Problemas lineares
Problema de fluxo máximo

Fundamentos em Pesquisa Operacional

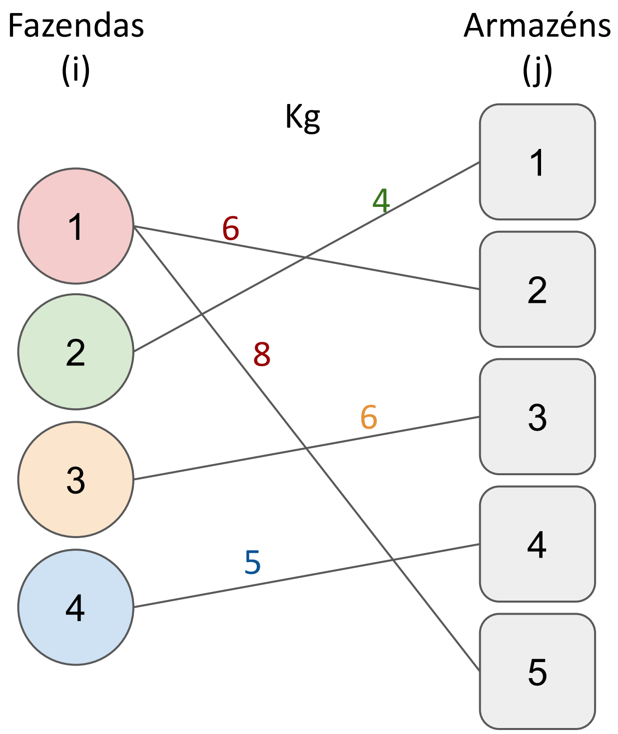
Marcelo Antonio Marotta

Departamento de Ciência da Computação
Universidade de Brasília

Exercício da última aula

Implementar no ORTools o problema de transporte

Grafo Bipartido



$$\min \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} A_{ij} x_{ij}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = P_i; \qquad \forall i \in M$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = S_j; \qquad \forall j \in N$$

$$0 \leq x_{ij} \leq min(P_i; S_j);$$

$$\forall i \in M; \forall j \in N$$

M=4
N=5
Producao(Pi): [3. 9. 7. 11.]
Armazens(Sj): [9. 5. 7. 1. 8.]

Custo de escoamento R$/Kg (Aij):
[0.50 0.95 0.16 0.14 0.31]
[0.04 0.08 0.04 0.28 0.84]
[0.84 0.46 0.01 0.89 0.07]
[0.21 0.23 0.63 0.15 0.89]

Livro

- Problema de fluxo máximo
- Exemplo 1.3
    - Capítulo 3 (Max-flow problem)
    - Capítulo 4 (Min cost flow problem)

Network Optimization:

Continuous and Discrete Models

Dimitri P. Bertsekas

Massachusetts Institute of Technology

WWW site for book information and orders

http://www.athenasc.com

Athena Scientific, Belmont, Massachusetts

Problemas lineares

Problemas lineares inteiros binários

- The assignment problem (problema de associação)
- The shortest path (problema do menor caminho)

Problemas lineares

- The transportation problem (problema de transporte)
- The max-flow problem (problema de máximo fluxo)

The max-flow problem - Exemplo 1.3 (Bertsekas, 1998)

O problema de máximo fluxo é importante em muitos contextos práticos

- Cálculo da vazão máxima para sistemas hídricos
- Calcula da vazão máxima para sistemas de redes de computadores
- Cálculo da velocidade máxima em sistemas rodoviários

The max-flow problem - Exemplo 1.3 (Bertsekas, 1998)

Balanceamento de carga - Problema de fluxo máximo

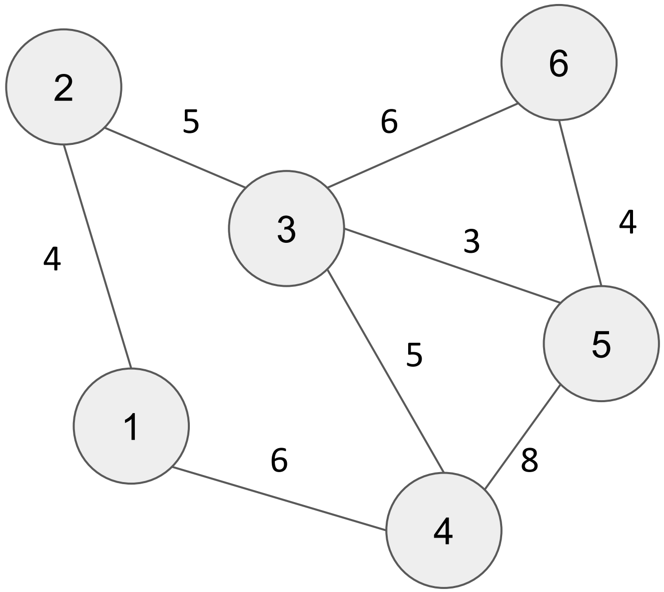
Dada uma rede de computadores, onde o computador de origem irá encaminhar vários arquivos para um computador destino. Balanceie o tráfego de rede entre os nodos intermediários para maximizar a vazão entre os nodos.

Temos um grafo (N, A) com limites de fluxo xij $\in$ [b ij, c ij] para cada arco (i, j), e dois nós especiais S e T. Queremos maximizar a divergência de S sobre todos os vetores de fluxo de capacidade viável, tendo divergência zero para todos os nós, exceto S e T.

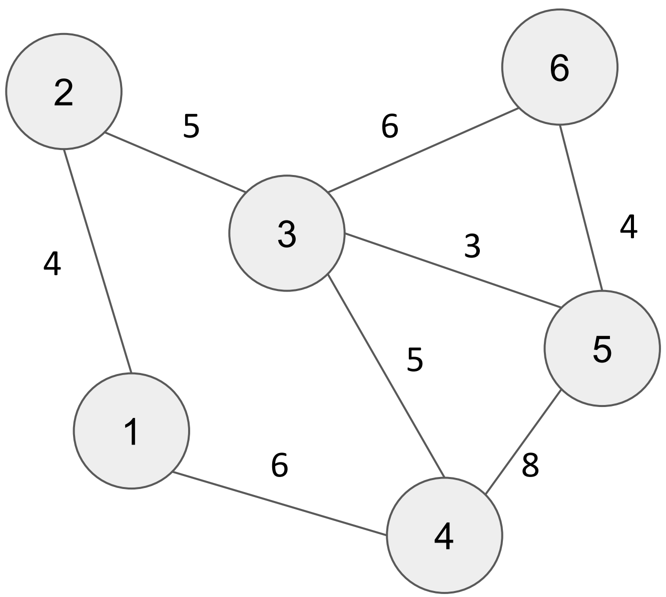
Modelando o problema
Parametrização

Modelando o problema - Parametrização

Grafo conectado

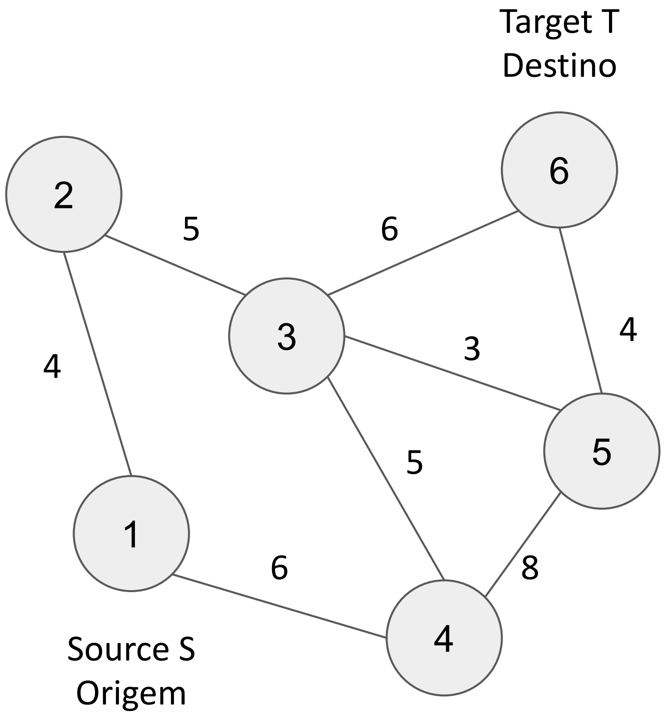


Modelando o problema - Parametrização



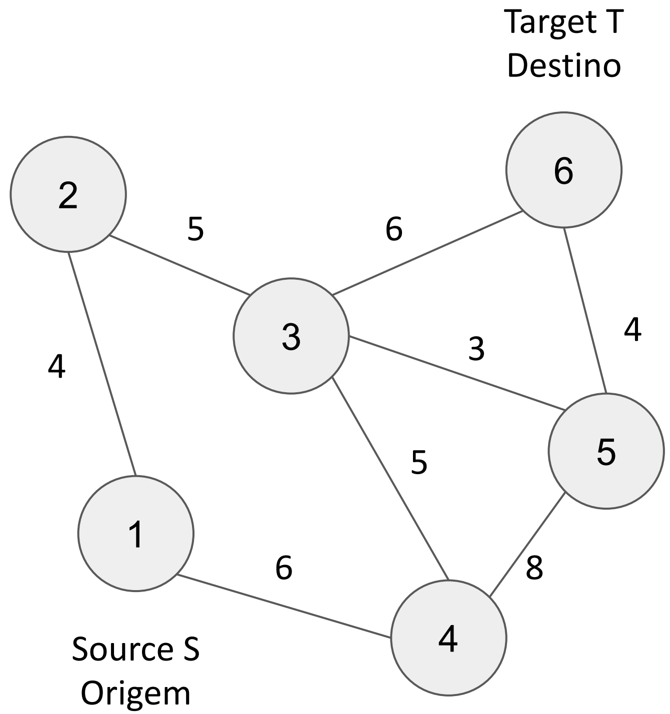
N = conjunto de nodos - {1,...,N}
N=número de nodos = 6
i,j = índices = {i,j ∈ *N*}

Modelando o problema - Parametrização



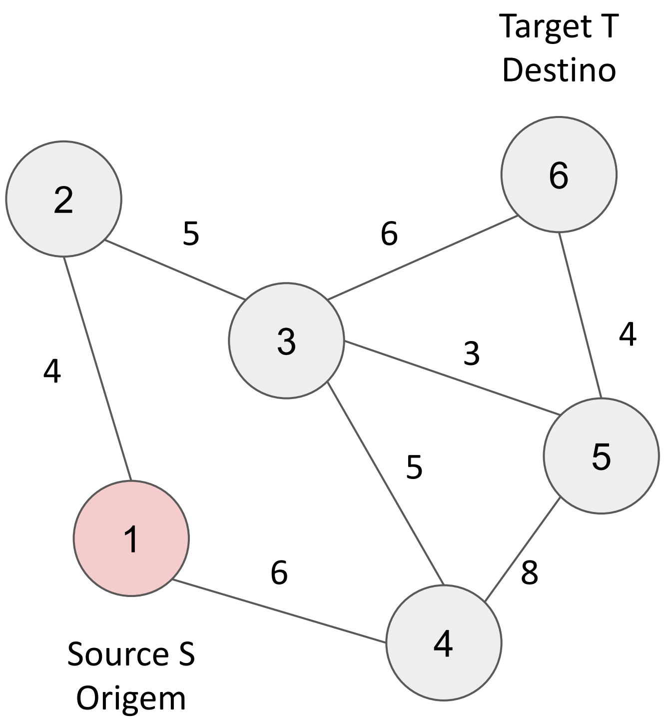
N = conjunto de nodos - {1,...,N}
N=número de nodos = 6
i,j = índices = {i,j $\in$ *N*}
T = 6
S = 1

