Problemas lineares
Problema de Transporte

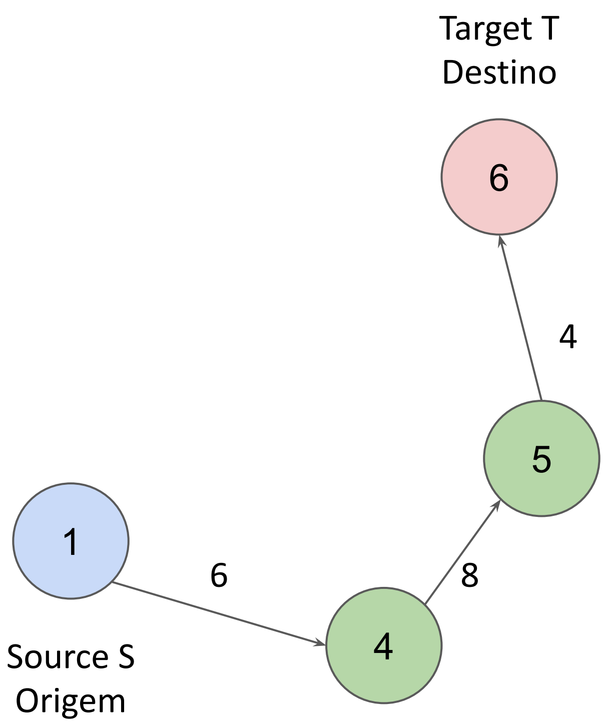
Fundamentos em Pesquisa Operacional

Marcelo Antonio Marotta

Departamento de Ciência da Computação
Universidade de Brasília

Exercício da última aula

Implementar no ORTools o problema de menor caminho



$$\text{minimize} \quad \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} a_{ij}x_{ij}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in\mathcal{A}\}} x_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = s, \\ -1 & \text{if } i = t, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$0 \le x_{ij}, \qquad \forall\ (i,j) \in \mathcal{A}.$$

Implemente um problema de shortest path no ORTools

Para validar o modelo considere a instância:

N = 5

S = 0

T = N-1

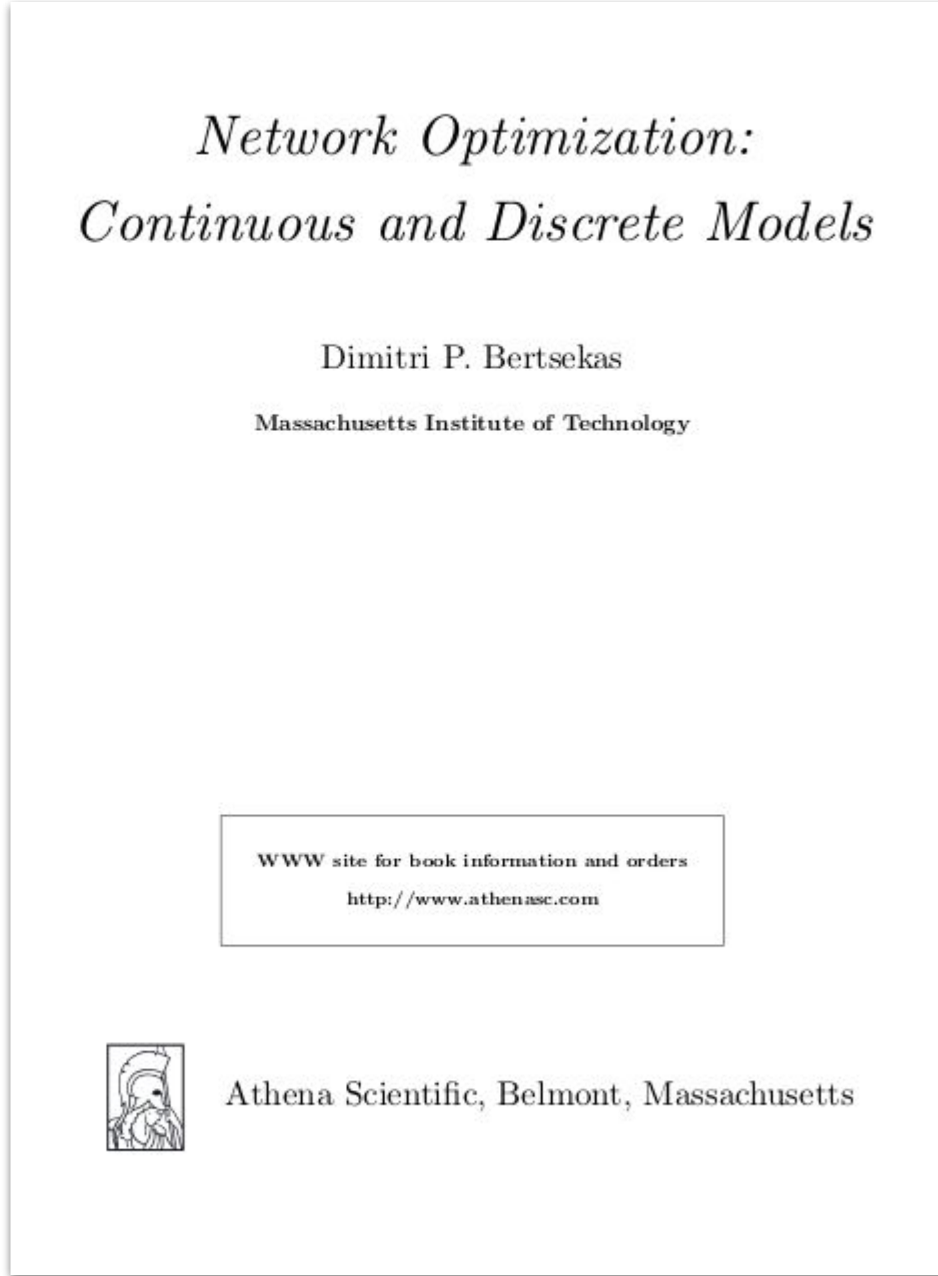
Aij = [[9999, 0.2, 9999, 9999, 9999],
[9999, 9999, 0.4, 0.5, 9999],
[0.2, 9999, 9999, 0.6, 0.2],
[9999, 9999, 9999, 9999, 0.3],
[9999, 9999, 9999, 9999, 9999]]

```
Solucao:
Valor objetivo = 0.8
[ 0 1 0 0 0 ]
[ 0 0 1 0 0 ]
[ 0 0 0 0 1 ]
[ 0 0 0 0 0 ]
[ 0 0 0 0 0 ]
```

Problema de Transporte

Livro

- Problema de Transporte
- Exemplo 1.4
    - Capítulo 2 (Assignment problem)
    - Capítulo 4 (Min cost flow problem)



Network Optimization:

Continuous and Discrete Models

Dimitri P. Bertsekas

Massachusetts Institute of Technology

WWW site for book information and orders

http://www.athenasc.com

Athena Scientific, Belmont, Massachusetts

Problemas lineares

Problemas lineares inteiros binários

- The assignment problem (problema de associação)
- The shortest path (problema do menor caminho)

Problemas lineares

- The transportation problem (problema de transporte)

The Transportation problem - Exemplo 1.4 (Bertsekas, 1998)

Suponha que um produtor de milho possui 4 fazendas de produção localizadas em cidades diferentes. O produtor precisa escoar o milho produzido utilizando caminhões. Os caminhões são preenchidos e encaminhados a 5 armazéns em diferentes localizações. Deslocar um caminhão de uma determinada fazenda para um armazém gera um custo em R$/Kg de milho escoado. Cada armazém suporta um valor máximo de Kg de milho. Para não haver desperdícios, o produtor só escoa seu produto quando a soma de toda a produção das 4 fazendas totaliza a capacidade de armazenamento dos armazéns. Minimize o custo de escoamento do produtor.

