

Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с полуполосой в эллиптической части

Капустин Н.Ю., Васильченко Д.Д.

1 Постановка задачи

Рассматривается задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$(sgn(y)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (1)$$

в области $D = D^+ \cup D^-$, где $D^+ = \{(x, y) : 0 < x < \pi, 0 < y < +\infty\}$, $D^- = \{(x, y) : -y < x < y + \pi, -\pi/2 < y < 0\}$ в классе функций $u(x, y) \in C^2(D^+) \cap C^2(D^-) \cap C(\overline{D^+ \cup D^-})$ с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, -x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi/2, \quad f(0) = 0, \quad (3)$$

$$u(x, y) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow +\infty \quad (4)$$

и условием склеивания Франкля

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y}(x, +0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, -0), \quad 0 < x < \pi, \quad (5)$$

где $k \in (-\infty, +\infty)$, $k \neq 0$.

2 Основные результаты

Теорема 1. *Решение задачи (1) - (5) единственно.*

Доказательство. Пусть существуют два решения $u_1(x, y), u_2(x, y)$ задачи (1)-(5). Тогда $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ есть решение задачи (1)-(5) с функцией $f(x) \equiv 0$. В этом случае $u(x, y) = F(x + y) - F(0)$.

Отсюда следует, что равенство $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ выполняется для всех точек x и y из области гиперболичности. Используя условие склеивания (5) будем иметь

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=0+0} = 0. \quad (6)$$

В результате получаем задачу для нахождения гармонической функции $u(x, y)$ в области D^+ с граничными условиями (2), (4), (6).

В силу принципа Зарембы-Жиро и равенства (6) экстремум не может достигаться на интервале $\{(x, y) : 0 < x < \pi, y = 0\}$. На замкнутых боковых сторонах и на бесконечности экстремум не может достигаться в силу условий (2) и (4). Теорема доказана.

Известно, что общее решение в D^- уравнения (1) имеет вид

$$u(x, y) = F(x + y) + f\left(\frac{x - y}{2}\right) - F(0). \quad (7)$$

Продифференцируем равенство (7):

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)|_{y=0+0} = -f' \left(\frac{x}{2} \right), \quad 0 < x < \pi.$$

Используя условие склеивания (5), приходим к равенству

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0+0) = -f' \left(\frac{x}{2} \right), \quad 0 < x < \pi.$$

Тогда получим в области D^+ вспомогательную задачу для оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (8)$$

с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < +\infty, \quad (9)$$

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0+0) = -f' \left(\frac{x}{2} \right), \quad (10)$$

$$u(x, y) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow +\infty \quad (11)$$

Теорема 2. Пусть $|k| < 1$, $k \neq 0$, $f(x) \in C[0, \pi/2] \cap C^2(0, \pi/2)$, $f'(x) \in L_2(0, \pi/2)$. Тогда решение задачи (8)-(11) существует и представимо в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-ny} \sin nx, \quad (12)$$

причем условие (10) понимается в интегральном смысле

$$\int_0^{\pi} \left[\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + f' \left(\frac{x}{2} \right) \right]^2 dx \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0+0,$$

а коэффициенты A_n определяется из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin [nx + \arctg k] = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} f' \left(\frac{x}{2} \right) \quad (13)$$

Доказательство.

Система $\{\sin [nx + \arctg k]\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в $L_2(0, \pi)$ при $k \in (-1, 1)$ в силу основного результата работы [2]. Поэтому справедливо двустороннее неравенство Бесселя

$$C_1 \|f'\|_{L_2(0, \pi)}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2 \leq C_2 \|f'\|_{L_2(0, \pi)}^2, \quad 0 < C_1 < C_2,$$

где константы C_1, C_2 не зависят от f' . Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$ сходится и сходится равномерно ряд (12).

