Г. И. Просветов

Дискретная математика

Задачи и решения

Учебное пособие

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2008

УДК 512
ББК 22.176я73
П82

Просветов Г. И.

П82 Дискретная математика: задачи и решения : учебное пособие / Г. И. Просветов. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 222 с. : ил.

ISBN 978-5-94774-829-1

В учебном пособии изложены основные понятия дискретной математики. Представлены разделы: математическая логика, алгебраические системы и теория кодирования, комбинаторика, теория графов. Изложение иллюстрируется большим количеством примеров и сопровождается задачами. Ко всем задачам в конце каждого раздела приведены ответы. Кроме того, в книге имеются задания и программы курсов, соответствующих каждому разделу.

Для студентов и преподавателей высших учебных заведений.

УДК 512
ББК 22.176я73

По вопросам приобретения обращаться:
«БИНОМ. Лаборатория знаний»
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: Lbz@aha.ru, http://www.Lbz.ru

ISBN 978-5-94774-829-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел III. **КОМБИНАТОРИКА**

Раздел IV. **ТЕОРИЯ ГРАФОВ**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Если бы строители строили здания так же, как программисты пишут программы, то первый залетевший дятел разрушил бы цивилизацию.

Второй закон Вейнберга

В настоящее время существует ряд обстоятельных руководств по дискретной математике, предназначенных для студентов высших учебных заведений. Но ощущается потребность в пособии, которое на простых и конкретных примерах способно показать читателю со скромной математической подготовкой весь арсенал современных методов дискретной математики. Одна из попыток решить эту задачу — перед вами, уважаемый читатель.

Предлагаемое пособие знакомит читателя с важнейшими разделами дискретной математики и призвано помочь тем, кто осваивает этот курс, особенно в системе заочного и вечернего образования.

Пособие состоит из четырех разделов: (I) математическая логика; (II) алгебраические системы и теория кодирования; (III) комбинаторика; (IV) теория графов.

В разделе «Математическая логика» представлены следующие темы: множества, булевы функции, нормальные формы, минимизация нормальных форм, минимизация частично определенных функций, двойственные функции; классы функций, сохраняющих константу; линейные функции, монотонные функции, теорема Поста, контактные схемы, исчисление высказываний, правила получения выводимых суждений, логика предикатов, решение логических задач, алгоритмы, вычислимые функции, машина Тьюринга, нормальные алгоритмы Маркова.

Раздел «Алгебраические системы и теория кодирования» включает следующие темы: отображения, отношения, принцип математической индукции, делимость, сравнения, многочлены, группы, кольца, поля, подстановки, рекуррентные соотношения, кодирование, коды Хемминга, код Хаффмана.

В разделе «Комбинаторика» представлены следующие темы: размещения, перестановки, сочетания, перестановки с повторениями, сочетания с повторениями, бином Ньютона, формула включений и исключений.

В раздел «Теория графов» входят такие темы: основные понятия теории графов, определение кратчайшего пути, коммуникационная сеть минимальной длины, максимальный поток, задача единого среднего, задача охвата, задача коммивояжера, транспортная сеть, дерево решений, сетевое планирование и управление, балансировка линий сборки, задача о назначениях, эйлеров цикл, раскраска графов.

Каждый раздел разбит на главы, а главы — на параграфы. Каждый параграф — это отдельная тема. В начале параграфа приводится необходимый минимум теоретических сведений, затем подробно разбираются модельные примеры. После каждого примера приводится задача для самостоятельного решения. Ответы ко всем задачам помещены в конце соответствующего раздела. Кроме того, в конце каждого раздела приведены программа этого раздела и задачи для контрольной работы. Каждый раздел фактически можно рассматривать как самостоятельный курс, методически согласованный с другими разделами.

За основу пособия принят материал курсов, читаемых автором в Российской академии предпринимательства. Всем студентам, прослушавшим эти курсы, автор выражает благодарность за продуктивную совместную работу. Материал книги в 1998—2002 годах использовался автором в Московском институте электроники и математики (техническом университете).

Автор выражает искреннюю признательность В. М. Трояновскому за многочисленные замечания, способствовавшие улучшению книги.

Хочется надеяться, что знакомство с книгой будет как приятным, так и полезным.

Автор

ГЛАВА 1

МНОЖЕСТВО

Собрание предметов, родственных по некоторому признаку, часто рассматривается как самостоятельный объект.