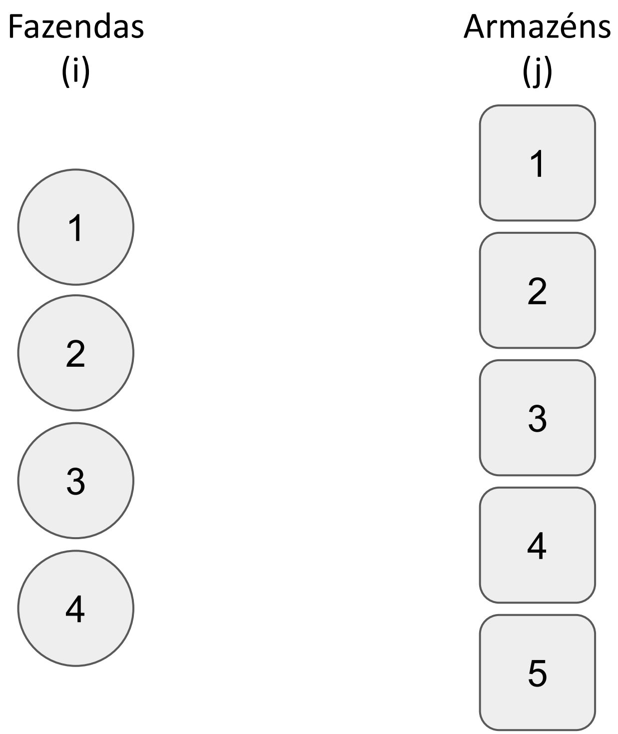
The transportation problem - Exemplo 1.4 (Bertsekas, 1998)

O problema do transporte é importante em muitos contextos práticos

- Logística
- Uso de recursos em sistemas computacionais

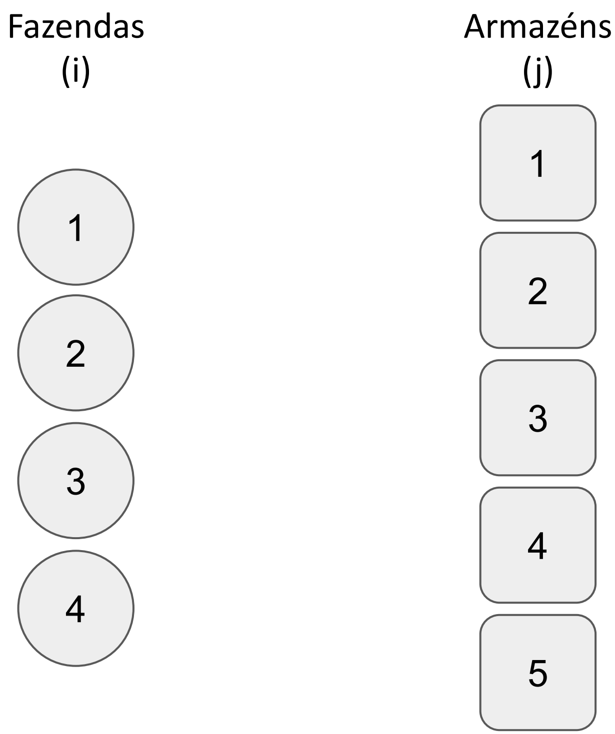
Modelando o problema
Parametrização

Modelando o problema - Parametrização



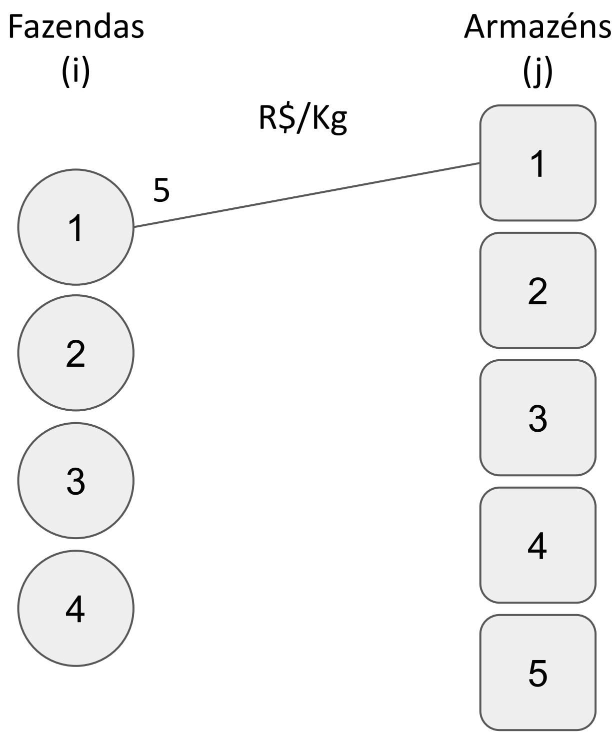
CIC

Modelando o problema - Parametrização



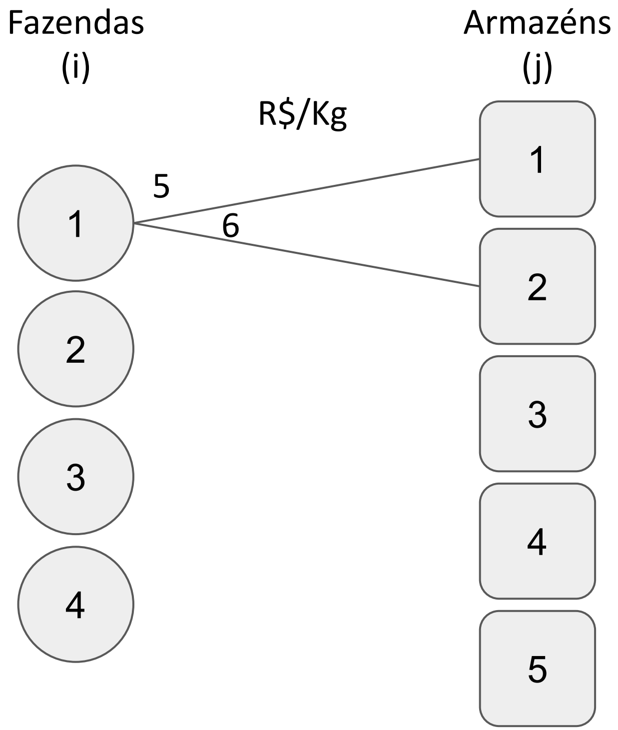
M = 4 (Fazendas)
M = {1,...,M} (Conjunto de fazendas)
N = 5 (Armazéns)
N = {1,...,N} (Conjunto de Armazéns)

Modelando o problema - Parametrização



M = 4 (Fazendas)
M = {1,...,M} (Conjunto de fazendas)
N = 5 (Armazéns)
N = {1,...,N} (Conjunto de Armazéns)

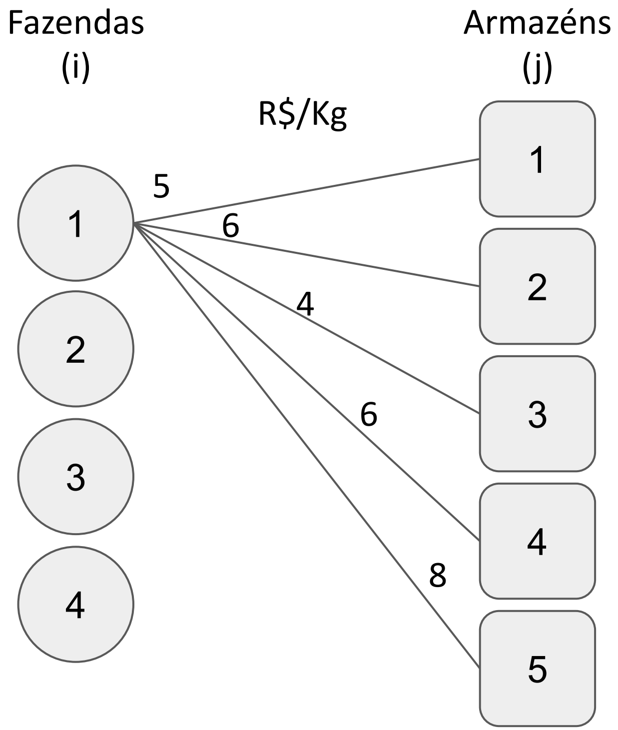
Modelando o problema - Parametrização



M = 4 (Fazendas)
M = {1,...,M} (Conjunto de fazendas)
N = 5 (Armazéns)
N = {1,...,N} (Conjunto de Armazéns)

