Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с полуполосой в эллиптической части

Капустин Н.Ю., Васильченко Д.Д.

1 Постановка задачи

Рассматривается задача Трикоми для уравнения Лавертьева-Бицадзе

$$(sgn(y))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0 \tag{1}$$

в области $D=D^+\cup D^-$, где $D^+=\{(x,y):\ 0<x<\pi,\ 0<y<+\infty\}$, $D^-=\{(x,y):\ -y<x<y+\pi,\ -\pi/2<y<0\}$ в классе функций $u(x,y)\in C^2(D^+)\cap C^2(D^-)\cap C(\overline{D^+\cup D^-})$ с граничными условиями

$$u(0,y)=0,\ u(\pi,y)=0,\ 0<y<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,-x)=f(x),\ 0\le x\le \pi/2,\ f(0)=0, \tag{3}$$

$$u(x,y)\rightrightarrows 0,\ y\to+\infty \tag{4}$$

и условием склеивания Франкля

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,-0),\ 0<x<\pi, \tag{5}$$

где $k\in(-\infty,+\infty), k\neq 0$.

2 Основные результаты

Теорема 1. *Решение задачи (1) - (5) единственно.*

Доказательство. Пусть существуют два решения $u_1(x,y),u_2(x,y)$ задачи (1)-(5). Тогда $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ есть решение задачи (1)-(5) с функцией $f(x)\equiv 0$. В этом случае $u(x,y)=F(x+y)-F(0)$.

Отсюда следует, что равенство $\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}=0$ выполняется для всех точек x и y из области гиперболичности. Используя условие склеивания (5) будем иметь

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}|_{y=0+0}=0. \tag{6}$$

В результате получаем задачу для нахождения гармонической функции $u(x,y)$ в области D^+ с граничными условиями (2),(4),(6).

В силу принципа Зарембы-Жиро и равенства (6) экстремум не может достигаться на интервале $\{(x,y):\ 0<x<\pi,\ y=0\}$. На замкнутых боковых сторонах и на бесконечности экстремум не может достигаться в силу условий (2) и (4). Теорема доказана.

Известно, что общее решение в D^- уравнения (1) имеет вид

$$u(x,y)=F(x+y)+f(\frac{x-y}{2})-F(0). \tag{7}$$

Продифференцируем равенство (7):

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)|_{y=0+0} = -f'\left(\frac{x}{2}\right),\ 0 < x < \pi.$$

Используя условие склеивания (5), приходим к равенству

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right),\ 0 < x < \pi.$$

Тогда получим в области D^+ вспомогательную задачу для оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \tag{8}$$

с граничными условиями

$$u(0,y) = 0,\ u(\pi,y) = 0,\ 0 < y < +\infty, \tag{9}$$

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \tag{10}$$

$$u(x,y) \rightrightarrows 0,\ y \to +\infty \tag{11}$$

Теорема 2. *Пусть $|k| < 1,\ k \neq 0,\ f(x) \in C[0,\pi/2] \cap C^2(0,\pi/2),\ f'(x) \in L_2(0,\pi/2)$. Тогда решение задачи (8)-(11) существует и представимо в виде ряда*

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-ny} \sin nx, \tag{12}$$

причем условие (10) понимается в интегральном смысле

$$\int\limits_0^{\pi} \left[\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + f'\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 dx \to 0,\ y \to 0+0,$$

а коэффициенты A_n определяется из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin\left[nx + \operatorname{arctg} k\right] = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} f'\left(\frac{x}{2}\right) \tag{13}$$

Доказательство.

