Семинар 6

Варламов Антоний Михайлович

20 октября 2021 г.

1 Поиск корней уравнений

Рассмотрим задачу $f(x) = 0, x \in [a, b]$
Данная задача решается точно для:

1. Некоторые элементарные функции
2. $P^i, i = \{1, 2, 3, 4\}$

Возникает необходимость в приближенных алгоритмах. Будем рассматривать итерационные алгоритмы:

$$x_k \xrightarrow{k \to \infty} x \tag{1}$$

Хочется найти хотя бы один корень, значит нужно определить так называемую *область локализации корня.*

1. Метод деления пополам Пусть x^* – корень, $x^* \in [a, b]\,, \quad f(a) f(b) < 0, \quad f \in C_{[a,b]}$
Пусть $a_0 = a, b_0 = b$. $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$.
Рассмотрим выражение $f(a_0) f(c_0)$.

$$f(a_0) f(c_0) <\to a_1 = a_0, b_1 = c_0, c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \tag{2}$$

$$f(c_0) f(b_0) <\to a_1 = c_0, b_1 = b_0, c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \tag{3}$$

На итерации 0: $|x - x^*| \leqslant \frac{|a_0 - b_0|}{2}$.
На итерации 1: $|x - x^*| \leqslant \frac{|a_1 - b_1|}{2} = \frac{|a_0 - b_0|}{2^2}$.
На итерации k: $|x - x^*| \leqslant \frac{|a_0 - b_0|}{2^k}$
Критерии остановки:

1. $|f(x_k)| < \varepsilon$
2. $\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < \varepsilon$

2. Метод сжимающих отображений Введем некоторые определения:

ξ – *неподвижная точка* некоторого отображения $g(x)$, если $g(\xi) = \xi$
Пусть $f(x) = 0 \Rightarrow f(x) \equiv x - g(x)$.
Значит исходная задача свелась к задаче поиска стационарных точек отображения: $\xi^{k+1} = g\left(\xi^k\right)$
Если $\xi^k \xrightarrow{\xi} \Rightarrow x^* = \xi$

$g(x)$ – *сжимающее* при $x \in [a, b]$, если:

$$\begin{cases} \forall\ x \in [a, b]\, g(x) \in [a,] \\ |g(x) - g(y)| \leqslant q\, |x - y|\, \forall\ x, y \in [a, b]\,, q < 1 \end{cases} \tag{4}$$

Теорема: *Если $g(x)$ – сжимающее отображение на $[a, b]$, то*

1. $\exists! \xi \in [a, b] : \xi = g(\xi)$

2. $\xi^{k+1} = g\left(\xi^k\right), \quad \xi^k \xrightarrow{k\to\infty} \xi$

Достаточные условия сжимающего отображения:

$$\begin{cases} g\left(x\right) \in [a,b] \ \ \forall\ x \in [a,b] \\ \forall\ x \in [a,b]\, |g'\left(x\right)| < 1 \end{cases} \tag{5}$$

Рассмотрим пример:

$$x - \ln\left(x+2\right) = 0$$

Найдем область локализации корня:

$$x = 2 : 2 - \ln 4 > 0 \tag{6}$$

$$x = 1 : 1 - \ln 3 < 0 \tag{7}$$

Значит $x^* \in [1,2]$
Построим итерационный процесс:

$$x^k = \ln\left(x^k + 2\right) = g\left(x\right) \tag{8}$$

Выполняются достаточные условия:

$$\left|\frac{1}{x+2}\right| \leqslant \frac{1}{3} < 1, \quad \ln\left(x+2\right) \in [1,2] \tag{9}$$

Общий алгоритм действий:

1. Локализуем корни
2. $f\left(x\right) = 0 \to x = g\left(x\right)$
3. Доказать, что отображение является сжимающим (достаточные условия выполнены, либо уточняется область локализации, либо выбирается другое отображение)
4. Сколько итераций до ε точности $\left(\left|x^k - x^*\right| < q^k\left|a-b\right| < \varepsilon\right.$