Modelando o problema - Parametrização

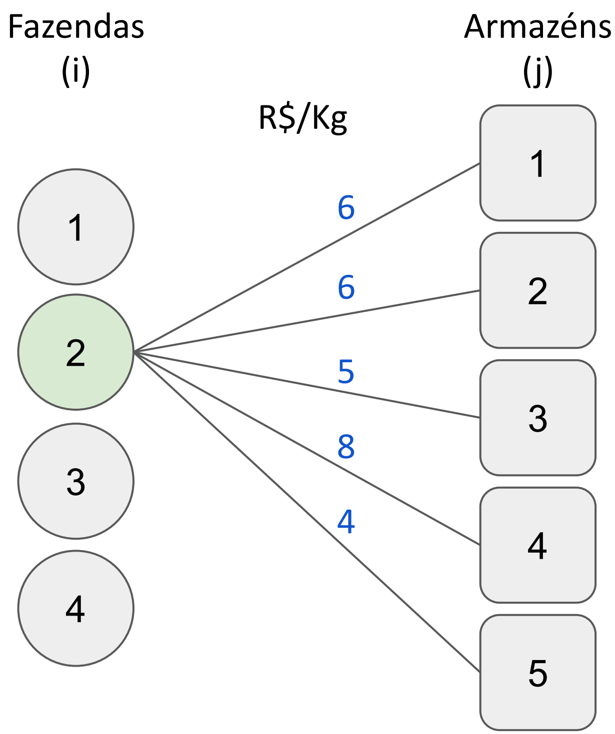
Grafo Bipartido



M = 4 (Fazendas)
M = {1,...,M} (Conjunto de fazendas)
N = 5 (Armazéns)
N = {1,...,N} (Conjunto de Armazéns)

Modelando o problema - Parametrização

Grafo Bipartido



M = 4 (Fazendas)
M = {1,...,M} (Conjunto de fazendas)
N = 5 (Armazéns)
N = {1,...,N} (Conjunto de Armazéns)

Matriz de transporte
(A_{MxN})

5	6	4	6	8	1
6	6	5	8	4	2
4	3	3	2	1	3
5	7	2	9	13	4
1	2	3	4	5	

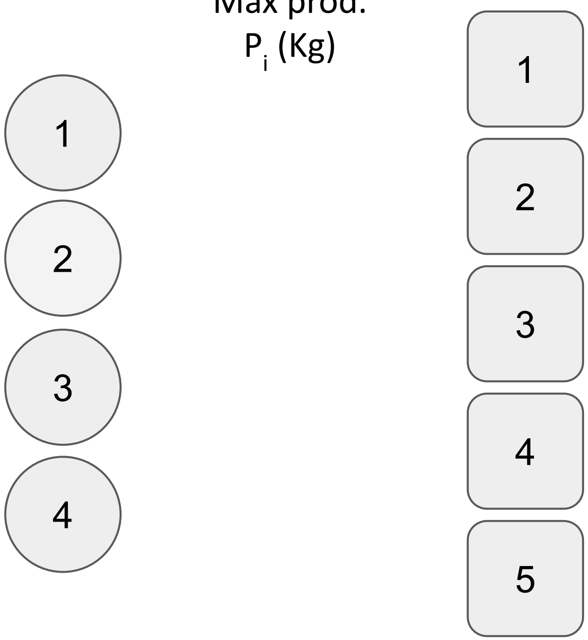
Modelando o problema - Parametrização

Grafo Bipartido

Fazendas (i)

Max prod. P_i (Kg)

Armazéns (j)

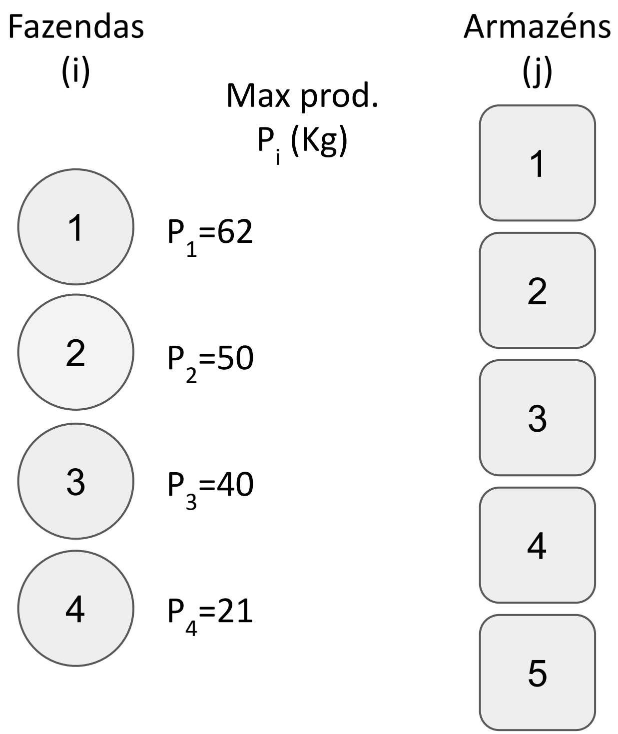


M = 4 (Fazendas)
M = {1,...,M} (Conjunto de fazendas)
N = 5 (Armazéns)
N = {1,...,N} (Conjunto de Armazéns)
Aij = A_{MxN} (Matriz de transporte)

CIC

Modelando o problema - Parametrização

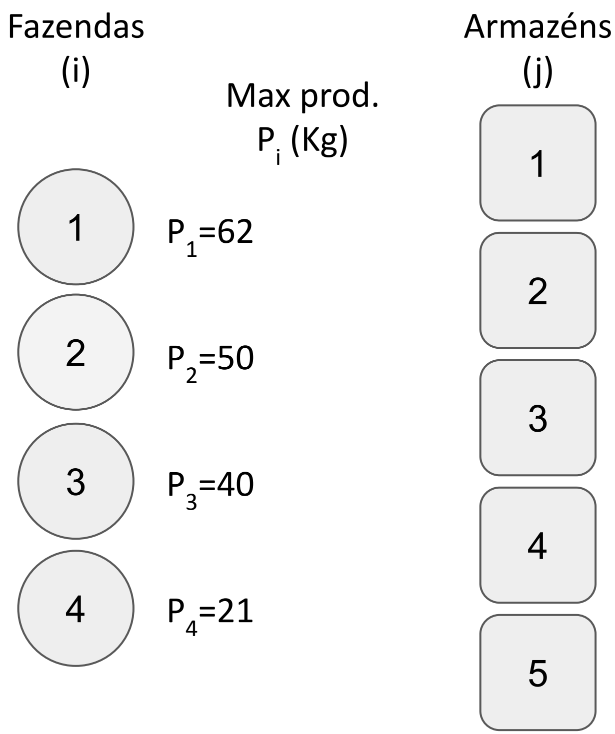
Grafo Bipartido



M = 4 (Fazendas)
M = {1,...,M} (Conjunto de fazendas)
N = 5 (Armazéns)
N = {1,...,N} (Conjunto de Armazéns)
Aij = A_{MxN} (Matriz de transporte)

