Tema 2. Interpolación polinómica

2. Interpolación polinómica

- 2.1 Polinomio de Taylor
- 2.2 Polinomio interpolador de Lagrange
  - Formulación de Lagrange
  - Formulación de Newton
- 2.3 Polinomio interpolador de Hermite
- 2.4 Interpolación a trozos

Polinomio de Taylor

Ejemplo

- Para calcular la probabilidad de que una variable aleatoria con distribución normal tome un valor determinado es necesario calcular los valores de la función

$$f(x) = \int_0^x e^{-s^2} ds. \tag{1}$$

Calcular los valores de (1) no es fácil.

- Calcular los valores de la función y sus derivadas sucesivas en $x = 0$ sí lo es.

$$\begin{array}{rclrcl} f(x) & = & \int_0^x e^{-s^2} ds, & f(0) & = & 0, \\ f'(x) & = & e^{-x^2}, & f'(0) & = & 1, \\ f''(x) & = & -2xe^{-x^2}, & f''(0) & = & 0, \\ f'''(x) & = & -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}, & f'''(0) & = & -2. \end{array}$$

Polinomio de Taylor

- Nos planteamos encontrar un polinomio P que cumpla

$$P(0) = 0, P'(0) = 1, P''(0) = 0, P'''(0) = -2. \tag{2}$$

- Si P interpola a f ambas funciones no serán muy diferentes $\longrightarrow$ se evalúa P en lugar de f $\longrightarrow$ más sencillo
- ¿Podremos hallar un polinomio que cumpla (2)?

Polinomio de Taylor

El problema de interpolación de Taylor

Dados un natural n, un punto x_0 de la recta y los valores de una función y sus n primeras derivadas en x_0

$$f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0),$$

encontrar un polinomio $P(x)$ de grado $\leq n$ que verifique

$$P(x_0) = f(x_0),\ P'(x_0) = f'(x_0), \ldots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Dicho polinomio se conoce como polinomio de Taylor.

Existencia y unicidad

El problema de interpolación de Taylor tiene solución única, que se llama polinomio de Taylor de grado $\leq n$ de la función en el punto x_0.

Polinomio de Taylor

- Buscamos un polinomio P de grado $\leq n$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

que verifique

$$P(x_0) = f(x_0), P'(x_0) = f'(x_0), \ldots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

$\longrightarrow$ sistema lineal de $n+1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas $\longrightarrow$ resulta laborioso

- Más sencillo, como combinación lineal de polinomios $(x - x_0)^i/i!$

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2/2! + \cdots + b_n(x - x_0)^n/n!,$$

Derivando P e imponiendo las condiciones, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales en los b_i con solución única y resolución trivial. Así obtenemos la forma usual del polinomio de Taylor

Polinomio de Taylor

$$\begin{aligned} P_{n,x_0}(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \\ &+ f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} \end{aligned}$$

Ejemplo 1. Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 en $x_0 = 0$ de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

$$\begin{array}{rcrrcr} f(x) &=& \operatorname{sen} x, & f(0) &=& 0, \\ f'(x) &=& \cos x, & f'(0) &=& 1, \\ f''(x) &=& -\operatorname{sen} x, & f''(0) &=& 0, \\ f'''(x) &=& -\cos x, & f'''(0) &=& -1, \end{array}$$

Entonces,

$$P_{3,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Teorema de Taylor

Sea $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$ y existe $f^{(n+1)}$ en $[a,b]$. Sea $x_0 \in [a,b]$. Entonces, para cada $x \in [a,b]$ existe ξ entre x_0 y x tal que

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x),$$

con

$$P_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \; R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

$P_{n,x_0}(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n en x_0 y $R_{n,x_0}(x)$ es el resto en la forma de Lagrange.

