ЦФиРЭ

Васильченко Д.Д.

1 Порядок и тип целой функции. Примеры.

Теорема 1. *(Неравенство Коши)*
$|a_k| \leq \dfrac{M(r)}{r^k}$

Теорема 2. *(Лиувилля)*
Пусть $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ *и* $M(r) \leq Ar^q$, *тогда* $f(z)$ *- многочлен.*

Определение 1. $f(z) \in A(\mathbb{C})$. $f(z)$ *- целая функция конечного порядка, если* $\exists \mu > 0 : \ \forall r > R \ M(r) < \exp r^{\mu}$. *Точняя нижняя грань множества* $\{\mu\}$ *называется порядком целой функции*

Определение 2. *Пусть* $f(z)$ *- целая функция конечного порядка* ρ. *Говорят, что* $f(z)$ *имеет конечный тип при порядке* ρ, *если* $\exists a > 0 : \ M(r) < \exp ar^{\rho}, \ r > R$. *Нижняя грань* σ *множества* $\{a\}$ *называется типом функции* $f(z)$ *при порядке* ρ.

2 Связь порядка и типа целой функции с коэффициентами ряда Тейлора.

Лемма 1. *Пусть* $M(r) < \exp ar^{\mu}, \ r > r_0 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < \left(\dfrac{a\mu e}{n}\right)^{1/\mu}, \ n > n_0$.

В некотором смысле обратное утверждение

Лемма 2. *Пусть* $\sqrt[n]{|a_n|} < \left(\dfrac{a\mu e}{n}\right)^{1/\mu}, \ n > n_0 \Rightarrow M(r) < \exp\left[(a+\varepsilon)r^{\mu}\right], \ r > r_0(\varepsilon), \forall \varepsilon > 0$.

Теорема 3. *Порядок* ρ *функции* $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *вычислятеся по формуле*

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n \ln n}{\ln |\dfrac{1}{a_n}|}.$$

Если функция $f(z)$ *имеет порядок* $0 < \rho < \infty$, *то её тип вычисляется по формуле*

$$(\sigma e \rho)^{1/\rho} = \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Теорема 4. *У функции* $f(z)$ *и её производной порядки и типы одинаковы*

3 Показатель сходимости последовательности нулей и порядок целой функции. Теоремы един ственности.

Теорема 5. *Пусть* $F(z) \in A(\{|z| \leq R\})$ *и имеет (по меньшей мере)* n *нулей* $a_1, \ldots, a_n$ *в открытом круге* $\{|z| < R\}$. *Тогда, если* $F(0) \neq 0$, $\dfrac{R^n}{|a_1 * \cdots * a_n|} \leq \dfrac{M(R)}{|F(0)|}$.*(нули могут быть кратными, тогда* $a_1 = a_2 = \ldots$*)*

Определение 3. *Пусть* $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ *- последовательность чисел* $|\lambda_n| \uparrow \infty,\ \lambda_1 \neq 0$. *Допустим, что* $\exists \alpha > 0$ *- конечное:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{|\lambda_n|^{\alpha}} < +\infty$. *Точная нижняя грань* τ *множества* $\{\alpha\}$ *называется показателем сходимости последовательности* $\{\lambda_n\}$.

Теорема 6. *Пусть* $f(z)$ *- целая функция конечного порядка и у неё имеется бесконечно много нулей* $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots,\ |\lambda_n| \uparrow \infty,\ \lambda_1 \neq 0$. *Тогда показатель* τ *последовательности* $\{\lambda_n\}$ *не превосходит* ρ.

