VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Teoretická informatika (TIN)

1. domácí úloha

v Brně
11. listopadu 2019

Václav Martinka
xmarti76

1. úkol **S využitím uzávěrových vlastností dokažte, nebo vyvraťte, následující vztahy:**

Uvažujeme operaci $\circ$ definovanou následovně: $L_1 \circ L_2 = L_1 \cup \overline{L_2}$

(a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3$

Nejprve přepíšeme operaci $\circ$ na sjednocení:

$$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$$

Dle věty 3.22 v opoře jsou regulární jazyky uzavřeny vůči sjednocení, tedy platí následující vztah:

$$L_a, L_b \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_a \cup L_b \Rightarrow \mathcal{L}_3$$

Věta 3.23 z opory dále tvrdí, že regulární jazyk je uzavřen i vůči komplementu:

$$L_a \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \overline{L_a} \in \mathcal{L}_3$$

Za pomoci vět 3.22 a 3.23 lze pak dokázat následující vztahy:

$$\begin{aligned} L_2 \in \mathcal{L}_3 &\quad\Rightarrow\quad \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3 \\ L_1, \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3 &\quad\Rightarrow\quad L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3 \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že zadaný vztah **je platný**.

(b) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2^D$

Budeme postupovat obdobně jako u vztahu *(a)*. Převedeme zadaný vztah na:

$$L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$$

Dle věty 4.27 z opory jsou deterministické bezkontextové jazyky uzavřeny vůči doplňku, tedy:

$$\overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$$

Dle věty 4.28 z opory nejsou deterministické bezkontextové jazyky uzavřeny vůči sjednocení, proto uvedený vztah **neplatí**.

(c) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$
Opět si vztah převedeme do jiného tvaru:

$$L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2$$

Dle věty 4.24 z opory nejsou bezkontextové jazyky uzavřeny vůči doplňku:

$$\overline{L_2} \notin \mathcal{L}_2$$

Z toho plyne, že ani sjednocení nenáleží $\mathcal{L}_2$, tudíž uvedený vztah **neplatí**.

2. úkol **Sestrojte deterministický zásobníkový automat M_L**

Analýzou zadaného jazyka L lze dojít k následujícím bodům:

- Každá věta jazyka se skládá ze dvou částí oddělených znakem #
- Každá z těchto částí může být rovna ϵ
- Symbol a má v první části hodnotu 1, v druhé části 2
- Symbol b má v první části hodnotu 2, v druhé části 1
- Součet všech hodnot symbolů v první části věty je roven součtu hodnot v druhé části
- Je pevně stanoveno pořadí znaků ve větě

Zavedeme si jeden symbol (např. x), který bude představovat sumu hodnot na zásobníku. Každý přijatý znak, zapíše na zásobník jeden, respektive dva, symboly x. Přijmutím symbolu # se toto chování otočí a následující znaky budou naopak ze zásobníku symboly odebírat.

Výsledný M_L sestrojíme následovně:

$$M_L = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a, b, \#\}, \{x, \#\}, \delta, q_0, \#, \{q_5\})$$

kde δ:

$$\begin{array}{rcl}
\delta(q_0, a, \#) & = & (q_0, x\#) \\
\delta(q_0, a, x) & = & (q_0, xx) \\
\delta(q_0, b, \#) & = & (q_1, xx\#) \\
\delta(q_0, b, x) & = & (q_1, xxx) \\
\delta(q_0, \#, x) & = & (q_2, x) \\
\delta(q_0, \#, \#) & = & (q_5, \epsilon) \\
\delta(q_1, b, x) & = & (q_1, xxx) \\
\delta(q_1, \#, x) & = & (q_2, x) \\
\delta(q_2, a, x) & = & (q_3, \epsilon) \\
\delta(q_3, a, x) & = & (q_2, \epsilon) \\
\delta(q_2, b, x) & = & (q_4, \epsilon) \\
\delta(q_2, \epsilon, \#) & = & (q_5, \epsilon) \\
\delta(q_4, b, x) & = & (q_4, \epsilon) \\
\delta(q_4, \epsilon, \#) & = & (q_5, \epsilon)
\end{array}$$