Se verifica

1. $f(x_0) = P_{n,x_0}(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0) = P_{n,x_0}^{(n)}(x_0)$.
2. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{|f(x) - P_{n,x_0}(x)|}{(x-x_0)^n} = 0.$

Error del polinomio de Taylor

El error cometido al aproximar $f(x)$ por $P_{n,x_0}(x)$ en un entorno de x_0 viene dado por $R_{n,x_0}(x)$

$$R_{n,x_0}(x) = f(x) - P_{n,x_0}(x).$$

Notación de Landau

- El resto del polinomio de Taylor de grado n en x_0 es una O grande de $(x - x_0)^n$ (de Landau)

$$R_{n,x_0} = O((x - x_0)^{n+1}).$$

- La forma de *entender* lo que significa la notación O grande es considerar que si $f = O((x - x_0)^n)$, f se comporta como un polinomio escrito en potencias de $(x - x_0)$ cuyo término de menor grado es de la forma $A(x - x_0)^n$.
- Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ en un entorno de x_0, entonces $P_{n,x_0}(x)$ es el único polinomio de grado menor o igual a n que verifica

$$f(x) - P_{n,x_0}(x) = O((x - x_0)^{n+1}).$$

Ejemplo 1. Utilizar polinomio de Taylor obtenido para aproximar el valor de f en $x = 1/5$. Calcular el resto en la forma de Lagrange y acotar el error.

Si utilizamos el polinomio para aproximar el valor en $x = 0.2$

$$f(0.2) = \operatorname{sen} 0.2 \approx P_{3,0}(0.2) = \frac{149}{750}.$$

El resto

$$R_{3,0}(x) = \operatorname{sen}(\xi)\frac{x^4}{4!} = O(x^4).$$

ya que

$$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x, \Longrightarrow f^{(4)}(\xi) = \operatorname{sen}(\xi).$$

El error cometido

$$\operatorname{sen} 0.2 - \frac{149}{750} = \operatorname{sen}(\xi)\frac{(0.2)^4}{4!}$$

con ξ entre 0 y 0.2. Acotando

$$\left|\operatorname{sen} 0.2 - \frac{149}{750}\right| = \frac{(0.2)^4}{4!}|\operatorname{sen}(\xi)| \leq \frac{(0.2)^4}{4!} = \frac{1}{15000}.$$

Una cota del error es $\dfrac{1}{15000}$.

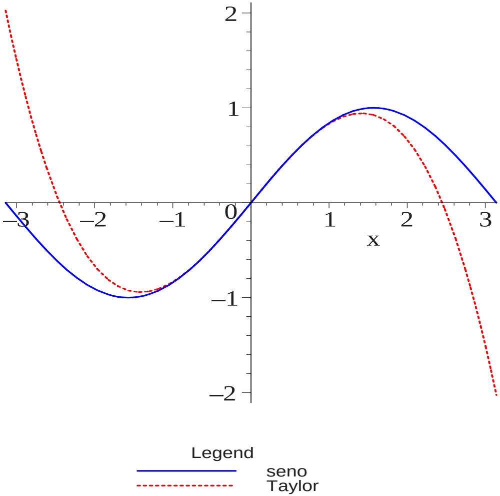
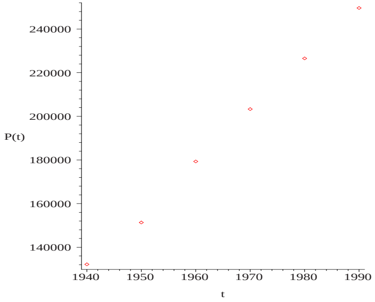


Figura 1: Función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $P_{3,0}(x)$

2.2 Polinomio Interpolador de Lagrange

Ejemplo 2. Población de E.U. entre 1940 y 1990

Año	1940	1950	1960
Población	132.165	151.326	179.323
Año	1970	1980	1990
Población	203.302	226.542	249.633



Ejemplo 3. Función seno

x	60	65	70	75	80
$\operatorname{sen} x$	0.866025	0.906308	0.939693	0.965926	0.984808

Cuadro: Función seno

Objetivo

- Aproximar $f(x)$ mediante un polinomio que coincida con la función en un número de puntos (nodos) de un intervalo.

Teorema de aproximación de Weierstrass

Sea f continua en $[a, b]$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $P(x)$ definido en $[a, b]$ con la propiedad

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

- ¿Polinomios de Taylor? No. Proporcionan aproximaciones locales.