Система $\{\sin\left[nx + \operatorname{arctg} k\right]\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$ при $k \in (-\infty, 1)$ в силу основного результата работы [2]. Поэтому справедливо двустороннее неравенство Бесселя

$$C_1 \|f'\|_{L_2(0,\pi)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2 \leq C_2 \|f'\|_{L_2(0,\pi)},\ 0 < C_1 < C_2,$$

где константы C_1, C_2 не зависят от f'. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |A_n|$ сходится и сходится равномерно ряд (12). Функция (12) удовлетворяет уравнению (8) с граничными условиями (9) по построению. Условие (11) выполняется так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-ny} = \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}} = \frac{1}{e^y - 1}$. Проверим выполнение условия (10). Пусть

$$M(x) = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + f'\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$M(x) = -\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty} nA_n e^{-ny} \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} nA_n e^{-ny} \cos nx + f'\left(\frac{x}{2}\right) =$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty} nA_n e^{-ny}\left[\frac{1}{k}\sin nx + \cos nx\right] + f'\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$= -\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}\sum\limits_{n=1}^{\infty} nA_n e^{-ny}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}\sin nx + \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}\cos nx\right] + f'\left(\dfrac{x}{2}\right) =$
$= -\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}\sum\limits_{n=1}^{\infty} nA_n e^{-ny}\sin\left[nx + \operatorname{arctg} k\right] + f'\left(\dfrac{x}{2}\right) =$
$= \dfrac{\sqrt{1+k^2}}{k}\sum\limits_{n=1}^{\infty} nA_n\left(1-e^{-ny}\right)\sin\left[nx + \operatorname{arctg} k\right].$

Покажем, что $\lim\limits_{y\to 0+0} I(y) = 0.$

$$I(y) = \int\limits_0^{\pi} M(x)^2 dx \le I_1(y) + I_2(y),$$

$$I_1(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k}\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=1}^{m} nA_n \sin\left[nx + \operatorname{arctg} k\right]\left(1-e^{-ny}\right)\right]^2 dx$$

$$I_2(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k}\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=m+1}^{+\infty} nA_n \sin\left[nx + \operatorname{arctg} k\right]\left(1-e^{-ny}\right)\right]^2 dx$$

Зафиксируем произвольное положительное ε, тогда

$$I_2(y) \le C_3\sum_{n=m+1}^{\infty} n^2A_n^2(1-e^{-ny})^2 \le C_3\sum_{n=m+1}^{\infty} n^2A_n^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это верно, если m достаточно велико, т.к. ряд сходящийся.

$$I_1(y) \le C_4\sum_{n=1}^{m} n^2A_n^2(1-e^{-ny})^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Это верно при $0 < y < \delta$, если δ достаточно мало. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $k > 0$, тогда решение задачи (8) - (11) единственно*

Доказательство. Докажем единственность решения этой задачи. Пусть $u(x,y)$ - решение однородной задачи. Введём обозначения $C_\varepsilon = (0,\varepsilon), C_R = (0,R), D_R = (\pi,R), D_\varepsilon = (\pi,\varepsilon)$. $\prod_{R\varepsilon}$ - прямоугольник $C_\varepsilon C_R D_R D_\varepsilon$. Справедливы следующие соотношения:

$$0 = \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)(u_{xx}+u_{yy})dxdy.$$

Заметим, что

$$(R-y)(u_{xx}+u_{yy})u = \left((R-y)\,u_xu\right)_x + \left((R-y)\,u_yu\right)_y - (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) + u_yu =$$

$$= (R-y)\left(u_{xx}u + u_x^2\right) + \left(-u_y + (R-y)\,u_{yy}u + (R-y)\,u_y^2\right) - (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) + u_yu$$

Подставим это выражение в интеграл:

$$I = \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} \left((R-y)\,u_xu\right)_x dxdy + \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} \left((R-y)\,u_yu\right)_y dxdy - \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) + \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} u_yu dxdy.$$

Упростим эти интегралы:

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} \left((R-y)\,u_xu\right)_x dxdy = \int\limits_{[\varepsilon,R]} \left[(R-y)u_xu\right]|_0^{\pi} dy = \int\limits_{[\varepsilon,R]} \left[(R-y)u_x(\pi,y)u(\pi,y) - (R-y)u_x(0,y)u(0,y)\right] dy = 0$$

т.к. оба подынтегральных выражения равны нулю в силу условия (9)

