Testes de Hipótese para uma única Amostra - parte II

Marcos Oliveira Prates

2012/02

1. Teste para média com variância conhecida
2. Teste para média com variância desconhecida
3. Teste para Proporção

Objetivos

Ao final deste capítulo você deve ser capaz de:

- Testar hipóteses para média de uma população.
- Serão usadas as distribuições z e t de student.
- Testar hipótese para a proporção de uma população.

Teste para média com variância conhecida

- Suponha que temos uma amostra

$$X_1, \ldots, X_n$$

de uma variável aleatória X.

- X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2.
- A variância σ^2 é conhecida.
- A média μ é desconhecida e deve ser estimada.
- Queremos testar:

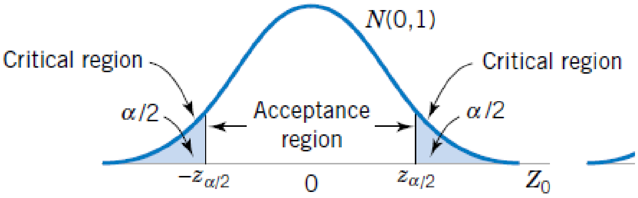
$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- Esse é um **teste bilateral**.

- Sabemos que
$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \, .$$
- Sob H_0, a **estatística de teste**
$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$
tem distribuição $N(0, 1)$
- Fixamos um nível de significância (erro do tipo I) α.
- A decisão é
  - se $z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ou $z_0 < -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$ rejeitamos H_0;
  - se $-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < z_0 < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$ não rejeitamos H_0.
- Onde
$$P(Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \, .$$

- A região crítica é dada por

$$z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{ou} \quad z_0 < -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \, .$$



Observação:

- Podemos isolar o $\bar{x}$ na região crítica.
- Assim o teste fica em termos de $\bar{x}$.
- Rejeitamos H_0 se

$$\bar{x} < \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n} \quad \text{ou} \quad \bar{x} > \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma/\sqrt{n}\,.$$

Exemplo:

- Considere o exemplo do propelente.
- Estamos analisando a taxa média de queima do propelente.
- Observamos uma amostra de tamanho 25.
- Sabemos que $\sigma = 2$.
- Observamos $\bar{x} = 51,3$.
- Queremos testar se a taxa média de queima é de 50 cm por segundo com um nível de significância de 5%.

Exemplo: (solução)

1. O parâmetro de interesse é μ, a taxa média de queima.
2. As hipóteses a serem testadas são
$$H_0 : \mu = 50 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq 50 \,.$$
3. Fixamos $\alpha = 0,05$.
4. Então $z_{0,975} = 1,96$.
5. A estatística de teste é
$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \,.$$
6. Rejeitamos H_0 se
$$z_0 > 1,96 \quad \text{ou} \quad z_0 < -1,96 \,.$$
7. Temos que
$$z_0 = \frac{51,3 - 50}{2/\sqrt{25}} = 3,25 \,.$$

Exemplo: (solução)

8. Como $3.25 > 1,96 \Rightarrow$ rejeitamos H_0.
9. Conclusão: com 5% de significância podemos dizer que a taxa média de queima do propelente é diferente de 50 cm por segundo.

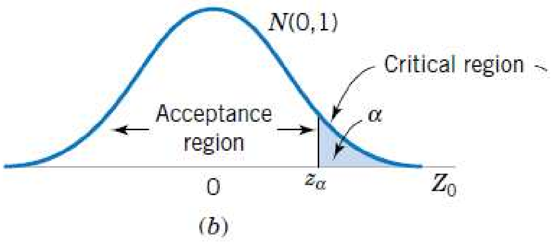
Teste unilateral

- Podemo estar interessados em testar hipóteses como

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad H_1 : \mu > \mu_0 \ .$$

- Valores altos de $\bar{x}$ indicam que H_1 é verdadeira.
- A região crítica é formada apenas pela **extremidade superior**.
- Rejeitamos H_0 se

$$z_0 > z_{1-\alpha}.$$



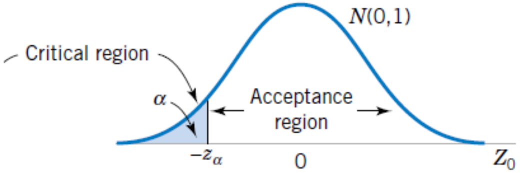
Teste unilateral

- Podemos querer testar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad \mu < \mu_0 \,.$$

- Valores baixos de $\bar{x}$ indicam que H_1 é verdadeira.
- A região crítica é formada apenas pela **extremidade inferior.**
- Rejeitamos H_0 se

$$z_0 < -z_{1-\alpha}.$$



(c)