Ejemplo 4. Polinomios de Taylor

Los seis primeros polinomios de Taylor en $x_0 = 0$ para $f(x) = e^x$

$$P_0(x) = 1, \;\; P_1(x) = 1 + x, \;\; P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

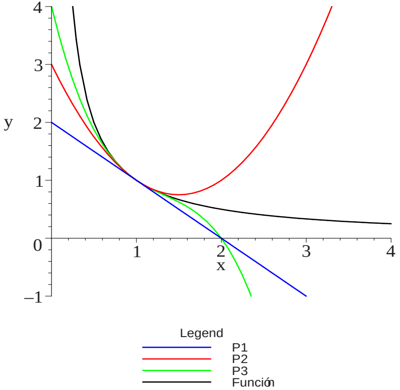
$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \;\; P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24},$$

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}.$$

En general:

- La aproximación es peor para valores de x alejados de x_0.
- La aproximación es mejor para n grande: utilizar polinomios de grado elevado?

Ejemplo 5. Polinomios de Taylor



Polinomios de Taylor en $x_0 = 1$ para $f(x) = 1/x$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$P_n(3)$	1	-1	3	-5	11	-21	43	-85

Cuadro: Valores de los polinomios de Taylor de $f(x) = 1/x$ para $x = 3$

Limitación

En los polinomios de Taylor toda la información sobre f se concentra en $x_0 \longrightarrow$ aproximación en puntos cercanos a x_0

Solución

Construir polinomios que incluyan información en diversos puntos $\longrightarrow$ polinomios interpoladores

El problema de interpolación de Lagrange

Dados un natural n y $n+1$ puntos

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

y los valores de $f(x)$

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$$

encontrar un polinomio $P_n(x)$ de grado $\leq n$ que verifique

$$P_n(x_0) = f(x_0), \;\; P_n(x_1) = f(x_1), \dots, P_n(x_n) = f(x_n).$$

Dicho polinomio se conoce como polinomio interpolador de Lagrange.

Existencia y unicidad

El polinomio interpolador de Lagrange que interpola a $f(x)$ en $n+1$ nodos dos a dos distintos es único.

Buscamos un polinomio P_n de grado $\leq n$

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

que verifique

$$P_n(x_0) = f(x_0), \;\; P_n(x_1) = f(x_1), \ldots, P_n(x_n) = f(x_n).$$

Esto da lugar a un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas

- Resolviendo el sistema obtenemos el polinomio $\longrightarrow$ resulta laborioso
- Existen formas más adecuadas para obtener el polinomio que ahorran la resolución del sistema:
  1. Formulación de Lagrange.
  2. Formulación de Newton.

Formulación de Lagrange

Buscamos el polinomio interpolador como combinación lineal de $n+1$ polinomios $l_i(x)$ de grado n

$$P_n(x) = b_0 l_0(x) + b_1 l_1(x) + \cdots + b_n l_n(x)$$

tales que

$$\left.\begin{array}{rcl} l_i(x_i) & = & 1, \\ l_i(x_j) & = & 0, \quad j \neq i. \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$P_n(x_i) = b_i l_i(x_i) =$$

$$\boxed{b_i = f(x_i).}$$

- Para que se verifique $l_i(x_j) = 0,\ j \neq i$

$$\boxed{l_i(x) = c_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j).}$$

- Para que se verifique $l_i(x_i) = 1$,

$$\boxed{c_i = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)^{-1}.}$$

Polinomio interpolador en la forma de Lagrange

$$P_n(x) = f(x_0)l_0(x) + \cdots + f(x_n)l_n(x),$$

donde

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

l_i es el i-ésimo coeficiente polinomial de Lagrange (de grado n)

Ejemplo 6 Construir el polinomio interpolador de orden 2 para $f(x) = 1/x$ en los nodos

$$x_0 = 2, x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 4.$$

Los polinomios l_i

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x-5/2)(x-4)}{(2-5/2)(2-4)}, \\ l_1(x) &= \frac{(x-2)(x-4)}{(5/2-2)(5/2-4)}, \\ l_2(x) &= \frac{(x-2)(x-5/2)}{(4-2)(4-5/2)}, \end{aligned}$$

