Доказательство единственности решения задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий I-I и II-II.

Васильченко Д.Д.

1 Задача I-I

Рассмотрим в области $D^+ = \{(x,y) : x \in (0,\pi), y > 0\}$ следующую задачу.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(0,y) = 0,\ u(\pi,y) = 0,\ 0 < y < +\infty, \tag{2}$$

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0+0) = \varphi(x),\ \varphi(x) \in L_2(0,\pi), \tag{3}$$

$$u(x,y) \rightrightarrows 0,\ y \to +\infty \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть функция $u(x,y)$ является гармонической в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $P \in \Omega$ и $R > 0$ такие, что шар $\overline{B(P,R)} \subset \Omega$. Тогда справедлива следующая оценка*

$$|\nabla u(P)| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi R} \max_{z \in \partial B(P,R)} |u(z)|.$$

Доказательство. Производная гармонической функцией сама является гармонической и для гармонических функций справедливо свойство среднего. Применим его к производной функции $u_x(x,y)$ в точке P, для просты положим $P = (0,0)$.

$$u_x(0,0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{B(0,R)} u_x(x,y)\,dxdy.$$

Применим теорему Гаусса-Отстроградского для векторного поля $\vec{F} = (u,0)$, тогда $\nabla \vec{F} = u_x$:

$$\iint\limits_{B(0,R)} u_x dxdy = \oint\limits_{\partial B(0,R)} u \cdot \eta_x ds.$$

Тогда

$$u_x(0,0) = \frac{1}{\pi R^2} \oint\limits_{\partial B(0,R)} u \cdot \eta_x ds.$$

Теперь оценим интеграл

$$|u_x(0,0)| \leq \frac{1}{\pi R^2} \oint\limits_{\partial B(0,R)} |u(s)| \cdot |\eta_x(s)| ds \leq \frac{1}{\pi R^2} \oint\limits_{\partial B(0,R)} \max_{z \in \partial B(P,R)} |u(z)| \cdot |\eta_x(s)| ds.$$

Вектор нормали имеет вид $\vec{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, элемент длины дуги $ds = R\,d\alpha$.

$$|u_x(0,0)| \leq \frac{1}{\pi R^2} \max_{z\in\partial B(P,R)} |u(z)| \int\limits_0^{2\pi} |\cos\alpha| R d\alpha = \frac{4}{\pi R^2} \max_{z\in\partial B(P,R)} |u(z)|.$$

Аналогичную оценку можем получить и для $u_y(0,0)$, тогда оценка для градиента выглядит следующим образом:

$$|\nabla u(0,0)| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi R^2} \max_{z\in\partial B(P,R)} |u(z)|.$$

Теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть $u(x,y)$ - решение задачи (1)-(4), тогда $u_y(x,y) \rightrightarrows 0$ при $y \to \infty$.*
Доказательство.По условию (4)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists y^* > 0\colon \forall x_0 \in (0,\pi), y_0 > y^* \quad |u(x_0,y_0)| < \varepsilon.$$

Используем теорему 1, сперва выберем шар с центром в точке $P = (x_0, y_0)$ и радиусом $R = \min\{x_0, R - x_0\}$, то есть $B(P,R)$. По теореме 1 $u_y(P) \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi R^2} \max\limits_{z\in\partial B(P,R)} |u(z)| < \frac{4\sqrt{2}}{\pi R^2}\varepsilon$. Получаем следующее:

$$\forall \varepsilon^* > 0 \ \exists y^* > 0\colon \forall x_0 \in (0,\pi) y_0 > y^* \ |u'_y(x_0,y_0)| < \varepsilon^* = \frac{4\sqrt{2}}{\pi R^2}\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Решение задачи (1)-(4) единственно для $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.*

Доказательство. Используем энергетический метод. Пусть $u(x,y)$ - решение однородной задачи (1)-(4) ($\varphi(x) \equiv 0$). Рассмотрим прямоугольник $D_{\varepsilon R} = (0,\pi)\times(\varepsilon, R) \subset D^+$. Справедливо следующее равенство.

$$u\Delta u = \nabla(u\nabla u) - |\nabla u|^2.$$

Воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского для выражения

$$\iint\limits_{D_{\varepsilon R}} u\Delta u dxdy = \iint\limits_{D_{\varepsilon R}} \nabla(u\nabla u) dxdy - \iint\limits_{D_{\varepsilon R}} |\nabla u|^2 dxdy.$$

