Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра общей математики

Васильченко Дмитрий Дмитриевич

Об интегральном представлении производных решения задачи для уравнения Лапласа с интегральным граничным условием.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Капустин Н. Ю.

Москва, 2025

Постановка задачи

Рассматривается задача Трикоми для уравнения Лавертьева-Бицадзе

$$sgn(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0 \tag{1}$$

в области $D=D^+\cup D^-$, где
$D^+=\{(x,y):\ 0<x<\pi,\ 0<y<+\infty\}$,
$D^-=\{(x,y):\ -y<x<y+\pi,\ -\pi/2<y<0\}$ в классе функций $u(x,y)\in C^2(D^+)\cap C^2(D^-)\cap C(\overline{D^+\cup D^-})$ с граничными условиями

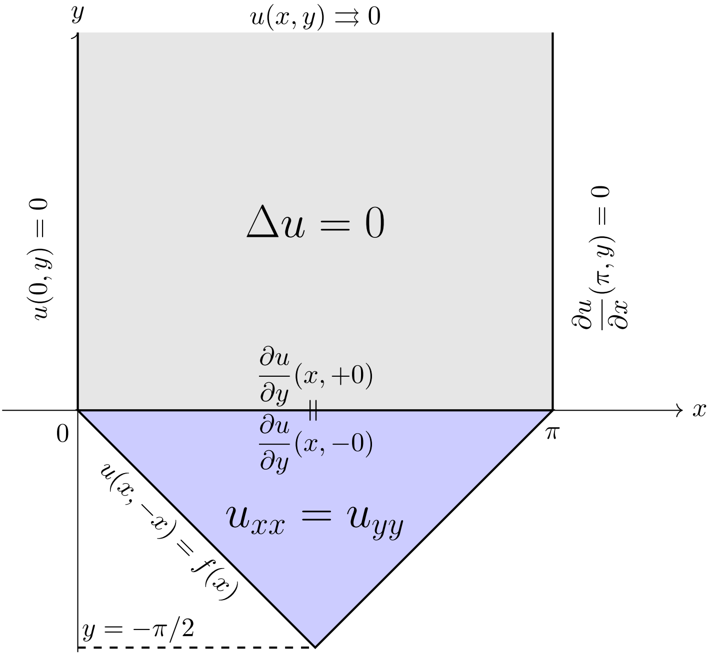
$$u(0,y)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y)=0,\ 0<y<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,-x)=f(x),\ 0\le x\le \pi/2,\ f(0)=0, \tag{3}$$

$$u(x,y)\rightrightarrows 0,\ y\to+\infty \tag{4}$$

и условием непрерывности градиента

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,-0),\ 0<x<\pi. \tag{5}$$


y
$u(x,y) \rightrightarrows 0$
$\Delta u = 0$
$u(0,y) = 0$
$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0$
$\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0)$
$\parallel$
$\frac{\partial u}{\partial y}(x,-0)$
x
0
π
$u(x,-x) = f(x)$
$u_{xx} = u_{yy}$
$y = -\pi/2$

Основные результаты

Теорема 1. Решение задачи (1) - (5) единственно.

Используя известную формулу общего решения задачи (1) - (5) в области D^-

$$u(x,y) = F(x+y) + f(\frac{x-y}{2}) - F(0).$$

Продифференцируем это равенство и получим следующее соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right),\ 0 < x < \pi.$$

Постановка вспомогательной задачи в D^+

Получим в области D^+ вспомогательную задачу для оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \tag{6}$$

с граничными условиями

$$u(0,y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0,\ 0 < y < +\infty, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \tag{8}$$

$$u(x,y) \rightrightarrows 0,\ y \to +\infty \tag{9}$$

Постановка вспомогательной задачи в D^+

Рассматривается уравнение

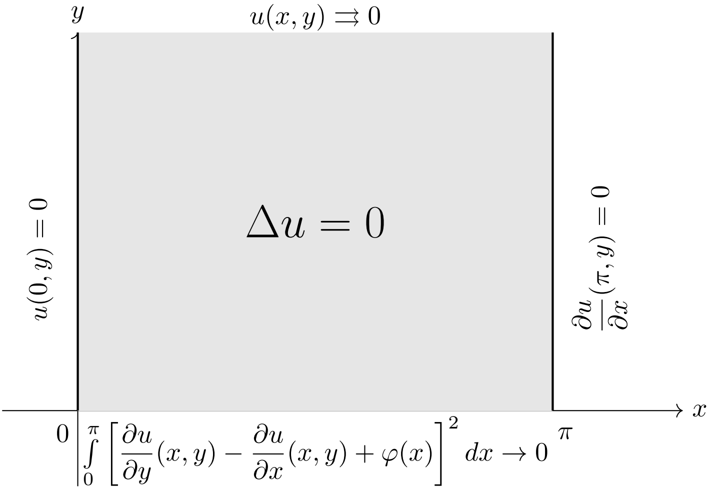
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \qquad (10)$$

в области $D^+ = \{(x,y):\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < +\infty\}$ в классе функций $u(x,y) \in C^2(D^+) \cap C^1(\overline{D^+} \cap \{y > 0\}) \cap C(\overline{D^+})$ с граничными условиями

$$u(0,y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0,\ 0 < y < +\infty, \qquad (11)$$

$$\lim_{y \to 0+0} \int\limits_0^\pi \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \varphi(x)\right]^2 dx = 0,\ \varphi(x) \in L_2(0,\pi) \qquad (12)$$

$$u(x,y) \rightrightarrows 0,\ y \to +\infty \qquad (13)$$


y
$u(x,y) \rightrightarrows 0$
$u(0,y) = 0$
$\Delta u = 0$
$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0$
x
0
$\int_0^\pi \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \varphi(x)\right]^2 dx \to 0$
π

Существование и единственность решения вспомогательной задачи

Теорема 2. Решение задачи (10) - (13) существует, причём его можно представить в виде ряда

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right], \qquad (14)$$

где коэффициенты $A_n,\ n=0,1,2,\ldots$ находятся из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}} \qquad (15)$$

Теорема 3. Решение задачи (10) - (13) единственно.

Интегральное представление производных решения

Теорема 4. Пусть $u(x,y)$ - решение задачи (10) – (13), тогда в D^+ u_x, u_y представимы в виде

$$u_y(x,y) = -Im\ \frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t)dt \tag{16}$$

$$u_x(x,y) = Re\ \frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t)dt, \tag{17}$$

где $z = x + iy$.

Список литературы

- Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.:Наука, 1981. – 448 с.
- Моисеев Е.И., Моисевв Т.Е., Вафадорова Г.О. Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51 №8. С. 1070-1075.
- Моисеев Е.И. О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23 №1. С. 177-189.
- Капустин Н.Ю., Васильченко Д.Д. Краевая задача для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60 №12. С. 1713-1718.
- Моисеев Т.Е. Об интегральном представлении решения уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47 №10. С. 1446-1451.