3. úkol **Dokažte, že jazyk L z předchozího příkladu není regulární**

Provedeme důkaz sporem:

a) Předpokládejme, že jazyk L je regulární

b) Pak dle výroku *Pumping lemma* platí:
$\exists k > 0\ \forall w \in L : |w| \geq k \Rightarrow \exists x, y, z \in \Sigma^* : w = x \cdot y \cdot z \land y \neq \epsilon \land |xy| \leq k \land \forall i \geq 0 : xy^i z \in L$
kde $\Sigma = \{a, b, \#\}$

c) Uvažujme libovolné k splňující výše uvedené

d) Zvolme $w = a^k b^k \# a^k b^k$
Tato věta zjevně patří do jazyka L, přičemž platí $|w| = 4k + 1$, tudíž je splněna podmínka $|w| \geq k$, jelikož jistě platí $4k + 1 \geq k$.

e) Tedy $\exists x, y, z \in \{a, b, \#\}^* : a^k b^k \# a^k b^k = xyz \land y \neq \epsilon \land |xy| \leq k \land \forall i \geq 0 : xy^i z \in L$

f) Uvažme libovolné x, y, z vyhovující výše uvedené podmínce

g) Z toho, že musí platit $|xy| \leq k$ odvodíme podobu y následovně: $y \in \{a^m | 0 < m \leq k\}$

h) Zvolme si libovolné i různé od 1, např.: $i = 0$:
$xy^0 z = a^{k-m} b^k \# a^k b^k \notin L$, protože z definice jazyka L vyplývá $(k - m) + 2k = 2k + k$, ale tato rovnice je splněna pouze pro $m = 0$, což jsme v minulém bodě vyloučili.

i) Došli jsme **ke sporu**, neboť podle výroku *Pumping lemma* $xy^0 z \in L$.

4. úkol **Navrhněte algoritmus, který pro daný nedeterministický konečný automat ...**

Algoritmus má určit, zda mají **všechny** věty přijímané tímto automatem minimální délku 5. To lze pochopit také tak, že nejkratší možná cesta automatem obsahuje minimálně šest stavů. Protože tato vlastnost musí platit pro všechny věty, nelze brát v potaz cykly.

Vstup: Konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Výstup: *True* pokud automat A přijímá pouze řetězce w pro které platí $|w| \geq 5$, jinak *false*.

Metoda:

Krok 1) $|Q| < 6 \;\Rightarrow\; false$
Pozn.: *Algoritmus v tuto chvíli ukončíme, neboť je zbytečné pokračovat dále.*

Krok 2) $X = Q \setminus \{q_0\}$
Pozn.: *X představuje množinu nezpracovaných stavů.*

Krok 3) $P^0 = \{(q_0, 0)\}$
Pozn.: *P^i bude obsahovat dvojice $Q \times p$, kde $p \in \mathbb{N} \wedge p \geq 0$, které představují nejkratší možnou vzdálenost p mezi počátečním stavem q_0 a stavem $q \in Q$.*

Krok 4) $\forall (q_1, p) \in P^i \;\; \forall q_2 \in X \;\; \forall a \in \Sigma : q_2 \in \delta(q_1, a) \;\Leftrightarrow\; P^{i+1} = \{(q_2, p+1)\} \;\wedge\; X = X \setminus \{q_2\}$
Pozn.: *Pro všechny stavy q_1 z dvojic množiny P^i najdeme všechny dostupné stavy přijetím libovolného symbolu a. Pokud jsou tyto nové stavy obsaženy v množině X, odebereme je a zároveň vložíme dvojice $(q_2, p+1)$ do množiny P^{i+1}.*

Krok 5) Pokud $P^{i+1} = P^i$, vrať *false*.
Pozn.: *Prázdná se množina P^{i+1} nezměnila, znamená to, že již není kam iterovat, tudíž žádný z koncových stavů množiny F není dostupný.*

Krok 6) $\forall (q, p) \in P^{i+1} : q \notin F \;\Rightarrow\; goto$ Krok 4
Pozn.: *Pokud žádný ze stavů q z dvojic v množině P^{i+1} není koncový, vrátíme se na krok 4.*