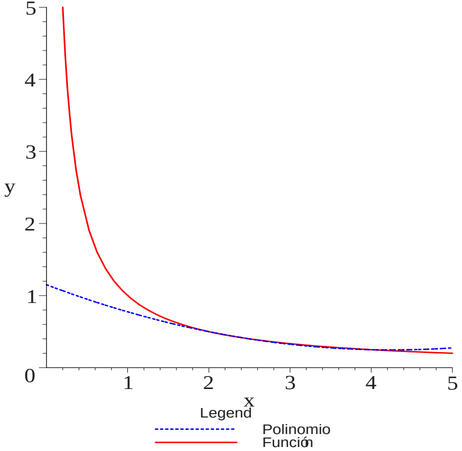
y el polinomio interpolador es

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(x-5/2)(x-4) - \frac{8}{15}(x-2)(x-4) + \frac{1}{12}(x-2)(x-5/2).$$

Para aproximar el valor de $f(3) = 1/3$:

$$f(3) \simeq P_2(3) = 0.325.$$

Comparando con el polinomio de Taylor (Ejemplo 5) el resultado es considerablemente mejor.



Polinomio interpolador $P_2(x)$ para $f(x) = 1/x$

Coste computacional de la formulación de Lagrange

- En la forma de Lagrange el polinomio interpolador no admite la formulación de Horner.
- La forma más eficiente consiste en escribir cada $l_i(x)$

$$l_i(x) = \omega(x) \cdot \frac{1}{x - x_i} \cdot \frac{1}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)},$$

siendo

$$\omega(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n).$$

Entonces

$$P_n(x) = \omega(x) \cdot \left[\frac{F_0(x)}{x - x_0} + \cdots + \frac{F_n(x)}{x - x_n} \right],$$

con

$$F_i(x) = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

$$Total = n^2 + 3n + 2 \ \text{ productos}$$

Error del polinomio interpolador de Lagrange

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_n). \tag{3}$$

para algún número (desconocido) ε que está en el intervalo más pequeño que contiene todos los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y x.

- La fórmula del error recuerda a la del polinomio de Taylor.
- El uso de la fórmula (3) se limita a funciones cuyas derivadas tienen cotas conocidas

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c_{n+1} \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_n)}{(n+1)!}$$

Ejemplo 7 Comparemos las aproximaciones a $f(1.5)$ obtenidas con varios polinomios de Lagrange.

x	$f(x)$
1.0	0.7651970
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

- Polinomio lineal: $x_0 = 1.3$ y $x_1 = 1.6$

$$P_1(1.5) = 0.5102968.$$

- Polinomio cuadrático 1: $x_0 = 1.3$, $x_1 = 1.6$ y $x_2 = 1.9$

$$P_2(1.5) = 0.5112857.$$

- Polinomio cuadrático 2: $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.3$ y $x_2 = 1.6$

$$\hat{P}_2(1.5) = 0.5124715.$$

- Polinomio cúbico 1: $x_0 = 1.3$, $x_1 = 1.6$, $x_2 = 1.9$, y $x_3 = 2.2$

$$P_3(1.5) = 0.5118302.$$

- Polinomio cúbico 2: $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 1.6$ y $x_3 = 1.9$

$$\hat{P}_3(1.5) = 0.5118127.$$

- Polinomio de cuarto orden: Todos los nodos

$$P_4(1.5) = 0.5118200.$$

- ¿$P_4(1.5)$ mejor aproximación?
- Valor exacto $f(1.5) = 0.5118277$.
- Errores

$$\begin{aligned}
|P_1(1.5) - f(1.5)| &\approx 1.5 \times 10^{-3}, \\
|P_2(1.5) - f(1.5)| &\approx 5.4 \times 10^{-4}, \\
|\hat{P}_2(1.5) - f(1.5)| &\approx 6.4 \times 10^{-4}, \\
|P_3(1.5) - f(1.5)| &\approx 2.5 \times 10^{-6}, \\
|\hat{P}_3(1.5) - f(1.5)| &\approx 1.5 \times 10^{-5}, \\
|P_4(1.5) - f(1.5)| &\approx 7.7 \times 10^{-6}.
\end{aligned}$$

- $P_3(1.5)$ es la aproximación más exacta.
- No podemos emplear el término del error para acotar los errores.

