Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

Капустин Н.Ю., Васильченко Д.Д.

Постановка задачи

Рассматривается задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе:

$$(\operatorname{sgn}(y))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \qquad (1)$$

в области $D = D^+ \cup D^-$, где:

$$D^+ = \{(x,y) : 0 < x < \pi, 0 < y < +\infty\}$$

$$D^- = \{(x,y) : -y < x < y + \pi, -\pi/2 < y < 0\}$$

В классе функций

$$u(x,y) \in C^2(D^+) \cap C^2(D^-) \cap C(\overline{D^+ \cup D^-})$$

Граничные условия

$$u(0,y)=0, \quad u(\pi,y)=0, \quad 0<y<+\infty \tag{2}$$

$$u(x,-x)=f(x), \quad 0\le x\le \pi/2, \quad f(0)=0 \tag{3}$$

$$u(x,y)\rightrightarrows 0, \text{при} y\to+\infty, \tag{4}$$

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,-0), \quad 0<x<\pi, \tag{5}$$

$$k\in(-\infty,+\infty),\ k\neq 0$$

Основные результаты

Теорема 1: Решение задачи (1) - (5) единственно.
Преобразуем условие склеивания (5) в

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}|_{y=0+0} = 0. \tag{6}$$

Используя общую формулу решения уравнения (1) в области D^{-}, получим

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0+0) = -f'(\frac{x}{2}),\ \ 0 < x < \pi$$

Основные результаты

Получаем в D^+ вспомогательную задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \tag{8}$$

с граничными условиями

$$u(0,y) = 0,\ \ u(\pi,y) = 0,\ \ 0 < y < +\infty, \tag{9}$$

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \tag{10}$$

$$u(x,y) \rightrightarrows 0,\ \ y \to +\infty. \tag{11}$$

Основные результаты

Теорема 2. *Пусть* $|k| < 1,\ k \neq 0,\ f(x) \in C[0,\pi/2] \cap C^2(0,\pi/2)$, $f'(x) \in L_2(0,\pi/2)$. *Тогда решение задачи (8)-(11) существует и представимо в виде ряда*

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-ny} \sin nx,$$

причем условие (10) понимается в интегральном смысле

$$\int_0^{\pi} \left[\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + f'\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 dx \to 0,\ \ y \to 0+0,$$

а коэффициенты A_n определяется из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin\left[nx + \operatorname{arctg} k\right] = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} f'\left(\frac{x}{2}\right)$$

Основные результаты

Теорема 3. *Пусть $k > 0$, тогда решение задачи (8) - (11) единственно*

Теорема 4. *Пусть $|k| < 1$, $k \neq 0$ и $u(x, y)$ - решение задачи (8) - (11), тогда u_x, u_y представимы в виде*

$$u_y(x, y) = -\frac{2k}{\pi\sqrt{1+k^2}} \mathrm{Im} \left(\frac{1-e^{iz}}{1+e^{iz}}\right)^{\gamma/\pi} e^{iz} \int\limits_0^\pi M(t, z) f'(\frac{t}{2}) dt,$$

$$u_x(x, y) = \frac{2k}{\pi\sqrt{1+k^2}} \mathrm{Re} \left(\frac{1-e^{iz}}{1+e^{iz}}\right)^{\gamma/\pi} e^{iz} \int\limits_0^\pi M(t, z) f'(\frac{t}{2}) dt,$$

где

$$M(t, z) = \frac{1}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{\sin t}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)}, \gamma = 2 \operatorname{arctg} k,$$

$z = x + iy$.

Заключение

В работе решена задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в области с полуполосой в эллиптической части. Были доказаны теоремы об существовании и единственности решений при различных значениях параметра k и найдены интегральные представления для производных решения вспомогательной задачи.