

Интегралы: учебно-развлекательное пособие

Васильченко Дмитрий

Глава 1

Введение

§1.1. Требования к читателю

Для успешного прочтения и понимания этой работы читателю необходимо обладать некоторыми начальными сведениями. **Необходимо** знать и понимать понятие предела и производной действительной функции одной переменной, не лишним будет иметь знания из начал линейной алгебры, а также необходимо знать хоть сколько-нибудь теорию множеств, хотя всю необходимую информацию из этого раздела я буду напоминать.

Когда мы перейдём к изучению интеграла Лебега возникнут вопросы из теории меры, впрочем, если автор не поленится, то непременно опишет и докажет все необходимые факты.

§1.2. О функциях

Самым основным и важным объектом математического и функционального анализа являются функции, со школы нам известно, что функции можно складывать, умножать, подставлять друг в друга и даже рисовать их графики! Ни для кого не секрет, что человек, знающий понятие функции, наверняка представляет себе в голове именно график функции, а не аналитическое описание и свойство этого объекта. По графику можно о функции понять очень многое: участки возрастания и убывания, гладкость, непрерывность, можно даже прикинуть где находятся корни.

Давайте немного порассуждаем теперь о свойствах функций, которые вам наверняка известны. Начнем мы с чётности.

Определение 1.1. Функция $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется чётной, если $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = f(-x)$

Говоря по-человечески, четная функция - это функция симметричная относительно оси ОУ, за примерами далеко ходить не придётся, самая простая чётная функция: $f(x) = |x|$. Совершенно понятно, что чётной будет

являются любая функция вида $f(x) = x^n$, где $|n|$ - чётное, обращу внимание, что это верно и для отрицательных n . Одной из важнейших чётных функций является $\cos x$, в дальнейшем мы часто будем использовать эту функцию для "опробывания" интегралов.

Наряду с чётными функциями существуют и нечётные

Определение 1.2. Функция $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется чётной, если $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = -f(-x)$

Примерами могут послужить линейные функции с $c = 0$, $\sin x$ и x^n , где $|n|$ - нечётное число.

Ещё существуют периодические функции, которые также очень удобны для построения графиков

Определение 1.3. Функция $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется периодической, если $\exists T \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = f(x + T)$. T в этом случае называется периодом

Понятно, что если функция периодическая, то ее график состоит из повторяющихся частей, примером может послужить $\sin x$ или константа.

Важнейшим классом функций являются непрерывные функции

Определение 1.4. Функция $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной в т. x_0 , если $\lim_{t \rightarrow x_0} f(t) = f(x_0)$. Функция непрерывна на множестве, если непрерывна в каждой точке этого множества.

В школе нас учили, что непрерывная функция это такая функция, график которой можно нарисовать не отрывая руки. Можно переформулировать, что у функции нет слишком резких скачков, приводящих к вертикальным разрывам графика. Примеров непрерывных функций пруд пруди, все линейные функции, все функции вида x^n , где $n \geq 1$, $\sin x$, $\cos x$ и т.д. Найти примеры разрывных функций труднее, но все же удаётся: $\frac{1}{x}$ будет разрывной в точке 0.

Пример 1.1. Рассмотрим один из самых часто использующихся контр-примеров в мат анализе: функцию Дирихле, а именно

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Как видно из определения в рациональных точках функция Дирихле принимает значения 1, а в иррациональных 0, понятно, что визуализировать это можно нарисовав две сплошные линии $y = 1$, $y = 0$, но даст ли нам что-то такая визуализация?

Пример 1.2. Функция Хевисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Очевидно претерпевает разрыв в точке $x = 0$. Эту функцию ещё называют функцией бесконечной кривизны.

Ещё более приятным свойством функции будет дифференцируемость.

Определение 1.5. Функция $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется дифференцируемой в точке x_0 , если в этой точке справедливо представление $f(x) = Ax + o(x)$. Функция дифференцируема на множестве, если дифференцируема в каждой точке.

Дифференцируемость ещё называют гладкостью, а под гладкостью понимается, что к любой точке графика можно провести касательную. Посмотрев на определение, можно понять, что изначально дифференцируемость в точке означает, что вблизи рассматриваемой точки график функции стремится к прямой, это и позволяет построить касательную.