Пример 1. А, Б, В, Г, ... — это алфавит.

Пример 2. 1, 2, 3, 4, ... — это натуральные числа.

Пример 3. Кофейник, сахарница, чашки, блюдца — это сервиз.

Пример 4. Персонажи басен Крылова.

Немецкий математик Кантор ввел понятие *множество*, которое относится к первоначальным понятиям, не подлежащим определению. Чтобы сделать этот термин яснее, с ним сопоставляют такие его синонимы, как «совокупность», «собрание», «набор». Алфавит, натуральные числа, сервиз, персонажи басен Крылова — это примеры множеств.

Хотя теория множеств получила признание лишь в конце девятнадцатого века, это не помешало множеству стать одним из основных понятий математики. Без символики теории множеств сейчас не обходится ни одно математическое исследование.

Объекты, составляющие множество, называются его *элементами*. Говорят, что они принадлежат множеству. Символически это записывают так: $a \in A$ (элемент a принадлежит множеству A). Будем обозначать множества заглавными буквами (A, B, C, ...), а элементы множеств — строчными буквами (a, b, c, ...). Запись $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Пример 5. Пусть A — множество делителей числа 12. Тогда $2 \in A$, а $5 \notin A$.

Задача 1. Пусть A — множество делителей числа 6. Определить, принадлежат ли множеству A числа 3 и 4.

Если число элементов множества конечно, то множество называют *конечным*, иначе — *бесконечным*.

Пример 6. Множество персонажей басен Крылова — конечное множество, а натуральные числа — бесконечное множество.

Задача 2. Привести примеры конечных и бесконечных множеств.

Встречаются множества, не содержащие ни одного элемента. Например, множество людей, чей рост составляет 10 м. Такие множества называют *пустыми* и обозначают символом $\varnothing$.

Существуют разные способы задания множеств. Конечное множество можно задать перечислением всех его элементов.

Пример 7. Планеты Солнечной системы = {Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Плутон}.

Задача 3. Привести примеры задания множества перечислением элементов множества.

Но способ задания множества перечислением всех элементов множества не применим к бесконечным множествам. Разве можно составить список всех натуральных чисел? Да и конечное множество задать списком элементов можно далеко не всегда. Хотя множество всех рыб в океане конечно, перечисление всех элементов такого множества вряд ли возможно.

Задать множество можно также с помощью характеристического признака, по которому устанавливают, принадлежит ли элемент рассматриваемому множеству.

Пример 8. Персонажи басен Крылова.

Запись $Y = \{x \in X \mid S(x)\}$ означает, что множество Y состоит из элементов $x \in X$, обладающих свойством $S(x)$.

Пример 9. $Y = \{x$ — целое число $\mid x$ делится на $2\}$ — множество четных чисел.

Задача 4. Привести примеры задания множества с помощью характеристического признака.

Множество A называют *подмножеством множества* B ($A \subset B$), если все элементы из A входят в B.

Пример 10. A — множество четных чисел, B — множество целых чисел, $A \subset B$.

Задача 5. Привести примеры подмножеств.

Два множества называют *равными* ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов или являются пустыми множествами.

Пример 11. Рассмотрим множество $A = \{1, 2\}$ и множество $B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$. Тогда $A = B$. Ведь оба множества состоят из одних и тех же элементов (1 и 2).

Задача 6. Привести примеры равных множеств.

Существуют следующие операции над множествами:

1) *объединение*: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$ — элементы нового множества лежат хотя бы в одном из множеств A или B;

2) *пересечение*: $A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$ — элементы нового множества лежат в обоих множествах A, B;

3) *разность*: $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$ — элементы нового множества — это элементы множества A, которые не лежат в B;

4) дополнение множества A в множестве U ($A \subset U$): $\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\} = U \setminus A$.

Пример 12. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 4\}$.

Тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$, $A \setminus B = \{1, 6, 7, 8\}$, $\overline{A} = \{4, 5, 9, 10\}$.

Задача 7. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{2, 3, 5, 6, 9\}$, $B = \{10, 5, 2, 6\}$. Определить $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$.

ГЛАВА 2

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

§ 1. Высказывания

Высказывание — это некое утверждение, о котором можно говорить, что оно истинно или ложно.

Пример 13. Высказывание «Афины — столица летних Олимпийских игр 2004 года» истинно. Высказывание «$21 > 23$» ложно.