Teste para médica, variância conhecida

- Hipótese nula:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \, .$$

- Estatística de teste

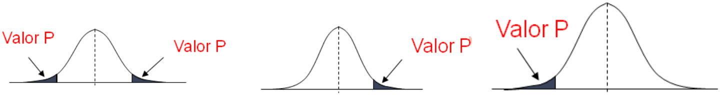
$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \, .$$

Hipótese alternativa	Critério de rejeição
H_1: $\mu \neq \mu_0$	$z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ou $z_0 < -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
H_1: $\mu > \mu_0$	$z_0 > z_{1-\alpha}$
H_1: $\mu < \mu_0$	$z_0 < -z_{1-\alpha}$

Valor P

- É o menor nível de significância que conduz à rejeição da hipótese nula H_0.

Hipótese alternativa	Critério de rejeição	Valor P
$H_1\colon \mu \neq \mu_0$	$z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ou $z_0 < -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	$2(P(Z > \|z_0\|))$
$H_1\colon \mu > \mu_0$	$z_0 > z_{1-\alpha}$	$P(Z > z_0)$
$H_1\colon \mu < \mu_0$	$z_0 < -z_{1-\alpha}$	$P(Z < z_0)$



Exemplo

- Considere o exemplo do propelente.
- Vimos que a região crítica é

$$z_0 > 1,96 \quad \text{ou} \quad z_0 < -1,96\,.$$

- Como o teste é da forma

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

  o valor P é dado por

$$2P(Z > |z_0|) = 2P(Z > 3,25) = 2(1 - P(Z < 3,25)) =$$

$$2(1 - 0,9994) = 0,0012\,.$$

- A probabilidade de aparecer um valor tão ou mais extremo que 3,25 dado que $\mu = 50$ é 0,0012.
- O menor nível de significância que rejeitamos H_0 é 0,0012.

Teste para amostra grande

- Supomos aqui que a população é normal e que σ^2 é conhecido.
- Na prática σ^2 não será conhecido.
- E muitas vezes a população não é normal.
- Se n for grande (>40) podemos usar o Teorema Central do Limite.
- Estimamos σ por S e aproximamos a distribuição de

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

por uma normal padrão.

Teste para média com variância desconhecida

- Suponha que temos uma amostra

$$X_1, \ldots, X_n$$

de uma variável aleatória X.
- X tem distribuição normal com média μ e variância σ^2.
- A variância σ^2 é desconhecida.
- A média μ é desconhecida e deve ser estimada.
- Queremos testar:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

- Esse é um **teste bilateral**.

- Estimamos σ^2 por

$$S^2 = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \, .$$

- Sob H_0, a **estatística de teste**

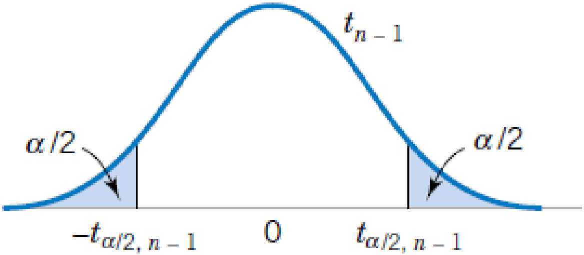
$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

  tem distribuição t com $n-1$ graus de liberdade.
- Fixamos um nível de significância (erro do tipo I) α.
- A decisão é
  - se $t_0 > t_{\alpha/2;n-1}$ ou $t_0 < -t_{\alpha/2;n-1} \Rightarrow$ rejeitamos H_0;
  - se $-t_{\alpha/2;n-1} < t_0 < t_{\alpha/2;n-1} \Rightarrow$ não rejeitamos H_0.
- Onde

$$P(T_{n-1} > t_{\alpha/2;n-1}) = \alpha/2 \, .$$

- A região crítica é dada por

$$t_0 > t_{\alpha/2;n-1} \quad \text{ou} \quad t_0 < -t_{\alpha/2;n-1} \,.$$



(a)

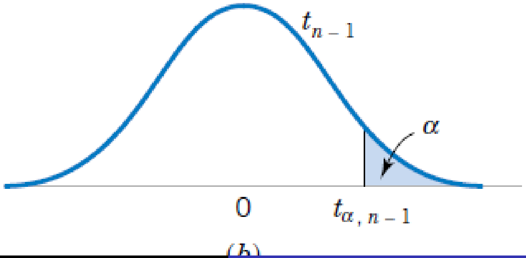
Teste unilateral

- Podemo estar interessados em testar hipóteses como

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad H_1 : \mu > \mu_0 \, .$$

- Valores altos de $\bar{x}$ indicam que H_1 é verdadeira.
- A região crítica é formada apenas pela **extremidade superior**.
- Rejeitamos H_0 se

$$t_0 > t_{\alpha;n-1}.$$



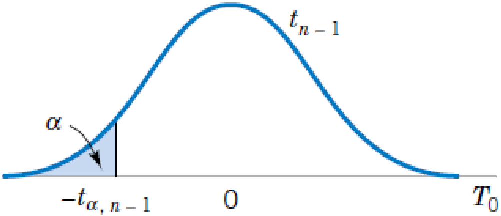
Teste unilateral

- Podemos querer testar

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad vs \quad \mu < \mu_0 \, .$$