Ventajas de la formulación de Lagrange

- No es necesario resolver un sistema lineal $(n+1) \times (n+1)$

Desventajas de la formulación de Lagrange

- No admite la aplicación del algoritmo de Horner $\longrightarrow$ importante coste computacional.
- Si se añade un nuevo nodo x_{n+1} hay que recalcular cada $l_i(x)$.
- $l_i(x)$ depende de x.

Conclusión

Los polinomios con la formulación de Lagrange se usan poco en la práctica. Son teóricamente muy útiles para deducir fórmulas de integración numérica.

Alternativa $\longrightarrow$ Formulación de Newton

Formulación de Newton

Construiremos el polinomio hasta un cierto grado en pasos sucesivos

1. P_0 de grado ≤ 0 tal que
$$P_0(x_0) = f(x_0).$$
2. P_1 de grado ≤ 1 tal que
$$\begin{aligned} P_1(x_0) &= f(x_0), \\ P_1(x_1) &= f(x_1). \end{aligned}$$
3. $\ldots$
4. P_i de grado $\leq i$ tal que
$$P_i(x_j) = f(x_j) \;\; j = 0, \ldots, i.$$

1. $P_0(x) = c_0$
$$P_0(x) = c_0 = f(x_0) \Rightarrow$$
$$\boxed{P_0(x) = f(x_0).}$$

2. $P_1(x) = P_0(x) + Q_1(x)$ con $Q_1(x)$ grado ≤ 1
$$Q_1(x_0) = 0$$
$$\Longrightarrow Q_1(x) = c_1(x - x_0).$$
$$\Longrightarrow$$
$$\boxed{P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0).}$$

3. $\ldots$

4. $P_n(x) = P_{n-1}(x) + Q_n(x)$ con $Q_n(x)$ grado $\leq n$
$Q_n(x_0) = \cdots = Q_n(x_{n-1}) = 0$
$$\Longrightarrow Q_n(x) = c_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_n(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &+ \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}). \end{aligned}}$$

Observaciones

(i) Cada sumando tiene significado.

(ii) No supone esfuerzo obtener un polinomio de grado $k+1$ a partir de uno de grado k.

¿Cómo obtener los c_i? $\longrightarrow$ diferencias divididas

Diferencias divididas

Sea f una función definida en $k+1$ nodos $x_0, \dots, x_k$. Se define la diferencia dividida de orden k como el coeficiente de x^k en el polinomio interpolador de Newton

$$c_k = f[x_0, \dots, x_k].$$

Polinomio interpolador en la forma de Newton

Con esta notación podemos formular el polinomio interpolador

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \\ &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\ &+ \cdots \\ &+ f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

donde

$$f[x_i] = f(x_i),$$

y las diferencias divididas de orden k se pueden obtener a partir de las de orden $k - 1$

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

Tabla de diferencias divididas

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$
x_0	$f(x_0)$			
		$\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f(x_1)$		$\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$\dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_2	$f(x_2)$		$\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		
x_3	$f(x_3)$			

Ejemplo 8

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \ldots, x_i]$	$f[x_{i-4}, \ldots, x_i]$
1.0	0.7865197				
		-0.5547790			
1.3	0.6200860		0.009721667		
		-0.5489460		-0.06573889	
1.6	0.4554022		-0.0494433		0.1115062
		-0.5786120		0.0680685	
1.9	0.2818186		0.0118183		
		-0.5715210			
2.2	0.1103623				

$$
\begin{aligned}
P_4(x) \quad = \quad & 0.7865197 - 0.5547790(x-1.0) + 0.009721667(x-1.0)(x-1.3) \\
- \quad & 0.06573889(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6) \\
+ \quad & 0.1115062(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9).
\end{aligned}
$$

Evaluando en $x = 1.5$ se tiene $P_4(1.5) = 0.5112061.$

Coste computacional de la formulación de Newton

- Admite algoritmo de Horner

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1)(c_2 + (x - x_2)) \\
(c_3 &+ \cdots + (x - x_{n-2})(c_{n-1} + (x - x_{n-1})c_n))) \cdots).
\end{aligned}
$$

$$
Total = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} \ \text{productos.}
$$

- Con la formulación de Lagrange en la forma más económica $\longrightarrow$ $n^2 + 3n + 2$. Requiere la *mitad* de tiempo que la formulación de Lagrange $\longrightarrow$ importante ahorro computacional

- En la formulación de Lagrange los l_i dependen de x; en la formulación de Newton las diferencias divididas no dependen de x si no de $x_0, \ldots, x_n$.