Задача 8. Что можно сказать о высказываниях «Париж — столица Франции» и «8 — простое число»?

Элементарное высказывание — это одно утверждение. Будем обозначать элементарные высказывания малыми буквами латинского алфавита x, y, z, ..., истинное высказывание — цифрой 1, ложное высказывание — цифрой 0.

Мы будем рассматривать функции, аргументы и значения которых могут принимать только значения 0 и 1. Это *булевы функции*.

§ 2. Основные операции

Значение функции можно задать с помощью *таблицы истинности*, которая показывает, чему равна функция на всех возможных комбинациях значений ее переменных.

Пример 14. Отрицание $\overline{x}$. Таблица истинности этой функции имеет следующий вид:

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Мы видим, что отрицание меняет возможные значения переменной на противоположные.

Пример 15. Дизъюнкция $x \vee y$. Таблица истинности этой функции имеет следующий вид:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Мы видим, что дизъюнкция равна 1, если хотя бы один из ее аргументов равен 1.

Пример 16. Конъюнкция $x \& y$. Таблица истинности этой функции имеет следующий вид:

x	y	$x \& y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Мы видим, что конъюнкция равна 1 тогда и только тогда, когда оба ее аргумента равны 1.

Пример 17. Импликация $x \to y$. Таблица истинности этой функции имеет следующий вид:

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Пример 18. Эквиваленция $x \sim y$. Таблица истинности этой функции имеет следующий вид:

x	y	$x \sim y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

С помощью введенных операций можно строить различные булевы функции. Порядок выполнения операций указывается скобками. Для упрощения записи принят ряд соглашений:

1) для отрицания скобки опускаются;
2) & имеет приоритет перед $\vee$, $\to$, $\sim$;
3) $\vee$ имеет приоритет перед, $\to$, $\sim$.

Любая булева функция полностью определяется своей таблицей истинности.

Пример 19. Определим таблицу истинности булевой функции $x \& \overline{y} \to (\overline{x} \vee y)$.

x	y	$\overline{x}$	$\overline{x} \vee y$	$\overline{y}$	$x \& \overline{y}$	$x \& \overline{y} \to (\overline{x} \vee y)$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1

Искомая таблица истинности имеет следующий вид:

x	y	$x \& \overline{y} \to (\overline{x} \vee y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Задача 9. Определить таблицу истинности булевой функции $(x \to y) \& \overline{x \vee y}$.

§ 3. Равносильные функции

Две функции называются *равносильными*, если они принимают одинаковые значения на любом наборе значений входящих в эти функции переменных, т. е. у этих функций одинаковые таблицы истинности.

Пример 20. Используя результаты примеров 17 и 19, получаем, что функции $x \to y$ и $x \& \overline{y} \to (\overline{x} \vee y)$ равносильны: $x \to y = x \& \overline{y} \to$ $\to (\overline{x} \vee y)$.

Задача 10. Равносильны ли функции $\overline{x} \vee y$ и $x \to y$?

Перечислим основные равносильности:

1) $x \vee 1 = 1$; 2) $x \vee 0 = x$; 3) $x \& 1 = x$;
4) $x \& 0 = 0$; 5) $x \vee x = x$; 6) $x \& x = x$;
7) $\overline{x} \vee x = 1$; 8) $x \& \overline{x} = 0$; 9) $\overline{\overline{x}} = x$;
10) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y}$; 11) $\overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y}$; 12) $x \& (x \vee y) = x$;
13) $x \vee x \& y = x$; 14) $x \& y = y \& x$; 15) $x \vee y = y \vee x$.

§ 4. Булевы функции от *n* переменных

Обозначим через P_2 множество всех булевых функций.

Теорема. *Число булевых функций от n переменных равно* 2^{2^n}.

Пример 21. Число булевых функций от $n=1$ переменной равно $2^{2^n}=2^{2^1}=2^2=4$. Это функции 0, 1, x и $\overline{x}$.

Пример 22. Число булевых функций от $n=2$ переменных равно $2^{2^n}=2^{2^2}=2^4=16$. Все они указаны в таблице.

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

У некоторых из этих функций есть специальные названия.

$f_1(x_1, x_2)=0$ — тождественный нуль.

$f_2(x_1, x_2)=x_1 \,\&\, x_2$ — конъюнкция. Очень часто знак & опускают и пишут просто x_1x_2.