Modelando o problema - Parametrização



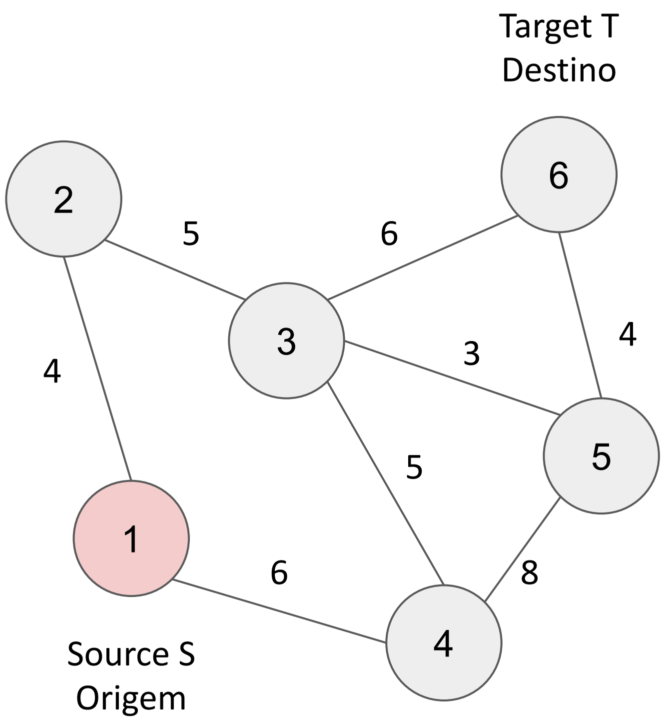
Matriz de conectividade (ou conexão)

Modelando o problema - Parametrização

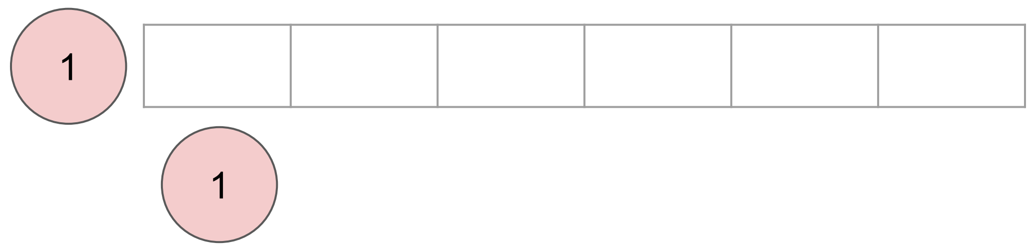


Matriz de conectividade (ou conexão)

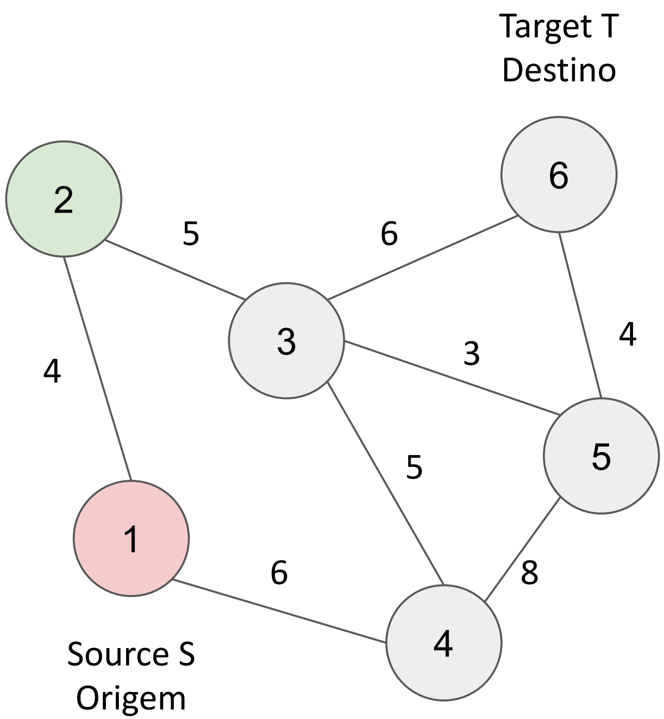
Modelando o problema - Parametrização



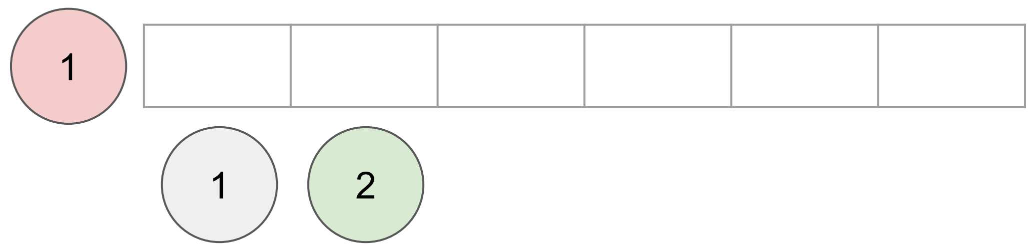
Matriz de conectividade (ou conexão)



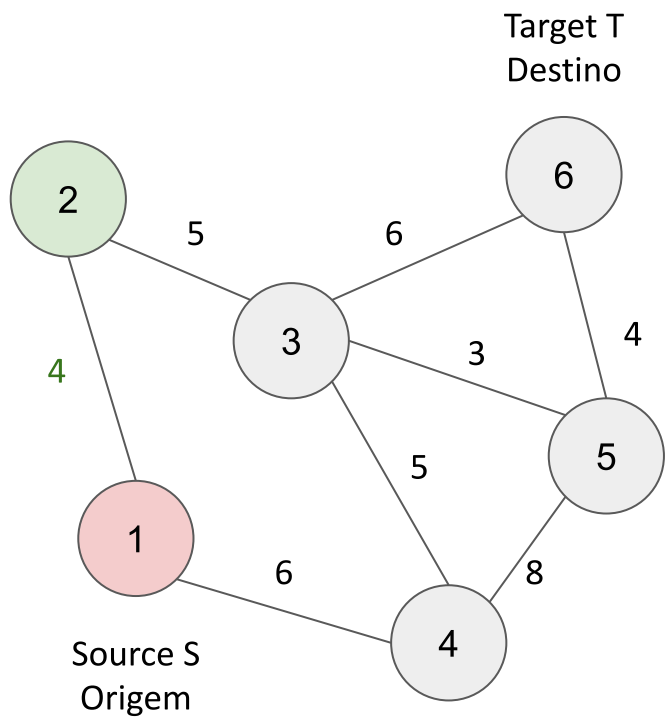
Modelando o problema - Parametrização



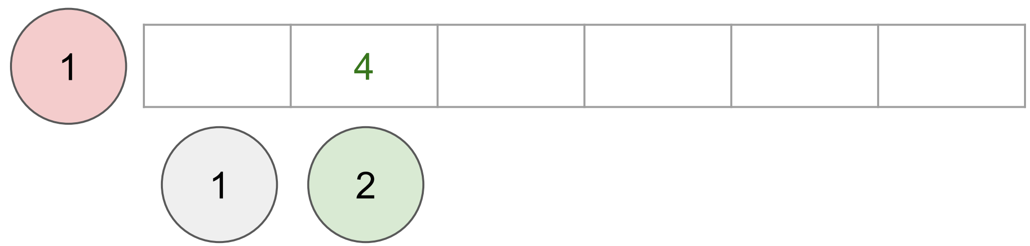
Matriz de conectividade (ou conexão)



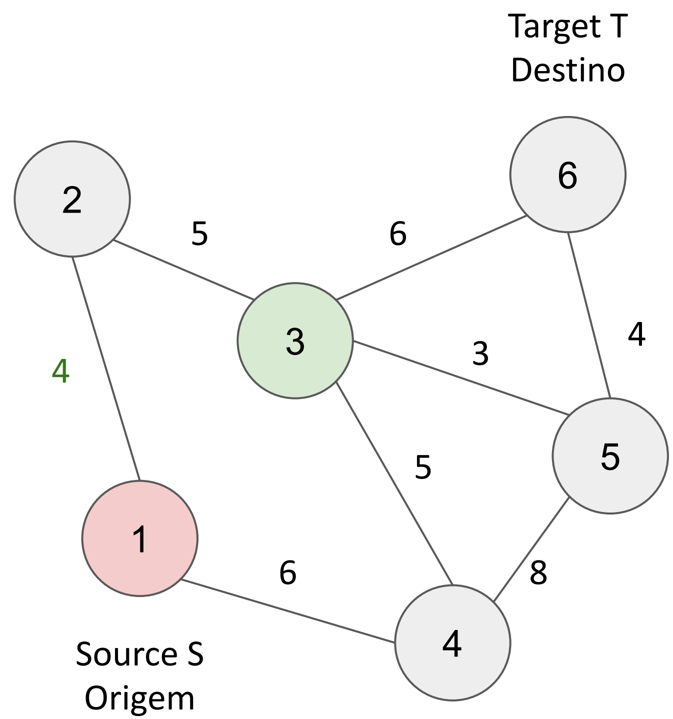
Modelando o problema - Parametrização



Matriz de conectividade (ou conexão)



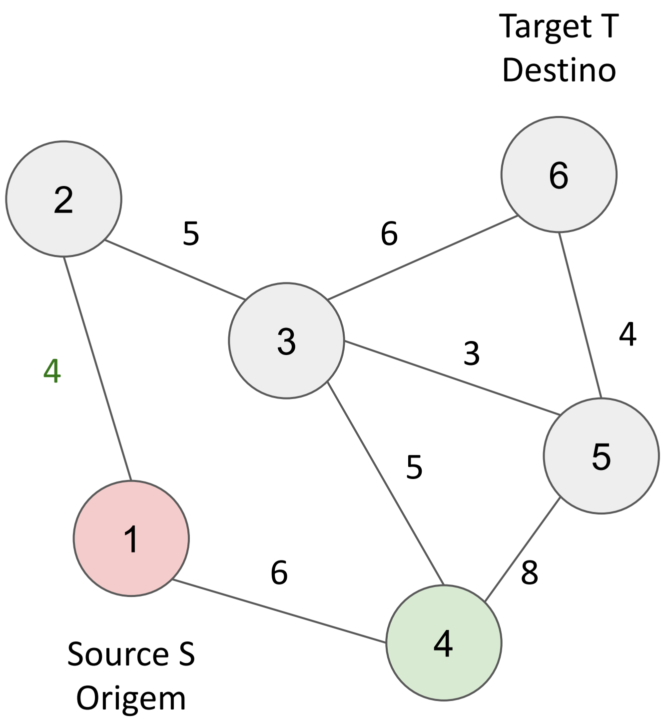
Modelando o problema - Parametrização



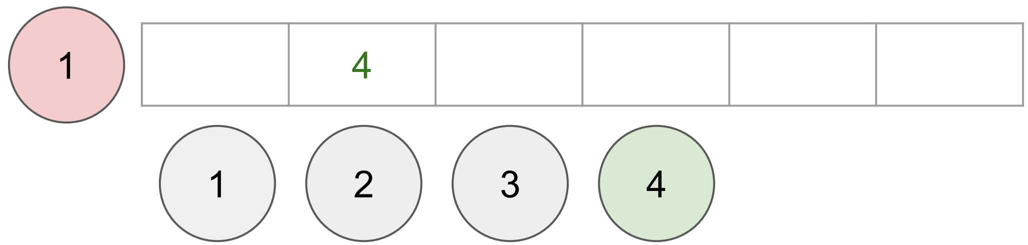
Matriz de conectividade (ou conexão)

	1	2	3			
1		4				

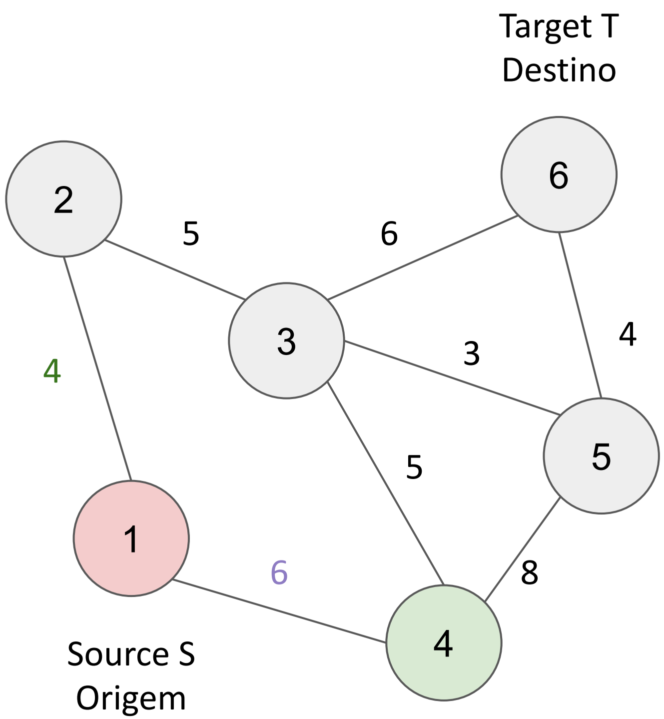
Modelando o problema - Parametrização



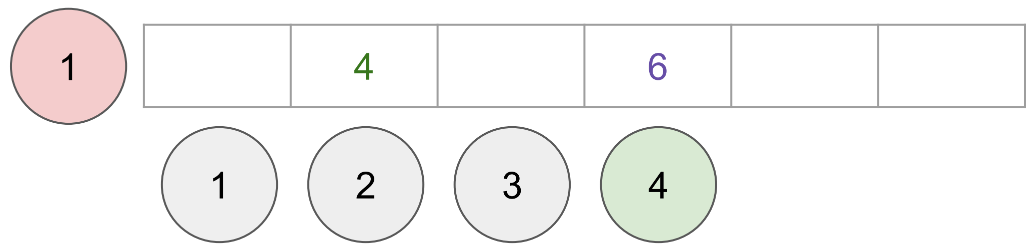
Matriz de conectividade (ou conexão)



