delta t^2, \Delta x^4\right) \tag{19}$$

3 Задача XIII.9.4

Аппроксимируемое уравнение:

$$\psi_t' = \psi_x'' \tag{20}$$

Выпишем общий вид Схемы:

$$a \cdot \psi_{m-1}^{n+1} + b \cdot \psi_m^{n+1} + c \cdot \psi_{m+1}^{n+1} + d \cdot \psi_{m-1}^n + e \cdot \psi_m^n + f \cdot \psi_{m+1}^n \tag{21}$$

из разложения в ряд Тейлора, получаем:

$$\begin{cases} a + b + c + d + e + f = 0 \\ (a + b + c)\, dt = 1 \\ \frac{(a+c+d+f)dx^2}{2} = 1 \\ a + c + d - f = 0 \\ (a + c + d - f)\, dx^2 + 6dt\,(a - c) = 0 \\ 5\,(a + c + d + f)\, dx^4 + 60\,(a + c)\, dx^2 dt + 60\,(a + b + c)\, dt^2 = 0 \end{cases} \tag{22}$$

Для удобства введем обозначение:

$$(\mathbb{L}\psi)_m^n = \frac{\psi_{m-1}^n - 2\psi_m^n + \psi_{m+1}^n}{\Delta x^2} \tag{23}$$

$$(\delta_t \psi)_m^n = \frac{\psi_m^{n+1} - \psi_m^n}{\Delta t} \tag{24}$$

В таком случае, получим схему в виде:

$$\frac{1}{12}\left(\delta_t\psi\right)_{m+1}^n + \frac{5}{6}\left(\delta_t\psi\right)_m^n + \frac{1}{12}\left(\delta_t\psi\right)_{m-1}^n = \frac{1}{2}\Big(\left(\mathbb{L}\psi\right)_m^{n+1} + \left(\mathbb{L}\psi\right)_m^n\Big) \tag{25}$$

4 Задача №3

$$\frac{\psi_m^{n+1} - \psi_m^n}{\Delta t} = (1-\xi)\left(\mathbb{L}\psi\right)_m^{n+1} + \xi\left(\mathbb{L}\psi\right)_m^n \tag{26}$$

5 Задача №4

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{27}$$

Рассмотрим различные схемы:

1. $\frac{\psi_m^{n+1}+\psi_m^n}{\Delta t} + c\frac{\psi_{m+1}^n-\psi_{m-1}^n}{2\Delta x} = 0$
2. $\frac{\psi_m^{n+1}+\psi_m^n}{\Delta t} + c\frac{\psi_m^n-\psi_{m-1}^n}{\Delta x} = 0$
3. $\frac{\psi_m^{n+1}+\psi_m^n}{\Delta t} + c\frac{\psi_{m+1}^n-\psi_m^n}{\Delta x} = 0$

Рассмотрим данные схемы:

1.

$$\psi_m^n = \lambda^n \cdot e^{i\alpha m} \tag{28}$$

$$\frac{\lambda - 1}{\Delta t} + c\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2\Delta x} = 0 \tag{29}$$

$$\lambda = 1 + \frac{c\Delta t}{\Delta x} i \sin\alpha \tag{30}$$

$$|\lambda| = 1 + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}\sin^2\alpha \geqslant 1 \tag{31}$$

Значит данная схема является *неустойчивой*