- Valores baixos de $\bar{x}$ indicam que H_1 é verdadeira.
- A região crítica é formada apenas pela **extremidade inferior**.
- Rejeitamos H_0 se

$$t_0 < -t_{\alpha;n-1}.$$



(c)

Teste para médica, variância desconhecida

- Hipótese nula:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \; .$$

- Estatística de teste

$$T_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \; .$$

Hipótese alternativa	Critério de rejeição
H_1: $\mu \neq \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha/2;n-1}$ ou $t_0 < -t_{\alpha/2;n-1}$
H_1: $\mu > \mu_0$	$t_0 > t_{\alpha;n-1}$
H_1: $\mu < \mu_0$	$t_0 < -t_{\alpha;n-1}$

Exemplo:

- São analisados os coeficientes de restituição de tacos de golfe.
- 15 tacos são selecionados aleatoriamente.
- Queremos verificar se o coeficiente médio de restituição excede 0,82.
- Considere $\alpha = 0,05$.
- Os dados observados são

$$\bar{x} = 0,83725 \quad s = 0,02456\,.$$

Exemplo: (solução)

- A figura abaixo mostra que os dados são aproximadamente normais.

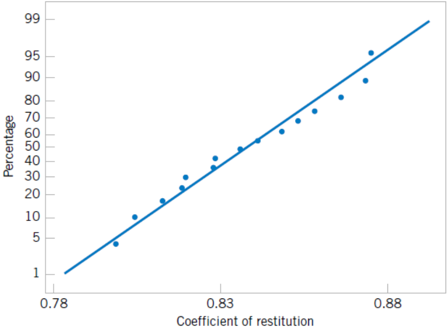


Figure 9-9. Normal probability plot of the coefficient of restitution data from Example 9-6.

Exemplo: **(solução)**

1. O parâmetro de interesse é o coeficiente médio de restituição, μ.
2. Queremos testar
$$H_1 : \mu = 0,82 \quad vs \quad H_1 : \mu > 0,82 \,.$$
3. Temos que $\alpha = 0,05$ e
$$t_{0,05;14} = 1,761 \,.$$
4. Rejeitamo H_0 para valores altos da média, ou seja, rejeitamos se
$$t_0 > 1,761 \,.$$

Exemplo: (solução)

5. Temos que

$$\bar{x} = 0,83725 \quad s = 0,02456 \quad n = 15$$

então a estatística de teste é

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{0,83725 - 0,82}{0,02456/\sqrt{15}} = 2,72.$$

6. Como $2,72 > 1,761 \Rightarrow$ rejeitamos H_0.
7. Conclusão: com 5% de significância podemos dizer que o coeficiente médio de restituição dos tacos excede 0,82.

Observação:

- Podemos calcular o Valor P para esse tipo de teste.
- Porém a tabela t só fornece valores aproximados.
- Para um cálculo exato é necessário usar um pacote estatístico.

Teste para Proporção

- Muitas vezes queremos estimar a proporção de uma determinada população.
- Exemplo: proporção de ítens defeituosos em uma fábrica.
- Uma amostra de tamanho n é retirada de uma população grande.
- X ($X \leq n$) dessas observações pertencem a uma determinada classe.
- Então
$$\hat{P} = \frac{X}{n}$$
é um estimador da proporção p que pertence a essa classe.
- Observe que $X \sim Bin(n, p)$ e queremos estimar p.

- Queremos testar hipóteses do tipo

$$H_0 : p = p_0 \quad vs \quad H_1 : p \neq p_0 \, .$$

- O teste é feito usando aproximação da binomial pela normal.
- Esse procedimento é válido desde que p não seja muito próximo de 0 e nem de 1.
- É preciso um tamanho de amostra relativamente grande.
- Como

$$X \sim Bin(n, p)$$

sob H_0, $p = p_0$ e

$$X \sim Bin(n, p_0) \, .$$

- Então, sob H_0, a estatística de teste

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$$

tem distribuição aproximadamente $N(0, 1)$.