2.3 Polinomio interpolador de Hermite

Dados un natural n y $n+1$ puntos

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

y los valores de $f(x)$ $\quad f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$

y $f'(x)$ $\quad f'(x_0), f'(x_1), \dots, f'(x_n)$

encontrar un polinomio $H_{2n+1}(x)$ de grado $\leq 2n+1$ que verifique

$$\begin{aligned} H_{2n+1}(x_0) &= f(x_0), \dots, H_{2n+1} = f(x_n) \\ H'_{2n+1}(x_0) &= f'(x_0), \dots, H'_{2n+1} = f'(x_n). \end{aligned}$$

Dicho polinomio se conoce como polinomio interpolador de Hermite.

Existencia y unicidad

El polinomio interpolador de Hermite que interpola a $f(x)$ y $f'(x)$ en $n+1$ nodos dos a dos distintos es único.

Construcción a partir de la formulación de diferencias divididas

1. A partir de los $n+1$ nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, se genera una nueva sucesión de $2n+2$ nodos $z_0, \ldots, z_{2n+1}$

$$z_{2i} = z_{2i+1} = x_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

2. Se construye la tabla de diferencias divididas teniendo en cuenta

$$f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(z_{2i}) = f'(x_i).$$

3. El resto de diferencias divididas se calculan igual que habíamos visto.
4. A partir de la tabla de diferencias divididas se construye el polinomio de Hermite.

Tabla de diferencias divididas

z_i	$f[z_i]$	$f[z_{i-1}, z_i]$	$f[z_{i-2}, z_{i-1}, z_i]$	$f[z_{i-3}, z_{i-2}, z_{i-1}, z_i]$
$z_0 = x_0$	$f(x_0)$			
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$		
$z_1 = x_0$	$f(x_0)$		$\dfrac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0}$	
		$\dfrac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$		$\dfrac{f[z_1, z_2, z_3] - f[z_0, z_1, z_2]}{z_3 - z_0}$
$z_2 = x_1$	$f(x_1)$		$\dfrac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1}$	
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$		
$z_3 = x_1$	$f(x_1)$			

Polinomio interpolador de Hermite

$$H_{2n+1} = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, \ldots, z_k](x - z_0) \cdots (x - z_{k-1}).$$

Error

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!}(x - x_0)^2 \cdots (x - x_n)^2.$$

para algún número (desconocido) ε que está en el intervalo más pequeño que contiene todos los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y x.

Ejemplo 9. A partir de la tabla, obtener el polinomio de Hermite y utilizarlo para aproximar el valor en $x = 1.5$

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1.3	0.6200860	-0.5220232
1	1.6	0.4554022	-0.5698959
2	1.9	0.2818186	-0.5811571

1.3	0.6200860					
		-0.5220232				
1.3	0.6200860		-0.08974267			
		-0.5489460		0.0663657		
1.6	0.4554022		-0.0698330		0.0026663	
		-0.5698959		0.0679655		-0.0027747
1.6	0.4554022		-0.02905367		0.0010020	
		-0.5786120		0.0685667		
1.9	0.2818186		-0.008483667			
		-0.5811571				
1.9	0.2818186					

Con la tabla anterior construimos el polinomio de Hermite

$$\begin{aligned} H_5(x) &= 0.6200860 + (x-1.3)(-0.5220232) + (x-1.3)^2(-0.0894267) + \\ &+ (x-1.3)^2(x-1.6)(0.0663657) + (x-1.3)^2(x-1.6)^2(0.0026663) + \\ &+ (x-1.3)^2(x-1.6)^2(x-1.9)(-0.0027747), \end{aligned}$$

y lo usamos para aproximar el valor en $x = 1.5$

$$\begin{aligned} H_5(1.5) &= 0.6200860 + (1.5-1.3)(-0.5220232) + (1.5-1.3)^2(-0.0894267) + \\ &+ (1.5-1.3)^2(1.5-1.6)(0.0663657) + (1.5-1.3)^2(1.5-1.6)^2(0.0026663) + \\ &+ (1.5-1.3)^2(1.5-1.6)^2(1.5-1.9)(-0.0027747) \\ &= 0.5118277. \end{aligned}$$

