

Об одной задаче для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями

Капустин Н.Ю., Васильченко Д.Д.

12 мая 2025 г.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

В полуполосе $D = \{(x, y) | 0 < x < \pi, 0 < y\}$

В классе функций $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$

с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} \int_0^\pi \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x) \right]^2 dx = 0, \quad \varphi(x) \in L_2[0, \pi] \quad (3)$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, y \rightarrow \infty \quad (4)$$

Аналогичная задача рассматривалась как вспомогательная с граничными условиями второго рода на боковых сторонах полуполосы и коэффициентом $\frac{1}{k}$ при $\frac{\partial u}{\partial y}$ в работе [1].

Теорема 1. *Решение задачи (1 - 4) существует, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right], \quad (5)$$

где коэффициенты A_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ находятся из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

Доказательство. Докажем существование решения задачи (1) – (4). В силу основного результата работы [2] система $\{\sin[(n + \beta/2)x + \gamma/2]\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(0, \pi)$, если $-\frac{1}{2} < \gamma/\pi < \frac{3}{2}$ и $-\frac{3}{2} < \gamma/\pi + \beta < \frac{1}{2}$. В нашем случае $\{\sin[(n + \frac{1}{2})x + \frac{\pi}{4}]\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(0, \pi)$ т.к. $\gamma = \pi/2$, $\beta = -1$. Поэтому коэффициенты разложения в формуле (6) удовлетворяют неравенствам Бесселя

$$C_1 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \leq C_2 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)}, \quad 0 < C_1 < C_2,$$

а значит сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|$ и сходится равномерно ряд (5). То, что функция (5) при $y > 0$ - решение

уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) - это очевидно. В силу равенства $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})y} = \frac{e^{-y/2}}{1 - e^{-y}}$,

также очевидно, что выполнено условие (4). Проверим выполнение условия (3).

Выразим функцию $\varphi(x)$ из представления (6) и подставим в условие (3)

$$I(y) = 2 \int_0^\pi \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx$$

Докажем, что $I(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0 + 0$.

$$\begin{aligned} I(y) &\leq 4 \int_0^\pi \left[\sum_{n=0}^m A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx + \\ &+ 4 \int_0^\pi \left[\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx \end{aligned}$$

В силу левой части неравенства Бесселя имеем оценку

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \left[\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx \leq \\ &\leq C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \left(e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right)^2 \leq C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Это верно $\forall \varepsilon > 0$, если $m \geq N = N(\varepsilon)$

Во втором слагаемом мы имеем дело с конечным числом элементов, поэтому:

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \left[\sum_{n=0}^m A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx \leq \\ &\leq C_4 \sum_{n=0}^m A_n^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \left(e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Это верно, если $0 < y < \delta$ (m зафиксировано в зависимости от N). Условие (3) выполнено. Теорема доказана. \square

Теорема 2. *Решение задачи (1- 4) единственно*

Доказательство. Докажем единственность решения этой задачи. Пусть $u(x, y)$ - разность двух решений - решение задачи с $\varphi(x) \equiv 0$. Необходимо получить выражение, где слева будет входить модуль или чётная степень функции u , а справа будет 0.

Введём обозначения $A_\varepsilon = (0, \varepsilon)$, $A_R = (0, R)$, $B_R = (\pi, R)$, $B_\varepsilon = (\pi, \varepsilon)$. $D_{R\varepsilon}$ - прямоугольник $A_\varepsilon A_R B_R B_\varepsilon$.

