1 Определения

1.1 LU-разложение матрицы

LU-разложением матрицы A называется разложение вида $A = LU$, где L - нижнетреугольная матрица с единицами на диагонали, а U - верхнетреугольная матрица с ненулевыми диагнальными элементами.

1.2 Разложение Холецкого

Разложением Холецкого матрицы $A = A^T > 0$ называется разложение вида $A = LL^T$, где L - нижнетреугольная матрица с положительными числами на диагонали.

1.3 QR - разложение матрицы

QR разложением матрицы A называется разложение вида $A = QR$, где Q - ортогональная матрица, а R - верхнетреугольная с положительными числами на диагонали.

1.4 Матрица вращения

Матрицей вращения называется матрица следующего вида:

, где C_{ki}, S_{ki} - косинус и синус некоторого угла.

1.5 Матрица отражения

Пусть гиперплоскость описывается единичным вектором u, который ортогонален ей, тогда $H = I - 2uu^T$ - матрица отражений(Хаусхолдера). $H_u(x) = x - 2(x, u)u$ - оператор отражения (Хаусхолдера).

1.6 Ленточная матрица

Матрица $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ называется ленточной, если $a_{ij} = 0$ при $i - j > p$, $a_{ij} = 0$ при $j - i > q$, для некоторых $p, q \in \overline{0, n-1}$. Причем:

1. Если $\exists i_1, j_1 : \ i_1 - j_1 = p, a_{i_1 j_1} \neq 0$, то p - нижняя ширина ленты матрицы A.
2. Если $\exists i_2, j_2 : \ j_1 - i_1 = q, a_{i_2 j_2} \neq 0$, то q - верхняя ширина ленты матрицы A.

1.7 Полуширина ленточной матрицы

Пусть матрица A - ленточная и $p = q$, тогда число $p = q$ называется полушириной матрицы A.

1.8 Число обусловленности матрицы

Пусть $A \in R^{n \times n}, \ |A| \neq 0$ тогда число обусловленности матрицы: $cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$

1.9 Матрица перестановок

Матрица перестановок общего вида - матрица, которая получается из единичной перестановкой некоторого количества строк. В каждой строке и каждом столбце этой матрица 1 элемент отличный от 0, этот элемент равен 1.

1.10 PLU разложение матрицы

PLU разложением матрицы A называется разложение вида $A = PLU$, где P - матрица перестановок, L - нижнетреугольная матрица с единицами на диагонали, а U - верхнетреугольная матица с ненулевыми диагнальными элементами

1.11 Энергетическая норма

$\|x\|_D = (Dx, x)^{1/2}$, где D - положительно определённый оператор.

1.12 Предобуславливатель

Матрица P называется предобуславливателем для A, если у $P^{-1}A$ число обусловленности меньше, чем у A.

1.13 Многочлен наилучшего равномерного приближения

Многочлен наилучшего приближения - наилучшее приближение функции f(x) многочленом степени $\leq m$. Пусть E^N - евклидово пространство, $L = L(\phi_1, \dots, \phi_n)$, $n < N$, $dimL = n$. $\forall x \in E^N \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k\|_E \to min$. $\exists! p \in L, h \in L^T :\ x = p + h$ - наилучшее приближение.

1.14 Многочлены Чебышева первого рода

$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x$. $P_{n+1}(x) = 2x * P_n(x) - P_{n-1}(x)$.

1.15 Невязка

$AX = B$. Вектор невязки: $R = B - AX'$, где X' - приближенное решение.

1.16 A - сопряженные векторы

Вектора $p^1, p^2, \dots, p^m$ называется A-сопряженными, если $(Ap^i, p^j) = \begin{cases} = 0, i \neq j \\ \neq 0, i = j \end{cases}$

1.17 Пространства Крылова

Пространоством Крылова, порожденным матрицей A и вектором f называют пространство $K^{(m)} = span\{f, Af, \dots, A^{m-1}f\}$

1.18 Подобные матрицы

Квадратные матрицы A и B одинакового порядка называются подобными, если существует невырожденная матрица P того же порядка, такая что $B = P^{-1}AP$

1.19 Ортогонально подобные матрицы

Квадратные матрицы A и B одинакового порядка называются подобными, если существует ортогональная матрица P того же порядка, такая что $B = P^{-1}AP$

1.20 Отношение Рэлея

Отношением Рэлея для матрицы A называется выражения вида
$R(x) = \dfrac{(Ax, x)}{(x, x)}, x \neq 0$.

1.21 Матрица подобия

Невырожденная матрица P называется матрицей подобия между A, B, если $B = P^{-1}AP$.

1.22 Матрица Хесенберга

Квадратная ленточная матрица с нижней полушириной $p_1 = 1$ и верхней пошириной $p_2 = n - 1$.