- Queremos testar

$$H_0 : p = p_0 \quad vs \quad H_1 : p \neq p_0 \,.$$

- Sob H_0, a **estatística de teste**

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}$$

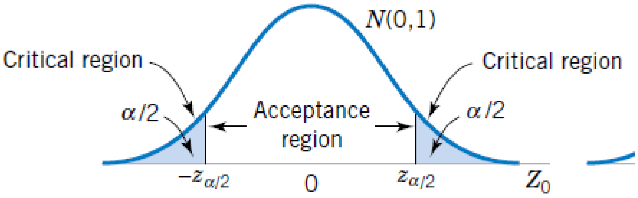
tem distribuição aproximadamente $N(0, 1)$

- Fixamos um nível de significância (erro do tipo I) α.
- A decisão é
  - se $z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ou $z_0 < -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$ rejeitamos H_0;
  - se $-z_{1-\frac{\alpha}{2}} < z_0 < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$ não rejeitamos H_0.
- Onde

$$P(Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \,.$$

- A região crítica é dada por

$$z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{ou} \quad z_0 < -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \, .$$



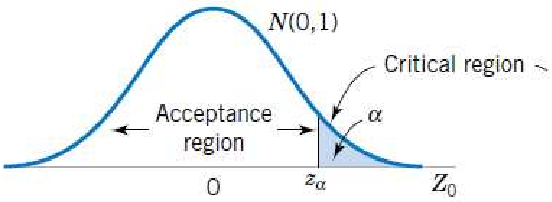
Teste unilateral

- Podemos estar interessados em testar hipóteses como

$$H_0 : p = p_0 \quad vs \quad H_1 : p > p_0 \ .$$

- Valores altos de x/n indicam que H_1 é verdadeira.
- A região crítica é formada apenas pela **extremidade superior**.
- Rejeitamos H_0 se

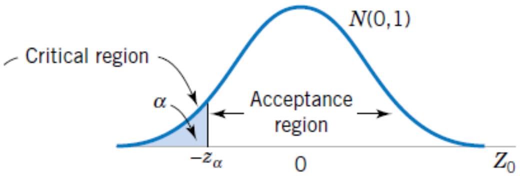
$$z_0 > z_{1-\alpha}.$$



(b)

Teste unilateral

- Podemos querer testar
$$H_0 : p = p_0 \quad vs \quad H_1 : p < p_0 \, .$$
- Valores baixos de x/n indicam que H_1 é verdadeira.
- A região crítica é formada apenas pela **extremidade inferior.**
- Rejeitamos H_0 se
$$z_0 < -z_{1-\alpha}.$$



(c)

Aproximação para proporção binomial

- Hipótese nula:

$$H_0 : p = p_0 \,.$$

- Estatística de teste

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}} \,.$$

Hipótese alternativa	Critério de rejeição
H_1: $p \neq p_0$	$z_0 > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ou $z_0 < -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
H_1: $p > p_0$	$z_0 > z_{1-\alpha}$
H_1: $p < p_0$	$z_0 < -z_{1-\alpha}$

Exemplo:

- Considere a fabricação de semicondutores.
- O consumidor exige que a fração de defeituosos não exceda 0,05.
- O nível de significância α exigido é de $\alpha = 0,05$.
- Uma amostra de 200 aparelhos é observada.
- Dentre os 200, 4 são defeituosos (2%).
- Podemos concluir que a exigência do consumidor é satisfeita?

Exemplo: (solução)

- O parâmetro de interesse é a fração defeituosa no processo, p.
- Queremos testar

$$H_0 : p = 0,05 \quad vs \quad H_1 : p < 0,05 \, .$$

- Fixamos $\alpha = 0,5$ portanto

$$z_{0,95} = 1,645 \, .$$

- Rejeitamos H_0 se

$$z_0 < -1,645 \, .$$

Exemplo: (solução)

- Temos que

$$x = 4 \quad n = 200 \quad p_0 = 0,05$$

então

$$z_0 = \frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = \frac{4 - (200)(0,05)}{\sqrt{200(0,05)(1-0,05)}} = -1,95\,.$$

- Como $-1,95 < -1,645 \Rightarrow$ rejeitamos H_0.
- Conclusão: com 5% de significância podemos dizer que o a fração de ítens defeituosos é menor que 0,05.

Observações:

- A estatística Z_0 pode ser escrita de outra forma.
- Seja X o número de observações em uma amostra de tamanho n que pertence a uma classe.
- $\hat{P} = \frac{X}{n}$ é a proporção amostral que pertence àquela classe.
- Temos que

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}.$$

- Dividindo tudo por n temos que

$$Z_0 = \frac{X/n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}.$$

- Temos assim a estatística de teste em termos da proporção amostral.