Математики люди странные, напридумывают всяких определений, а потом пытаются понять кто из кого следует, этим займёмся и мы. Мы привели много примеров четных, нечетных и периодических функций и из них можно заметить, что из чётности/нечётности не следует периодичность, но и из периодичности не следует чётность/нечётность, поэтому делаем вывод, что эти понятия вообще о разном. Что же касается непрерывности и дифференцируемости, очевидно, что дифференцируемость требует больше всяких условий, поэтому логично проверить следует ли из неё непрерывность. Предоставляю это вам, чтобы это сделать нужно осознать, что понятие дифференцируемости $f(x)$ в точке x_0 эквивалентно существованию предела $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Хорошо, непрерывность следует из дифференцируемости, но может быть верно и обратное? Тогда вообще получится, что непрерывность = дифференцируемость. В таких случаях нужно или доказывать утверждение или искать контрпримеры, дабы не тратить время займёмся вторым. Простейшим примером непрерывной, но не дифференцируемой функции будет $f(x) = |x|$, в точке $x = 0$. Если вы нуждаетесь в строгом доказательстве не дифференцируемости этой функции в точке $x = 0$, то рассмотрите односторонние пределы и убедитесь, что они имеют противоположные знаки. Что же это означает на наивном языке графиков? До точки 0 мы движемся вниз со скоростью 1, а после движемся вверх с такой же по модулю скоростью, но что происходит в точке 0? Мы движемся вверх или вниз? На этот вопрос ответ найти не получится, поэтому это функция и не является гладкой.

Этот пример здорово показывает, что из непрерывности на множестве не следует дифференцируемость на этом же множестве. Но может быть нам удастся показать, что всегда существует чуть меньшее множество, на котором функция будет дифференцируема?

Пример 1.3. Давайте рассмотрим забавный пример, хотим построить всюду непрерывную функцию, но не имеющую производной в некоторых точках x_n . Понятно, что можно просто задать кусочно линейную функцию, но хочется что-нибудь более приятное для глаз. Вспомним, что сумма непрерывных функций - функция непрерывная, а значит мы можем брать две непрерывные функции, которые будут недифференцируемы каждая в своей точке и суммировать их, результат будет удовлетворять

описанным выше требованиям, в итоге получим:

$$f(x) = \sum_{n=1}^N |x - x_n|,$$

однако этот пример справедлив лишь для конечного множества точек, для обобщения на случай множества нужно лишь сделать ряд сходящимся:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x - x_n|,$$

Отлично, мы получили пример непрерывной функции, которая недифференцируема на счётном множестве, но даже на интервале $(0, 1)$ точек больше. Здесь мы прибегнем к двум мощнейшим примерам, перевернув в своё время представление о непрерывности и дифференцируемости.

Пример 1.4. Построим функцию непрерывную всюду, но не имеющей нигде производной, пример ван дер Вардена:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}, \quad (1.1)$$

здесь $\{x\}$ - расстояние от x до ближайшего целого числа. Давайте покажем, что эта функция непрерывна и не дифференцируема.

Непрерывность $f(x)$ следует из непрерывности каждой $\frac{\{10^n x\}}{10^n}$ и из оценки $\frac{\{10^n x\}}{10^n} \leq 10^{-n}$. Попробуем теперь вычислить производную $f(x)$ в какой-нибудь точке $x \in [0, 1)$. Запишем x в виде $x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, если дробь конечна, то дополняем нулями.

$$\{10^n x\} = \begin{cases} 0, a_n a_{n+1} \dots, & \text{если } 0, a_n a_{n+1} \dots \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 0, a_n a_{n+1} \dots, & \text{если } 0, a_n a_{n+1} \dots > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Положим приращение аргумента $h_m = -10^{-m}$, если $a_m = 4$ или $a_m = 9$ и $h_m = 10^{-m}$ иначе. Рассмотрим отношение

$$\begin{aligned} \frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m} &= \\ &= 10^m \sum_{n=0}^{\infty} \pm \frac{\{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\}}{10^n} \end{aligned}$$

Рассмотрим числитель при $n \geq m$:

$$\{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\} = \{10^n x + 10^b\} - \{10^n x\} = 0,$$

1.3. О ФИЗИЧЕСКИХ И ИНЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ ИЗУЧАЕМОГО ПОНЯТИЯ⁷

т.к. в этом случае $b \in \mathbb{N}_0$, т.е. 10^b не влияет на результат операции потому что является целым. Пусть теперь $n < m$

$$\{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\} = \{0, a_n a_{n+1} \dots (a_{n-m} \pm 1) a_{n-m+1} \dots\} - \{0, a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots\}$$

В данном случае первое выражение может "перескочить" $\frac{1}{2}$ и стать ближе к верхнему числу, тогда выражение будет равняться -10^{n-m} , а если оно останется меньше $\frac{1}{2}$, то выражение будет равно 10^{n-m} .