Interpolación polinómica a trozos

- Nos planteamos si el error

$$f(x) - P_n(x)$$

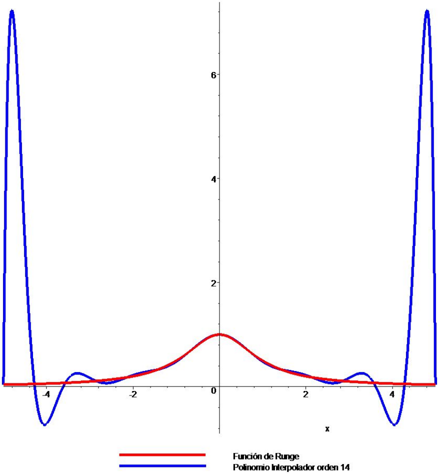
puede hacerse arbitrariamente pequeño al ir incrementando el grado del polinomio.

- Aún más ¿será cierto

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)?$$

- La respuesta es en general negativa: incrementar el grado del polinomio interpolador no siempre es recomendable.

Ejemplo 10. Función de Runge



Función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y polinomio interpolador en 15 nodos equiespaciados en $-5 \leq x \leq 5$. No hay convergencia para $|x| > 3.6$.

Conclusión

Incrementar el grado del polinomio interpolador no siempre es aconsejable

1. Se incrementa considerablemente el coste computacional.
2. La naturaleza oscilatoria de los polinomios de alto grado hace que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) \neq f(x), \ \ \forall x.$$

Solución $\longrightarrow$ Interpolación a trozos o segmentaria.

Estrategia

Dividir el intervalo de partida en subintervalos y en cada uno de ellos construir un polinomio interpolador de grado bajo.

Interpolación lineal a trozos

- Consiste en unir una serie de puntos

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$

  mediante segmentos de rectas.

- Buscamos una función $S(x)$ lineal a trozos que verifique

$$S(x_0) = f(x_0), \;\; S(x_1) = f(x_1), \ldots, S(x_n) = f(x_n).$$

- En el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ el segmento de recta $S^i(x)$ coincide con el polinomio interpolador de Lagrange en x_{i-1}, x_i

$$S^i(x) = f[x_{i-1}] + f[x_{i-1}, x_i](x - x_{i-1}), \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Error

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{h^2}{8} k_2 = O(h^2), \quad x \in [a, b].$$

con $|f''(x)| \leq k_2$ para $x \in [x_{i-1}, x_i]$ y

$$h = \text{máx}(x_i - x_{i-1})$$

Convergencia

Si designamos por $S_0, S_1, \ldots S_n$ la sucesión de interpolantes obtenidos al ir refinando la partición (es decir, para $h_0 > \cdots > h_n$) se tiene

$$\lim_{n\to\infty (h\to 0)} S_n(x) = f(x) \longrightarrow \text{ CONVERGENCIA.}$$

La cota involucra $h^2 \longrightarrow$ convergencia cuadrática.

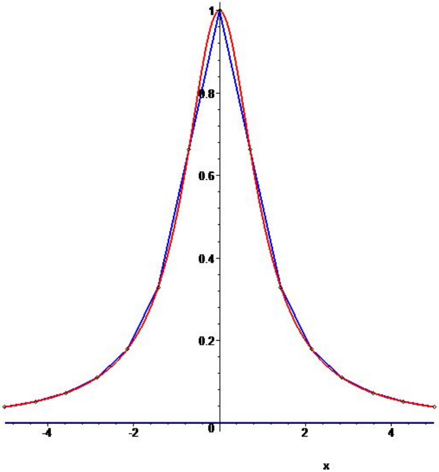
Ventajas

1. El coste de obtener polinomios lineales es menor que el de obtener P_n con n elevado.
2. No está garantizado
$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$
y, sin embargo,
$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$$

Desventaja

1. La función interpolante no es suave: no se garantiza diferenciabilidad en los nodos, sólo continuidad.

Ejemplo 10. Función de Runge



Función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y polinomio interpolador lineal a trozos en 15 nodos equiespaciados en $-5 \leq x \leq 5$.