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} \left((R-y)\,u_y u\right)_y dxdy = \int\limits_{[0,\pi]} \left[(R-y)\,u_y u\right]|_{\varepsilon}^{R} dx = \int\limits_{[0,\pi]} \left[0-(R-\varepsilon)\,u_y(x,\varepsilon)u(x,\varepsilon)\right] dx = -\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)\,u_y u dx$$

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} u_y u dxdy = \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} \left(\frac{u^2}{2}\right)'_y dxdy = \int\limits_{[0,\pi]} \left[\frac{u^2(x,R)}{2} - \frac{u^2(x,\varepsilon)}{2}\right] dx$$

В итоге получим

$$I = -\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) dxdy - \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)\,u_y u dx - \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \int\limits_{C_R D_R} \frac{u^2}{2} dx$$

Добавим и вычтем $\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} k\,(R-\varepsilon)\,u_x u dx$, тогда

$$I = -\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) dxdy - \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)\,(u_y-ku_x)\,u dx - \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)\,k u_x u dx - \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \int\limits_{C_R D_R} \frac{u^2}{2} dx.$$

Отсюда следует

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) dxdy + \frac{1}{2}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx + k\frac{R-\varepsilon}{2}u^2(\pi,\varepsilon) = \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)\,(u_y-ku_x)\,u dx + \frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx \le$$

$$\le \{\text{Неравенство Коши-Буняковского}\} \le (R-\varepsilon)\left[\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y-ku_x)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx = M$$

Рассмотрим следующее неравенство: $(2ar-b)^2 \ge 0 \Rightarrow ra^2r^2 - 4abr + b^2 \ge 0 \Rightarrow ab \le ra^2 + b/(4r)$. Возьмем $a = \left[(R-\varepsilon)\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y-ku_x)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$, $b = \left[(R-\varepsilon)\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$, $r = R-\varepsilon$, тогда

$$M \le (R-\varepsilon)^2 \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y-ku_x)^2 dx + \frac{1}{4}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx.$$

Перегруппируем

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) dxdy + \frac{1}{4}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx + k\frac{R-\varepsilon}{2}u^2(\pi,\varepsilon) \le (R-\varepsilon)^2 \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y-ku_x)^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx.$$

В силу (10) имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y-ku_x)^2 dx = 0,$$

откуда вытекает соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) dxdy + \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi u^2(x,0)dx + k\frac{R}{2}u^2(\pi,0) \le \frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx.$$

Устремим теперь $R \to \infty$, тогда $\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx \to 0$, а в левой части все слагаемы неотрицательны,п отсюда $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $|k| < 1$, $k \neq 0$ и $u(x,y)$ - решение задачи (8) - (11), тогда u_x, u_y представимы в виде*

$$u_y(x,y) = -\frac{2k}{\pi\sqrt{1+k^2}}\mathrm{Im}\ \left(\frac{1-e^{iz}}{1+e^{iz}}\right)^{\gamma/\pi} e^{iz}\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{(\mathrm{tg}\, t/2)^{\gamma/\pi}}\frac{\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}f'(\frac{t}{2})dt,$$

$$u_x(x,y) = \frac{2k}{\pi\sqrt{1+k^2}}\mathrm{Re}\ \left(\frac{1-e^{iz}}{1+e^{iz}}\right)^{\gamma/\pi} e^{iz}\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{(\mathrm{tg}\, t/2)^{\gamma/\pi}}\frac{\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}f'(\frac{t}{2})dt,$$

где $\gamma = 2\,\mathrm{arctg}\, k$, $z = x + iy$.

Доказательство. Рассмотрим равенство (12). Система синусов $\{\sin[nx + \mathrm{arctg}\, k]\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в $L_2(0,\pi)$ при $k \in (-\infty, 1)$. Поэтому для коэффициентов nA_n справедливо следующее представление [2]:

$$nA_n = \int\limits_0^{\pi} h_n(t)F(t)dt,$$

где

$$F(x) = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}f'(\frac{x}{2})\,, h_n(t) = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\mathrm{tg}\, t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{n}\sin kt B_{n-k},\ B_l = \sum_{m=0}^{l} C_{\gamma/\pi}^{l-m}C_{-\gamma/\pi-l}^{m}(-1)^{l-m},\ C_l^n = \frac{l(l-1)\dots(l-n+1)}{n!}.$$

