Geometria różniczkowa

Dariusz Kwiatkowski

Luty 2020

Contents

1 Opis jako wykres, poziomica, przez parametryzację

- jako poziomica $U = \{p \in W : F(p) = const\}$, $F : W \to \mathbb{R}$
- jako parametryzacja $U = \{\phi(t) : t \in U\}$
- jako wykres $M = \{(u, f(u)) : u \in U\}$, $W = U \times V$, $f : U \to V$

2 Parametryzacja regularna i łukowa krzywej

Def. Parametryzację nazywa się regularną, gdy jest różniczkowalna oraz jej pochodna jest różna od 0.

Def. Parametryzację nazywa się łukową, o ile $\forall_{t_1,t_2 \in [a,b]} l(c|_{[t_1,t_2]}) = t_2 - t_1$
Gdzie l oznacza długość krzywej.

Uwaga. Jeśli krzywa jest różniczkowalna, regularna oraz $\|c'(t)\| = 1$ to jest ona łukowa.

3 Reper i wzory Freneta

Def. Reper Freneta to zbiór wektorów parametryzujących krzywą w danym punkcie. Niech $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $t_o \in [a, b]$, c - krzywa regularna oraz e_i jest wektorem, który jest:

- zawarty w przestrzeni generowanej przez $\{c'(t_0), \dots, c^{(i)}(t_0)\}$
- prostopadły do przestrzeni generowanej przez $\{c'(t_0), \dots, c^{(i-1)}(t_0)\}$
- jest unormowany i zorientowany (względem strony tej samej co hiperpłaszczyzna)
- e_n jest wybrany tak, że układ $\{c'(t_0), \dots, c^{(n)}(t_0)\}$ jest dodatnio zorientowany

Uwaga. Reper Freneta nie zależy od parametryzacji.

Niech $c : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ jest parametryzacją krzywej różniczkowalnej, a $\{c'(t_0), \dots, c^{(n)}(t_0)\}$ jej reperem Freneta. Wtedy :

$$\begin{bmatrix} e_1'(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ -k_1(t) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & -k_{n-1}(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n(t) \end{bmatrix}$$

$k_i(t)$ - i-ta krzywizna
k_1 - krzywizna krzywej
k_2 - skręcenie (torsja)

4 Krzywizna i wyższe krzywizny krzywej

Krzywizna informuje nas jak krzywa "skręca". Wyższe krzywizny opisują jak krzywa odkręca się od przestrzeni generowanej przez $\{c'(t), c''(t), \dots\}$. Wyższe krzywizny są dodatnie, prócz ostatniej.

Uwaga. Krzywizna krzywej w $\mathbb{R}^3$:

$$K_c(t) = \frac{det(c'(t) \times c''(t))}{\|c'(t)\|^3}$$

5 Rozmaitość i powierzchnia. Atlas i struktura różniczkowa

Def. Rozmaitość to przestrzeń dla której istnieje $n \in \mathbb{N}$ taka, że jest ona lokalnie homeomorficzna z $\mathbb{R}^n$ lub z $\mathbb{R}^n_{\geq 0} = \{x_1, \ldots, x_n | x_1 \geq 0\}$.
Dodatkowo większość matematyków przyjmuje, że jest metryzowalna i ma przeliczalną bazę topologiczną.

Def. Mapą na rozmaitości M nazywamy parę (U_i, ϕ_i), gdzie U_i jest otwartym otoczeniem M, a $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem.

Def. Atlasem nazywamy zbiór map, taki że $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$. Mówimy, że atlas jest gładki (klasy C^k) jeżeli funkcje $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ są gładkie (klasy C^k)

Def. Niech $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$, $\{U_\beta, \phi_\beta\}$ będą atlasami odpowiednio N i M. Odwzorowanie $f : M \to N$ jest gładkie (klasy C^k) jeśli funkcje $\phi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ są gładkie (klasy C^k).

Def. Dwa atlasy na tej samej powierzchni M są równoważne, gdy identyczność na M jest funkcją gładką (klasy C^k).

Def. Gładką (klasy C^k) n-wymiarową rozmaitością nazywamy przestrzeń topologiczną wraz z definiowaną na niej klasą atlasów równoważnych. Klasy równoważności atlasów nazywamy strukturą różniczkową rozmaitości M.

6 Przestrzeń styczna, płaszczyzna styczna i wiązka styczna

Dla powierzchni zanurzonej w $\mathbb{R}^3$, podanej przez parametryzację $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^3$ obliczamy wektory styczne jako:

$$\frac{\partial(\Phi \circ c)}{\partial t}, \text{gdzie } c \text{ jest krzywą na } U$$

W szczególności można rozpatrywać krzywe $\phi : t \mapsto (t, v_0)$ lub $\psi : t \mapsto (u_0, t)$.