Interpolación cuadrática a trozos

- Consiste en unir una serie de puntos

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$$

  mediante segmentos de parábolas.

- Buscamos una función $Q(x)$ cuadrática a trozos que verifique

$$Q(x_0) = f(x_0), Q(x_1) = f(x_1), \ldots, Q(x_n) = f(x_n).$$

- Si en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ imponemos además

$$Q(x_i^*) = f(x_i^*) \quad \text{con} \quad x_i^* = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

  obtenemos porciones de parábolas $Q^i(x)$ que coinciden con el polinomio interpolador de Lagrange en x_{i-1}, x_i^* y x_i.

- Como en cada subintervalo necesitamos el valor de f en tres nodos x_{i-1}, x_i^* y x_i el número total de nodos ha de ser impar.

Error

$$|f(x) - Q(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} h^3 k_3 = O(h^3)$$

con $|f'''(x)| \leq k_3$ para $x \in [a, b]$ y

$$h = \max(x_i - x_{i-1}).$$

Convergencia

Si designamos por $Q_0, Q_1, \ldots Q_n$ la sucesión de interpolantes obtenidos al ir refinando la partición (es decir, para $h_0 > \cdots > h_n$) se tiene

$$\lim_{n \to \infty (h \to 0)} Q_n(x) = f(x) \longrightarrow \text{ CONVERGENCIA.}$$

La cota involucra $h^3 \longrightarrow$ convergencia cúbica.

Se ha mejorado la convergencia respecto de la lineal, pero no se subsana la falta de regularidad: $Q(x)$ es continua pero no tiene porqué ser derivable en los nodos $\longrightarrow$ Interpolación segmentaria de Hermite.

Interpolación segmentaria de Hermite

- Si se conocen los valores de f y f' en $x_0, \ldots, x_n$ se construye en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ un polinomio de Hermite de grado tres que verifique
$$\begin{array}{rclrcl} H(x_i) & = & f(x_i), & H'(x_i) & = & f'(x_i), \\ H(x_{i-1}) & = & f(x_{i-1}), & H'(x_{i-1}) & = & f'(x_{i-1}). \end{array}$$
- Con estas condiciones se consigue derivada continua.
- La cota de error es
$$C_4 \frac{h^4}{384},$$
por lo que presenta convergencia de orden cuatro.
- Inconveniente: Se necesita conocer f'
- Se podrían considerar interpolantes cúbicos, cuárticos,... a trozos con convergencias en $h^4, h^5, \ldots$ pero en la práctica no se pasa del caso cúbico: es mejor refinar la partición.

Interpolación de trazadores cúbicos o *splines*

- En general los polinomios segmentarios garantizan la convergencia pero en ocasiones no resultan útiles por su reducida regularidad $\longrightarrow$ Splines
- Los *splines* son interpolantes muy suaves: se consigue continuidad en la segunda derivada mejorando la regularidad de los interpoladores de Hermite.
- La cota de error es cinco veces superior a la de Hermite

$$5\frac{C_4 h^4}{384}.$$

- No se necesitan los valores de f' y f''.
- Cuando se presentan las condiciones de spline natural la gráfica se aproxima a la forma que adoptaría una varilla flexible (*spline*) si la hiciéramos pasar por $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.

Bibliografía

1. Diez Lecciones de Cálculo Numérico
   Sanz-Serna, J.M.
   Delta Publicaciones, Secretariado de Publicaciones e Intercambio Científico, Universidad de Valladolid, 2010.
   Capítulos 2, 3 y 4

2. Métodos Numéricos
   Faires, J.D., Burden, R.L.
   International Thompson Editores, 2004.
   Capítulos 1 y 3.

3. Análisis Numérico.
   Burden, R.L., Faires, J.D.
   International Thompson Editores, 2002.
   Capítulos 1 y 3.