Отчет по лабораторной работе №3

Модель боевых действий

Голова Варвара Алексеевна

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Ознакомиться с моделью боевых действий и построить графики по этой модели.

2 Задание

Вариант 28

Между страной X и страной Y идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями $x(t)$ и $y(t)$. В начальный момент времени страна X имеет армию численностью $32\ 888$ человек, а в распоряжении страны армия численностью в $17\ 777$ человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем $P(t)$ и $Q(t)$ непрерывные функции.

Построить графики изменения численности войск армии и армии для следующих случаев:

1. Модель боевых действий между регулярными войсками

$$\frac{dx}{dt} = -0,55x(t) - 0,77y(t) + 1,5sin(3t + 1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0,66x(t) - 0,44y(t) + 1,2cos(t + 1)$$

2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

$$\frac{dx}{dt} = -0,27x(t) - 0,88y(t) + sin(20t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -0,68x(t)y(t) - 0,37y(t) + cos(10t) + 1$$

#Теоретическая справка

Простейшие модели боевых действий - модели Ланчестера. В противоборстве могут принимать участие как регулярные войска, так и партизанские отряды. В общем случае главной характеристикой соперников являются численности сторон. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная сторона считается проигравшей (при условии, что численность другой стороны в данный момент положительна).

Три случая ведения боевых действий:

1. Боевые действия между регулярными войсками

2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов

3. Боевые действия между партизанскими отрядами

В первом случае численность регулярных войск определяется тремя факторами:

- скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);
- скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связанно с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.);
- скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времеени)

В этом случае модель боевых действий между регулярными войсками описывается следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t)$$

Потери, не связанные с боевыми действиями, описывают члены $-a(t)x(t)$ и $-h(t)y(t)$, члены $-b(t)y(t)$ и $-c(t)x(t)$ отражают потери на поле боя.

Коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ указывают на эффективность боевых действий со стороны y и x соответственно, $a(t)$, $h(t)$ - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери. Функции $P(t)$, $Q(t)$ учитывают возможность подхода подкрепления к войскам X и Y в течение одного дня.

Во втором случае в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что тем потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан. В результате модель принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t)$$

Модель ведение боевых действий между партизанскими отрядами с учетом предположений, сделанном в предыдущем случаем, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)x(t)y(t) + P(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -h(t)y(t) - c(t)x(t)y(t) + Q(t)$$

В простейшей модели борьбы двух противников коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ являются постоянными. Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии x убивает за единицу времени c солдат армии y (и, соответственно, каждый солдат армии y убивает b солдат армии x). Также не учитываются потери, не связанные с боевыми действиями, и возможность подхода подкрепления. Состояние системы описывается точкой (x, y) положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки, x и y - это численности противостоящих армий. Тогда модель принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -by \\ \dot{y} = -cx \end{cases}$$

Это - жесткая модель, которая допускает точное решение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{cx}$$

$$cxdx = bydy$$

$$cx^2 - by^2 = C$$

Эволюция численностей армий x и y происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением. По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки (рис. 2.1).

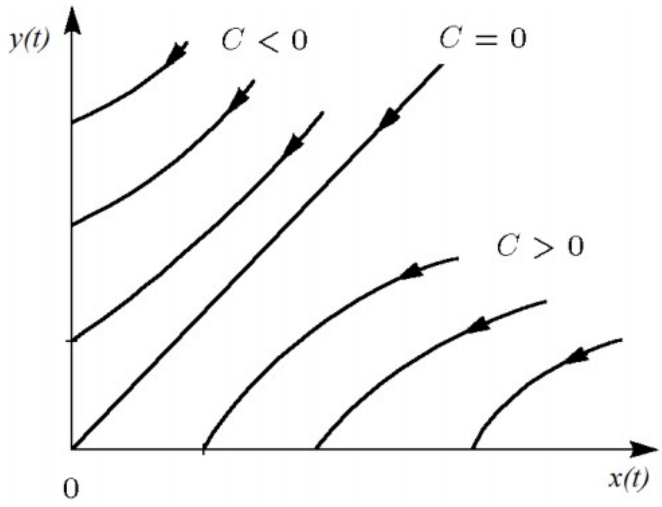

Рис. 2.1: Жесткая модель войны

Эти гиперболы разделены прямой $\sqrt{c}x = \sqrt{b}y$. Если начальная точка лежит выше этой прямой, то гипербола выходит на ось y. Это значит, что в ходе войны численность армии x уменьшается до нуля (за конечное время). Армия y выигрывает, противник уничтожен. Если начальная точка лежит ниже, то выигрывает армия x. В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается истреблением обеих армий. Но на это требуется бесконечно большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены. Вывод модели таков: для борьбы с вдвое более многочисленным противником нужно в четыре раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным - в девять раз и т. д. (на это указывают квадратные корни в уравнении прямой).

