



Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра функционального анализа и его применений

Васильченко Дмитрий Дмитриевич

**Об одной задаче для уравнения Лапласа со смешанными граничными  
условиями**

Курсовая работа

**Научный руководитель:**

д.ф.-м.н., профессор

Капустин Н.Ю.

Москва, 2024

## Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	3
3	Теорема существования	3
4	Теорема единственности	5
	Список литературы	7

## 1 Введение

Рассмотрим базовые определения:

**Определение 1.** Последовательность  $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$  векторов банахова пространства  $B$  называется **базисом** этого пространства, если каждый элемент  $x \in B$  разлагается единственным образом в ряд

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j$$

**Определение 2.** Две последовательности  $\{x_j\}$  и  $\{\omega_j\}$  с элементами из Гильбертова пространства  $H$  называются **биортогональными**, если

$$(x_j, \omega_k) = \delta_{jk}, \quad j, k \in \mathbb{N}$$

**Определение 3.** Базис  $\{\psi_i\}$  гильбертова пространства  $H$ , получаемый из ортонормированного базиса с помощью ограниченного обратимого отображения называется **базисом Рисса**.

## 2 Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

В полуполосе  $D = \{(x, y) | 0 < x < \pi, 0 < y\}$

В классе функций  $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$

с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} \int_0^{\pi} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x) \right]^2 dx = 0, \quad \varphi(x) \in L_2[0, \pi] \quad (3)$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, \quad y \rightarrow \infty \quad (4)$$

Аналогичная задача рассматривалась как вспомогательная с граничными условиями второго рода на боковых сторонах полуполосы и коэффициентом  $\frac{1}{k}$  при  $\frac{\partial u}{\partial y}$  в работе [1].

## 3 Теорема существования

**Теорема 1.** Решение задачи (1 - 4) существует, причём его можно представить в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)y} \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right], \quad (5)$$

где коэффициенты  $A_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  находятся из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

*Доказательство.* Докажем существование решения задачи (1) – (4). В силу основного результата работы [2] система  $\{\sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \}_{n=0}^{\infty}$  образует базис Рисса в пространстве  $L_2(0, \pi)$ . Поэтому коэффициенты разложения в формуле (6) удовлетворяют неравенствам Бесселя

$$C_1 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \leq C_2 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)}, 0 < C_1 < C_2,$$

а значит сходится ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|$  и сходится равномерно ряд (5). То, что функция (5) при  $y > 0$  - решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) - это очевидно. В силу равенства  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})y} = \frac{e^{-y/2}}{1 - e^{-y}}$ , также очевидно, что выполнено условие (4). Проверим выполнение условия (3).

Выразим функцию  $\varphi(x)$  из представления (6) и подставим в условие (3)

$$I(y) = 2 \int_0^{\pi} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx$$

Докажем, что  $I(y) \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow 0 + 0$ .

$$\begin{aligned} I(y) &\leq 4 \int_0^{\pi} \left[ \sum_{n=0}^m A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx + \\ &+ 4 \int_0^{\pi} \left[ \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx \end{aligned}$$

В силу левой части неравенства Бесселя имеем оценку

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \left[ \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx \leq \\ &\leq C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right)^2 \leq C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Это верно  $\forall \varepsilon > 0$ , если  $m \geq N = N(\varepsilon)$

Во втором слагаемом мы имеем дело с конечным числом элементов, поэтому:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \left[ \sum_{n=0}^m A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx \leq \\ &\leq C_4 \sum_{n=0}^m A_n^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Это верно, если  $0 < y < \delta$  (и зафиксировано в зависимости от  $N$ ). Условие (3) выполнено. Теорема доказана.  $\square$

## 4 Теорема единственности

**Теорема 2.** *Решение задачи (1 - 4) единственно*

*Доказательство.* Докажем единственность решения этой задачи. Пусть  $u(x, y)$  - разность двух решений - решение задачи с  $\varphi(x) \equiv 0$ . Необходимо получить выражение, где слева будет входить модуль или чётная степень функции  $u$ , а справа будет 0.

Введём обозначения  $A_\varepsilon = (0, \varepsilon)$ ,  $A_R = (0, R)$ ,  $B_R = (\pi, R)$ ,  $B_\varepsilon = (\pi, \varepsilon)$ .  $D_{R\varepsilon}$  - прямоугольник  $A_\varepsilon A_R B_R B_\varepsilon$ . Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 0 &= \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y)(u_{xx} + u_{yy}) dx dy = \\
 &= \iint_{D_{R\varepsilon}} ((R - y) u_x)_x dx dy + \iint_{D_{R\varepsilon}} ((R - y) u_y)_y dx dy - \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) + \iint_{D_{R\varepsilon}} u_y u dx dy = \\
 &= - \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R - \varepsilon) u_y u dx - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \int_{A_R B_R} \frac{u^2}{2} dx = \\
 &= - \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R - \varepsilon) (u_y - u_x) u dx - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R - \varepsilon) u_x u dx - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \\
 &\quad + \int_{A_R B_R} \frac{u^2}{2} dx
 \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}
 &\iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{2} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx + \frac{R - \varepsilon}{2} u^2(\pi, \varepsilon) = \\
 &= \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R - \varepsilon) (u_x - u_y) u dx + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx \leq \\
 &\leq (R - \varepsilon) \left[ \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx \leq \\
 &\leq (R - \varepsilon)^2 \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx + \frac{1}{4} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx, \\
 &\iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx + \frac{R - \varepsilon}{2} u^2(\pi, \varepsilon) \leq \\
 &\leq (R - \varepsilon)^2 \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx
 \end{aligned}$$

Устремим  $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ , тогда в силу неравенства  $(a - b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx = 0$$

и получим соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_0^\pi u^2(x, 0) dx + \frac{R}{2} u^2(\pi, 0) \leq \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx$$

Устремим теперь  $R \rightarrow \infty$ , тогда  $\int_{A_R B_R} u^2 dx \rightarrow 0$ , тем самым, это возможно только в случае  $u(x, y) \equiv 0$  в  $\overline{D}$ . □

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Моисеев Т.Е. Вафадорова Г.О.* Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения, **2015** Т. 51. №8. С.1070-1075
- [2] *Моисеев Е.И.* О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения, **1987** Т. 23. №1. С.177-189