$f_7(x_1, x_2)=x_1 \oplus x_2$ — сложение по модулю 2.

$f_8(x_1, x_2)=x_1 \vee x_2$ — дизъюнкция.

$f_9(x_1, x_2)=x_1 \downarrow x_2$ — стрелка Пирса.

$f_{10}(x_1, x_2)=x_1 \sim x_2$ — эквиваленция.

$f_{14}(x_1, x_2)=x_1 \to x_2$ — импликация.

$f_{15}(x_1, x_2)=x_1 \mid x_2$ — штрих Шеффера.

$f_{16}(x_1, x_2)=1$ — тождественная единица.

Задача 11. Определить число булевых функций от $n=3$ переменных.

Иногда при задании булевой функции ограничиваются указанием ее набора значений. Например, $f_{12}=(1011)$.

§ 5. Формулы

При задании булевой функции с помощью таблицы истинности зависимость значений функции от значений переменных дается в самом простом виде. Но очень часто на практике возникает ситуация, когда требуется установить связь между значениями различных булевых функций. Таблицы истинности здесь мало чем могут помочь. В этом случае используют формулы различных типов.

Пусть F — множество булевых функций. *Формула над* F определяется следующим образом:

1) любая функция из F есть формула над F;

2) если $A(x_1, \ldots, x_m)$ есть формула над F и $A_1, \ldots, A_m$ суть формулы над F, то $A(A_1, \ldots, A_m)$ есть формула над F (т. е., подставляя в формулы над F вместо переменных другие формулы над F, снова получим формулы над F).

Пример 23. Множество $F = \{\&, \vee, \sim, \downarrow, |, \to, \oplus, \neg$ (отрицание)$\}$. Тогда $(x_1 \& x_2)$, $(\overline{x}_1 \to x_2)$, $\overline{(x_1 \oplus (x_2 \vee x_3))}$ — формулы над F. Иногда внешние скобки у формул опускают.

Задача 12. Определить, какие из выражений $(x_1 \vee x_2)$, $(x_1 \sim \overline{x}_2)$, $(x_1 \oplus \& x_2)$ являются формулами над множеством F из примера 23.

Каждая формула над F реализует некоторую булеву функцию. Поэтому будем отождествлять формулу с реализуемой функцией.

ГЛАВА 3

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Для любой булевой функции можно построить ее таблицу истинности. Но и по таблице истинности можно восстановить булеву функцию. Покажем, как это делается.

§ 1. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Возьмем наборы переменных, на которых функция равна единице. Если значение переменной в этом наборе равно 0, то эта переменная берется с отрицанием. Если значение переменной в этом наборе равно 1, то эта переменная берется без отрицания.

Соединив все переменные, соответствующие этому набору, знаком & (причем сам знак & для краткости будем опускать), мы получим *элементарную конъюнкцию*. Тогда дизъюнкция всех элементарных конъюнкций, соответствующих наборам значений переменных, где функция равна единице, и восстанавливает исходную функцию. Это *совершенная дизъюнктивная нормальная форма* (*СДНФ*) нашей функции.

Пример 24. Построим СДНФ для функции, таблица истинности которой имеет следующий вид:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Функция принимает значение 1 на наборах 001, 010 и 101.

Набору 001 соответствует элементарная конъюнкция $\overline{x}\,\&\,\overline{y}\,\&\,z = \overline{x}\,\overline{y}\,z$.

Набору 010 соответствует элементарная конъюнкция $\overline{x}\,y\,\overline{z}$.

Набору 101 соответствует элементарная конъюнкция $x\overline{y}z$.

Получаем СДНФ $f = \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee x\overline{y}z$.

Задача 13. Построить СДНФ для функции, таблица истинности которой имеет следующий вид:

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

§ 2. Совершенная конъюнктивная нормальная форма

Возьмем наборы переменных, на которых функция равна нулю. Если значение переменной в этом наборе равно 0, то эта переменная берется без отрицания. Если значение переменной в этом наборе равно 1, то эта переменная берется с отрицанием.

Соединив все переменные, соответствующие этому набору, знаком $\vee$, мы получим *элементарную дизъюнкцию*. Тогда конъюнкция всех элементарных дизъюнкций, соответствующих наборам значений переменных, где функция равна нулю, и восстанавливает исходную функцию. Это *совершенная конъюнктивная нормальная форма* (*СКНФ*) нашей функции. Знак & для краткости будем опускать.

