Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с полуполосой в эллиптической части

Капустин Н.Ю., Васильченко Д.Д.

10 октября 2024 г.

1 Постановка задачи

Рассматривается задача Трикоми для уравнения Лавертьева-Бицадзе

$$(sgn(y))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \tag{1}$$

в области $D = D^+ \cup D^-$, где $D^+ = \{(x,y): \ 0 < x < \pi, \ 0 < y < +\infty\}$, $D^- = \{(x,y): \ -y < x < y+\pi, \ -\pi/2 < y < 0\}$ в классе функций $u(x,y) \in C^2(D^+) \cap C^2(D^-) \cap C(\overline{D^+ \cup D^-})$ с граничными условиями

$$u(0,y) = 0, \ u(\pi,y) = 0, \ 0 < y < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,-x) = f(x), \ 0 \le x \le \pi/2, \ f(0) = 0, \tag{3}$$

$$u(x,y) \rightrightarrows 0, \ y \to +\infty \tag{4}$$

и условием склеивания Франкля

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,-0), \ 0 < x < \pi, \tag{5}$$

где $k \in (-\infty, +\infty), k \neq 0$.

Используя формулу для общего решения в области D^- получим в области D^+ вспомогательную задачу для оператора Лапласа с граничными условиями (2), (4) и условием

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \tag{6}$$

Теорема 1. *Решение задачи (1) - (5) единственно.*

Теорема 2. *Пусть $|k| < 1, \ k \neq 0, \ f(x) \in C[0,\pi/2] \cap C^2(0,\pi/2), \ f'(x) \in L_2(0,\pi/2)$. Тогда решение задачи (8)-(11) существует, единственно и представимо в виде ряда*

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-ny} \sin nx,$$

где коэффициенты A_n определяется из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin\left[nx + \operatorname{arctg} k\right] = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} f'\left(\frac{x}{2}\right) \tag{1}$$

2 Основные результаты

Теорема 1. *Решение задачи (1) - (5) единственно.*

Доказательство. Пусть существуют два решения $u_1(x,y), u_2(x,y)$ задачи (1)-(5). Тогда $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ есть решение задачи (1)-(5) с функцией $f(x) \equiv 0$. В этом случае $u(x,y) = F(x+y) - F(0)$.

Отсюда следует, что равенство $\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ выполняется для всех точек x и y из области гиперболичности. Используя условие склеивания (5) будем иметь

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}|_{y=0+0} = 0. \tag{2}$$

В результате получаем задачу для нахождения гармонической функции $u(x,y)$ в области D^+ с граничными условиями (2),(4),(6).

В силу принципа Зарембы-Жиро и равенства (6) экстремум не может достигаться на интервале $\{(x,y):\ 0 < x < \pi,\ y = 0\}$. На замкнутых боковых сторонах и на бесконечности экстремум не может достигаться в силу условий (2) и (4). Теорема доказана.

Известно, что общее решение в D^- уравнения (1) имеет вид

$$u(x,y) = F(x+y) + f(\frac{x-y}{2}) - F(0). \tag{3}$$

Продифференцируем равенство (7):

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)|_{y=0+0} = -f'\left(\frac{x}{2}\right),\ 0 < x < \pi.$$

Используя условие склеивания (5), приходим к равенству

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right),\ 0 < x < \pi.$$

Тогда получим в области D^+ вспомогательную задачу для оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \tag{4}$$

с граничными условиями

$$u(0,y) = 0,\ u(\pi,y) = 0,\ 0 < y < +\infty, \tag{5}$$

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \tag{6}$$

$$u(x,y) \rightrightarrows 0,\ y \to +\infty \tag{7}$$

Теорема 2. *Пусть $|k| < 1,\ k \neq 0,\ f(x) \in C[0,\pi/2] \cap C^2(0,\pi/2),\ f'(x) \in L_2(0,\pi/2)$. Тогда решение задачи (8)-(11) существует и представимо в виде ряда*

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-ny} \sin nx,$$

причем условие (10) понимается в интегральном смысле

$$\int_0^{\pi} \left[\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + f'\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 dx \to 0,\ y \to 0+0,$$

а коэффициенты A_n определяется из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin\left[nx + \operatorname{arctg} k\right] = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} f'\left(\frac{x}{2}\right) \tag{8}$$

Доказательство.

Система $\{\sin[nx + \operatorname{arctg} k]\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$ при $k \in (-\infty, 1)$ в силу основного результата работы [2]. Поэтому справедливо двустороннее неравенство Бесселя

$$C_1 \|f'\|_{L_2(0,\pi)} \le \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2 \le C_2 \|f'\|_{L_2(0,\pi)},\ 0 < C_1 < C_2,$$

где константы C_1, C_2 не зависят от f'. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |A_n|$ сходится и сходится равномерно ряд (12). Функция (12) удовлетворяет уравнению (8) с граничными условиями (9) по построению. Условие (11) выполняется так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-ny} = \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}} = \frac{1}{e^{y}-1}$. Проверим выполнение условия (10). Пусть

$$M(x) = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + f'\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
M(x) &= -\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} nA_n e^{-ny}\sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} nA_n e^{-ny}\cos nx + f'\left(\frac{x}{2}\right) = \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} nA_n e^{-ny}\left[\frac{1}{k}\sin nx + \cos nx\right] + f'\left(\frac{x}{2}\right) = \\
&= -\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\sum_{n=1}^{\infty} nA_n e^{-ny}\left[\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\sin nx + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\cos nx\right] + f'\left(\frac{x}{2}\right) = \\
&= -\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\sum_{n=1}^{\infty} nA_n e^{-ny}\sin[nx + \operatorname{arctg} k] + f'\left(\frac{x}{2}\right) = \\
&= \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\sum_{n=1}^{\infty} nA_n\left(1 - e^{-ny}\right)\sin[nx + \operatorname{arctg} k].
\end{aligned}$$

Покажем, что $\lim\limits_{y\to 0+0} I(y) = 0$.

$$I(y) = \int_0^{\pi} M(x)^2 dx \le I_1(y) + I_2(y),$$

$$I_1(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k}\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{m} nA_n \sin[nx + \operatorname{arctg} k]\left(1 - e^{-ny}\right)\right]^2 dx$$

$$I_2(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k}\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=m+1}^{+\infty} nA_n \sin[nx + \operatorname{arctg} k]\left(1 - e^{-ny}\right)\right]^2 dx$$

Зафиксируем произвольное положительное ε, тогда

$$I_2(y) \le C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} n^2 A_n^2 (1 - e^{-ny})^2 \le C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} n^2 A_n^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это верно, если m достаточно велико, т.к. ряд сходящийся.

$$I_1(y) \le C_4 \sum_{n=1}^{m} n^2 A_n^2 (1 - e^{-ny})^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Это верно при $0 < y < \delta$, если δ достаточно мало. Теорема доказана.