Modelando o problema - Parametrização

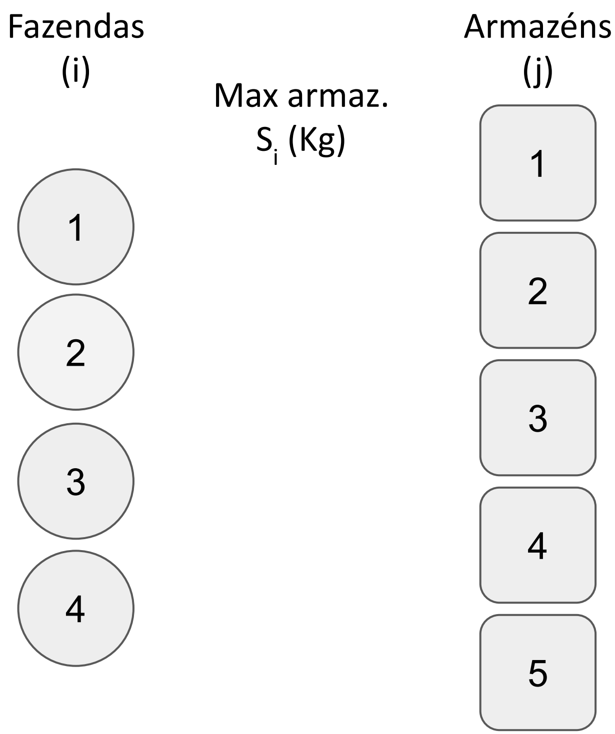
Grafo Bipartido



M = 4 (Fazendas)
M = {1,...,M} (Conjunto de fazendas)
N = 5 (Armazéns)
N = {1,...,N} (Conjunto de Armazéns)
Aij = A_{MxN} (Matriz de transporte)
Pi = P_M (Vetor de produção)

Modelando o problema - Parametrização

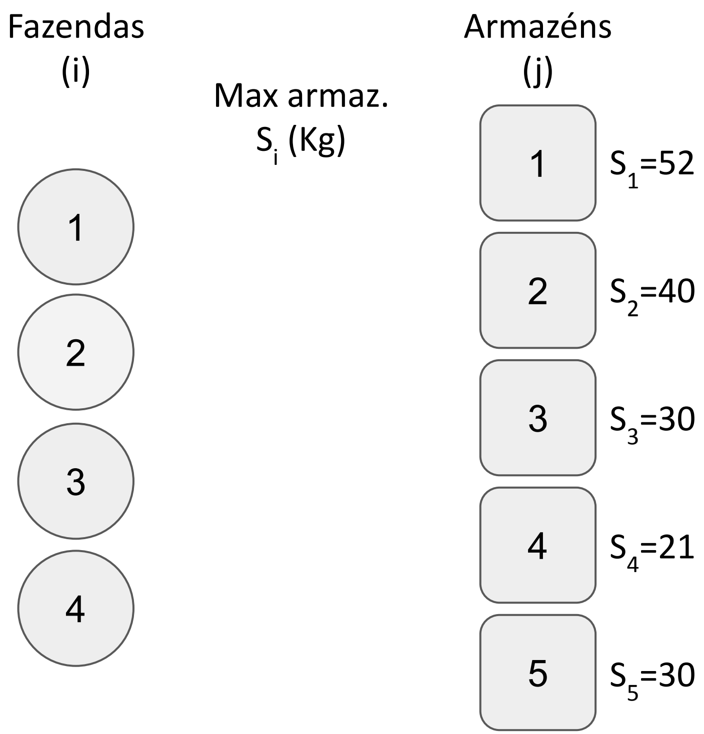
Grafo Bipartido



M = 4 (Fazendas)
$\mathcal{M}$ = {1,...,M} (Conjunto de fazendas)
N = 5 (Armazéns)
$\mathcal{N}$ = {1,...,N} (Conjunto de Armazéns)
$A_{ij} = A_{MxN}$ (Matriz de transporte)
$P_i = P_M$ (Vetor de produção)

Modelando o problema - Parametrização

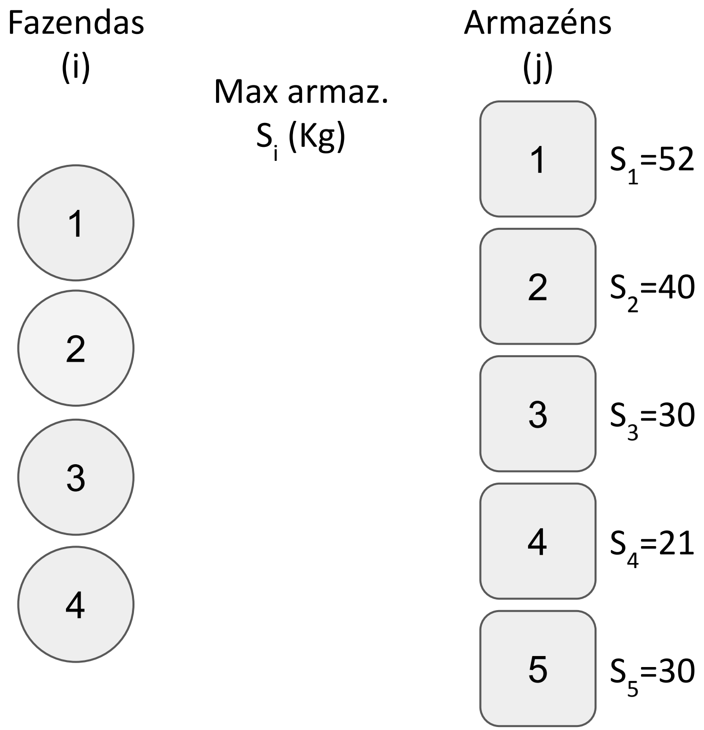
Grafo Bipartido



M = 4 (Fazendas)
M = {1,...,M} (Conjunto de fazendas)
N = 5 (Armazéns)
N = {1,...,N} (Conjunto de Armazéns)
Aij = A_{MxN} (Matriz de transporte)
Pi = P_M (Vetor de produção)

Modelando o problema - Parametrização

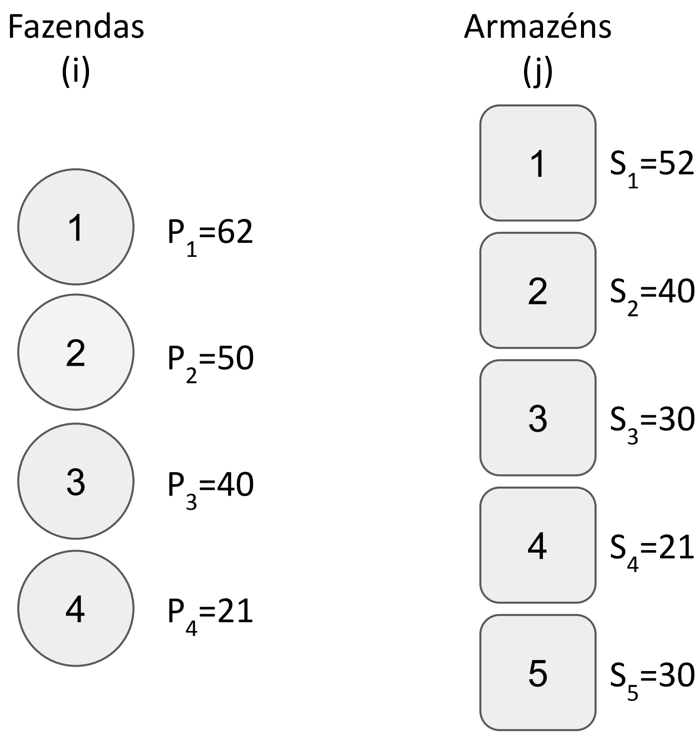
Grafo Bipartido



M = 4 (Fazendas)
M = {1,...,M} (Conjunto de fazendas)
N = 5 (Armazéns)
N = {1,...,N} (Conjunto de Armazéns)
Aij = A_{MxN} (Matriz de transporte)
Pi = P_M (Vetor de produção)
Si = S_N (Vetor de armazenamento)

