APPENDIX B: Math Primer Solutions:

1. $x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$

$x_2 - x_3 = -3$

$-x_1 - 3x_2 = 12$

$Ax = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$\therefore x_3 = 18$, $x_2 - x_3 = -3$

$x_2 = -3 + 18$

$= 15$

$x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$

$x_1 + 45 + 18 = 6$

$x_1 = 6 - 63$

$= -57$

2. $x_1 - 2x_3 = -1$

$-2x_1 + x_2 + 6x_3 = 7$

$3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & -2 & -5 & -3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad +2R_2 \quad \left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right.$$

$5x_3 = 10$

$x_3 = 2$

$x_2 + 2x_3 = 5$

$x_2 + 4 = 5$

$x_2 = 1$

$x_1 - 2x_3 = -1$

$x_1 = -1 + 4$

$x_1 = 3$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 12 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot -1 + -2\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot -1 + 1\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 3\cdot -1 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + -2\cdot 4 + 2\cdot -1 \\ 1\cdot 2 + 4\cdot 4 + -2\cdot -1 \\ 2\cdot 2 + -5\cdot 4 + 0\cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-8-2 \\ 2+16+2 \\ 4-20 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -4 \\ 20 \\ -16 \end{pmatrix}$