Стоит помнить, что эта модель сильно идеализирована и неприменима к реальной ситуации. Но может использоваться для начального анализа. Если рассматривать второй случай (война между регулярными войсками и партизанскими отрядами) с теми же упрощениями, то получим систему:

$$\frac{dx}{dt} = -by(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -cx(t)y(t)$$

Эта система приводится к уравнению

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t)\Big) = 0$$

которое при заданных начальных условиях имеет единственное решение:

$$\frac{b}{2}x^2(t) - cy(t) = \frac{b}{2}x^2(0) - cy(0) = C_1$$

(рис. 2.2).

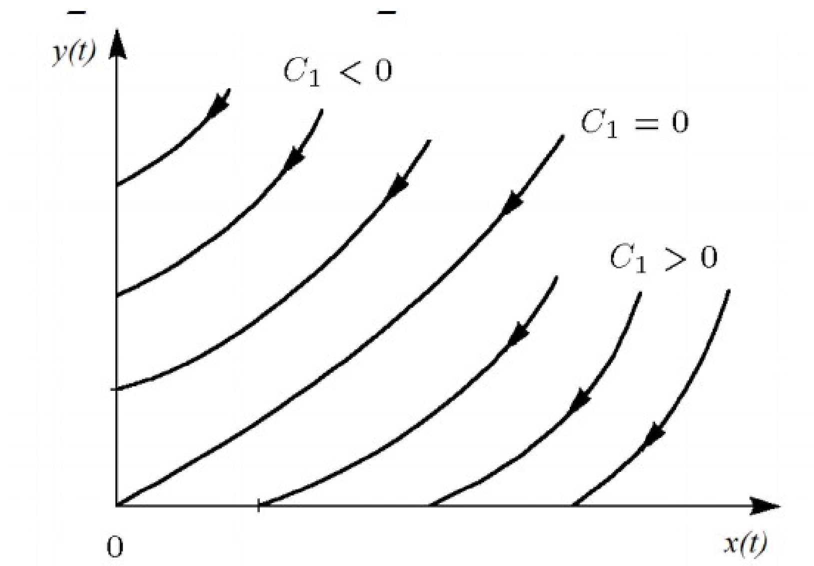

Рис. 2.2: Фазовые траектории системы

Из данного рисунка видно, что при $C_1 > 0$ побеждает регулярная армия, при $C_1 < 0$ побеждают партизаны. Аналогично противоборству регулярных войск, победа обеспечивается не только начальной численностью, но и боевой выучкой и качеством вооружения. При $C_1 > 0$ получаем соотношение $\frac{b}{2}x^2(0) > cy(0)$. Чтобы одержать победу партизанам необходимо увеличить коэффициент c и повысить свою начальную численность на соответствующую величину.

Причем этоувеличение, с ростом начальной численности регулярных войск $(x(0))$, должнорасти не линейно, а пропорционально второй степени $x(0)$. Таким образом, можно сделать вывод, что регулярные войска находятся в более выгодном положении, так как неравенство для них выполняется прим меньшем росте начальной численности войск.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Библиотеки

Подключаю все необходимые библиотеки(рис. 3.1).

```
import numpy as np
import math
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

Рис. 3.1: Библиотеки

3.2 Значения

Ввод значений из своего варианта (28 вариант) (рис. 3.2).

```
x0=32888
y0=17777
t0=0
dt=0.05
tmax=1
```

Рис. 3.2: Значения для обоих случаев

3.3 Модель №1

Ввод значений для модели боевых действий №1 (рис. 3.3).

```
a1=0.55
b1=0.77
c1=0.66
h1=0.44
```

Рис. 3.3: Значения для модели №1

Функции P и Q для модели боевых действий №1(рис. 3.4).

```
t=np.arange(t0,tmax,dt)
v0=np.array([x0,y0])
```

```
def fp1(t):
    p=1.5*math.sin(3*t+1)
    return p
```

```
def fq1(t):
    q=1.2*math.cos(t+1)
    return q
```

Рис. 3.4: Функции для модели №1

Система для модели боевых действий №1(рис. 3.5).