Пример 25. Построим СКНФ для функции из примера 24.

Функция принимает значение 0 на наборах 000, 011, 100, 110 и 111.

Набору 000 соответствует элементарная дизъюнкция $x \vee y \vee z$.

Набору 011 соответствует элементарная дизъюнкция $x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$. И т. д.

Получаем СКНФ

$$f = (x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}).$$

Задача 14. Построить СКНФ для функции из задачи 13.

Замечание. При построении СДНФ требуется, чтобы функция была отлична от тождественного нуля. При построении СКНФ функция не должна быть равной тождественной единице.

ГЛАВА 4

МИНИМИЗАЦИЯ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

Очень часто СДНФ и СКНФ, которые строятся по таблице истинности, оказываются весьма сложными. Поэтому возникает проблема построения минимальных нормальных форм для данной функции.

§ 1. Минимизация дизъюнктивных нормальных форм

1. Импликант. Булеву функцию g назовем *импликантом* булевой функции f, если для любых наборов значений аргументов этих функций из равенства $g=1$ следует равенство $f=1$.

Пример 26. Для функции f из примера 24 функция $g=\overline{x}y\overline{z}$ является импликантом. Действительно, функция g принимает значение 1 только при $x=0$, $y=1$, $z=0$. Но и функция f при $x=0$, $y=1$, $z=0$ также принимает значение 1.

Задача 15. Показать, что для функции f из примера 24 функция $g=\overline{y}z$ является импликантом.

Пример 27. Для функции f из примера 24 функция $g=xy\overline{z}$ не является импликантом. Действительно, функция $g=1$ при $x=1$, $y=1$, $z=0$. Но $f(1, 1, 0)=0$.

Задача 16. Определить, является ли функция $g=xyz$ импликантом для функции f из примера 24.

Задача 17. Для функции f из задачи 13 указать хотя бы один импликант.

Если отбрасывание любой переменной импликанта приводит к тому, что полученная функция перестает быть импликантом, то такой импликант называется *простым*.

Пример 28. Проверим импликант из примера 26 на простоту.

При отбрасывании в функции $g=\overline{x}y\overline{z}$ переменной x получим функцию $y\overline{z}$, которая принимает значение 1 при $y=1$, $z=0$. Но функция f при $y=1$, $z=0$ может принимать и нулевое значение (например, $f(1, 1, 0)=0$).

При отбрасывании в функции $g=\overline{x}y\overline{z}$ переменной y получим функцию $\overline{x}\,\overline{z}$, которая принимает значение 1 при $x=0$, $z=0$. Но функция f при $x=0$, $z=0$ может принимать и нулевое значение (например, $f(0,\,0,\,0)=0$).

При отбрасывании в функции $g=\overline{x}y\overline{z}$ переменной z получим функцию $\overline{x}y$, которая принимает значение 1 при $x=0$, $y=1$. Но функция f при $x=0$, $y=1$ может принимать и нулевое значение (например, $f(0,\,1,\,1)=0$).

Так как при отбрасывании любой переменной функция $g=\overline{x}y\overline{z}$ перестает быть импликантом функции f, то $g=\overline{x}y\overline{z}$ является простым импликантом функции f.

Задача 18. Проверить импликант из задачи 17 на простоту.

Пример 29. Для функции f из примера 24 функция $g=x\overline{y}z$ является импликантом. Действительно, функция g равна 1 только при $x=1$, $y=0$, $z=1$. Но и функция f при $x=1$, $y=0$, $z=1$ также принимает значение 1. Этот импликант не является простым, так как при отбрасывании в функции $g=x\overline{y}z$ переменной x мы снова получим импликант $\overline{y}z$ функции f (см. задачу 15).

Задача 19. Определить, все ли импликанты функции из задачи 13 являются простыми.

2. Сокращенная ДНФ. *Сокращенная ДНФ* функции f (*сокр. ДНФ* f) есть дизъюнкция всех простых импликантов функции f.

Всякая функция реализуется своей сокращенной ДНФ. Для всякой функции, не равной тождественно нулю, существует единственная сокращенная ДНФ.

Алгоритм построения сокращенной ДНФ с помощью СКНФ.