Modelando o problema - Parametrização

Grafo Bipartido



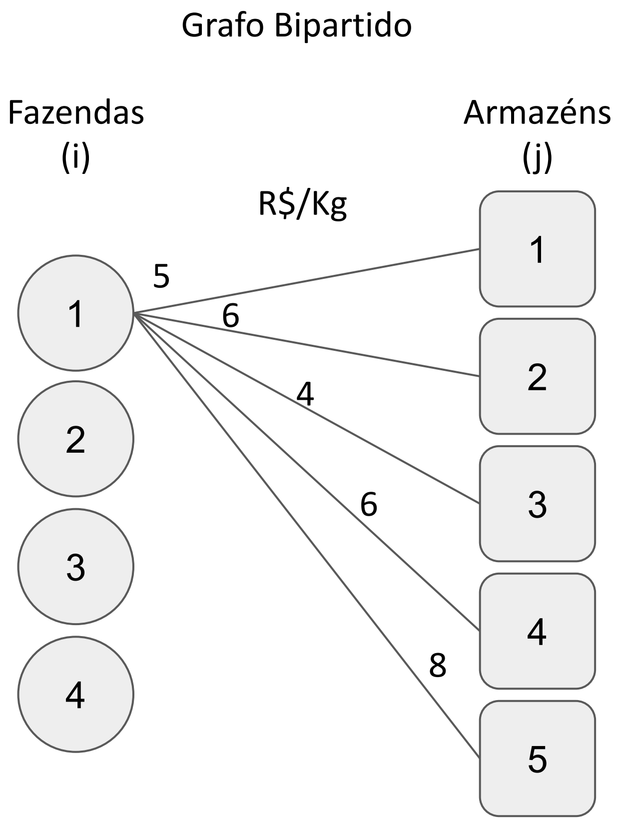
M = 4 (Fazendas)
M = {1,...,M} (Conjunto de fazendas)
N = 5 (Armazéns)
N = {1,...,N} (Conjunto de Armazéns)
Aij = A_{MxN} (Matriz de transporte)
Pi = P_M (Vetor de produção)
Si = S_N (Vetor de armazenamento)

Propriedade dos dados

$$\sum_{i \in M} P_i = \sum_{j \in N} S_i$$

Modelando o problema
Variáveis de decisão

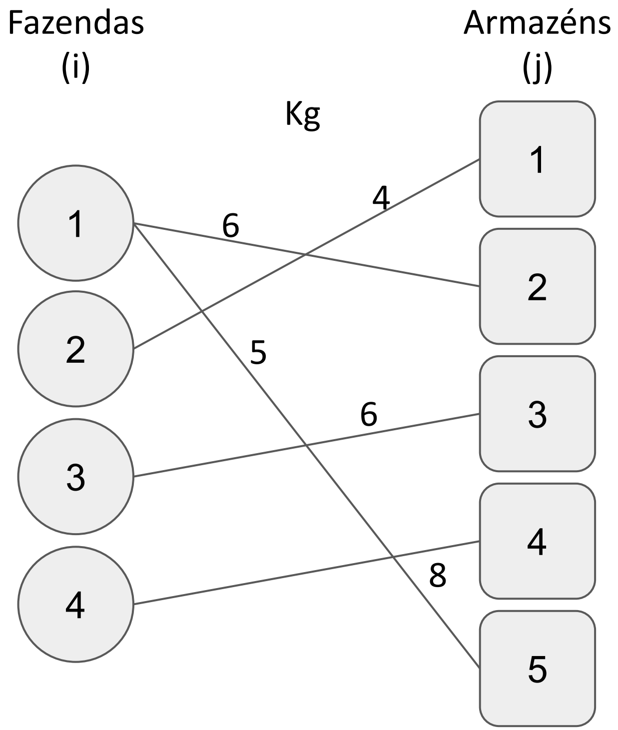
Modelando o problema - Variáveis de decisão



O que seria uma solução válida para o problema?

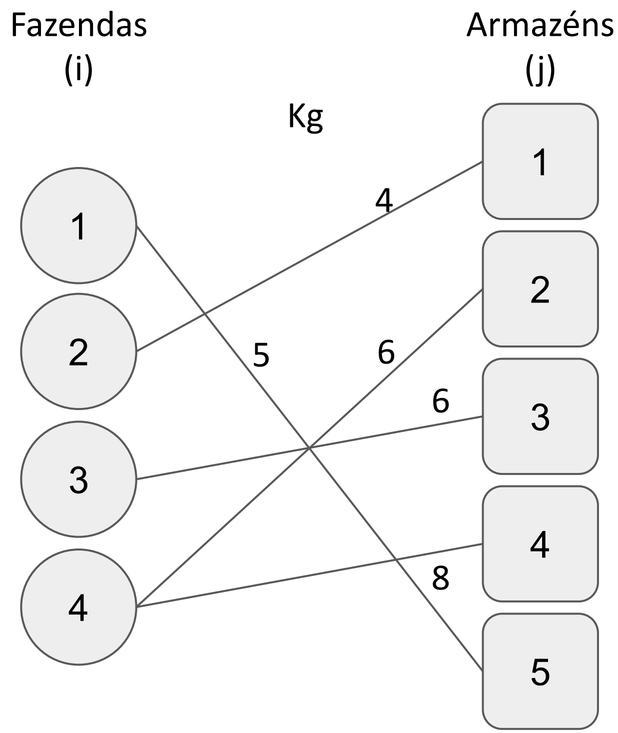
Modelando o problema - Variáveis de decisão

Grafo Bipartido



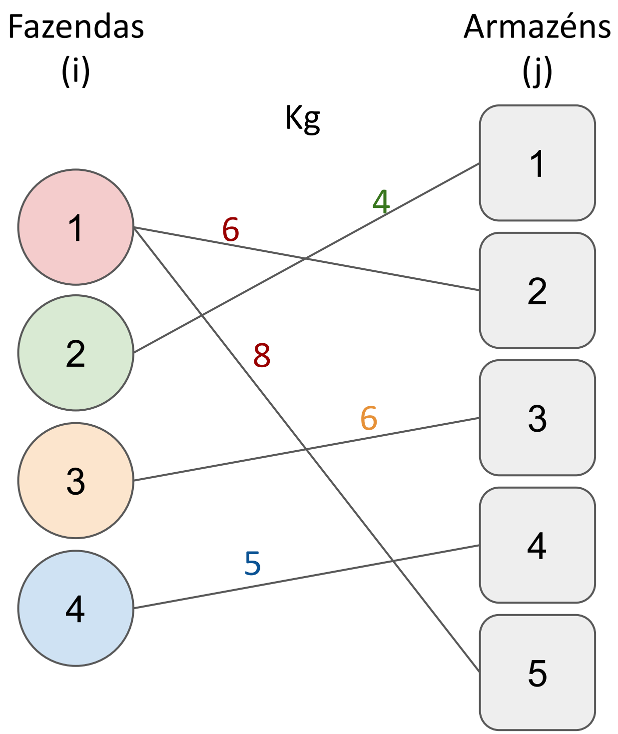
O que seria uma solução válida para o problema?

Qualquer quantidade de produto escoado entre fazendas e armazéns



Modelando o problema - Variáveis de decisão

Grafo Bipartido



O que seria uma solução válida para o problema?