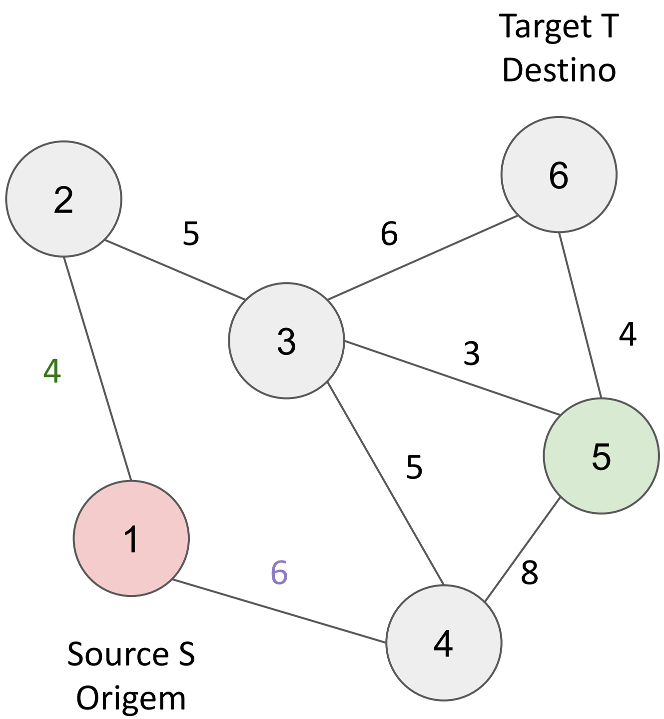
Modelando o problema - Parametrização



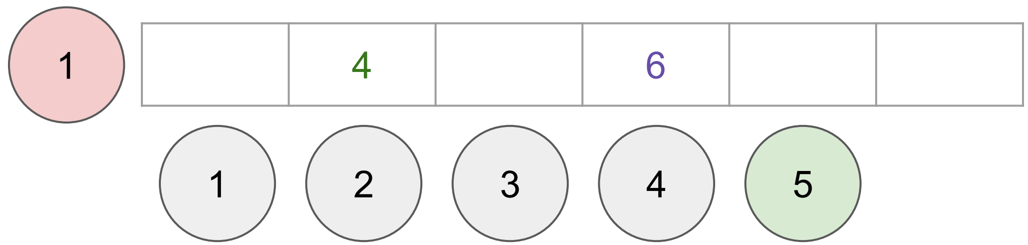
Matriz de conectividade (ou conexão)



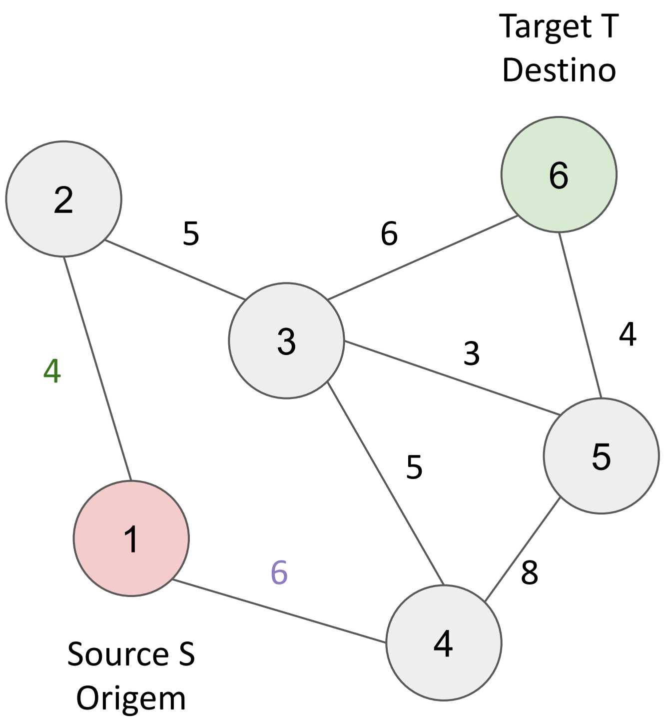
Modelando o problema - Parametrização



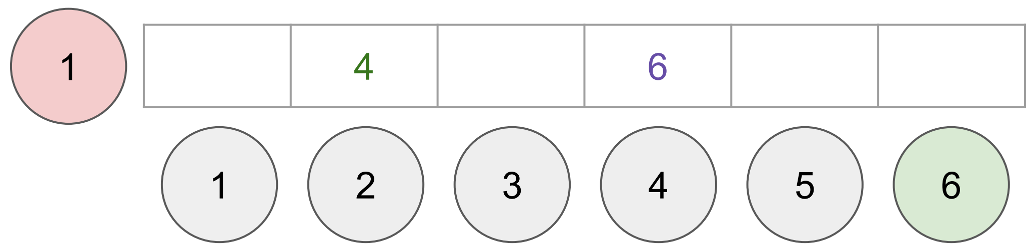
Matriz de conectividade (ou conexão)



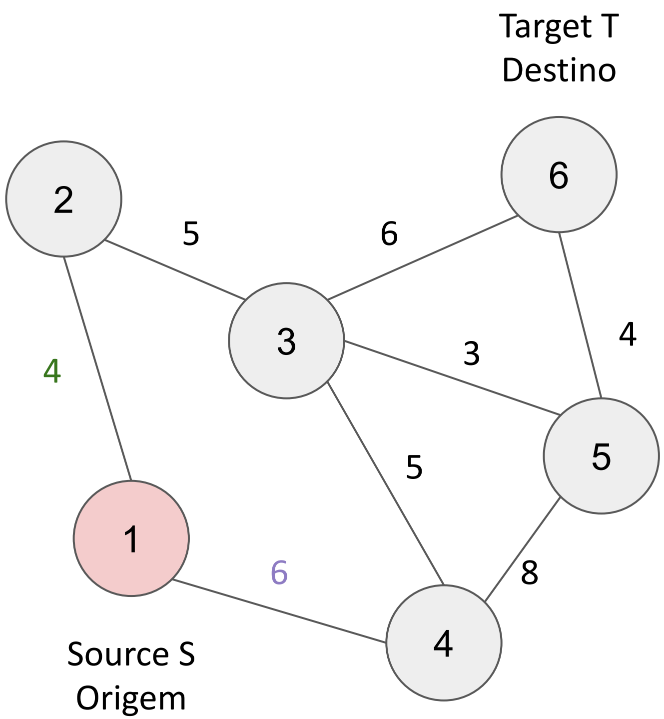
Modelando o problema - Parametrização



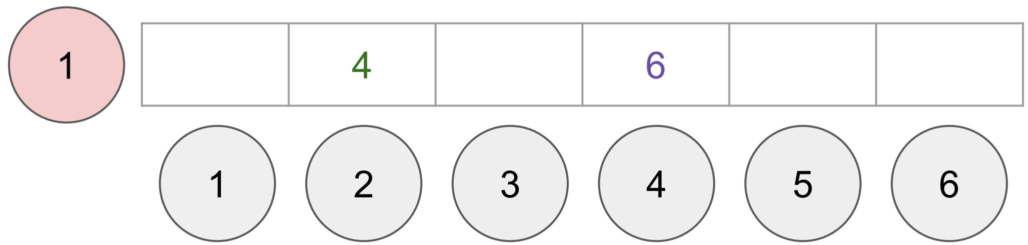
Matriz de conectividade (ou conexão)



Modelando o problema - Parametrização

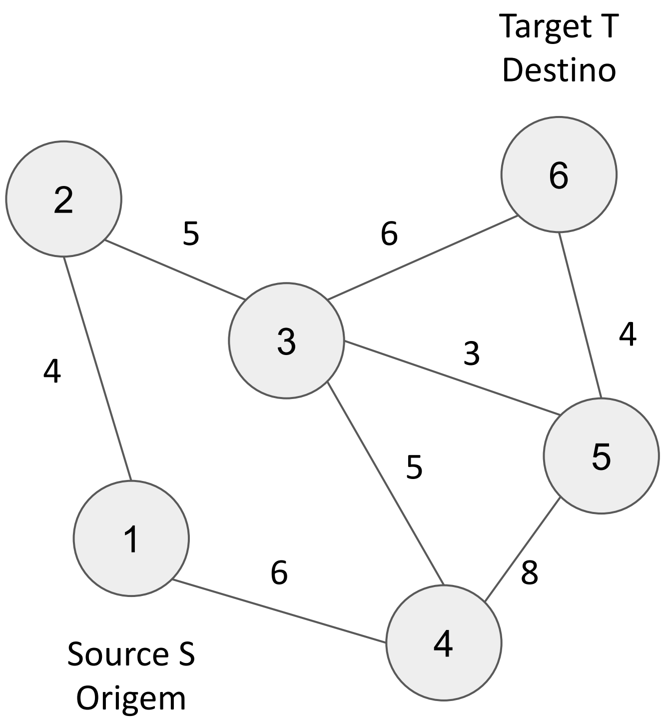


Matriz de conectividade (ou conexão)



Repete-se o processo para todos os nodos até gerar uma matriz

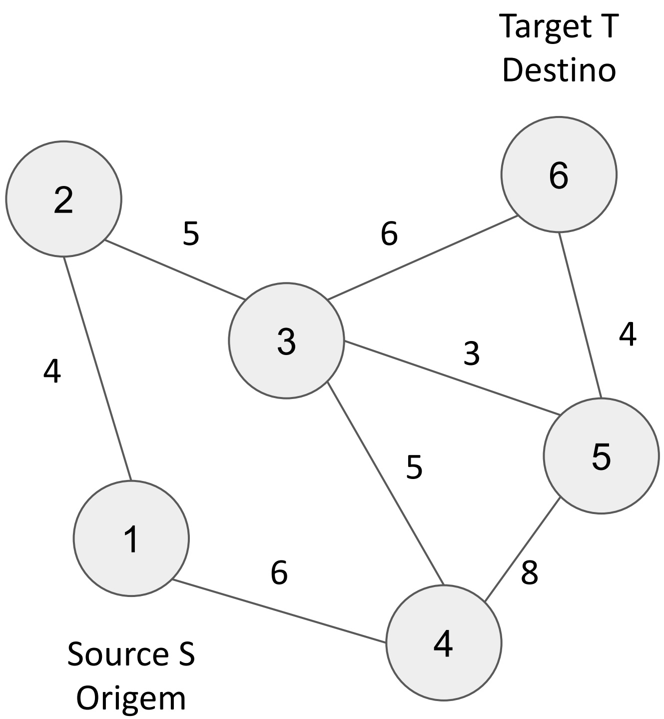
Modelando o problema - Parametrização



Matriz de conectividade (ou conexão)