Справедливы следующие соотношения:

$$0 = \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y)(u_{xx} + u_{yy}) dx dy = I$$

Заметим, что $(R - y)(u_{xx} + u_{yy})u = ((R - y)u_x u)_x + ((R - y)u_y u)_y - (R - y)(u_x^2 + u_y^2) + u_y u =$
 $(R - y)(u_{xx} u + u_x^2) + (-u_y + (R - y)u_{yy})u + (R - y)u_y^2 - (R - y)(u_x^2 + u_y^2) + u_y u$

Подставим это выражение в интеграл

$$I = \iint_{D_{R\varepsilon}} ((R-y) u_x u)_x dx dy + \iint_{D_{R\varepsilon}} ((R-y) u_y u)_y dx dy - \iint_{D_{R\varepsilon}} (R-y) (u_x^2 + u_y^2) + \iint_{D_{R\varepsilon}} u_y u dx dy =$$

Упростим теперь эти интегралы:

$$\begin{aligned} \iint_{D_{R\varepsilon}} ((R-y) u_x u)_x dx dy &= \int_{[\varepsilon, R]} [(R-y) u_x u] \Big|_0^\pi dy = \\ &= \int_{[\varepsilon, R]} [(R-y) u_x(\pi, y) u(\pi, y) - (R-y) u_x(0, y) u(0, y)] dy = 0 \text{ т.к. оба подынтегральных выражения равны} \end{aligned}$$

нулю в силу условия (2), поэтому

$$\begin{aligned} \iint_{D_{R\varepsilon}} ((R-y) u_y u)_y dx dy &= \int_{[0, \pi]} [(R-y) u_y u]_\varepsilon^R dx = \int_{[0, \pi]} [0 - (R-\varepsilon) u_y(x, \varepsilon) u(x, \varepsilon)] dx = \\ &= - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon) u_y u dx \end{aligned}$$

$$\iint_{D_{R\varepsilon}} u_y u dx dy = \iint_{D_{R\varepsilon}} \left(\frac{u^2}{2} \right)'_y dx dy = \int_{[0, \pi]} \left[\frac{u^2(x, R)}{2} - \frac{u^2(x, \varepsilon)}{2} \right] dx$$

В итоге получим

$$= - \iint_{D_{R\varepsilon}} (R-y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon) u_y u dx - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \int_{A_R B_R} \frac{u^2}{2} dx =$$

Добавим и вычтем $\int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon) u_x u dx$, тогда

$$\begin{aligned} &= - \iint_{D_{R\varepsilon}} (R-y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon) (u_y - u_x) u dx - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon) u_x u dx - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \\ &\quad + \int_{A_R B_R} \frac{u^2}{2} dx \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} &\iint_{D_{R\varepsilon}} (R-y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{2} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx + \frac{R-\varepsilon}{2} u^2(\pi, \varepsilon) = \\ &= \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon) (u_x - u_y) u dx + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx \leq \{ \text{Неравенство Коши-Буняковского} \} \\ &\leq (R-\varepsilon) \left[\int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx = I \end{aligned}$$

Рассмотрим следующее неравенство: $(2ar - b)^2 \geq 0 \Rightarrow 4a^2r^2 - 4abr + b^2 \geq 0 \Rightarrow ab \leq ra^2 + \frac{b}{4r}$

Возьмём $a = \left[(R-\varepsilon) \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$, $b = \left[(R-\varepsilon) \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$, $r = R-\varepsilon$, тогда

$$I \leq (R-\varepsilon)^2 \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx + \frac{1}{4} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx,$$

$$\iint_{D_{R\varepsilon}} (R-y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx + \frac{R-\varepsilon}{2} u^2(\pi, \varepsilon) \leq$$

$$\leq (R-\varepsilon)^2 \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx$$

Устремим $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$, тогда в силу условия (3)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx = 0$$

и получим соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_0^\pi u^2(x, 0) dx + \frac{R}{2} u^2(\pi, 0) \leq \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx$$

Устремим теперь $R \rightarrow \infty$, тогда в силу условия (4) $\int_{A_R B_R} u^2 dx \rightarrow 0$, тем самым, это возможно только в случае $u(x, y) \equiv 0$ в \bar{D} . \square

Теорема 3. Пусть $u(x, y)$ - решение задачи (1) – (4), тогда u_x, u_y представимы в виде

$$u_y(x, y) = -Im \frac{\sqrt{1 - e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{+iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt \quad (7)$$

$$u_x(x, y) = Re \frac{\sqrt{1 - e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{+iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt \quad (8)$$