1. По таблице истинности строим СКНФ функции f (см. § 2 гл. 3).

2. В СКНФ раскрываем скобки, удаляем дублирующие элементы ($A\,\&\,A=A$, $A\vee A=A$) и элементы, которые содержат переменную вместе с ее отрицанием ($A\,\&\,\overline{A}=0$).

3. Проводим поглощение ($A\vee AB=A$) и удаляем дублирующие элементы. Сокращенная ДНФ функции f получена.

Пример 30. Для функции f из примеров 24 и 25 построим сокращенную ДНФ.

$$\text{СКНФ } f=(x\vee y\vee z)(x\vee\overline{y}\vee\overline{z})(\overline{x}\vee y\vee z)(\overline{x}\vee\overline{y}\vee z)(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}).$$

Раскроем скобки. Перемножение лучше начинать со скобок, которые отличаются всего одной переменной (например, z и $\overline{z}$).

Поэтому поменяем местами 2-ю и 3-ю скобки:

$$(x\vee y\vee z)(\overline{x}\vee y\vee z)(x\vee\overline{y}\vee\overline{z})(\overline{x}\vee\overline{y}\vee z)(\overline{x}\vee\overline{y}\vee\overline{z}).$$

Перемножим 1-ю и 2-ю скобки, а также 4-ю и 5-ю скобки.

$$(x\overline{x}\vee y\overline{x}\vee z\overline{x}\vee xy\vee yy\vee zy\vee xz\vee yz\vee zz)(x\vee\overline{y}\vee\overline{z})\ \&$$
$$\&\ (\overline{x}\,\overline{x}\vee\overline{y}\,\overline{x}\vee z\overline{x}\vee\overline{x}\,\overline{y}\vee\overline{y}\,\overline{y}\vee z\overline{y}\vee\overline{x}\,\overline{z}\vee\overline{y}\,\overline{z}\vee z\overline{z})=$$
$$=(0\vee y\overline{x}\vee z\overline{x}\vee xy\vee y\vee zy\vee xz\vee yz\vee z)(x\vee\overline{y}\vee\overline{z})\ \&$$
$$\&\ (\overline{x}\vee\overline{y}\,\overline{x}\vee z\overline{x}\vee\overline{x}\,\overline{y}\vee\overline{y}\vee z\overline{y}\vee\overline{x}\,\overline{z}\vee\overline{y}\,\overline{z}\vee 0).$$

В 1-й скобке слагаемое y поглощает все слагаемые, содержащие y, а слагаемое z поглощает все слагаемые, содержащие z. В 3-й скобке слагаемое $\overline{x}$ поглощает все слагаемые, содержащие $\overline{x}$, а слагаемое $\overline{y}$ поглощает все слагаемые, содержащие $\overline{y}$.

Получим $(y\vee z)(x\vee\overline{y}\vee\overline{z})(\overline{x}\vee\overline{y})$. Перемножим 2-ю и 3-ю скобки, так как у них есть общий элемент $\overline{y}$:

$$(y\vee z)(x\overline{x}\vee\overline{y}\,\overline{x}\vee\overline{z}\,\overline{x}\vee x\overline{y}\vee\overline{y}\,\overline{y}\vee\overline{z}\,\overline{y})=$$
$$=(y\vee z)(0\vee\overline{y}\,\overline{x}\vee\overline{z}\,\overline{x}\vee x\overline{y}\vee\overline{y}\vee\overline{z}\,\overline{y})=(y\vee z)(\overline{x}\,\overline{z}\vee\overline{y}).$$

Мы воспользовались правилом поглощения.

$$y\overline{x}\,\overline{z}\vee z\overline{x}\,\overline{z}\vee y\overline{y}\vee z\overline{y}=y\overline{x}\,\overline{z}\vee 0\vee 0\vee z\overline{y}=\overline{x}y\overline{z}\vee\overline{y}z=\text{сокр. ДНФ } f.$$

Получена сокращенная ДНФ функции f.

Задача 20. Для функции из задач 13 и 14 построить сокращенную ДНФ.

3. Тупиковые и минимальные ДНФ. Если из дизъюнкции простых импликантов функции f нельзя отбросить ни одного слагаемого (иначе поменяется таблица истинности), то говорят, что получена *тупиковая ДНФ* (*ТДНФ*) функции f.