Получим

$$\iint\limits_{D_{\varepsilon R}} u\Delta u dxdy = \iint\limits_{\partial D_{\varepsilon R}} u\frac{\partial u}{\partial \eta} ds - \iint\limits_{D_{\varepsilon R}} |\nabla u|^2 dxdy.$$

В силу условия (1) получаем

$$\iint\limits_{\partial D_{\varepsilon R}} u\frac{\partial u}{\partial \eta} ds = \iint\limits_{D_{\varepsilon R}} |\nabla u|^2 dxdy.$$

Интеграл по границе вычисляется следующим образом

$$\iint\limits_{\partial D_{\varepsilon R}} u\frac{\partial u}{\partial \eta} ds = -\int\limits_{\varepsilon}^{R} u(0,y)u'_x(0,y)dy + \int\limits_{\varepsilon}^{R} u(\pi,y)u'_x(\pi,y)dy + \int\limits_0^{\pi} u(x,R)u_y(x,R)dx - \int\limits_0^{\pi} u(x,\varepsilon)u'_y(x,\varepsilon)dx.$$

В силу граничных условий (2) первый и второй интеграл обращается в 0. В силу выше доказанной леммы и условия (4) третий интеграл также обращается в 0 при стремлении R к $+\infty$. Рассмотрим последний интеграл

$$\int_0^\pi u(x,\varepsilon)u'_y(x,\varepsilon)dx = \int_0^\pi u(x,\varepsilon)\left[u'_y(x,\varepsilon) - ku'_x(x,\varepsilon)\right]dx + \int_0^\pi ku(x,\varepsilon)u'_x(x,\varepsilon)dx$$

$$= \int_0^\pi u(x,\varepsilon)\left[u'_y(x,\varepsilon) - ku'_x(x,\varepsilon)\right]dx + \frac{k}{2}\int_0^\pi \left(u^2(x,\varepsilon)\right)'_x dx =$$

$$= \int_0^\pi u(x,\varepsilon)\left[u'_y(x,\varepsilon) - ku'_x(x,\varepsilon)\right]dx + \frac{k}{2}\left[u^2(\pi,\varepsilon) - u^2(0,\varepsilon)\right].$$

Устремим $\varepsilon \to 0+0$, тогда интграл обращается в 0 в силу условия (3) и получаем итоговое выражение

$$\iint_{D^+} |\nabla u|^2 dxdy = \frac{k}{2}\left[u^2(\pi,\varepsilon) - u^2(0,\varepsilon)\right],$$

в силу граничных условий (2) получаем

$$\iint_{D^+} |\nabla u|^2 dxdy = 0.$$

Значит

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, (x,y) \in D^+,$$

т.к. $u(0,y) = 0, \forall y > 0$ получаем, что $u(x,y) \equiv 0$ в D^+. Теорема доказана.

2 Задача II-II

Рассмотрим в области $D^+ = \{(x,y) : x \in (0,\pi), y > 0\}$ следующую задачу.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \tag{5}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0,\ 0 < y < +\infty, \tag{6}$$

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0+0) = \varphi(x),\ \varphi(x) \in L_2(0,\pi), \tag{7}$$

$$u(x,y) \rightrightarrows 0,\ y \to +\infty \tag{8}$$

Лемма 2. *Пусть $u(x,y)$ - решение однородной задачи (1)-(4), тогда* $u(0,0) = u(\pi,0)$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского для векторного поля $\vec{F} = \nabla u$. Тогда $\mathrm{div}\vec{F} = \Delta u$. Рассмотрим прямоугольник $D_R = (0,\pi)\times(0,R) \subset D^+$.

$$\iint_{D_R} \Delta u dxdy = \iint\limits_{\partial D_R} \nabla u \cdot \vec{n} ds = \oint\limits_{\partial D_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Следовательно в силу (5)

$$\oint\limits_{\partial D_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

Рассмотрим этот интеграл подробнее

$$\oint\limits_{\partial D_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds = -\int\limits_0^\pi \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)dx + \int\limits_0^\pi \frac{\partial u}{\partial y}(x,R)dx + \int\limits_0^R \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y)dy - \int\limits_0^R \frac{\partial u}{\partial x}(0,y)dy$$

В силу условий (6) третий и четвертый интегралы обнуляются, при стремлении $R \to +\infty$ в силу леммы 1 второй интеграл стремится к 0. Получаем (аналогично теореме 2)

$$0 = \oint\limits_{\partial D_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds = -\int\limits_0^\pi \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)dx = -k\int\limits_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x}(x,0)dx = u(0,0) - u(\pi,0).$$

Лемма доказана.