Доказательство. :

Рассмотрим уравнение (6). Система синусов $\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right]$ образует базис в $L_2(0, \pi)$. Поэтому для коэффициентов $A_n \left(n + \frac{1}{2} \right)$ справедливо следующее представление:

$$A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) = \int_0^\pi h_{n+1}(t) \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt,$$

где

$$h_n(t) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^n \sin kt B_{n-k}$$

Пусть $u(x, y)$ - решение задачи (1)-(4), тогда

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^\infty A_n e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)y} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]$$

и соответственно

$$u_y(x, y) = - \sum_{n=0}^\infty A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)y} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]$$

Здесь как раз возникает нужный нам коэффициент $A_n \left(n + \frac{1}{2} \right)$, поэтому

$$u_y(x, y) = - \sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)y} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] dt$$

$$\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] = Im \ e^{i \left(n + \frac{1}{2} \right) x}, \text{ ПОЭТОМУ}$$

$$u_y(x, y) = -Im \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right) y} e^{i \left(n + \frac{1}{2} \right) x} dt$$

Обозначим $z = x + iy$

$$u_y(x, y) = -Im \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{i \left(n + \frac{1}{2} \right) z} dt$$

Для дальнейших операций нам было бы удобно, чтобы суммирование начиналось от 1, а не 0, поэтому сделаем замену $m = n + 1$

$$u_y(x, y) = -Im \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{i \left(m - \frac{1}{2} \right) z} dt$$

$$u_y(x, y) = -Im \ e^{-\frac{iz}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{imz} dt$$

Поменяем местами знаки интегрирования и суммирования

$$u_y(x, y) = -Im \ e^{-\frac{iz}{2}} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz} dt$$

Введём новое обозначение:

$$I(t, z) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz}$$

$$I(t, z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sin kt B_{n-k} e^{inz} = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{n=k}^{\infty} e^{inz} B_{n-k}$$

Введём новый индекс $m = n - k$

$$I(t, z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} B_m = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} B_m$$

Первый ряд можем вычислить по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \frac{1}{2i} (e^{ikt} - e^{-ikt}) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - e^{i(z+t)}} - \frac{1}{1 - e^{i(z-t)}} \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \frac{e^{i(z+t)} - e^{i(z-t)}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} = \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \end{aligned}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} B_l = \sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} \sum_{m=0}^l C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^{l-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} e^{ilz} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^{l-m} =$$

Введём новый индекс суммирования $k = l - m$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} C_{\gamma/\pi}^k C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^k = \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m \sum_{k=0}^{\infty} C_{\gamma/\pi}^k (-1)^k e^{ikz} = (1 + e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta} (1 - e^{iz})^{\gamma/\pi}$$

В нашем случае $\beta = -1, \gamma = \pi/2$, поэтому

$$= (1 + e^{iz})^{1/2} (1 - e^{iz})^{1/2} = \sqrt{1 - e^{i2z}}$$

Собираем все решение:

$$u_y(x, y) = -Im \, e^{\frac{-iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} I(t, z) dt$$

$$u_y(x, y) = -Im \, e^{\frac{-iz}{2}} \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)}) (1 - e^{i(z-t)})} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

Подставляя β и γ получим

$$u_y(x, y) = -Im \, \frac{2}{\pi} e^{\frac{-iz}{2}} \int_0^\pi \frac{1}{2 \cos t/2 \sqrt{\tan t/2}} \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)}) (1 - e^{i(z-t)})} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

$$u_y(x, y) = -Im \, \frac{e^{\frac{+iz}{2}}}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t} \sqrt{1 - e^{i2z}}}{(1 - e^{i(z+t)}) (1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt$$

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Моисеев Т.Е. Вафадорова Г.О.* Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения, **2015** Т. 51. №8. С.1070-1075
- [2] *Моисеев Е.И.* О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения, **1987** Т. 23. №1. С.177-189