	1	2	3	4	5	6
1		4		6		
2	4		5			
3		5		5	3	6
4	6		5		8	
5			3	8		4
6			6		4	

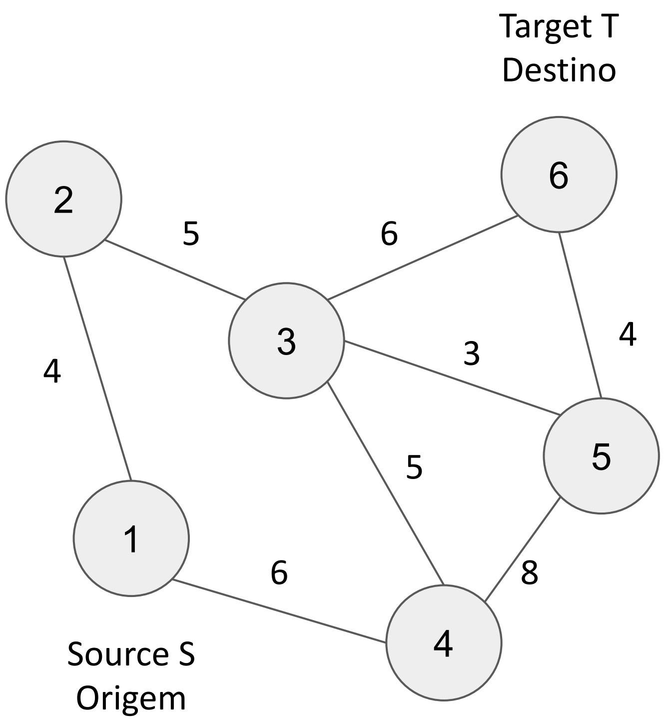
Modelando o problema - Parametrização



c_{ij} = Matriz de conectividade (ou conexão) ou
Matriz de capacidade máxima

	1	2	3	4	5	6
1		4		6		
2	4		5			
3		5		5	3	6
4	6		5		8	
5			3	8		4
6			6		4	

Modelando o problema - Parametrização

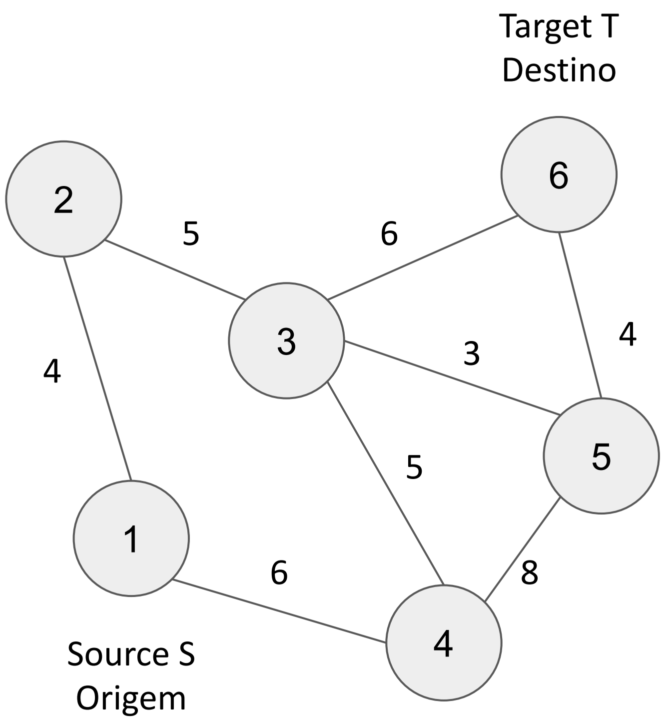


c_{ij} = Matriz de conectividade (ou conexão) ou
Matriz de capacidade máxima

	1	2	3	4	5	6
1		4		6		
2	4		5			
3		5		5	3	6
4	6		5		8	
5			3	8		4
6			6		4	

Assim como existe uma matriz de capacidade máxima, pode existir uma matriz de capacidade mínima

Modelando o problema - Parametrização

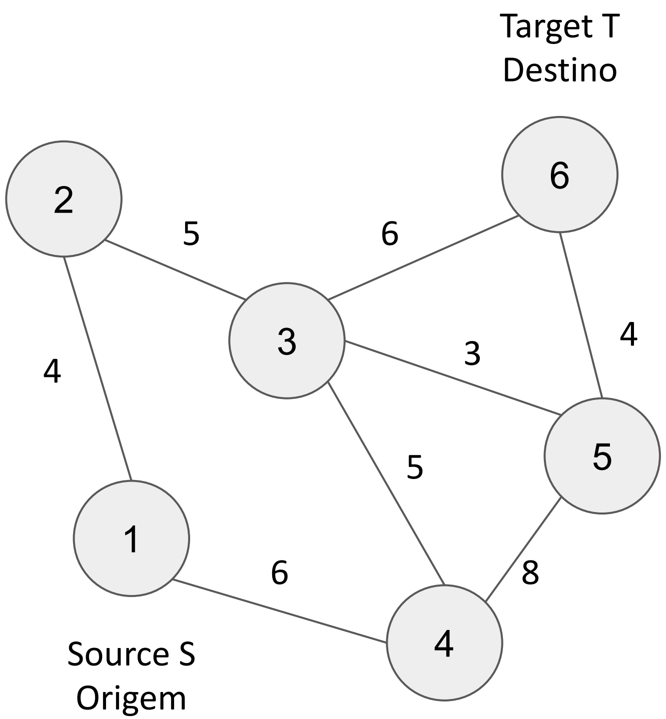


b_{ij} = Matriz de capacidade mínima

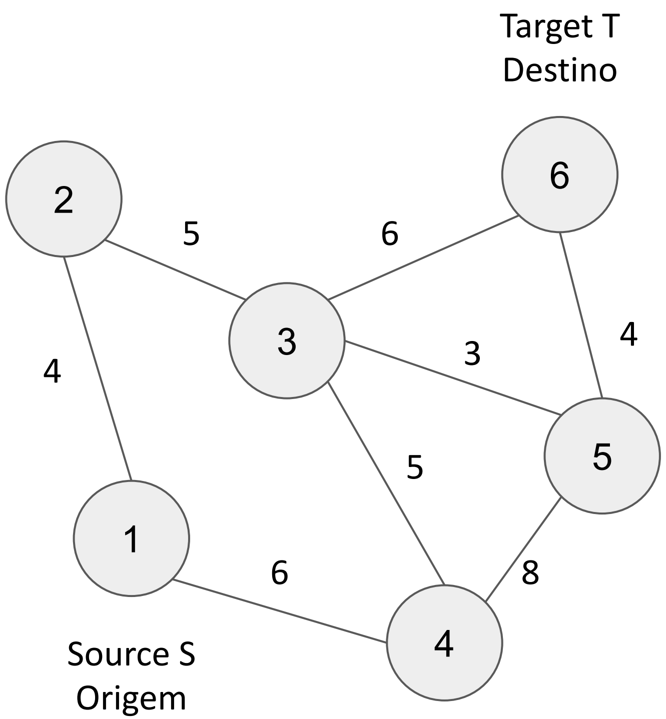
	1	2	3	4	5	6
1		1		0		
2	0		0.5			
3		0		2	2	1
4	0		0		1.2	
5			0	0		2
6			0		0	

Modelando o problema
Variáveis de decisão

Modelando o problema - Variáveis de decisão

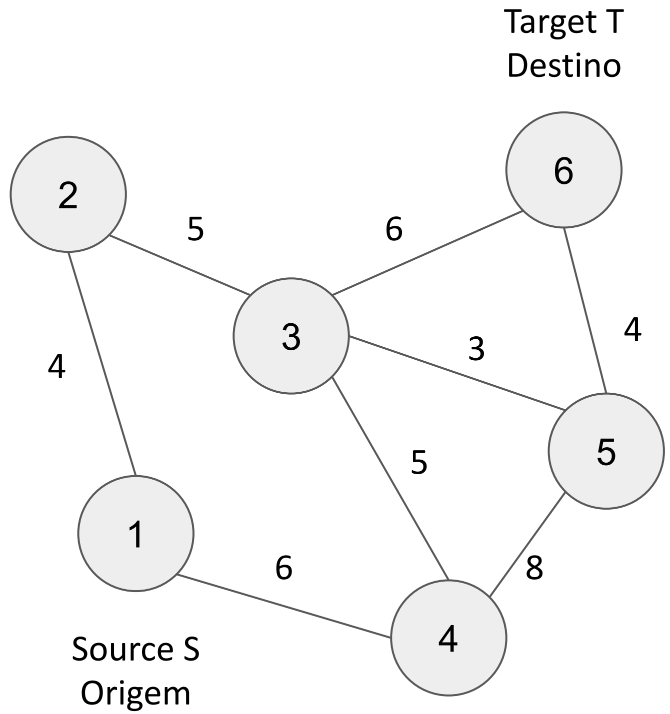


Modelando o problema - Variáveis de decisão



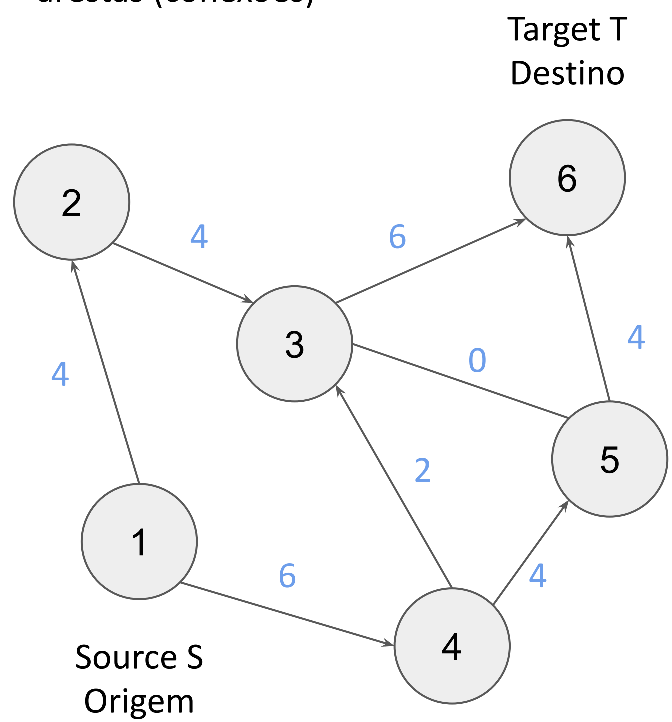
O que seria uma solução válida para o problema?

Modelando o problema - Variáveis de decisão

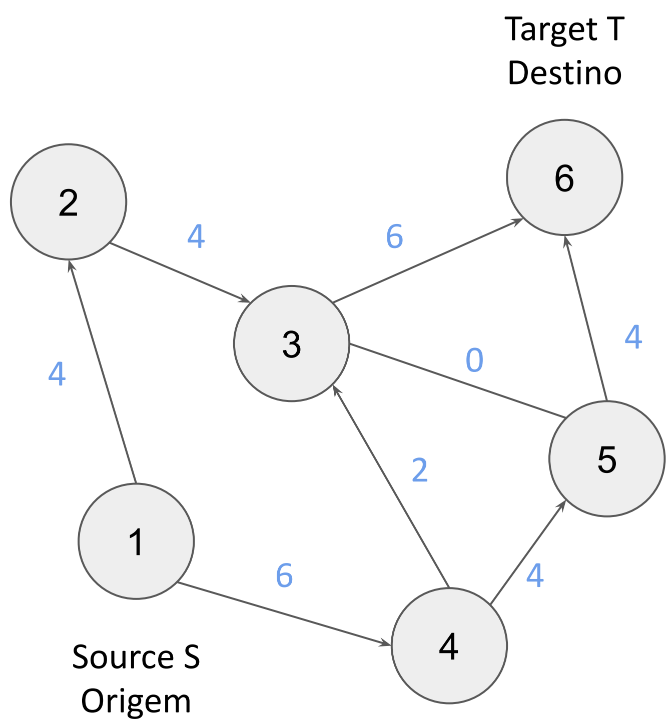


O que seria uma solução válida para o problema?