Теорема 3. *Решение задачи (5)-(8) единственно для* $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2. Используем энергетический метод. Пусть $u(x,y)$ - решение однородной задачи (5)-(8) ($\varphi(x) \equiv 0$). Рассмотрим прямоугольник $D_{\varepsilon R} = (0,\pi)\times(\varepsilon,R) \subset D^+$. Справедливо следующее равенство.

$$u\Delta u = \nabla(u\nabla u) - |\nabla u|^2.$$

Воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского для выражения

$$\iint\limits_{D_{\varepsilon R}} u\Delta u dxdy = \iint\limits_{D_{\varepsilon R}} \nabla(u\nabla u) dxdy - \iint\limits_{D_{\varepsilon R}} |\nabla u|^2 dxdy.$$

Получим

$$\iint\limits_{D_{\varepsilon R}} u\Delta u dxdy = \iint\limits_{\partial D_{\varepsilon R}} u\frac{\partial u}{\partial \eta} ds - \iint\limits_{D_{\varepsilon R}} |\nabla u|^2 dxdy.$$

В силу условия (1) получаем

$$\iint\limits_{\partial D_{\varepsilon R}} u\frac{\partial u}{\partial \eta} ds = \iint\limits_{D_{\varepsilon R}} |\nabla u|^2 dxdy.$$

Интеграл по границе вычисляется следующим образом

$$\iint\limits_{\partial D_{\varepsilon R}} u\frac{\partial u}{\partial \eta} ds = -\int\limits_\varepsilon^R u(0,y)u'_x(0,y)dy + \int\limits_\varepsilon^R u(\pi,y)u'_x(\pi,y)dy + \int\limits_0^\pi u(x,R)u_y(x,R)dx - \int\limits_0^\pi u(x,\varepsilon)u'_y(x,\varepsilon)dx.$$

В силу граничных условий (6) первый и второй интеграл обращается в 0. В силу леммы 1 и условия (8) третий интеграл также обращается в 0 при стремлении R к $+\infty$. Рассмотрим последний интеграл

$$\int_0^\pi u(x,\varepsilon)u'_y(x,\varepsilon)dx = \int_0^\pi u(x,\varepsilon)\left[u'_y(x,\varepsilon) - ku'_x(x,\varepsilon)\right]dx + \int_0^\pi ku(x,\varepsilon)u'_x(x,\varepsilon)dx$$

$$= \int_0^\pi u(x,\varepsilon)\left[u'_y(x,\varepsilon) - ku'_x(x,\varepsilon)\right]dx + \frac{k}{2}\int_0^\pi \left(u^2(x,\varepsilon)\right)'_x dx =$$

$$= \int_0^\pi u(x,\varepsilon)\left[u'_y(x,\varepsilon) - ku'_x(x,\varepsilon)\right]dx + \frac{k}{2}\left[u^2(\pi,\varepsilon) - u^2(0,\varepsilon)\right].$$

Устремим $\varepsilon \to 0+0$, тогда интграл обращается в 0 в силу условия (3) и получаем итоговое выражение

$$\iint_{D^+} |\nabla u|^2 dxdy = \frac{k}{2}\left[u^2(\pi,0+0) - u^2(0,0+0)\right],$$

в силу леммы 2 получаем

$$\iint_{D^+} |\nabla u|^2 dxdy = 0.$$

Значит

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, (x,y) \in D^+,$$

т.к. $u(x,y) \rightrightarrows 0$ при $y \to +\infty$ получаем, что $u(x,y) \equiv 0$ в D^+. Теорема доказана.

3 Задача I-II

Теорема 4. *Решение задачи (9)-(13) единственно для* $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Доказательство. Случай $k > 0$ рассмотрен в предыдущей работе. Рассмотрим только случай $k < 0$. Как и ранее $D_{\varepsilon R} = (0,\pi) \times (\varepsilon, R)$, заметим что

$$\iint_{D_{\varepsilon R}} e^{-kx} u\Delta u dxdy = 0.$$

Рассмотрим это выражение подробнее

$$\iint_{D_{\varepsilon R}} e^{-kx} uu_{xx} dxdy = -\int_\varepsilon^R u(0,y)u_x(0,y)dy + \int_\varepsilon^R e^{-k\pi}u(\pi,y)u_x(\pi,y)dy - \iint_{D_{\varepsilon R}} e^{-kx}\left(u_x^2 - kuu_x\right)dxdy =$$