Пусть $u(x,y)$ - решение задачи $(8)-(11)$, тогда

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-ny}\sin[nx]$$

и соотвественно

$$u_y(x,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} nA_n e^{-ny}\sin[nx] =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi} F(t)h_n(t)e^{-ny}\sin[nx]dt,$$

или

$$u_y(x,y) = -Im\ \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi} F(t)h_n(t)e^{-ny}e^{inx}dt =$$

$$= -Im\ \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi} F(t)h_n(t)e^{inz}dt$$

Поменяем местами знаки интергирования и суммирования

$$u_y(x,y) = -\mathrm{Im}\int\limits_0^{\pi} F(t)\sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)e^{inz}dt.$$

Введём новое обозначение:

$$I(t,z) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)e^{inz}$$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\mathrm{tg}\, t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin kt B_{n-k}e^{inz} = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\mathrm{tg}\, t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\sin kt\sum_{n=k}^{\infty}e^{inz}B_{n-k}$$

и новый индекс $m=n-k$

$$I(t,z)=\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\sin kt\sum_{m=0}^{\infty}e^{i(m+k)z}B_m=\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}e^{ikz}\sin kt\sum_{m=0}^{\infty}e^{imz}B_m,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}e^{ikz}\sin kt=\frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^{\infty}e^{ilz}B_l=\sum_{l=0}^{\infty}e^{ilz}\sum_{m=0}^{l}C_{\gamma/\pi}^{l-m}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}(-1)^{l-m}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}e^{ilz}C_{\gamma/\pi}^{l-m}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}(-1)^{l-m}=|k=l-m|=$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}e^{i(m+k)z}C_{\gamma/\pi}^{k}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}(-1)^{k}=\sum_{m=0}^{\infty}e^{imz}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}\sum_{k=0}^{\infty}C_{\gamma/\pi}^{k}(-1)^{k}e^{ikz}=(1+e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta}(1-e^{iz})^{\gamma/\pi}$$

так как в нашем случае $\beta=0,\ \gamma=2\operatorname{arctg}k$. Окончательно получаем формулу

$$u_y(x,y)=-\operatorname{Im}\int_0^{\pi}F(t)I(t,z)dt=$$

$$=-\operatorname{Im}\int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}}\frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}(1+e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta}(1-e^{iz})^{\gamma/\pi}F(t)dt=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\left(\frac{1-e^{iz}}{1+e^{iz}}\right)^{\gamma/\pi}e^{iz}\int_0^{\pi}\frac{1}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}}\frac{\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}F(t)dt=$$

$$=-\frac{2k}{\pi\sqrt{1+k^2}}\operatorname{Im}\left(\frac{1-e^{iz}}{1+e^{iz}}\right)^{\gamma/\pi}e^{iz}\int_0^{\pi}\frac{1}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}}\frac{\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}f'(\frac{t}{2})dt$$

т.е. представление:

$$u_y(x,y)=-\frac{2k}{\pi\sqrt{1+k^2}}\operatorname{Im}\left(\frac{1-e^{iz}}{1+e^{iz}}\right)^{\gamma/\pi}e^{iz}\int_0^{\pi}\frac{1}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}}\frac{\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}f'(\frac{t}{2})dt.$$

Рассуждая аналогично, получим представление

$$u_x(x,y)=\frac{2k}{\pi\sqrt{1+k^2}}\operatorname{Re}\left(\frac{1-e^{iz}}{1+e^{iz}}\right)^{\gamma/\pi}e^{iz}\int_0^{\pi}\frac{1}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}}\frac{\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}f'(\frac{t}{2})dt.$$

Теорема доказана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеев, Е.И. Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе/ Моисеев, Е.И., Моисеев Т.Е., Вафадорова Г.О. // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8 —. С. 1070–1075.

2. Моисеев, Е.И. О базисности одной системы синусов / Е.И. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 1 — С. 177–189.