Qualquer valor de vazão orientada entre S e T, contanto que não violem as capacidades das arestas (conexões)



Modelando o problema - Variáveis de decisão



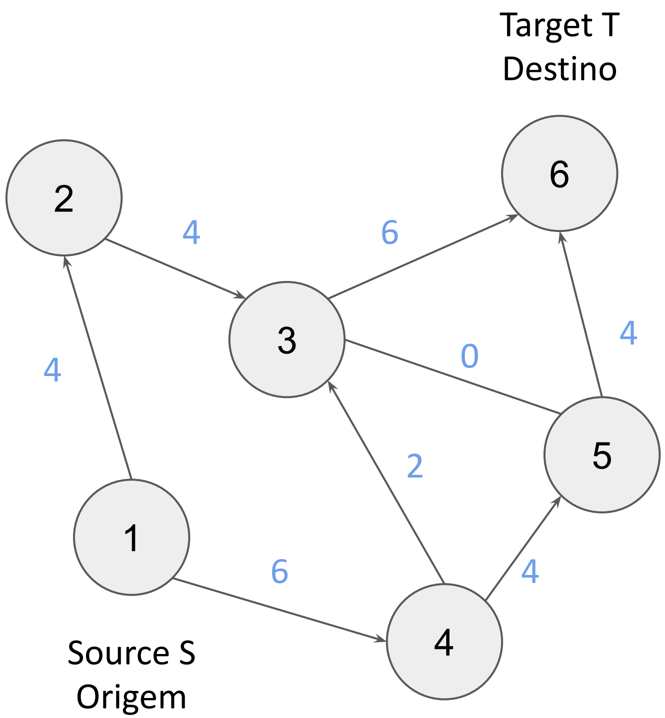
Qualquer valor de vazão entre S e T, contanto que não violem as capacidades das arestas (conexões)

Utilizaremos uma matriz de variáveis numéricas para representar os valores de vazão

X_{NxN}

	1	2	3	4	5	6
1		4		6		
2	0		4			
3		0		0	0	6
4	0		2		4	
5			0	0		4
6			0		0	

Modelando o problema - Variáveis de decisão



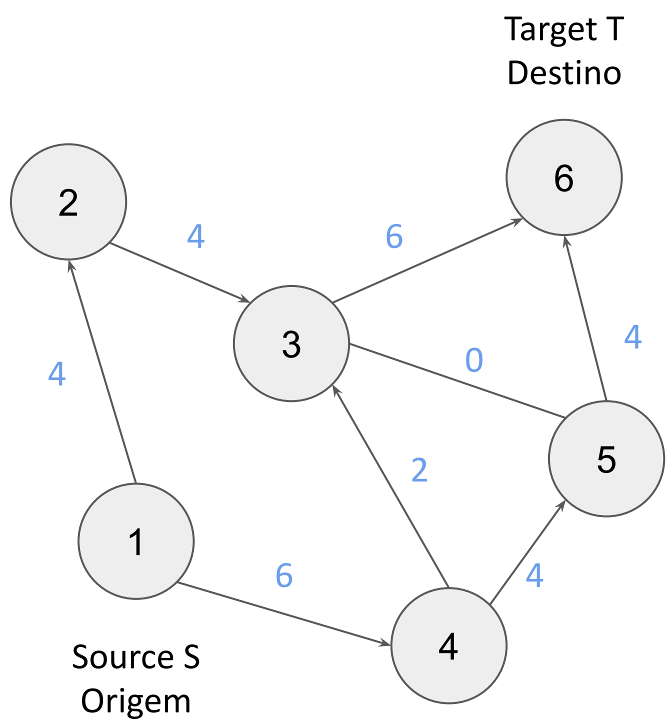
Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

	1	2	3	4	5	6
1		4		6		
2	0		4			
3		0		0	0	6
4	0		2		4	
5			0	0		4
6			0		0	

Modelando o problema
Restrições

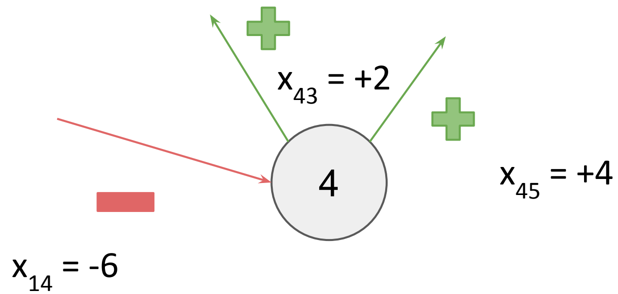
CIC

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência



Logo:

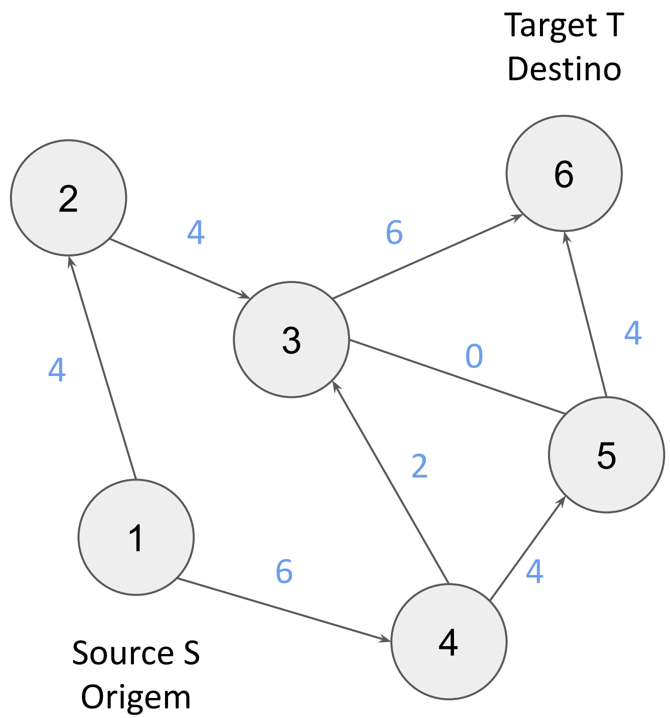
$x_{43} + x_{45} - x_{14} = 0$

Precisamos generalizar

- Utilizando os índices para generalizar o nodo analisado
  - Vamos assumir que o índice i seja o nodo 4

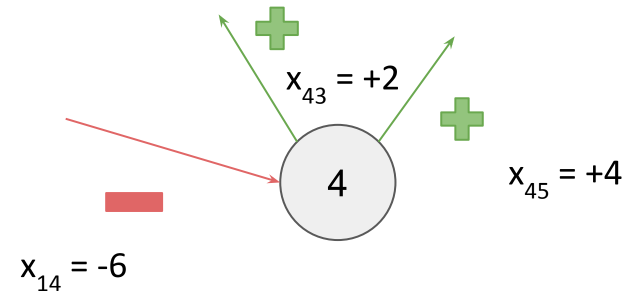
$x_{i3} + x_{i5} - x_{1i} = 0; \quad \forall i \in N$

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência



Logo:

$x_{43} + x_{45} - x_{14} = 0$

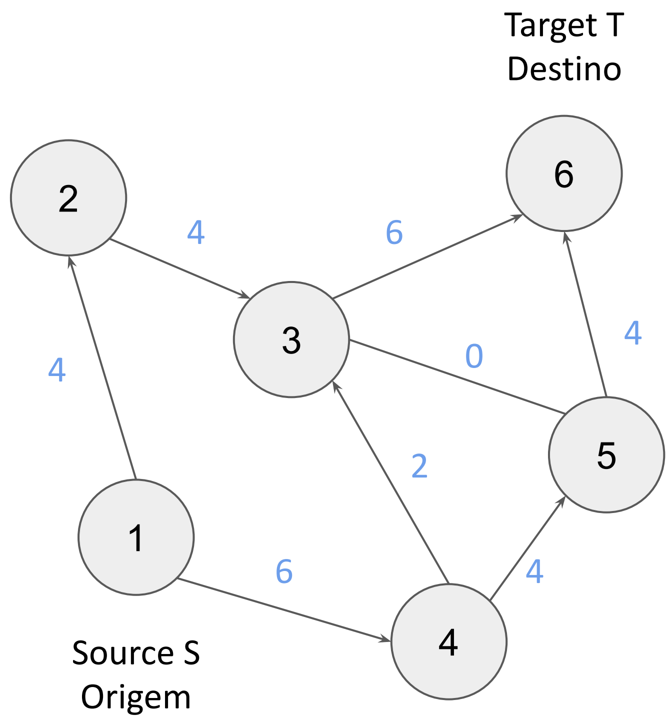
Precisamos generalizar

- Utilizando os índices para generalizar o nodo analisado
  - Vamos assumir que o índice i seja o nodo 4

$x_{i3} + x_{i5} - x_{1i} = 0; \quad \forall i \in N$

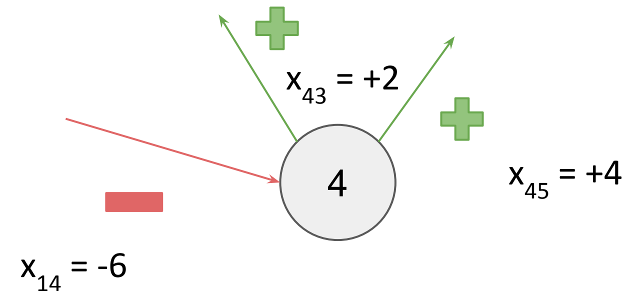
Mas, como generalizar o 3, 5 e o 1? Pode só escrever um j?

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência



Logo:

$x_{43} + x_{45} - x_{14} = 0$

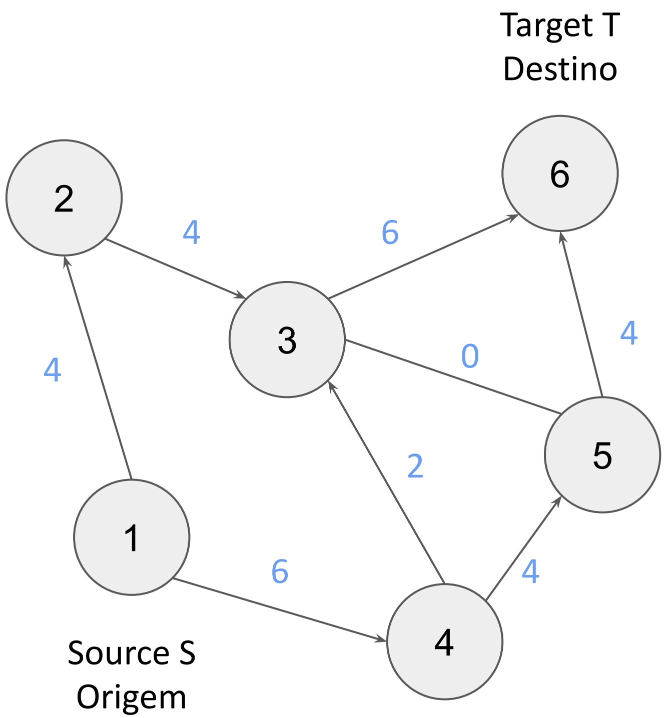
Precisamos generalizar

- Utilizando os índices para generalizar o nodo analisado
  - Vamos assumir que o índice i seja o nodo 4

$x_{i3} + x_{i5} - x_{1i} = 0; \quad \forall i \in N$

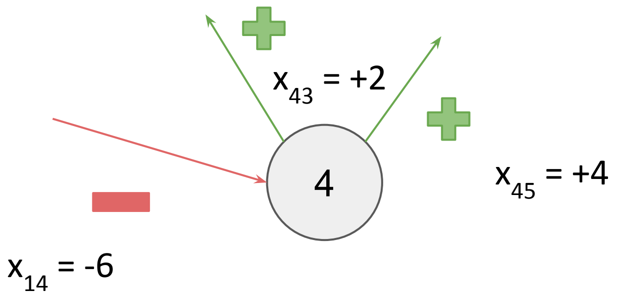
Não. Precisamos generalizar para todas as arestas

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência



Logo:

$x_{43} + x_{45} - x_{14} = 0$

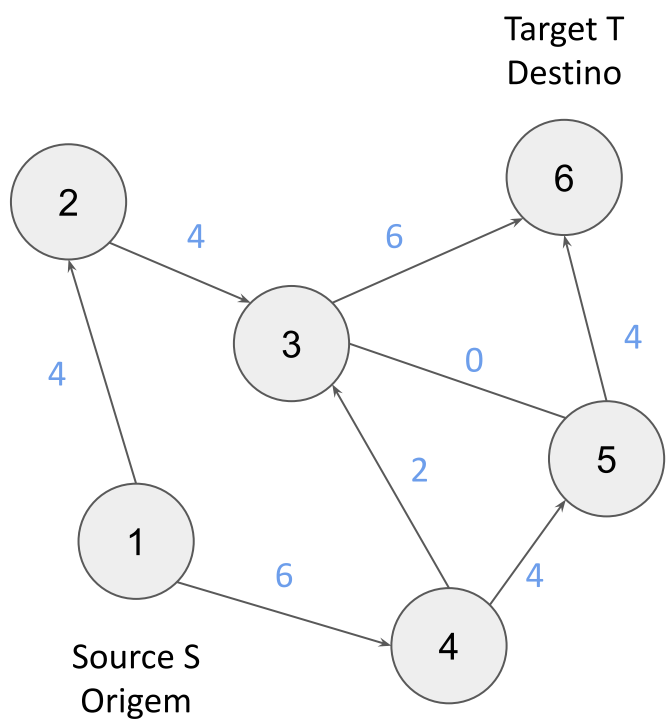
Precisamos generalizar

- Utilizando os índices para generalizar o nodo analisado
    - Vamos assumir que o índice i seja o nodo 4

