Попытки доказать единственность задачи для $k < 0$

Васильченко Д.Д.

1 Постановка задачи I-I

Рассмотрим в области $D^+ = (0, \pi) \times (0, \infty)$ вспомогательную задачу для оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(0, y) = 0,\ u(\pi, y) = 0,\ 0 < y < +\infty, \tag{2}$$

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0+0) = \varphi(x) \in L_2(0, \pi), \tag{3}$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0,\ y \to +\infty \tag{4}$$

Теорема 1. *Решение задачи (1) - (4) единственно* $\forall k \neq 0$.

Доказательство.

Пусть $u(x, y)$ - решение однородной задачи с $\varphi \equiv 0$. Рассмотрим прямоугольник $D_{R\varepsilon} = (0, \pi) \times (\varepsilon, R) \subset D^+$. Справедливо следующее равенство

$$u\Delta u = \nabla(u\nabla u) - |\nabla u|^2$$

Это верно так как

$$\nabla\left(uu'_x, uu'_y\right) - \left(u'_x\right)^2 - \left(u'_y\right)^2 = u\Delta u$$

Воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского

$$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} u\Delta u dxdy = \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} \nabla(u\nabla u)dxdy - \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} |\nabla u|^2 dxdy = \iint\limits_{\partial D_{R\varepsilon}} u\frac{\partial u}{\partial \eta}ds - \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} |\nabla u|^2 dxdy$$

В силу условия (1) получаем

$$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} |\nabla u|^2 dxdy = \iint\limits_{\partial D_{R\varepsilon}} u\frac{\partial u}{\partial \eta}ds$$

Интеграл в правой части разбивается на 4 интеграла

$$\iint\limits_{\partial D_{R\varepsilon}} u\frac{\partial u}{\partial \eta}ds = -\int\limits_{\varepsilon}^{R} u(0, y)u'_x(0, y)dy + \int\limits_{\varepsilon}^{R} u(\pi, y)u'_x(\pi, y)dy + \int\limits_{0}^{\pi} u(x, R)u_y(x, R)dx - \int\limits_{0}^{\pi} u(x, \varepsilon)u'_y(x, \varepsilon)dx$$

Первые 2 интеграла обращаются в 0 в силу граничных условий (2). Третий обращается в 0 при $R \to \infty$ в силу условия (4) (т.к. u_y ограничена). Рассмотрим подробнее последний интеграл

$$\int\limits_{0}^{\pi} u(x, \varepsilon)u'_y(x, \varepsilon)dx = \int\limits_{0}^{\pi} u(x, \varepsilon)\left[u'_y(x, \varepsilon) - ku'_x(x, \varepsilon)\right]dx + \int\limits_{0}^{\pi} ku(x, \varepsilon)u'_x(x, \varepsilon)dx =$$

$$= \int\limits_0^\pi u(x,\varepsilon)\left[u'_y(x,\varepsilon) - ku'_x(x,\varepsilon)\right]dx + \frac{k}{2}\int\limits_0^\pi \left(u^2(x,\varepsilon)\right)_x dx = \int\limits_0^\pi u(x,\varepsilon)\left[u'_y(x,\varepsilon) - ku'_x(x,\varepsilon)\right]dx + \frac{k}{2}\left[u^2(\pi,\varepsilon) - u^2(0,\varepsilon)\right]$$

Интеграл стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, а последние два члена равны 0 в силу граничных условий (2). Получаем, что

$$\iint\limits_{D^+} |\nabla u|^2 dxdy = 0$$

и на левой границе функция u равна 0, следовательно $u \equiv 0$ в D^+. Теорема доказана.

2 Задача I-II

Рассмотрим в области $D^+ = (0,\pi) \times (0,\infty)$ вспомогательную задачу для оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \tag{5}$$

с граничными условиями

$$u(0,y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0,\ 0 < y < +\infty, \tag{6}$$

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0+0) = \varphi(x) \in L_2(0,\pi), \tag{7}$$

$$u(x,y) \rightrightarrows 0,\ y \to +\infty \tag{8}$$

В данном случае попытки доказать единственность решения задачи при $k < 0$ методами, схожими с тем, что использовал выше, приводят к неудачам. Но ранее была показана единственность решения данной задачи для $k > 0$, попробуем теперь с помощью симметрии показать, что решение будет единственно и для $k < 0$.

Теорема 2. *Решение задачи (5) - (8) единственно* $\forall k \neq 0$.

Доказательство.

Рассмотрим однородную задачу с отрицательным параметром k. Проведём замену переменных $x = -t$. Все условия нашей задачи кроме условия (7) инвариантны к такому преобразованию и мы получим прежнюю задачу, но в другой области. Определим новую функцию $v(t,y) := u(-t,y)$.

А в условии (7) возникает знак минус, что как раз и делает наш коэффициент k положительным. Таким образом получим задачу

$$\begin{cases} v''_{tt} + v''_{yy} = 0, t \in (-\pi,0), y > 0 \\ v(0,y) = 0, \dfrac{\partial v}{\partial t}(-\pi,y) = 0, 0 < y < \infty \\ \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial v}{\partial y}(t,0+0) + \dfrac{\partial v}{\partial t}(t,0+0) = 0 \\ v(t,y) \rightrightarrows 0,\ y \to +\infty \end{cases}$$

Сделаем теперь замену переменной $s = -t$ и введём обозначение $w(s,y) := v(-s,y) = u(s,y)$, тогда

$$\begin{cases} w''_{ss} + w''_{yy} = 0, s \in (0,\pi), y > 0 \\ w(0,y) = 0, \dfrac{\partial w}{\partial s}(\pi,y) = 0, 0 < y < \infty \\ \dfrac{1}{-k}\dfrac{\partial w}{\partial y}(s,0+0) - \dfrac{\partial w}{\partial s}(s,0+0) = 0 \\ w(s,y) \rightrightarrows 0,\ y \to +\infty \end{cases}$$

Для этой задачи $-k > 0$ поэтому решение задачи единственно, а значит единственно и решение исходной задачи с $k < 0$. Теорема доказана.