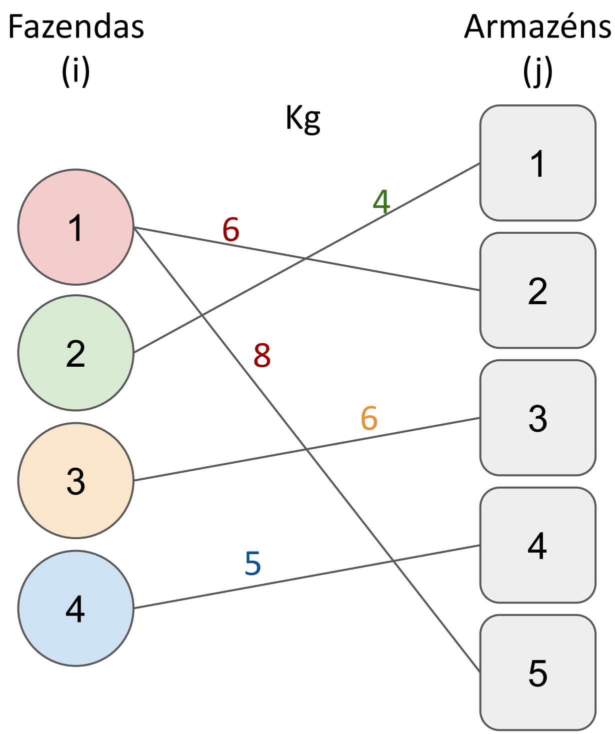
Qualquer quantidade de produto escoado entre fazendas e armazéns

Utilizaremos uma matriz de variáveis numéricas para representar os valores de produto escoado entre fazendas e armazéns

$$X_{MxN}$$

Modelando o problema - Variáveis de decisão

Grafo Bipartido



O que seria uma solução válida para o problema?

Qualquer quantidade de produto escoado entre fazendas e armazéns

Utilizaremos uma matriz de variáveis numéricas para representar os valores de produto escoado entre fazendas e armazéns

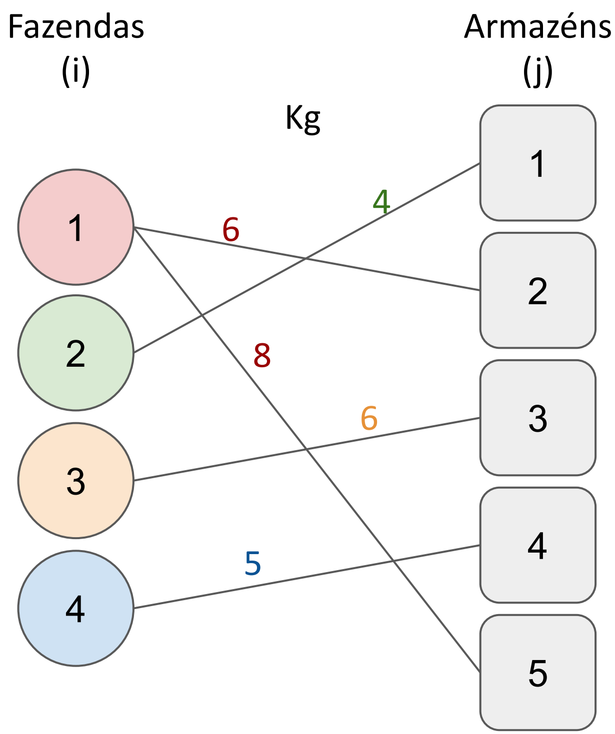
X_{MxN}

0	6	0	0	8	1
4	0	0	0	0	2
0	0	6	0	0	3
0	0	0	5	0	4
1	2	3	4	5	

CIC

Modelando o problema - Variáveis de decisão

Grafo Bipartido



X_{MxN}

	1	2	3	4	5
1	0	6	0	0	8
2	4	0	0	0	0
3	0	0	6	0	0
4	0	0	0	5	0

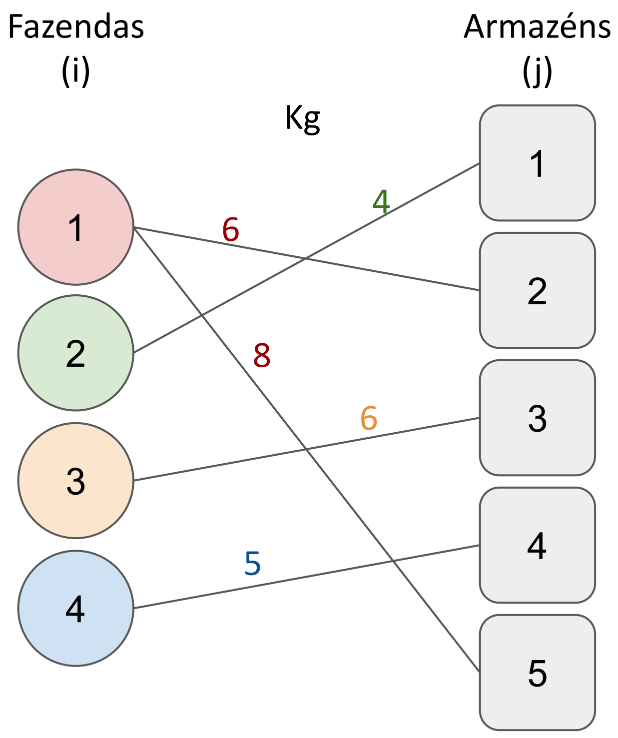
Nesse exemplo: $x_{12}=6$; $x_{15}=8$; $x_{21}=4$; $x_{33}=6$; $x_{44}=5$;

CIC

Modelando o problema
Restrições

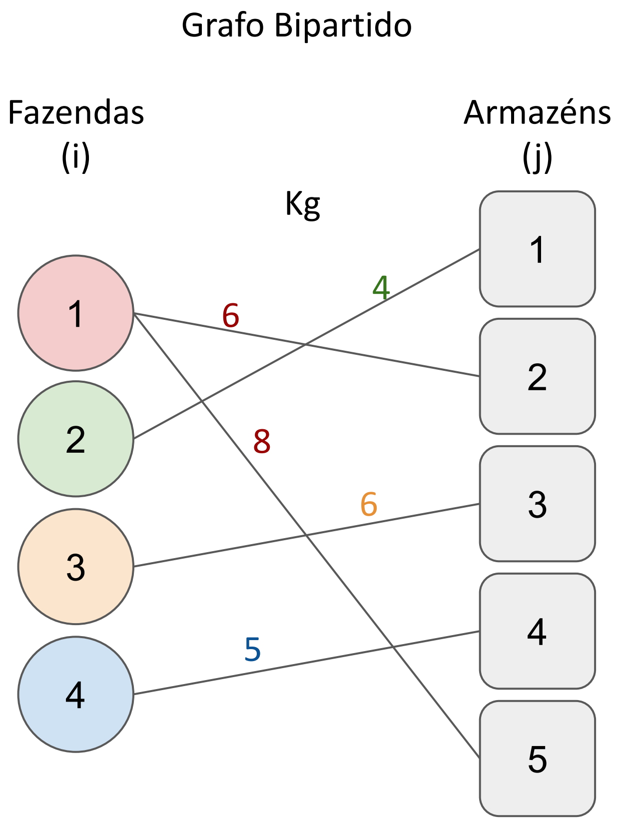
Modelando o problema - Restrições

Grafo Bipartido



Nesse exemplo: x_{12}=6; x_{15}=8; x_{21}=4; x_{33}=6; x_{44}=5;