```
def syst1(y,t):
    dy1=-a1*y[0]-b1*y[1]+fp1(t)
    dy2=-c1*y[0]-h1*y[1]+fq1(t)
    return [dy1, dy2]
```

```
y1=odeint(syst1, v0, t)
```

Рис. 3.5: Система для модели №1

Вывод графика для модели боевых действий №1(рис. 3.6).

График изменения численности армии x - синий

График изменения численности армии y - рыжий

```
plt.plot(t,[i[0] for i in y1], lw=2)
plt.plot(t,[i[1] for i in y1], lw=2)
plt.xlabel('время', fontsize=10)
plt.ylabel('численность армии', fontsize=10)
plt.title('Модель боевых действий №1', fontsize=15)
plt.grid(True)
```

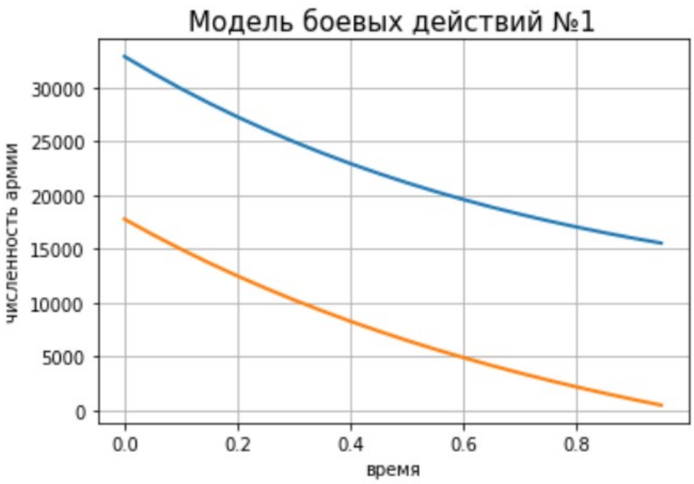

Рис. 3.6: Вывод графика для модели №1

3.4 Модель №2

Ввод значений для модели боевых действий №2 (рис. 3.7).

```
a2=0.27
b2=0.88
c2=0.68
h2=0.37
```

Рис. 3.7: Значения для модели №2

Функции P и Q для модели боевых действий №2(рис. 3.8).

```python
def fp2(t):
    p=math.sin(20*t)
    return p
```

```python
def fq2(t):
    q=math.cos(10*t)+1
    return q
```

Рис. 3.8: Функции для модели №2

Система для модели боевых действий №2(рис. 3.9).

```python
def syst2(y,t):
    dy1=-a2*y[0]-b2*y[1]+fp2(t)
    dy2=-c2*y[0]*y[1]-h2*y[1]+fq2(t)
    return [dy1, dy2]
```

```python
y2=odeint(syst2, v0, t)
```

Рис. 3.9: Система для модели №2

Вывод графика для модели боевых действий №2(рис. 3.10).

График изменения численности армии x - синий

График изменения численности армии y - рыжий

```python
plt.plot(t,[i[0] for i in y2], lw=2)
plt.plot(t,[i[1] for i in y2], lw=2)
plt.xlabel('время', fontsize=10)
plt.ylabel('численность армии', fontsize=10)
plt.title('Модель боевых действий №2', fontsize=15)
plt.grid(True)
```

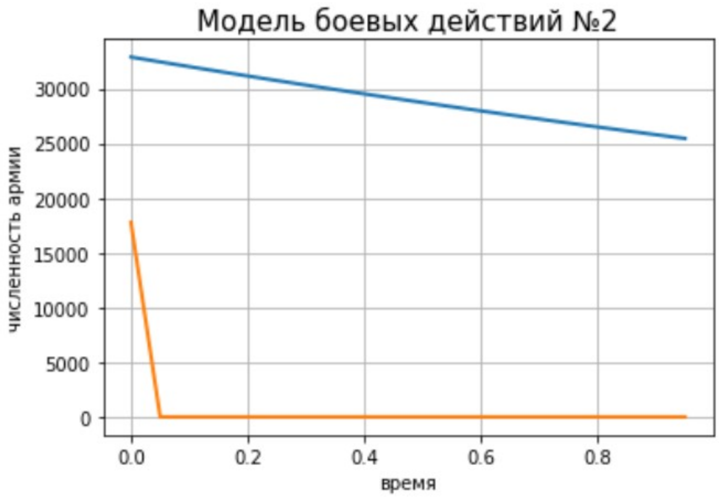

Рис. 3.10: Вывод графика для модели №2

4 Выводы

Я ознакомилась с моделью боевых действий и построила графики для двух случаев