Функция (12) удовлетворяет уравнению (8) с граничными условиями (9) по построению. Условие (11) выполняется так как $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-ny} = \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}} = \frac{1}{e^y-1}$. Проверим выполнение условия (10). Пусть

$$M(x) = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + f' \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} M(x) &= -\frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n e^{-ny} \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} n A_n e^{-ny} \cos nx + f' \left(\frac{x}{2} \right) = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} n A_n e^{-ny} \left[\frac{1}{k} \sin nx + \cos nx \right] + f' \left(\frac{x}{2} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n e^{-ny} \left[\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \sin nx + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \cos nx \right] + f' \left(\frac{x}{2} \right) = \\
&= -\frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n e^{-ny} \sin [nx + \arctg k] + f' \left(\frac{x}{2} \right) = \\
&= \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n (1 - e^{-ny}) \sin [nx + \arctg k].
\end{aligned}$$

Покажем, что $\lim_{y \rightarrow 0+0} I(y) = 0$.

$$I(y) = \int_0^{\pi} M(x)^2 dx \leq I_1(y) + I_2(y),$$

$$I_1(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k} \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^m n A_n \sin [nx + \arctg k] (1 - e^{-ny}) \right]^2 dx$$

$$I_2(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k} \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=m+1}^{+\infty} n A_n \sin [nx + \arctg k] (1 - e^{-ny}) \right]^2 dx$$

Зафиксируем произвольное положительное ε , тогда

$$I_2(y) \leq C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} n^2 A_n^2 (1 - e^{-ny})^2 \leq C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} n^2 A_n^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это верно, если m достаточно велико, т.к. ряд сходящийся.

$$I_1(y) \leq C_4 \sum_{n=1}^m n^2 A_n^2 (1 - e^{-ny})^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Это верно при $0 < y < \delta$, если δ достаточно мало. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $k > 0$, тогда решение задачи (8) - (11) единственно

Доказательство. Докажем единственность решения этой задачи. Пусть $u(x, y)$ - решение однородной задачи. Введём обозначения $C_\varepsilon = (0, \varepsilon)$, $C_R = (0, R)$, $D_R = (\pi, R)$, $D_\varepsilon = (\pi, \varepsilon)$. $\Pi_{R\varepsilon}$ - прямоугольник $C_\varepsilon C_R D_R D_\varepsilon$. Справедливы следующие соотношения:

$$0 = \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R - y)(u_{xx} + u_{yy}) dx dy.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
&(R - y)(u_{xx} + u_{yy})u = ((R - y) u_x u)_x + ((R - y) u_y u)_y - (R - y) (u_x^2 + u_y^2) + u_y u = \\
&= (R - y) (u_{xx} u + u_x^2) + (-u_y + (R - y) u_{yy} u + (R - y) u_y^2) - (R - y) (u_x^2 + u_y^2) + u_y u
\end{aligned}$$

Подставим это выражение в интеграл:

$$I = \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} ((R - y) u_x u)_x dx dy + \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} ((R - y) u_y u)_y dx dy - \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) + \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} u_y u dx dy.$$

Упростим эти интегралы:

$$\iint_{\Pi_{R\varepsilon}} ((R - y) u_x u)_x dx dy = \int_{[\varepsilon, R]} [(R - y) u_x u] \big|_0^\pi dy = \int_{[\varepsilon, R]} [(R - y) u_x(\pi, y) u(\pi, y) - (R - y) u_x(0, y) u(0, y)] dy = 0$$

т.к. оба подынтегральных выражения равны нулю в силу условия (9)

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} ((R-y)u_y u)_y dx dy &= \int_{[0,\pi]} [(R-y)u_y u] \Big|_{\varepsilon}^R dx = \int_{[0,\pi]} [0 - (R-\varepsilon)u_y(x,\varepsilon)u(x,\varepsilon)] dx = - \int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} (R-\varepsilon)u_y u dx \\ \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} u_y u dx dy &= \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} \left(\frac{u^2}{2} \right)'_y dx dy = \int_{[0,\pi]} \left[\frac{u^2(x,R)}{2} - \frac{u^2(x,\varepsilon)}{2} \right] dx \end{aligned}$$