Def. Przestrzeń styczna w punkcie p to przestrzeń generowana przez $\{\frac{\partial u}{\partial t}(0), \frac{\partial v}{\partial t}(0)\}$, zakładając, że $u(0) = p$ oraz $v(0) = p$, $u : t \mapsto (t, p_2)$ lub $v : t \mapsto (p_1, t)$.

Inaczej - Zbiór wektorów stycznych w punkcie p do M nazywamy przestrzenią styczną i oznaczamy T_pM.

Def. Wiązką styczną nazywamy strukturę $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$

7 Pierwsza forma kwadratowa

Pierwszą formą kwadratową powierzchni M w punkcie p nazywamy iloczyn skalarny:

$$\langle , \rangle : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

który wyraża się za pomocą macierzy:

$$I = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \qquad E = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle, F = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle, G = \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$$

8 Metryka Riemanna

Def. Metryką Riemanna na powierzchni M nazywamy różniczkowe przyporządkowanie każdemu punktowi $p \in M$ iloczynu skalarnego na przestrzeni T_pM. Macierz $g_ij = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$ (w tym przypadku iloczyn skalarny, to zwykły iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^n$) wyznacza jednoznacznie metrykę Riemanna. Załóżmy bowiem, że mamy dwie krzywe c, d na M zanurzonej w $\mathbb{R}^3$. Ustalmy dowolny punkt $p \in M$. Wtedy:

$$c'(p) = c_1'(p)\frac{\partial(p)}{\partial x_1} + c_2'(p)\frac{\partial(p)}{\partial x_2}$$

$$d'(p) = d_1'(p)\frac{\partial(p)}{\partial x_1} + d_2'(p)\frac{\partial(p)}{\partial x_2}$$

Aby policzyć iloczyn skalarny (wyznaczony przez metrykę Riemanna) wystarczy policzyć:

$$\langle c'(p), d'(p)\rangle = \left\langle c_1'(p)\frac{\partial(p)}{\partial x_1} + c_2'(p)\frac{\partial(p)}{\partial x_2}, d_1'(p)\frac{\partial(p)}{\partial x_1} + d_2'(p)\frac{\partial(p)}{\partial x_2} \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} c_i' d_j'$$

Uwaga. Powyższe wyliczenia nie muszą ograniczać się tylko do powierzchni zanurzonej w $\mathbb{R}^3$. Łatwo można przejść do $\mathbb{R}^n$.

Uwaga. Rozmaitość różniczkowa wraz ze zdefiniowaną metryką Riemanna tworzy Rozmaitość Riemannowską

9 Odwzorowanie sferyczne, druga forma kwadratowa

Def. Odwzorowaniem sferycznym nazywamy ciągłe przekształcenie $n : M \to S^2$, które każdemu punktowi powierzchni $M \subset \mathbb{R}^3$ przyporządkowuje wektor normalny do M.

Jeśli dla danej powierzchni M istnieje odwzorowanie sferyczne n to mówimy, że powierzchnia M jest zorientowana.

Uwaga. Poniższa definicja także może być traktowana jako odwzorowanie sferyczne.

Def. Niech $p \in M$, $c : I \to M$ dowolna różniczkowalna krzywa taka, że $c(0) = p$. Definiujemy odwzorowanie sferyczne $dn_p : T_pM \to T_{n(p)}S^2$ wzorem:

$$dn_p(c'(0)) = (n \circ c)'(0)$$

Def. Odwzorowanie, które każdemu punktowi $p \in M$ przyporządkowuje formę kwadratową $T_pM \ni x \mapsto < -dn_p(x), x >$ nazywamy drugą formą kwadratową. Przy rozwinięciu względem bazy $\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\}$ współrzędne nazywamy L, M, N.

10 Równania geodezyjnych i geodezyjne

Tw. Niech $r : U \to M$ będzie lokalną parametryzacją (lokalną mapą), niech c będzie krzywą leżącą w $r(U)$ i niech $r^{-1}(c(t)) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Następujące warunki są równoważne:

1. c jest geodezyjną sparametryzowaną łukowo
2. c jest rozwiązaniem układu równań:

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial t^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_j}{\partial t} = 0$$

Def. Niech $c : I \to M$ będzie łukową parametryzacją krzywej. Jeśli dla każdego $t_0 \in I$ istnieje $\delta > 0$ taka, że każdy odcinek $c|_{[}t_0, t_1]$ długości mniejszej niż δ jest najkrótszą krzywą łączącą $c(t_0)$, $c(t_1)$ to mówimy, że c jest krzywą geodezyjną

Uwaga. Krzywą c jest geodezyjną $\iff$ c jest krzywą o parametryzacji łukowej o krzywiźnie geodezyjnej równej 0.