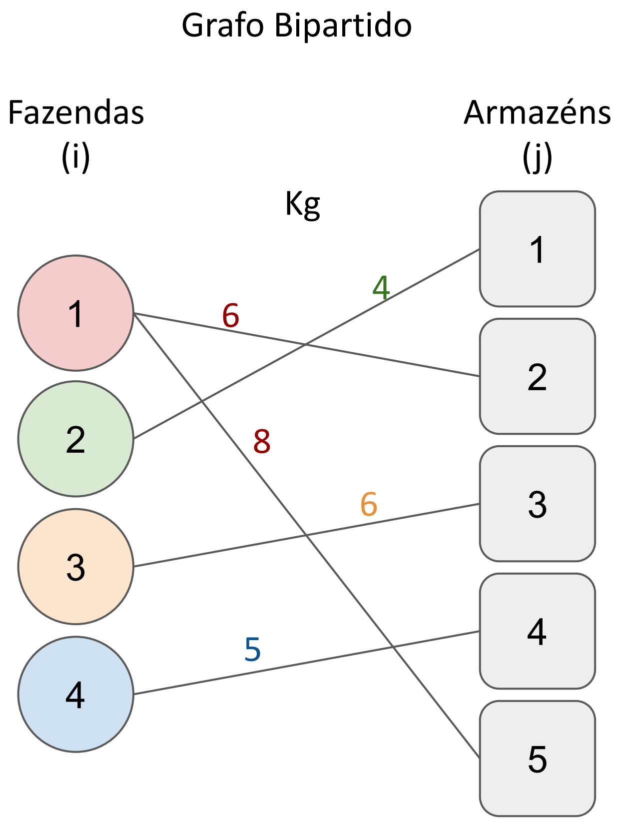
Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: x_{12}=6; x_{15}=8; x_{21}=4; x_{33}=6; x_{44}=5;

Todo o produto precisa ser escoado

Modelando o problema - Restrições



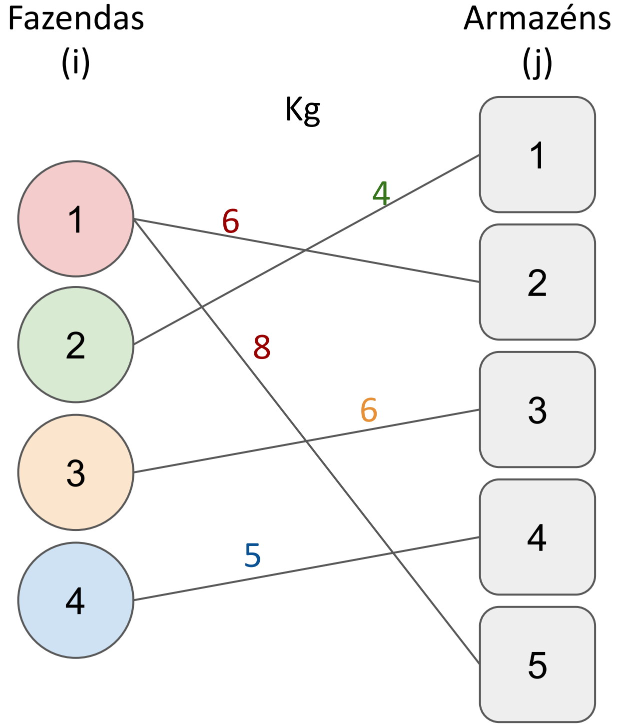
Nesse exemplo: $x_{12}=6$; $x_{15}=8$; $x_{21}=4$; $x_{33}=6$; $x_{44}=5$;

Todo o produto precisa ser escoado

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = P_i; \quad \forall i \in M$$

Modelando o problema - Restrições

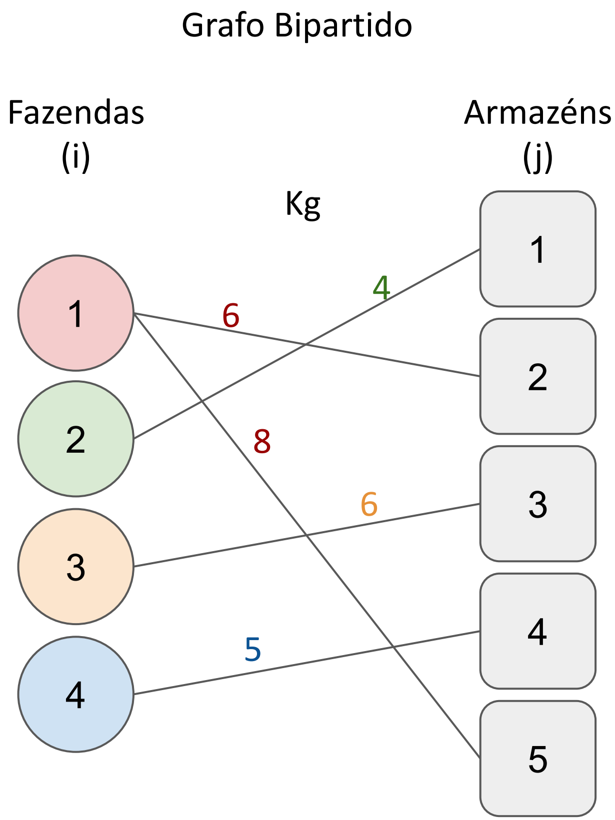
Grafo Bipartido



Nesse exemplo: $x_{12}=6$; $x_{15}=8$; $x_{21}=4$; $x_{33}=6$; $x_{44}=5$;

Todo armazém deve ser preenchido

Modelando o problema - Restrições



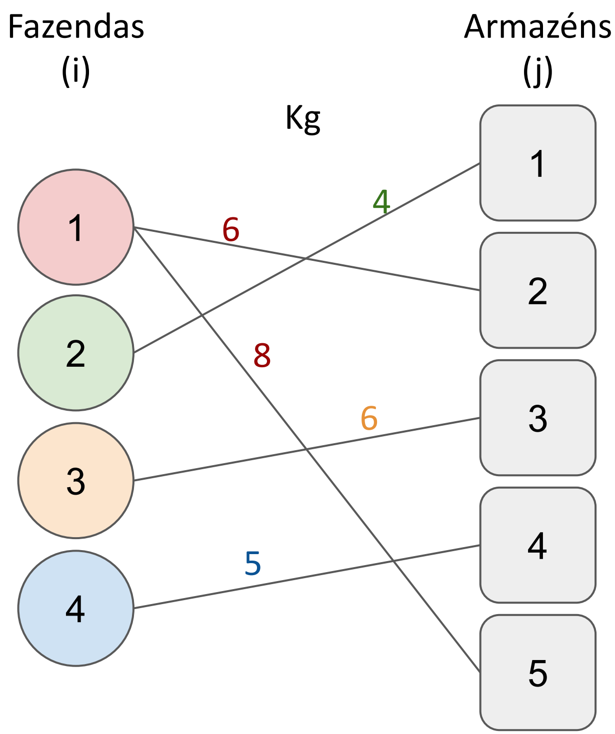
Nesse exemplo: x_{12}=6; x_{15}=8; x_{21}=4; x_{33}=6; x_{44}=5;

Todo armazém deve ser preenchido

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = S_j; \quad \forall j \in N$$

Modelando o problema - Restrições

Grafo Bipartido

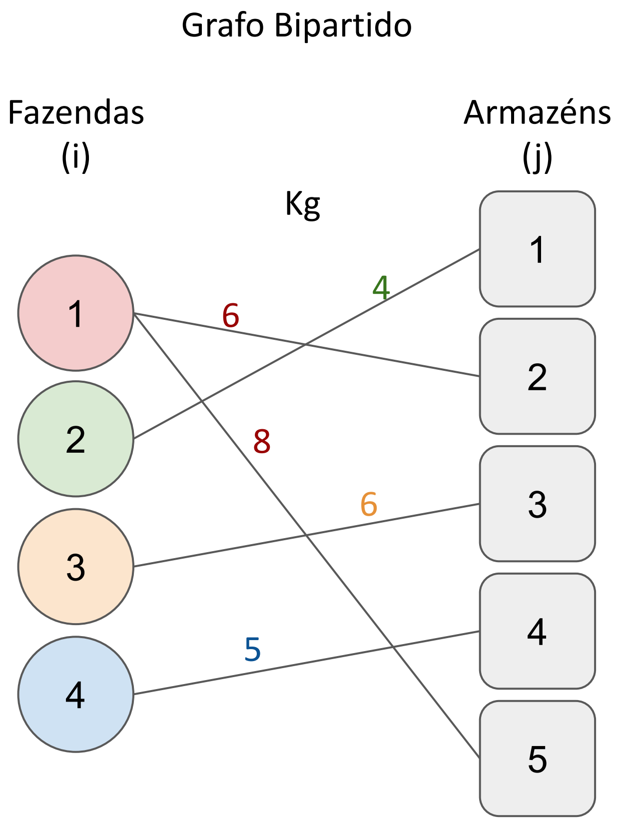


Nesse exemplo: x_{12}=6; x_{15}=8; x_{21}=4; x_{33}=6; x_{44}=5;