В итоге получим

$$I = - \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)(u_x^2 + u_y^2) dx dy - \int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} (R-\varepsilon)u_y u dx - \int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} \frac{u^2}{2} dx + \int_{C_R D_R} \frac{u^2}{2} dx$$

Добавим и вычтем $\int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} k(R-\varepsilon)u_x u dx$, тогда

$$I = - \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)(u_x^2 + u_y^2) dx dy - \int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} (R-\varepsilon)(u_y - ku_x)u dx - \int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} (R-\varepsilon)ku_x u dx - \int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} \frac{u^2}{2} dx + \int_{C_R D_R} \frac{u^2}{2} dx.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)(u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{2} \int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} u^2 dx + k \frac{R-\varepsilon}{2} u^2(\pi, \varepsilon) &= \int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} (R-\varepsilon)(u_y - ku_x)u dx + \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx \leq \\ &\leq \{ \text{Неравенство Коши-Буняковского} \} \leq (R-\varepsilon) \left[\int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} (u_y - ku_x)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} u^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx = M \end{aligned}$$

Рассмотрим следующее неравенство: $(2ar-b)^2 \geq 0 \Rightarrow ra^2r^2 - 4abr + b^2 \geq 0 \Rightarrow ab \leq ra^2 + b/(4r)$. Возьмем

$$a = \left[(R-\varepsilon) \int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} (u_y - ku_x)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}, \quad b = \left[(R-\varepsilon) \int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} u^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}, \quad r = R-\varepsilon, \quad \text{тогда}$$

$$M \leq (R-\varepsilon)^2 \int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} (u_y - ku_x)^2 dx + \frac{1}{4} \int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx.$$

Перегруппируем

$$\iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)(u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} u^2 dx + k \frac{R-\varepsilon}{2} u^2(\pi, \varepsilon) \leq (R-\varepsilon)^2 \int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} (u_y - ku_x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx.$$

В силу (10) имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{C_{\varepsilon}D_{\varepsilon}} (u_y - ku_x)^2 dx = 0,$$

откуда вытекает соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)(u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} u^2(x, 0) dx + k \frac{R}{2} u^2(\pi, 0) \leq \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx.$$

Устремим теперь $R \rightarrow \infty$, тогда $\int_{C_R D_R} u^2 dx \rightarrow 0$, а в левой части все слагаемые неотрицательны, п отсюда

$u(x, y) \equiv 0$ в \overline{D} . Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $|k| < 1$, $k \neq 0$ и $u(x, y)$ - решение задачи (8) - (11), тогда u_x, u_y представимы в виде

$$u_y(x, y) = -\frac{2k}{\pi\sqrt{1+k^2}} \operatorname{Im} \left(\frac{1-e^{iz}}{1+e^{iz}} \right)^{\gamma/\pi} e^{iz} \int_0^\pi \frac{1}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{\sin t}{(1-e^{i(z+t)})(1-e^{i(z-t)})} f'(\frac{t}{2}) dt,$$

$$u_x(x, y) = \frac{2k}{\pi\sqrt{1+k^2}} \operatorname{Re} \left(\frac{1-e^{iz}}{1+e^{iz}} \right)^{\gamma/\pi} e^{iz} \int_0^\pi \frac{1}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{\sin t}{(1-e^{i(z+t)})(1-e^{i(z-t)})} f'(\frac{t}{2}) dt,$$

где $\gamma = 2 \operatorname{arctg} k$, $z = x + iy$.