Tw. Niech M będzie powierzchnią, wówczas:

1. $\forall_{p \in M}$ oraz $\forall_{v \in T_pM}$ istnieje $\varepsilon > 0$ i dokładnie jedna, sparametryzowana geodezyjna $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ taka, że $c(0) = p$ i $c'(0) = v$
2. dwa dowolne, dostatecznie bliskie punkty M można połączyć dokładnie jedną sparametryzowaną łukowo krzywą geodezyjną

11 Krzywizna Gaussa i Riemanna

Def. Niech $p \in M$, $c : I \to M$ dowolna różniczkowalna krzywa taka, że $c(0) = p$. Definiujemy odwzorowanie sferyczne $dn_p : T_pM \to T_{n(p)}S^2$ wzorem:

$$dn_p(c'(0)) = (n \circ c)'(0)$$

Def. Krzywizną Gaussa w punkcie p definiujemy poprzez $K(p) = det(dn_p)$

Def. Tensor krzywizny Riemanna (krzywizna Riemanna) wraża się wzorem:

$$R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u,v]} w$$

gdzie $[u, v]$ jest nawiasem Lie'go pól wektorowych. Dla każdej pary wektorów przyległych u, v, $R(u, v)$ jest odwzorowaniem liniowym przestrzeni stycznej na rozmaitość. Jeśli $u = \frac{\partial}{\partial x_i}, v = \frac{\partial}{\partial x_j}$ są współrzędnymi pól wektorowych to $[u, v] = 0$ (głównie dlatego, że są do siebie prostopadłe, a więc komutują). Równanie w takim wypadku sprowadza się do

$$R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w$$

Uwaga. Krzywizna Riemanna jest uogólnieniem krzywizny Gaussa (działa na rozmaitościach nie tylko zanurzonych w $\mathbb{R}^{\nvDash}$). Zależność wyraża się wzorem:

$$R(u, v)u \cdot v = R_{uvuv} = KEG$$

gdzie K - krzywizna Gaussa
E, G - współrzędne I. formy kwadratowej

12 Twierdzenie Egregium

Krzywizna Gaussa zależy tylko od współczynników E, F i G 1. formy kwadratowej:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right)$$

Zakładamy, że $F = 0$, czyli, że współrzędne są prostopadłe do siebie.

Uwaga. Krzywizna Gaussa nie zależy od doboru współrzędnych dla powierzchni.

Uwaga. Izometria nie zmienia krzywizny Gaussa.

13 Krzywizna główna i średnia

Niech:

$$k_1 = \min_{u \in T_p M} k(u) \qquad\qquad k_2 = \max_{u \in T_p M} k(u)$$

Zauważmy, że k_1 i k_2 odpowiadają najmniejszej i nawiększej krzywiźnie krzywych przechodzących przez punkt $p \in M$.

Def. Krzywizna średnia w punkcie $p \in M$ wynosi $k = (k_1 + k_2)/2$

Def. Krzywiznami głównymi w punkcie $p \in M$ nazywamy liczby k_1 i k_2

Uwaga. Krzywizna Gaussa w punkcie $p \in M$ wynosi $K = k_1 k_2$

14 Symbole Christoffela

Symbole Christoffela to zespół liczb rzeczywistych rozwiązujących równanie:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

15 Współrzędne geodezyjne

Def. Układem współrzędnych geodezyjnych nazywamy taki układ $\{x_1, \ldots, x_n\}$, dla którego wszystkie symbole Christofella $\Gamma_{ij}^k = 0$

16 Suma kątów w trójkącie na kuli, płaszczyźnie euklidesowej i hiperbolicznej

Geometria	euklidesowa	rzutowa	hiperboliczna
Krzywizna	$k = 0$	$k = 1$	$k = -1$
Kąty w Δ	π	$> \pi$	$< \pi$
Pole w Δ	-	$(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \cdot R^2$	$(\pi - \alpha - \beta - \gamma) \cdot R^2$

17 Sfera, torus i pseudosfera

Def. Sferą nazywamy każdą rozmaitość, która ma taką samą strukturę różniczkową i jest homomorficzna do:

$$\{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$$

Def. Torusem nazywamy każdą rozmaitość, która ma taką samą strukturę różniczkową i jest homomorficzna do:

$$\{v \in \mathbb{R}^3 : \min\{\|u - v\| : y \in \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = 9\}\} = 1\}$$