$x_{i3} + x_{i5} - x_{1i} = 0; \quad \forall i \in N$

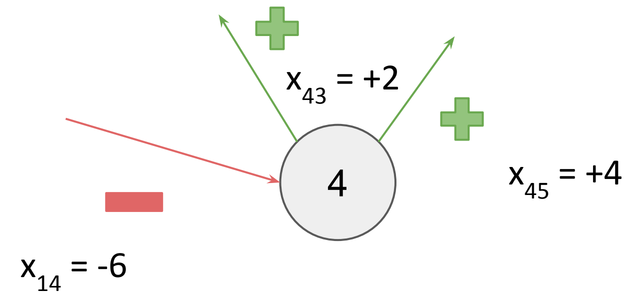
Usaremos somatórios

Modelando o problema - Restrições



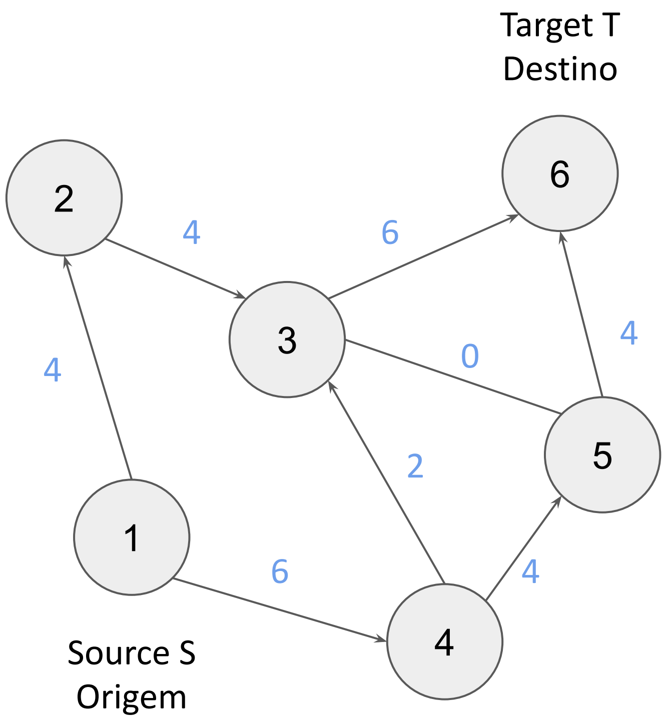
Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência



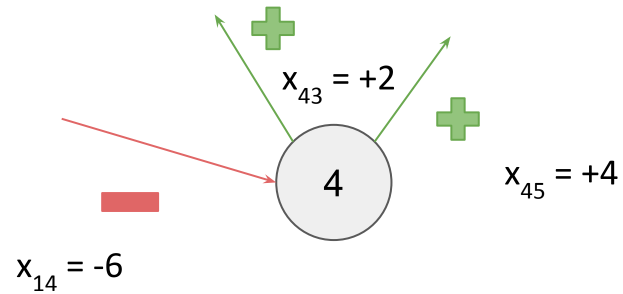
$$\sum_{j \in N} x_{ij} - \sum_{j \in N} x_{ji} = 0 \; ; \forall i \in N$$

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

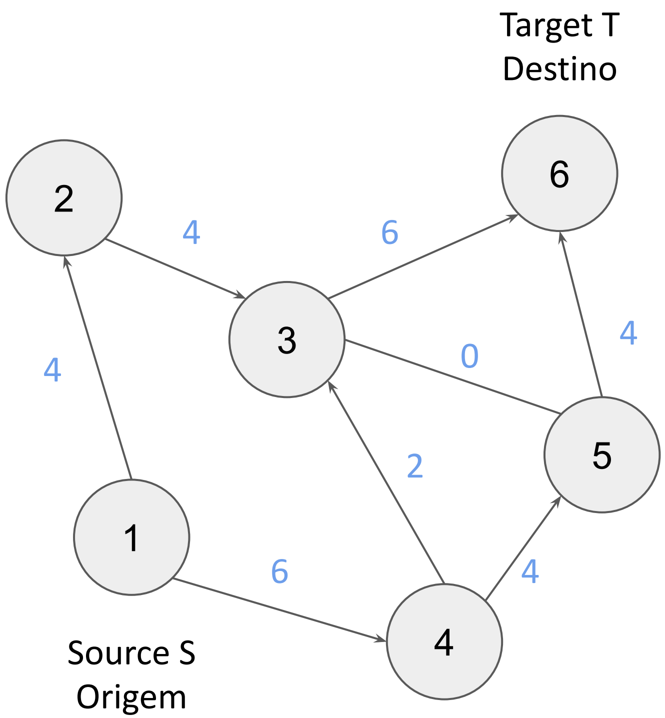
O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência



$$\sum_{j \in N} x_{ij} - \sum_{j \in N} x_{ji} = 0 \; ; \forall i \in N$$

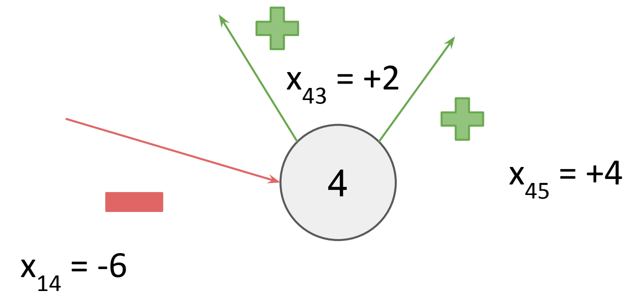
Infelizmente, a divergência não é sempre zero para todos os nodos, precisaremos avaliar cada tipo de nodo

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

O segredo está em analisar cada tipo de nodo e verificar sua divergência

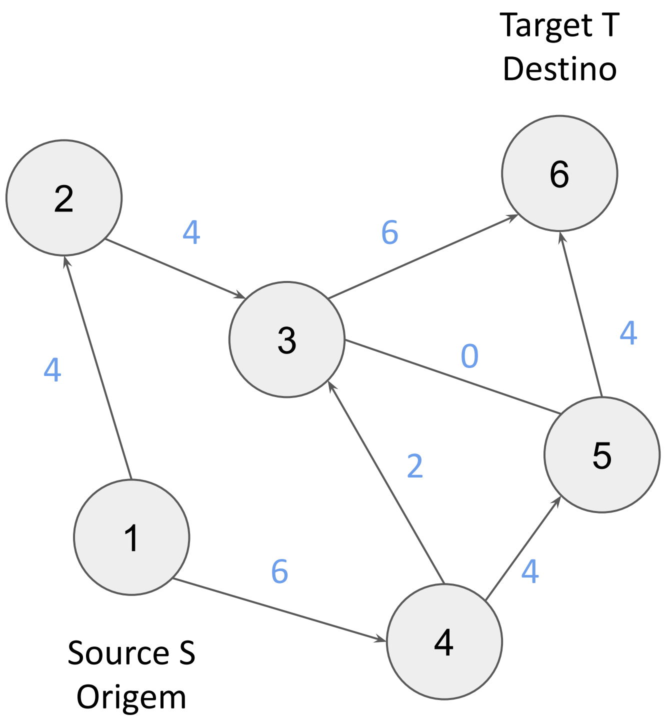


3 tipos podem ser detectados

- Origem
- Destino
- Intermediários

Agora precisaremos avaliar cada um deles em relação a sua divergência

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

- Origem
  - Apenas arestas saindo
- Destino
  - Apenas arestas chegando
- Intermediários
  - Arestas saindo
  - Arestas chegando

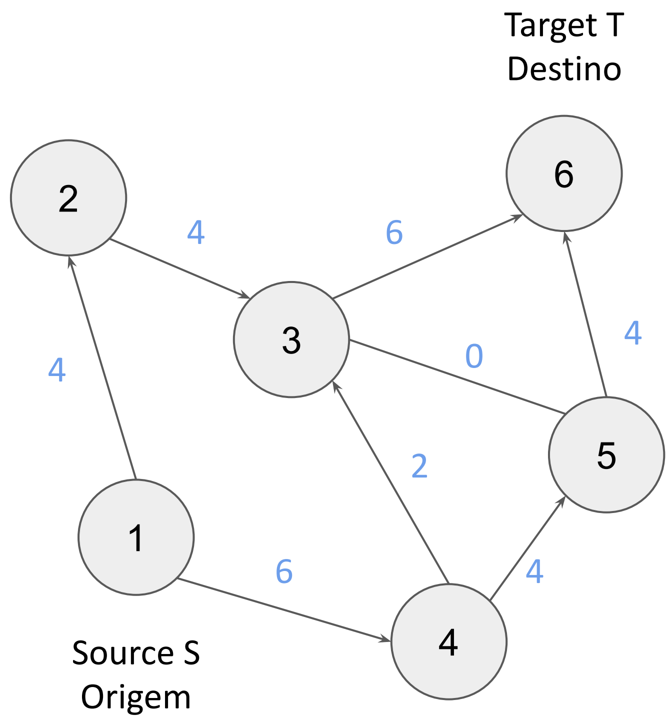
Para podermos modelar esse relacionamento, vamos utilizar a mesma lógica do problema de menor caminho

- Tudo que sai de um nodo é positivo
- Tudo que entra em um nodo é negativo

Para o nodo intermediário temos:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} - \sum_{j \in N} x_{ji} = 0; \ \forall i \in N \ | \ i \neq S,T$$

Modelando o problema - Restrições

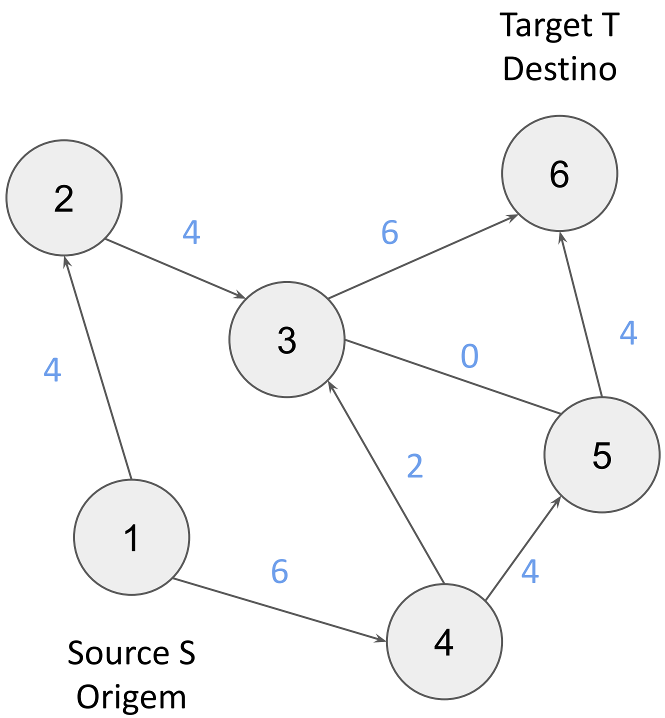


Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

- Origem
  - Apenas arestas saindo
- Destino
  - Apenas arestas chegando

Mas, e para a origem e o destino?
A soma do que sai ou do que entra não vai ser igual a 1 ou -1.
E agora?