Давайте визуализируем это на примере $x = 0,1492$. Пусть $n = 0, m = 1$, тогда

$$\{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\} = \{0,2492\} - \{0,1492\} = 10^{-1} = 10^{n-m}$$

или

$$\{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\} = \{0,0492\} - \{0,1492\} = -10^{-1} = -10^{n-m}$$

если же $n = 1, m = 2$, то

$$\{10^n(x \pm 10^{-m})\} - \{10^n x\} = \{0,502\} - \{0,492\} = -10^{-1} = -10^{n-m}$$

или аналогично может быть 10^{n-m} .

Таким образом получили, что числители дробей могут обращаться в 0 или обращаться в целые положительные или отрицательные значения, получаем, что не выполнено необходимое условие сходимости числового ряда, следовательно производная не существует ни в одной точке.

Пример 1.5. Рассмотрим более интересный пример, а именно функцию Вейерштрасса:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos b^n \pi x, \quad 0 < a < 1, \quad ab > 1 + \frac{3\pi}{2}.$$

Это функция является непрерывной всюду, но нигде не дифференцируемой, то есть ни к одной точке графика этой функции нельзя провести касательную, в таком случае едва ли у нас получится построить этот самый график.

Однако это все удобно лишь когда мы находимся в школе, выйдя за ее пределы, все становится гораздо и гораздо хуже и непонятнее. Появляются функции визуализировать, которые не представляется никакой возможности, чтобы не быть голословным приведу пример:

§1.3. О физических и иных приложениях изучаемого понятия

Если вкратце, то интегралы применяются везде, от физики до машинного обучения, но поговорим о некоторых приложениях более подробно

Интегралы, как и многие другие математические операции, пришли к нам из физики. Пусть функция $N(t)$ описывает как мощность двигателя меняется во времени, тогда чтобы найти работу нам нужно будет проинтегрировать эту функцию, простейший пример это когда $N = \text{const}$, тогда работа будет $A = NT$, где T - прошедшее время. Аналогично можно вычислять пройденный путь, зная скорость и ещё много подобных примеров.

Вторым важнейшим физическим применением интегралов будет нахождение массы тела, когда мы знаем его плотность. Дело в том, что плотность может не быть постоянной, например, в атмосфере земли, плотность воздуха непостоянна и меняется при изменении высоты. Для вычисления такой массы используются интегралы.

Помимо этого интегралы используются для нахождения центра масс сложных объектов, генерации случайных чисел в 3D-графике, моделировании популяций животных и даже расчёта необходимого освещения в архитектуре.

Глава 2

Неопределенный интеграл

Наконец мы вступаем во владения математического анализа, в этой главе мы очень подробно познакомимся с понятием неопределённого интеграла, разберёмся в чем его "ощутимый смысл" и разберём множество примеров.

§2.1. Строгое определение

Определение 2.1. Дифференцируемая функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на множестве M , если на M $F'(x) = f(x)$.

Сразу обратим наше внимание, что если $F(x)$ первообразная для $f(x)$, то и $F(x) + C$ будет первообразной $f(x)$.

Лемма 2.1. Пусть $F(x), G(x)$ первообразные функции $f(x)$ на связном множестве M , тогда $F(x) = G(x) + C$.

Доказательство: Рассмотрим функцию $H(x) = F(x) - G(x)$, её производная тождественно равна 0, значит $H'(x) = 0$, следовательно $H(x) = \text{const}$. \square

Замечание 2.1. Обратим внимание на важность связности множества M . В случае интервала, луча или прямой наше утверждение верно, но ес-

ли в качестве M взять $(0, 1) \cup (3, 5)$. Тогда $F(x) \equiv 1$ и $G(x) = \begin{cases} a \neq 0, & x \in (0, 1) \\ b \neq 0, & x \in (3, 5) \end{cases}$

являются первообразными, но не отличаются на константу.

Почему так нельзя сделать в случае связного множества? Потому дифференцируемая функция должна быть непрерывной.

Глава 3

Определенный интеграл Римана

Глава 4

Интеграл Лебега