Def. Pseudosferą nazywamy każdą rozmaitość, która ma taką samą strukturę różniczkową i jest homomorficzna do płaszczyzny powstałej poprzez obrót traktrysy wokół asymptoty poziomej. Charakteryzuje się taka płaszczyzna krzywizną równą $-\frac{1}{r^2}$

18 Sformułowanie twierdzenia Gaussa-Bonneta

Niech M będzie rozmaitością Riemannowską z ograniczeniem ∂M. Niech K będzie krzywizną Gaussa, k_g krzywizną geodezyjną na ∂M, wtedy:

$$\iint_M K\,dt + \int_{\partial M} k_g\,dS + \sum \text{kąty zewnętrzne} = 2\pi\chi(M)$$

Uwaga. $\chi(M)$ jest charakterystyką Eulera, niezmienniczą względem izometrii. Dla wielościanów wyraża się wzorem

$$\chi(M) = \#\text{wierzchołki} - \#\text{krawędzie} + \#\text{ściany}$$

19 Krzywizna geodezyjna

Def. Niech M będzie powierzchnią, c krzywą na M oraz niech $e_1(t), e_2(t)$ będą polami wektorowymi wyznaczającymi reper Freneta wzdłuż c. Wtedy krzywizną geodezyjną w punkcie $c(t)$ nazywamy liczbę

$$k_g(t) = \left\langle \frac{De_1}{dt}(t), e_2(t) \right\rangle$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny z metryką Riemanna, a $\frac{De_1}{dt}(t)$ pochodną kowariantną wzdłuż c.

Uwaga. Krzywiznę geodezyjną można interpretować jako wielkość rzutu składowej przyspieszenia c na wektor $T \times U$, czyli na płaszczyznę styczną. Istotnie, jeżeli c jest krzywą parametryzowaną łukowo, to jej krzywizną geodezyjną nazywamy $\langle c'', T \times U \rangle$.

20 Pole wektorowe, pochodna kowariantna (wraz z indukowaną) i przesunięcie równoległe

Def. Pole wektorowe – funkcja, która każdemu punktowi przestrzeni przyporządkowuje pewną wielkość wektorową.

Def. Dla pola wektorowego definiujemy pochodną kowariantną w $\mathbb{R}^n$ jako

$$\nabla_V^{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=0}^{n} V[Z^i]e_i$$

gdzie $V[Z^i]$ oznacza zwykła pochodną kierunkową w $\mathbb{R}^n$

Def. Pochodną kowariantną na M definiujemy jako rzut ortogonalny na T_pM:

$$\nabla_v Z = \mathrm{proj}_{T_pM} \nabla_V^{\mathbb{R}^n} Z$$

Def. Niech M będzie rozmaitością, $\gamma : I \to M$ gładką krzywą. Niech $e_o \in T_pM$, $\gamma(0) = p \in M$. Transport równoległym e_0 wzdłuż γ jest polem wektorowym X ("podpolem" TM, czyli sekcją) takim, że:

1. $\nabla_{\gamma'} X = 0$
2. $X(\gamma(0)) = e_0$

21 Pole wektorowe jako derywacja, nawias Lie'go pól wektorowych

Uwaga. Każde gładkie pole wektorowe może być rozpatrywane jako operator różniczkowania działający na gładkich funkcjach na M. Istotnie, każde pole wektorowe X staje się derywacją na C^{∞}, jeśli zdefiniujemy $X(f)$ jako funkcję, która w punkcie p jest pochodną kierunkową f w p w kierunku $X(p)$.

Def. Dla pól wektorowych X, Y, nawiasem Lie'go nazywamy pole wektorowe $[X, Y]$, takie, że:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

Uwaga. Nawias Lie'go pełni rolę komutatora, tzn. mierzy przemienność pól wektorowych.

Przykład.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(\frac{\partial}{\partial x_i}) + [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}]$$

Gdy pola wektorowe $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}$ będą przemienne (nawias Lie'go równy 0), to pochodne kowariantne będą przemienne.

22 Skręcenie i płaskość krzywej przestrzennej

Ten składnik został omówiony w punkcie o krzywiźnie krzywych, ale powtarzając, za skręcenie odpowiada druga krzywizna. Gdy wynosi ona 0, to krzywa jest płaska, czyli położona na jednej płaszczyźnie. Inne wartości tej krzywizny mówią, jak bardzo odkręca się ona od płaszczyzny generowanej przez $\{c', c''\}$