Modelando o problema - Restrições

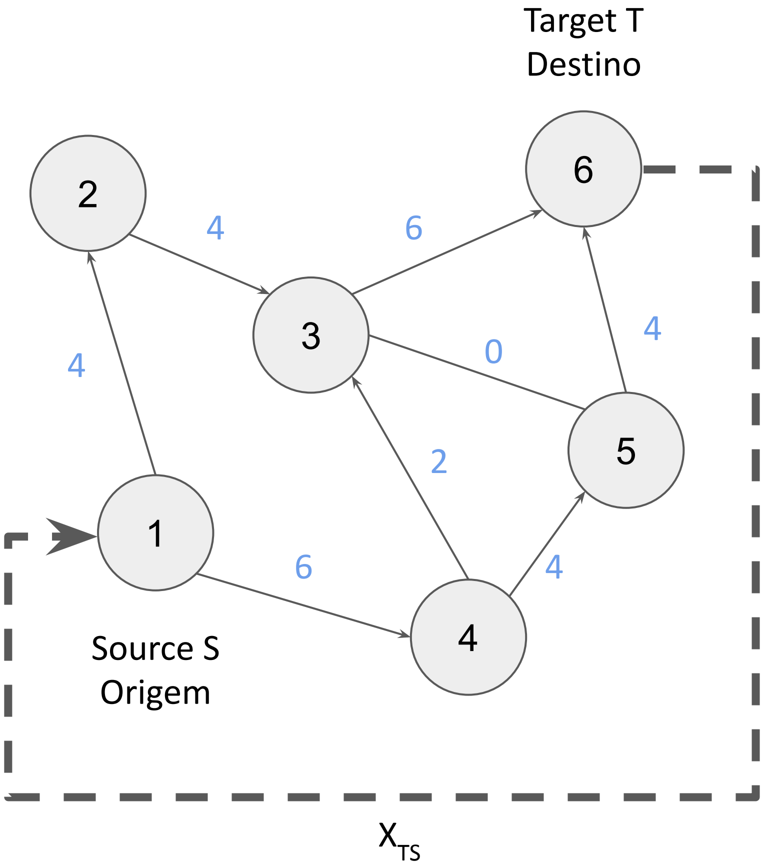


Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

- Origem
  - Apenas arestas saindo
- Destino
  - Apenas arestas chegando

Utilizaremos o conceito de aresta sintética ou abstrata

Modelando o problema - Restrições

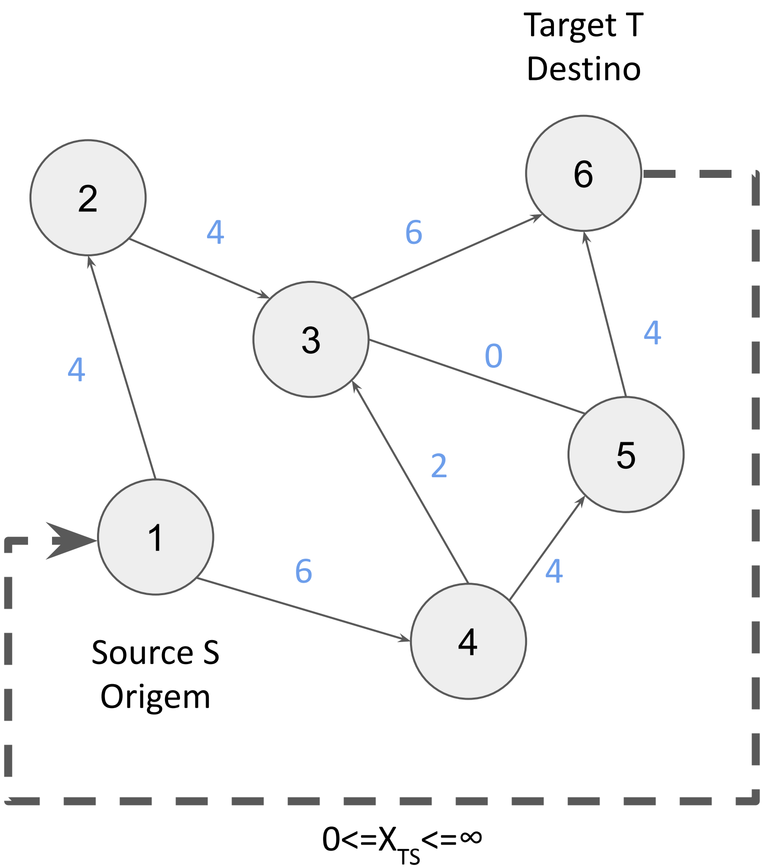


Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

- Origem
  - Apenas arestas saindo
- Destino
  - Apenas arestas chegando

Utilizaremos o conceito de aresta sintética ou abstrata

Modelando o problema - Restrições

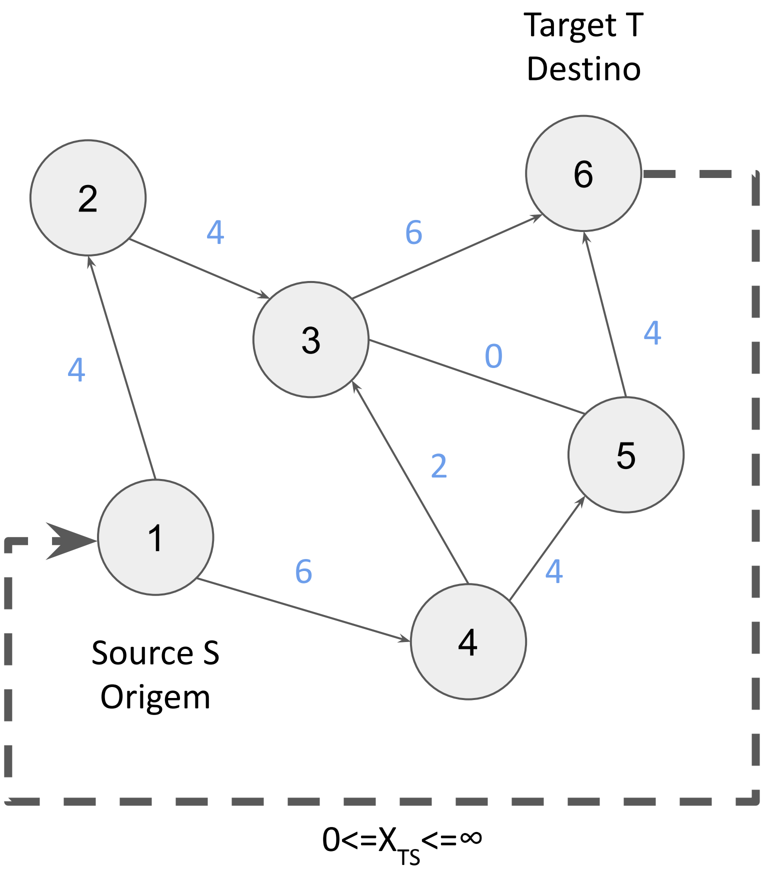


Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

- Origem
  - Apenas arestas saindo
- Destino
  - Apenas arestas chegando

Utilizaremos o conceito de aresta sintética ou abstrata

Modelando o problema - Restrições

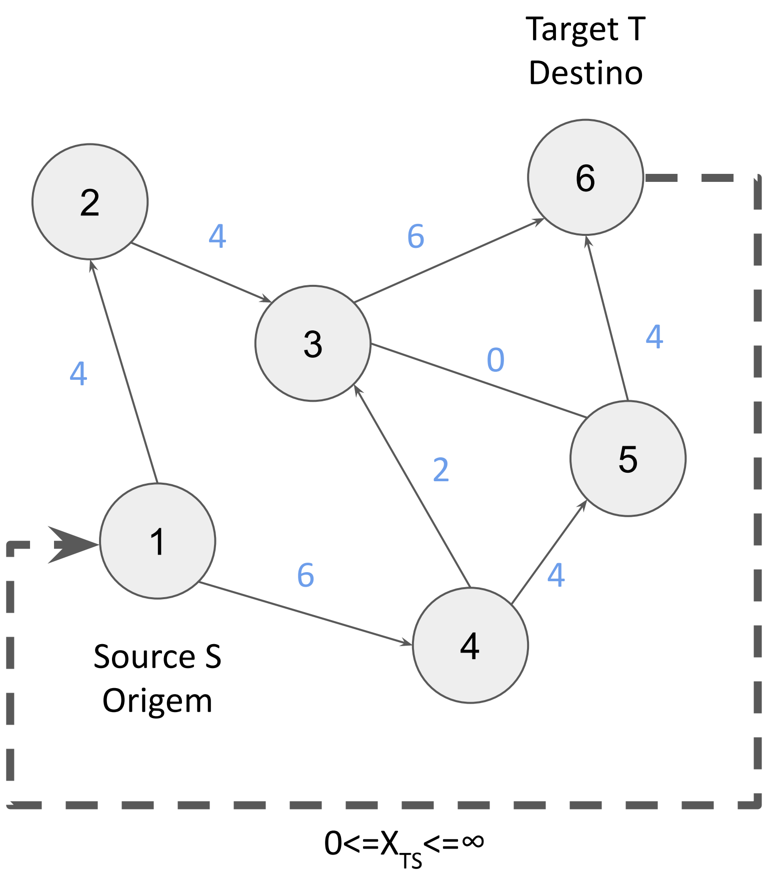


Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

- Origem
  - Apenas arestas saindo

$$\sum_{j \in N} x_{ij} - x_{TS} = 0 \; ; \; \forall i = S$$

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

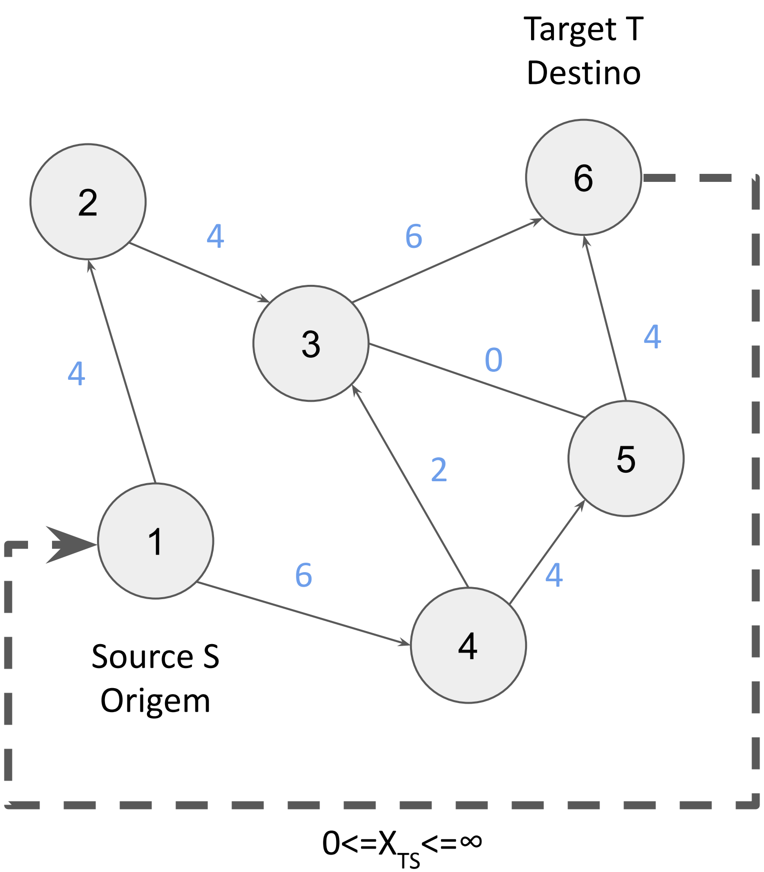
- Origem
  - Apenas arestas saindo

$$\sum_{j\in N} x_{ij} - x_{TS} = 0 \;;\; \forall i = S$$

- Destino
  - Apenas arestas chegando

$$- \sum_{j\in N} x_{ji} + x_{TS} = 0 \;;\; \forall i = T$$

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

- Origem
  - Apenas arestas saindo

$$\sum_{j \in N} x_{ij} - x_{TS} = 0 \; ; \; \forall i = S$$

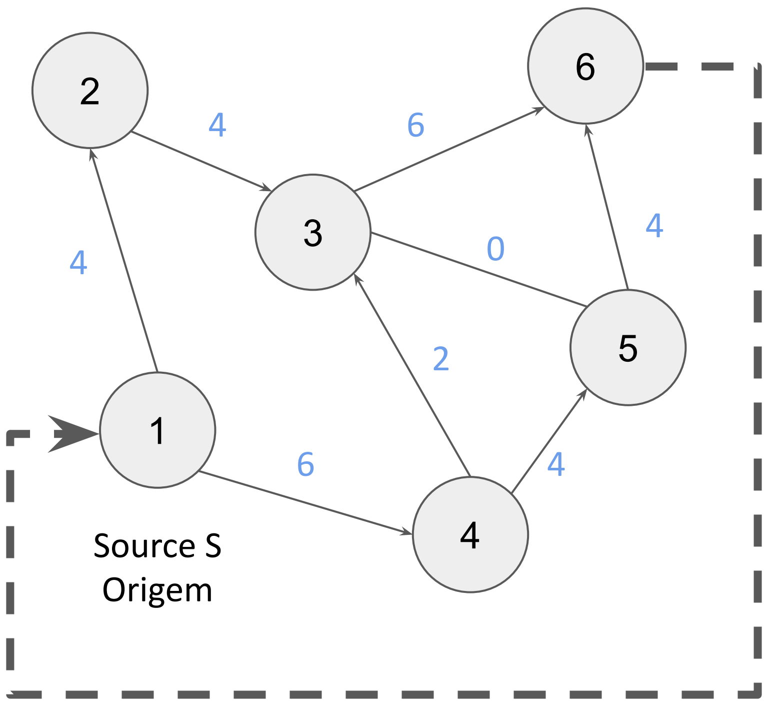
- Destino
  - Apenas arestas chegando

$$- \sum_{j \in N} x_{ji} + x_{TS} = 0 \; ; \; \forall i = T$$

Se fizermos algumas manipulações matemáticas e substituirmos i por S e T, teremos:

$$\sum_{j \in N} x_{Sj} = \sum_{j \in N} x_{jT} = x_{TS}$$

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

- Origem
  - Apenas arestas saindo

$$\sum_{j \in N} x_{ij} - x_{TS} = 0 \; ; \; \forall i = S$$

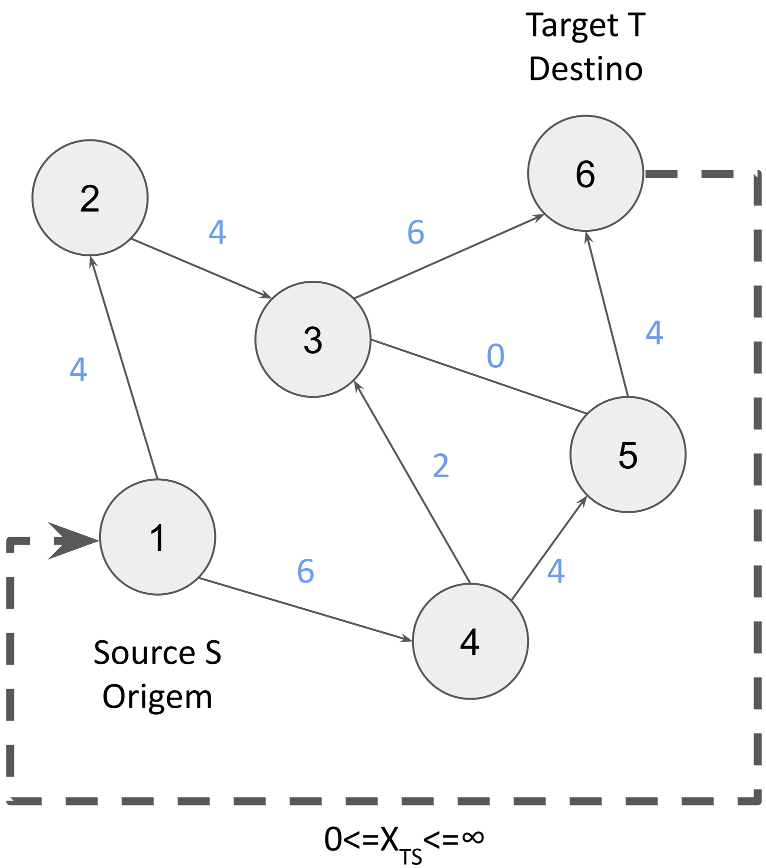
- Destino
  - Apenas arestas chegando

$$- \sum_{j \in N} x_{ji} + x_{TS} = 0 \; ; \; \forall i = T$$

- Intermediários
  - Arestas saindo
  - Arestas chegando

$$\sum_{j \in N} x_{ij} - \sum_{j \in N} x_{ji} = 0; \; \forall i \in N \;\; | \; i \neq S,T$$

Modelando o problema - Restrições



Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

Não esqueça das restrições de capacidade máxima e mínima

Logo:

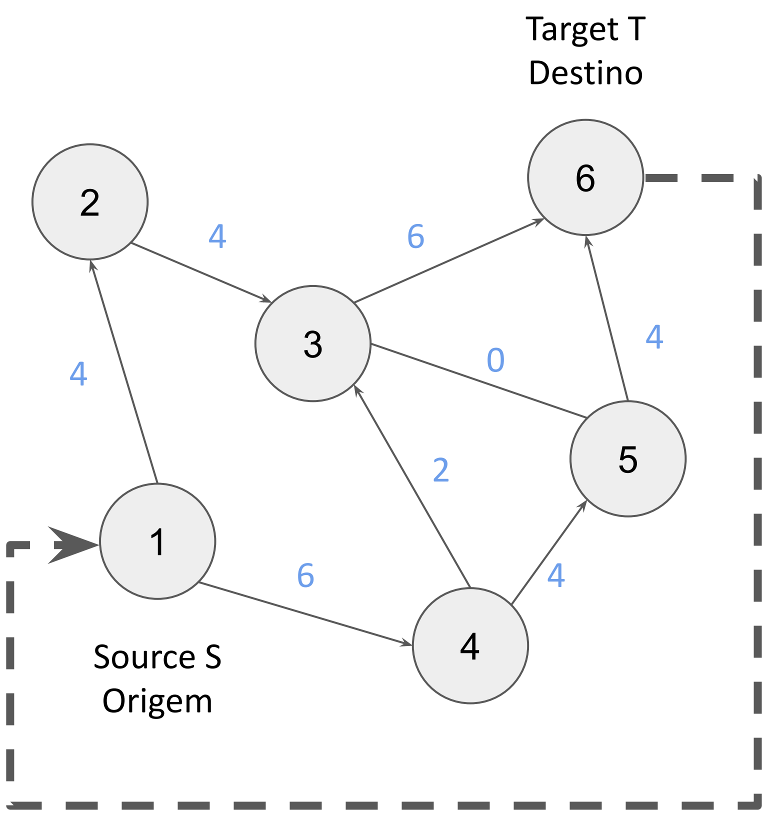
$$b_{ij} <= x_{ij} <= c_{ij} ;$$

$$\forall\, i,j \in N \mid i \neq T \text{ e } j \neq S$$

$$0<=x_{TS}<=\infty$$

Função objetivo

Modelando o problema - Função objetivo



$0 <= X_{TS} <= \infty$

Nesse exemplo: x12=4; x14=6; x23=4; x36=6; x43=2; x45=4; x56=4;

Se analisarmos a variável

x_{TS}

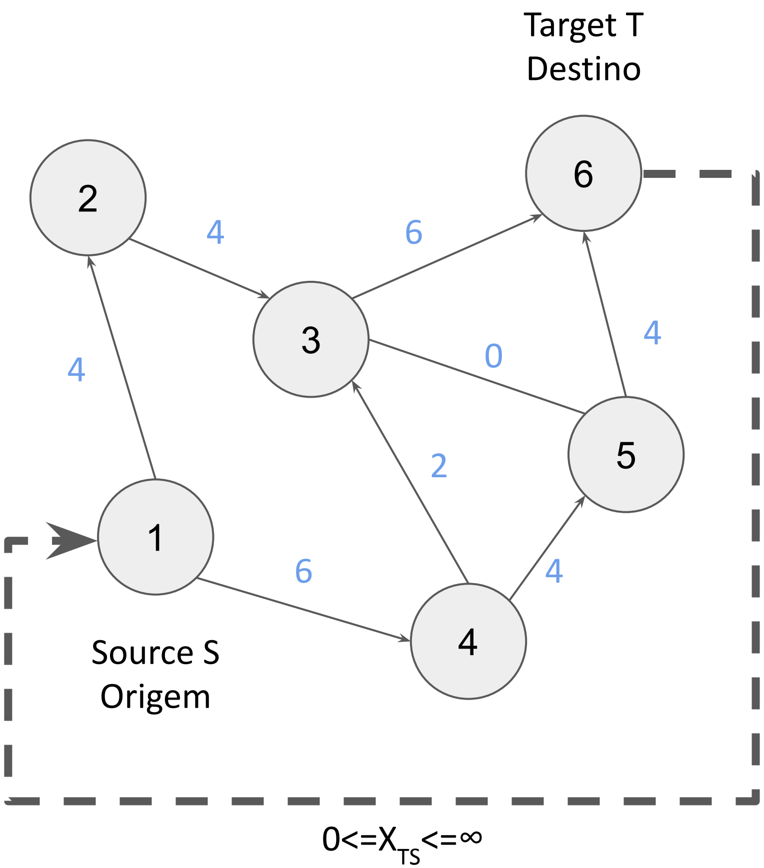
verificaremos que ela será idêntica ao máximo fluxo de saída da origem, que será igual ao máximo fluxo de entrada no destino

Logo, a função objetivo será:

$$\max x_{TS}$$

Modelagem final

Modelagem final do problema



$$\text{maximize} \quad x_{ts}$$

$$\text{subject to}$$

$$\sum_{\{j|(i,j)\in\mathcal{A}\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i)\in\mathcal{A}\}} x_{ji} = 0, \qquad \forall\ i \in \mathcal{N} \text{ with } i \neq s \text{ and } i \neq t,$$

$$\sum_{\{j|(s,j)\in\mathcal{A}\}} x_{sj} = \sum_{\{i|(i,t)\in\mathcal{A}\}} x_{it} = x_{ts},$$

$$b_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij}, \qquad \forall\ (i,j) \in \mathcal{A} \text{ with } (i,j) \neq (t,s).$$

Implemente um problema de fluxo máximo no ORTools

Para validar seu modelo considere a instância:

#[Parametros]

N = 7

S = 0

T = 6

bij = np.zeros((N,N))

cij = np.zeros((N,N))

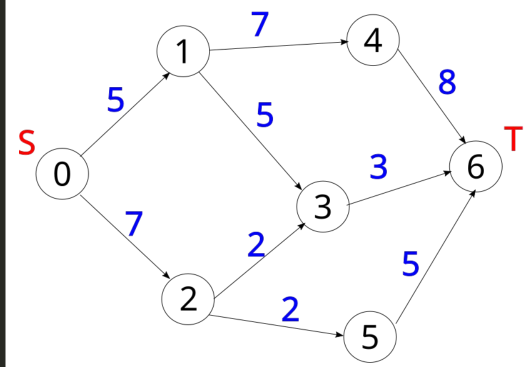
```
Solucao:
Valor objetivo = 9.0
X[0,1]=5 de MAX_CAP: 5.00
X[0,2]=4 de MAX_CAP: 7.00
X[1,4]=5 de MAX_CAP: 7.00
X[2,3]=2 de MAX_CAP: 2.00
X[2,5]=2 de MAX_CAP: 2.00
X[3,6]=2 de MAX_CAP: 3.00
X[4,6]=5 de MAX_CAP: 8.00
X[5,6]=2 de MAX_CAP: 5.00
X[T,S]=9 de MAX_CAP: -1.00
```

cij[0][1] = 5; cij[0][2] = 7; cij[1][3] = 5; cij[1][4] = 7; cij[2][3] = 2;
cij[2][5] = 2; cij[3][6] = 3; cij[4][6] = 8; cij[5][6] = 5;

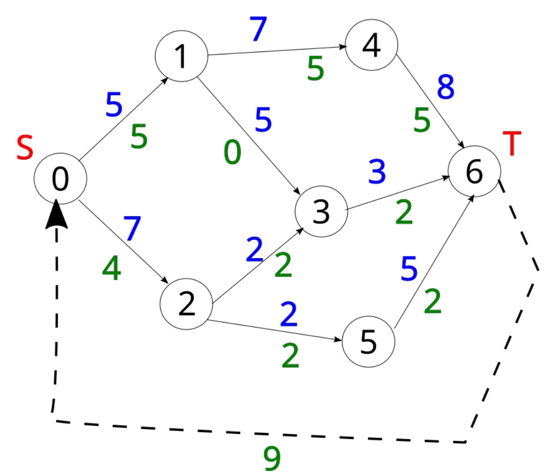
Implemente um problema de fluxo máximo no ORTools

Para validar seu modelo considere a instância:

```
Solucao:
Valor objetivo = 9.0
X[0,1]=5 de MAX_CAP: 5.00
X[0,2]=4 de MAX_CAP: 7.00
X[1,4]=5 de MAX_CAP: 7.00
X[2,3]=2 de MAX_CAP: 2.00
X[2,5]=2 de MAX_CAP: 2.00
X[3,6]=2 de MAX_CAP: 3.00
X[4,6]=5 de MAX_CAP: 8.00
X[5,6]=2 de MAX_CAP: 5.00
X[T,S]=9 de MAX_CAP: -1.00
```



Solução



cij[0][1] = 5; cij[0][2] = 7; cij[1][3] = 5; cij[1][4] = 7; cij[2][3] = 2;
cij[2][5] = 2; cij[3][6] = 3; cij[4][6] = 8; cij[5][6] = 5;