Krok 7) $result = \begin{cases} true & \text{pokud } \nexists (q, p) \in P^{i+1} : q \in F \wedge p < 5 \\ false & \text{jinak} \end{cases}$
Pozn.: *Dvojice (q, p) z množiny P^{i+1} obsahující koncový stav ($q \in F$) určují minimální velikost přijímaného řetězce, přičemž správným výsledkem je nejmenší z nich.*

Demonstrace:

$A' = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a\}, \delta, q_0, \{q_4\})$, kde δ:

$\delta(q_0, a) = \{q_1, q_0\},\ \delta(q_1, a) = \{q_1, q_2\},\ \delta(q_2, a) = \{q_0, q_3\},\ \delta(q_3, a) = \{q_0, q_4\},\ \delta(q_4, a) = \{q_0\}$

Iterace 1 (krok 1): V tomto případě ihned 1. krok vrací *false*. Ovšem můžeme ho vynechat, na správnost algoritmu to nemá vliv.

Iterace 2 (krok 2): $X = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$

Iterace 3 (krok 3): $P^0 = \{(q_0, 0)\}$

Iterace 4 (krok 4): $P^1 = \{(q_1, 1)\},\ X = \{q_2, q_3, q_4\}$

Iterace 5 (krok 5): $P^1 \neq P^0$

Iterace 6 (krok 6): $\forall (q, p) \in P^1 : q \cap F = \varnothing \ \Rightarrow\ $ *goto* Krok 4

Iterace 7 (krok 4): $P^2 = \{(q_2, 2)\},\ X = \{q_3, q_4\}$

Iterace 8 (krok 5): $P^2 \neq P^1$

Iterace 9 (krok 6): $\forall (q, p) \in P^2 : q \cap F = \varnothing \ \Rightarrow\ $ *goto* Krok 4

Iterace 10 (krok 4): $P^3 = \{(q_3, 3)\},\ X = \{q_4\}$

Iterace 11 (krok 5): $P^3 \neq P^2$

Iterace 12 (krok 6): $\forall (q, p) \in P^3 : q \cap F = \varnothing \ \Rightarrow\ $ *goto* Krok 4

Iterace 13 (krok 4): $P^4 = \{(q_4, 4)\},\ X = \varnothing$

Iterace 14 (krok 5): $P^4 \neq P^3$

Iterace 15 (krok 6): $\exists (q, p) \in P^4 : q \in F$

Iterace 16 (krok 7): $\exists (q, p) \in P^4 : q \in F \land p < 5 \ \Rightarrow\ $ *false*

5. úkol **Dokažte, že jazyk L je regulární**

Definujte $\sim_L$ pro jazyk L:

$$\sim_L = \{(u,v) \mid \#_a(u) mod\, 2 = \#_a(v) mod\, 2 \land \#_b(u) \leq 2 \Leftrightarrow \#_b(v) \leq 2\}$$

Zapište rozklad $\Sigma^*/\sim_L$ a určete počet tříd tohoto rozkladu:

$$\begin{aligned}
&\{\{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) mod\, 2 = 0 \land \#_b(w) = 0\}, && (1)\\
&\{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) mod\, 2 = 0 \land \#_b(w) = 1\}, && (2)\\
&\{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) mod\, 2 = 0 \land \#_b(w) = 2\}, && (3)\\
&\{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) mod\, 2 = 1 \land \#_b(w) = 0\}, && (4)\\
&\{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) mod\, 2 = 1 \land \#_b(w) = 1\}, && (5)\\
&\{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) mod\, 2 = 1 \land \#_b(w) = 2\}\} && (6)
\end{aligned}$$

Počet tříd rozkladu je 6.

Ukažte, že L je sjednocením některých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim_L$:

$$\begin{aligned}
q_3 \cup q_4 \cup q_5 &\in L\\
\{u \in \{a,b\}^* \mid \#_a(u) mod\, 2 = 0 \land \#_b(u) = 2\} \cup \{v \in \{a,b\}^* \mid \#_a(v) mod\, 2 = 1 \land \#_b(v) = 0\} &\in L\\
\{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(u) mod\, 2 = 1 \land \#_b(u) \leq 2\} &\in L
\end{aligned}$$

Rovnice $q_3 \cup q_4 \in L$ platí.