$$= -\iint_{D_{\varepsilon R}} e^{-kx}\left(u_x^2 - kuu_x\right)dxdy,$$

$$\iint\limits_{D_{\varepsilon R}} e^{-kx}uu_{yy}dxdy = -\int\limits_0^\pi e^{-kx}u(x,\varepsilon)u_y(x,\varepsilon)dx + \int\limits_0^\pi e^{-kx}u(x,R)u_y(x,R)dx - \iint\limits_{D_{\varepsilon R}} e^{-kx}u_y^2dxdy.$$

Устремим $R \to +\infty$ и $\varepsilon \to 0+0$, тогда

$$\int\limits_0^\pi e^{-kx}u(x,R)u_y(x,R)dx \to 0,$$

$$\int\limits_0^\pi e^{-kx}u(x,\varepsilon)u_y(x,\varepsilon)dx = k\int\limits_0^\pi e^{-kx}u(x,0+0)u_x(x,0+0)dx.$$

Собираем исходное выражение

$$0 = -\iint\limits_{D_{\varepsilon R}} e^{-kx}\left(u_x^2 - kuu_x\right)dxdy +$$

Лемма 1. *Пусть $u(x,y)$ - решение задачи (1)-(4), тогда $u_y(x,y) \rightrightarrows 0$ при $y \to \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим комплексное отображение $w(z) = e^{iz}$, где $z = x + iy$. Это отображение является конформным в области $D^+ = \{(x,y) : x \in (0,\pi), y > 0\}$. Анализируем, как данное отображение преобразует нашу полуполосу:

- **Внутренность полуполосы** $x \in (0,\pi), y > 0$**:** Отображается на верхнюю половину открытого единичного круга $\Omega_{int} = \{w = \sigma + i\tau : \sigma^2 + \tau^2 < 1, \tau > 0\}$.

- **Нижняя граница** $y = 0, x \in [0,\pi]$**:** При $y = 0$, $w = e^{ix} = \cos x + i\sin x$. Поскольку x изменяется от 0 до π, эта часть границы переходит в верхнюю полуокружность единичного круга, соединяющую точки $w = 1$ (при $x = 0$) и $w = -1$ (при $x = \pi$). Обозначим её $\partial\Omega_1 = \{w : |w| = 1, \mathrm{Im}(w) \geq 0\}$.

- **Левая боковая граница** $x = 0, y \geq 0$**:** При $x = 0$, $w = e^{-y}$. Поскольку $y \geq 0$, e^{-y} изменяется от 1 (при $y = 0$) до 0 (при $y \to +\infty$). Эта часть границы переходит в отрезок $[0,1]$ вещественной оси.

- **Правая боковая граница** $x = \pi, y \geq 0$**:** При $x = \pi$, $w = e^{-y}(\cos\pi + i\sin\pi) = -e^{-y}$. Поскольку $y \geq 0$, $-e^{-y}$ изменяется от -1 (при $y = 0$) до 0 (при $y \to +\infty$). Эта часть границы переходит в отрезок $[-1,0]$ вещественной оси.

- **"Бесконечность"полуполосы** $y \to +\infty$**:** При $y \to +\infty$, $e^{-y} \to 0$, следовательно $w \to 0$. Таким образом, вся "бесконечность"полуполосы отображается в единственную точку $w = 0$ (начало координат) в плоскости w.

Область $\overline{D^+}$ (включая границы и точку на бесконечности) переходит в замкнутый верхний полудиск $\overline{\Omega} = \{w = \sigma + i\tau : \sigma^2 + \tau^2 \leq 1, \tau \geq 0\}$.

Функция $u(x,y)$ является гармонической в D^+. При конформном отображении гармонические функции остаются гармоническими. Следовательно, функция $U(w)$, определенная как $U(w(z)) = u(z)$, является гармонической в открытой области Ω_{int}.

Рассмотрим граничные условия для $U(w)$:

- Из условия (4) $u(x,y) \rightrightarrows 0$ при $y \to +\infty$ следует, что $U(w) \to 0$ при $w \to 0$. Это соответствует значению функции в центре полудиска.