Тупиковая ДНФ функции f, содержащая минимальное число переменных или их отрицаний, называется *минимальной ДНФ* (*МДНФ*) функции f.

Алгоритм построения тупиковых и минимальных ДНФ функции f.

1. По таблице истинности строится СДНФ функции f (см. § 1 гл. 3).
2. Строим сокращенную ДНФ функции f.
3. Занумеруем в любом порядке слагаемые сокращенной ДНФ функции f.
4. Составляем *таблицу покрытий*. Слагаемые СДНФ функции f пишем в 1-й строке, а слагаемые сокращенной ДНФ функции f вместе с номерами — в 1-м столбце. Если слагаемое сокращенной ДНФ функции f целиком входит в слагаемое СДНФ функции f, то на пересечении соответствующей строки и столбца пишем номер слагаемого сокращенной ДНФ функции f.

5. Составляем *решеточное выражение*. В каждом столбце числа соединяем знаком дизъюнкции и берем конъюнкцию этих дизъюнкций.

6. Раскрываем скобки в решеточном выражении и воспользуемся правилом поглощения.

7. Каждое слагаемое в полученном выражении соответствует тупиковой ДНФ функции f. Для восстановления тупиковой ДНФ функции f надо взять дизъюнкции тех слагаемых, номера которых указаны в полученном выражении.

8. Тупиковые ДНФ функции f с минимальным числом переменных или их отрицаний являются минимальными ДНФ функции f.

Пример 31. Постоим тупиковую и минимальную ДНФ функции f из примеров 24 и 30.

$$\text{СДНФ } f = \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z,$$

$$\text{сокр. ДНФ } f = \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{y}z = 1 \vee 2 \text{ (занумеровали слагаемые).}$$

Заполним таблицу покрытий.

	$\bar{x}\,\bar{y}\,z$	$\bar{x}\,y\,\bar{z}$	$x\,\bar{y}\,z$
(1) $\bar{x}\,y\,\bar{z}$		1	
(2) $\bar{y}\,z$	2		2

Поясним, как заполняется таблица. В 1-й строке указаны слагаемые СДНФ функции f. В 1-м столбце указаны слагаемые сокращенной ДНФ функции f вместе с номерами. Если слагаемое сокращенной ДНФ функции f целиком входит в слагаемое СДНФ функции f, то на пересечении соответствующей строки и столбца пишем номер слагаемого сокращенной ДНФ функции f. Слагаемое $\bar{x}y\bar{z}$ (под номером 1) содержится в $\bar{x}y\bar{z}$. Поэтому на соответствующем месте в таблице пишется 1. Слагаемое $\bar{y}z$ (под номером 2) содержится в $\bar{x}\,\bar{y}z$ и $x\bar{y}z$. Поэтому в соответствующих клетках таблицы пишем 2.

Решеточное выражение равно $2 \,\&\, 1 \,\&\, 2$. Упростим его: $1 \,\&\, 2 = 12$.

Получилось одно слагаемое. Ему соответствует $\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{y}z$ — тупиковая ДНФ функции f. Она содержит 5 переменных и их отрицаний.

Так как получена одна тупиковая ДНФ, то она является и минимальной ДНФ функции f.

Мы видим, что сокращенная ДНФ функции f оказалась и тупиковой, и минимальной ДНФ функции f. Но так бывает не всегда.

Задача 21. Построить тупиковую и минимальную ДНФ функции f из задач 13 и 20.

§ 2. Минимизация конъюнктивных нормальных форм

Для построения *минимальной конъюнктивной нормальной формы* (*МКНФ*) функции f нужно построить минимальную ДНФ функции $\overline{f}$ (отрицание функции f) и в полученной минимальной ДНФ заменить знак & на знак $\vee$, знак $\vee$ заменить на знак &, а над каждой переменной поставить знак отрицания. Это и будет минимальная КНФ функции f. Следует учесть, что $\overline{\overline{x}}$ (двойное отрицание) $= x$.

Пример 32. Построим минимальную КНФ функции f из примера 24.