Доказательство. Рассмотрим равенство (12). Система синусов $\{\sin[nx + \operatorname{arctg} k]\}_{n=1}^\infty$ образует базис в $L_2(0, \pi)$ при $k \in (-1, 1)$. Поэтому для коэффициентов nA_n справедливо следующее представление [2]:

$$nA_n = \int_0^\pi h_n(t) F(t) dt,$$

где

$$F(x) = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} f'(\frac{x}{2}), h_n(t) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^n \sin kt B_{n-k}, B_l = \sum_{m=0}^l C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-l}^m (-1)^{l-m}, C_l^m = \frac{l(l-1)\dots(l-n+1)}{n!}.$$

Пусть $u(x, y)$ - решение задачи (8) – (11), тогда

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^\infty A_n e^{-ny} \sin[nx]$$

и соответственно

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &= -\sum_{n=1}^\infty nA_n e^{-ny} \sin[nx] = \\ &= -\sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi F(t) h_n(t) e^{-ny} \sin[nx] dt, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &= -\operatorname{Im} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi F(t) h_n(t) e^{-ny} e^{inx} dt = \\ &= -\operatorname{Im} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi F(t) h_n(t) e^{inz} dt \end{aligned}$$

Поменяем местами знаки интегрирования и суммирования

$$u_y(x, y) = -\operatorname{Im} \int_0^\pi F(t) \sum_{n=1}^\infty h_n(t) e^{inz} dt.$$

Введём новое обозначение:

$$\begin{aligned} I(t, z) &= \sum_{n=1}^\infty h_n(t) e^{inz} \\ I(t, z) &= \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^n \sin kt B_{n-k} e^{inz} = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^\infty \sin kt \sum_{n=k}^\infty e^{inz} B_{n-k} \end{aligned}$$

и новый индекс $m = n - k$

$$I(t, z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} B_m = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} B_m,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt = \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)}) (1 - e^{i(z-t)})}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} B_l = \sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} \sum_{m=0}^l C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^{l-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} e^{ilz} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^{l-m} = |k = l - m| =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} C_{\gamma/\pi}^k C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^k = \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m \sum_{k=0}^{\infty} C_{\gamma/\pi}^k (-1)^k e^{ikz} = (1 + e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta} (1 - e^{iz})^{\gamma/\pi}$$

так как в нашем случае $\beta = 0$, $\gamma = 2 \operatorname{arctg} k$. Окончательно получаем формулу

$$u_y(x, y) = -\operatorname{Im} \int_0^\pi F(t) I(t, z) dt =$$

$$= -\operatorname{Im} \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)}) (1 - e^{i(z-t)})} (1 + e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta} (1 - e^{iz})^{\gamma/\pi} F(t) dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{1 - e^{iz}}{1 + e^{iz}} \right)^{\gamma/\pi} e^{iz} \int_0^\pi \frac{1}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{\sin t}{(1 - e^{i(z+t)}) (1 - e^{i(z-t)})} F(t) dt =$$

$$= -\frac{2k}{\pi \sqrt{1 + k^2}} \operatorname{Im} \left(\frac{1 - e^{iz}}{1 + e^{iz}} \right)^{\gamma/\pi} e^{iz} \int_0^\pi \frac{1}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{\sin t}{(1 - e^{i(z+t)}) (1 - e^{i(z-t)})} f'(\frac{t}{2}) dt$$

т.е. представление:

$$u_y(x, y) = -\frac{2k}{\pi \sqrt{1 + k^2}} \operatorname{Im} \left(\frac{1 - e^{iz}}{1 + e^{iz}} \right)^{\gamma/\pi} e^{iz} \int_0^\pi \frac{1}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{\sin t}{(1 - e^{i(z+t)}) (1 - e^{i(z-t)})} f'(\frac{t}{2}) dt.$$

Рассуждая аналогично, получим представление

$$u_x(x, y) = \frac{2k}{\pi \sqrt{1 + k^2}} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{iz}}{1 + e^{iz}} \right)^{\gamma/\pi} e^{iz} \int_0^\pi \frac{1}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{\sin t}{(1 - e^{i(z+t)}) (1 - e^{i(z-t)})} f'(\frac{t}{2}) dt.$$

Теорема доказана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеев, Е.И. Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе / Моисеев, Е.И., Моисеев Т.Е., Вафадорова Г.О. // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8 — С. 1070–1075.
2. Моисеев, Е.И. О базисности одной системы синусов / Е.И. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 1 — С. 177–189.