- Из условий (2) $u(0,y)=0$ и $u(\pi,y)=0$ для $y>0$ следует, что $U(w)=0$ на отрезках $[0,1)$ и $(-1,0]$ вещественной оси соответственно. Включая точки $w=\pm1$ (которые соответствуют $(0,0)$ и $(\pi,0)$ в z-плоскости, где u также равна нулю), получаем, что $U(w)=0$ для всех $w\in[-1,1]$ на вещественной оси.

Таким образом, для функции $U(w)$ имеем:

$$\begin{cases} \Delta U(w)=0, & w\in\Omega_{int} \\ U(w)=0, & w\in(-1,1) \\ U(w)\to 0, & w\to 0 \end{cases}$$

Теперь выразим $u_y(x,y)$ через производные функции $U(\sigma,\tau)$. Из соотношений $\sigma=e^{-y}\cos x$ и $\tau=e^{-y}\sin x$:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y}=-e^{-y}\cos x=-\sigma$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial y}=-e^{-y}\sin x=-\tau$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции:

$$u_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}U(\sigma(x,y),\tau(x,y))=\frac{\partial U}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial y}$$

$$u_y(x,y)=\frac{\partial U}{\partial\sigma}(-\sigma)+\frac{\partial U}{\partial\tau}(-\tau)=-\left(\sigma\frac{\partial U}{\partial\sigma}+\tau\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)$$

Для исследования предела $u_y(x,y)$ при $y\to+\infty$, рассмотрим поведение производных $\frac{\partial U}{\partial\sigma}$ и $\frac{\partial U}{\partial\tau}$ при $w\to0$. Функция $U(w)$ гармонична в Ω_{int} и обращается в ноль на отрезке $(-1,1)$ вещественной оси. Мы можем использовать **принцип Шварца-отражения**. Определим функцию $U^*(w)$ в диске $B(0,1)=\{w:|w|<1\}$ следующим образом:

$$U^*(w)=\begin{cases} U(w), & \mathrm{Im}(w)\geq 0 \\ -U(\overline{w}), & \mathrm{Im}(w)<0 \end{cases}$$

Поскольку $U(w)$ непрерывна вплоть до границы $\mathrm{Im}(w)=0$ и $U(w)=0$ на этой части границы, функция $U^*(w)$ является гармонической во всём открытом диске $B(0,1)$. Гармонические функции бесконечно дифференцируемы в своей области определения. Поскольку $w=0$ является внутренней точкой диска $B(0,1)$, частные производные $\frac{\partial U^*}{\partial\sigma}$ и $\frac{\partial U^*}{\partial\tau}$ существуют, непрерывны и конечны в точке $w=0$. Следовательно, пределы:

$$\lim_{w\to0}\frac{\partial U}{\partial\sigma}=\frac{\partial U^*}{\partial\sigma}(0)\quad\text{и}\quad\lim_{w\to0}\frac{\partial U}{\partial\tau}=\frac{\partial U^*}{\partial\tau}(0)$$

существуют и конечны. Обозначим эти предельные значения $C_1=\frac{\partial U^*}{\partial\sigma}(0)$ и $C_2=\frac{\partial U^*}{\partial\tau}(0)$.

Теперь вернемся к выражению для $u_y(x,y)$:

$$u_y(x,y)=-\left(\sigma\frac{\partial U}{\partial\sigma}+\tau\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)=-\left(e^{-y}\cos x\frac{\partial U}{\partial\sigma}+e^{-y}\sin x\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)$$

$$u_y(x,y)=-e^{-y}\left(\cos x\frac{\partial U}{\partial\sigma}+\sin x\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)$$

Рассмотрим предел при $y \to +\infty$:

$$\lim_{y\to+\infty} u_y(x,y) = \lim_{y\to+\infty} \left[-e^{-y} \left(\cos x \frac{\partial U}{\partial \sigma}(w(x,y)) + \sin x \frac{\partial U}{\partial \tau}(w(x,y)) \right) \right]$$

При $y \to +\infty$, $w(x,y) \to 0$. Значения $\frac{\partial U}{\partial \sigma}(w)$ и $\frac{\partial U}{\partial \tau}(w)$ стремятся к конечным значениям C_1 и C_2 соответственно. Выражение в скобках $(\cos x \cdot C_1 + \sin x \cdot C_2)$ является конечным и ограниченным (поскольку $\cos x$ и $\sin x$ ограничены). Множитель e^{-y} экспоненциально стремится к нулю. Следовательно, произведение также стремится к нулю:

$$\lim_{y\to+\infty} u_y(x,y) = 0$$

. Лемма доказана.