Строим таблицу истинности для функции $\overline{f}$. Для этого значение 0 заменим на 1, а значение 1 заменим на 0.

x	y	z	$\overline{f}(x, y, z)$	x	y	z	$\overline{f}(x, y, z)$
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1

Строим СДНФ функции $\overline{f}$:

$$\text{СДНФ } \overline{f} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee xy\overline{z} \vee xyz.$$

Строим СКНФ функции $\overline{f}$:

$$\text{СКНФ } \overline{f} = (x \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}).$$

Раскроем скобки в выражении для СКНФ $\overline{f}$. Получим сокращенную ДНФ функции $\overline{f}$:

$$\begin{aligned}
&(x \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) = (x \vee y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z) = \\
&= (x\overline{x} \vee y\overline{x} \vee \overline{z}\,\overline{x} \vee xy \vee yy \vee \overline{z}y \vee x\overline{z} \vee y\overline{z} \vee \overline{z}\,\overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z) = \\
&= (0 \vee y\overline{x} \vee \overline{z}\,\overline{x} \vee xy \vee y \vee \overline{z}y \vee x\overline{z} \vee y\overline{z} \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z) = (y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z) = \\
&= yx \vee \overline{z}x \vee y\overline{y} \vee \overline{z}\,\overline{y} \vee yz \vee \overline{z}z = yx \vee \overline{z}x \vee 0 \vee \overline{z}\,\overline{y} \vee yz \vee 0 = \\
&= xy \vee x\overline{z} \vee \overline{y}\,\overline{z} \vee yz = \text{сокр. ДНФ } \overline{f}.
\end{aligned}$$

Составим таблицу покрытий.

	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{x}yz$	$x\overline{y}\,\overline{z}$	$xy\overline{z}$	xyz
(1) xy				1	1
(2) $x\overline{z}$			2	2	
(3) $\overline{y}\,\overline{z}$	3		3		
(4) yz		4			4

Решеточное выражение равно

$$34(2 \vee 3)(1 \vee 2)(1 \vee 4) = (342 \vee 343)(1 \vee 21 \vee 14 \vee 24) =$$
$$= (342 \vee 34)(1 \vee 24) = 34(1 \vee 24) = 341 \vee 3424 = 134 \vee 234.$$

Выражению 134 соответствует тупиковая ДНФ функции $\overline{f}$, равная $xy \vee \overline{y}\,\overline{z} \vee yz$, которая содержит 6 переменных и отрицаний переменных. Выражению 234 соответствует тупиковая ДНФ функции $\overline{f}$, равная $x\overline{z} \vee \overline{y}\,\overline{z} \vee yz$, которая содержит 6 переменных и отрицаний переменных.

Так как обе тупиковые ДНФ функции $\overline{f}$ содержат по 6 переменных или отрицаний переменных, то каждая из них является минимальной ДНФ функции $\overline{f}$. Построим по ним минимальные КНФ функции f.

В формуле $xy \vee \overline{y}\,\overline{z} \vee yz$ заменим знак & на знак $\vee$, знак $\vee$ заменим на знак &, а над каждой переменной поставим знак отрицания. Получим форму $(\overline{x} \vee \overline{y})(y \vee z)(\overline{y} \vee \overline{z})$. Это минимальная КНФ функции f.

В формуле $x\overline{z} \vee \overline{y}\,\overline{z} \vee yz$ заменим знак & на знак $\vee$, знак $\vee$ заменим на знак &, а над каждой переменной поставим знак отрицания. Получим форму $(\overline{x} \vee z)(y \vee z)(\overline{y} \vee \overline{z})$. Это минимальная КНФ функции f.

Задача 22. Построить минимальную КНФ функции f из задачи 13.

§ 3. Минимизация в классе нормальных форм

Строим все минимальные ДНФ функции f. Находим все минимальные КНФ функции f. Из полученных форм выбираем форму с наименьшим числом переменных и отрицаний переменных. Это и есть *минимальная нормальная форма* (*МНФ*) функции f.

Пример 33. Построим минимальную нормальную форму функции f из примеров 24, 31, 32.

Минимальная ДНФ функции f равна $\overline{x}y\overline{z} \vee \overline{y}z$ и содержит 5 переменных и отрицаний переменных. Обе минимальные КНФ функции f ($xy \vee \overline{y}\,\overline{z} \vee yz$ и $x\overline{z} \vee \overline{y}\,\overline{z} \vee yz$) содержат по 6 переменных и отрицаний переменных. Поэтому минимальная нормальная форма функции f совпадает с минимальной ДНФ функции f и равна $\overline{x}y\overline{z} \vee \overline{y}z$.

Задача 23. Построить минимальную нормальную форму функции f из задач 13, 21, 22.