Um armazém nunca pode receber mais do que comporta
Uma fazenda nunca conseguirá encaminhar mais do que produz

$$0 \leq x_{ij} \leq min(P_i; S_j);$$
$$\forall i \in M; \forall j \in N$$

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: x_{12}=6; x_{15}=8; x_{21}=4; x_{33}=6; x_{44}=5;

Um armazém nunca pode receber mais do que comporta
Uma fazenda nunca conseguirá encaminhar mais do que produz

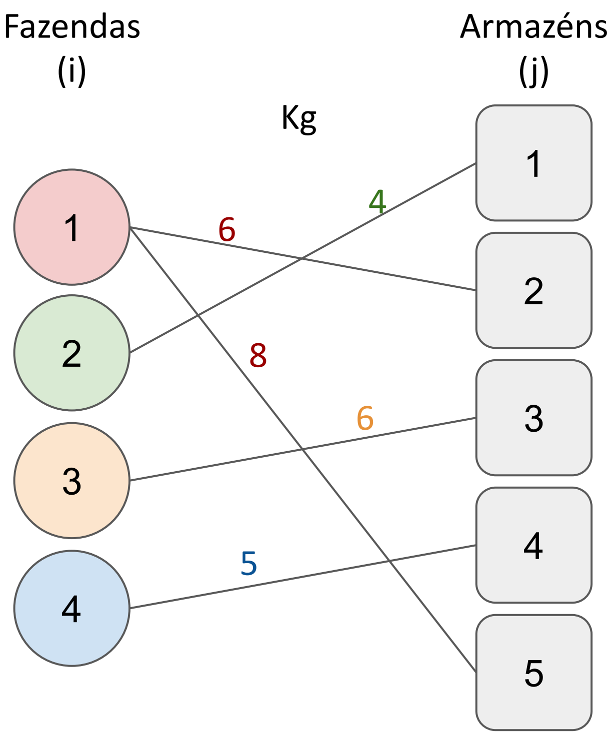
$$0 \leq x_{ij} \leq min(P_i; S_j);$$
$$\forall i \in M; \forall j \in N$$

Mas não precisamos dessa restrição
As restrições de conservação realizarão esse ajuste

Função objetivo

Modelando o problema - Função objetivo

Grafo Bipartido



Nesse exemplo: x_{12}=6; x_{15}=8; x_{21}=4; x_{33}=6; x_{44}=5;

Se multiplicarmos às variáveis pelos custos de transporte

Nesse exemplo

- x12*A12 + x15 * A15 + x21 * A21 + x33 * A33 + x44 * A44

Teremos o custo de se tranportar todo o milho entre as fazendas e os armazéns

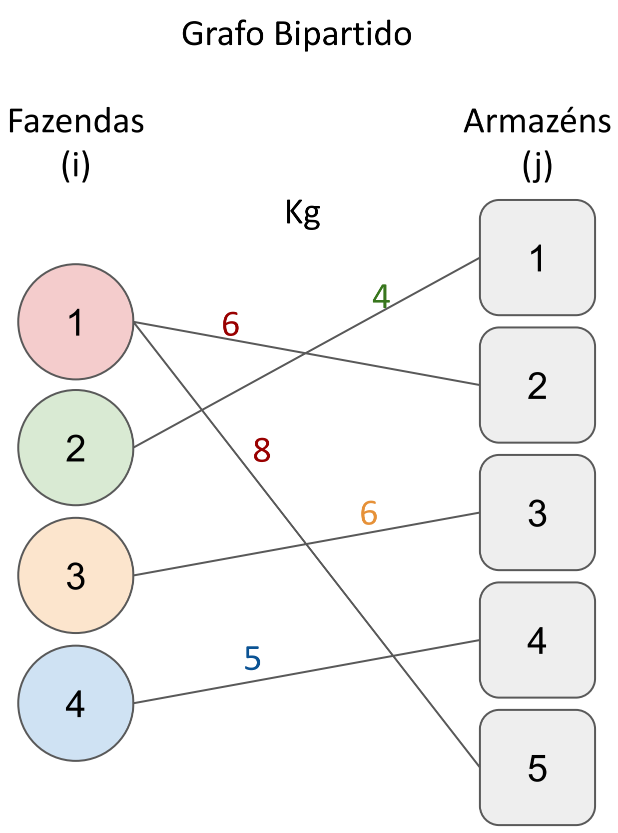
Generalizando, queremos o menor custo

Ou seja, a combinação de menor custo para escoar os produtos da fazenda para armazéns, resultando em uma minimização

$$\min \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} A_{ij} x_{ij}$$

Modelagem final

Modelagem final do problema



$$\min \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} A_{ij} x_{ij}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = P_i; \qquad \forall i \in M$$

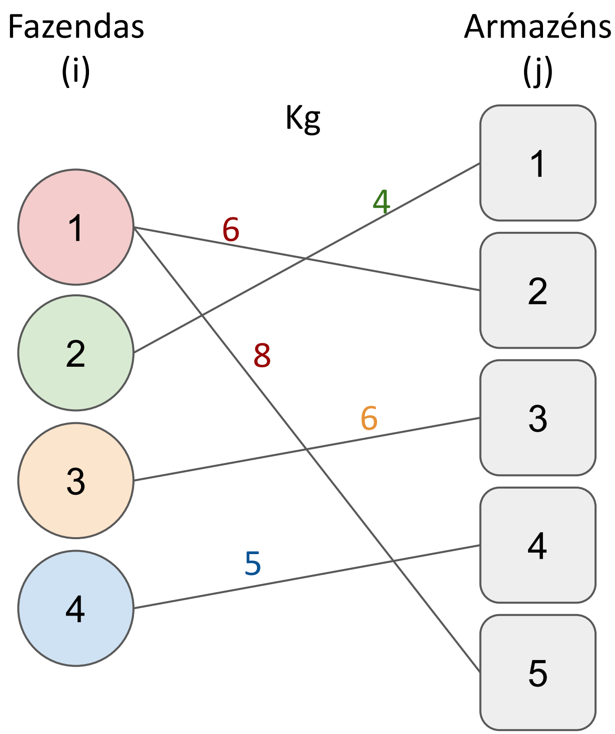
$$\sum_{i \in M} x_{ij} = S_j; \qquad \forall j \in N$$

$$0 \leq x_{ij} \leq min(P_i; S_j);$$

$$\forall i \in M; \forall j \in N$$

Implemente o problema de transporte

Grafo Bipartido



$$\min \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} A_{ij} x_{ij}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = P_i; \qquad \forall i \in M$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = S_j; \qquad \forall j \in N$$

$$0 \leq x_{ij} \leq min(P_i; S_j);$$

$$\forall i \in M; \forall j \in N$$

Implemente o problema de transporte

Considere a instância abaixo para validar seu modelo

M=4
N=5
Producao(Pi): [3. 9. 7. 11.]
Armazens(Sj): [9. 5. 7. 1. 8.]

Custo de escoamento R$/Kg (Aij):
[0.50 0.95 0.16 0.14 0.31]
[0.04 0.08 0.04 0.28 0.84]
[0.84 0.46 0.01 0.89 0.07]
[0.21 0.23 0.63 0.15 0.89]

```
Solucao:
Valor objetivo = 3.8300000000000005
[ 0.00 0.00 2.00 0.00 1.00 ]
[ 4.00 0.00 5.00 0.00 0.00 ]
[ 0.00 0.00 0.00 0.00 7.00 ]
[ 5.00 5.00 0.00 1.00 0.00 ]
```