Теорема 7. *Пусть* $f(z) \in A(\mathbb{C})$ *и* $\rho(f) = \rho$, $\sigma(f) = \sigma$, $0 < \rho < \infty$, $\sigma < \infty$ *и у неё бесконечно много нулей* $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots,\ \lambda_1 \neq 0$. *Тогда*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^{\rho}} \leq \sigma e \rho$$

Теорема 8. *Пусть* $F(z) \neq 0$ *регулярна в круге* $\{|z| < 1\}$ *и ограничена по модулю в этом круге. Если у* $F(z)$ *имеется бесконечно много нулей* $a_1, \dots, a_n, \dots,\ 0 < |a_n| \uparrow R$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty.$$

Теоремы единственности

Теорема 9. *Пусть* $f(z) \in A(\mathbb{C})$ *имеет порядок не больший* ρ. *Если* $f(z)$ *обращается в 0 в точках* $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ *причём показатель сходимости* τ *последовательности* $\{\lambda_n\}$ *больше* ρ, *то* $f(z) \equiv 0$.

Теорема 10. *Пусть* $f(z) \in A(\mathbb{C})$, $|\lambda_k| \uparrow +\infty$ *- её нули,* $\rho(f) \leq \rho$, *а при порядке* ρ $\sigma(f)$ *не выше* σ *причем* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{n}{|\lambda_n|^{\rho}} > \sigma e \rho$. *Тогда* $f(z) \equiv 0$.

Теорема 11. *Пусть* $F(z) \in C(\{|z| < 1\})$ *и там по модулю ограничена. Если* $F(z)$ *обращается в 0 в точках* $a_1, a_2, \dots,\ |a_n| \uparrow 1$, *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) = \infty$, *то* $F(z) \equiv 0$.

4 Разложение целой функции конечного порядка в бесконечное произведение.

Введём функцию

$$E(u,k) = \begin{cases} 1 - u,\ k = 0 \\ (1-u)\exp\left(u + \dfrac{u^2}{2} + \dots + \dfrac{u^k}{k}\right), k > 0 \end{cases}$$

Лемма 3. *Верны неравенства*

$$|\ln|E(u,n)|| \leq |\ln E(u,n)| \leq 2|u|^{n+1}, \text{при } |u| \leq \frac{1}{2}$$

$$|\ln|\exp\left(u + \frac{u^2}{2} + \dots + \frac{u^n}{n}\right)|| \leq (2|u|)^n, \text{при } |u| \geq \frac{1}{2}$$

Теорема 12. *Пусть* $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots,\ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ *и* $p_n \in \mathbb{Z} :\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{r}{r_n}\right)^{p_n} < \infty,\ r_n = |z_n|,\ \forall r$. *Тогда произведение* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} E(\dfrac{z}{z_n}, p_n - 1) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z}{z_n}\right) \exp\left[\dfrac{z}{z_n} + \dfrac{z^2}{p_1 z_n^2} + \dots + \dfrac{z^{p_{n-1}}}{(p_{n-1}) z_n^{p_{n-1}}}\right]$ *сходится во всей плоскости и представляет целую функцию* $F(z)$, *которая имеет нули в точках* $z_1, z_2, \dots$,*и только в них.*

Теорема 13. *Пусть* $f(z) \in A(\mathbb{C})$ *и* $z_1, z_2, \dots,$ *- её нули (с учётом кратности), отличные от начала координат. Подберём* p_n *так, чтобы* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{r}{r_n}\right)^{p_n} < \infty, \forall r$. *Тогда* $f(z) = z^{\lambda} e^{h(z)} \prod\limits_{n=1}^{\infty} E(\dfrac{z}{z_n}, p_{n-1})$, *где* $h(z) \in A(\mathbb{C})$.

Определение 4. *Каноническое произведение:* $F(z) = \prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_m}\right)\exp\left(\frac{z}{z_m} + \dots + \frac{z^k}{kz_m^k}\right)$

Теорема 14. *Порядок канонического произведения равен τ, причём если $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{|z_m|^\tau} < \infty$, то $F(z)$ - целая функция порядка τ конечного типа. (τ - показатель сходимости нулей функции $f(z)$).*

Оценка канонического произведения снизу

Лемма 4. *Вне кружков $|z - z_m| < |z_m|^{-h}, h > \rho$ имеет место оценка $|F(z)| > \exp -r^{\rho+\varepsilon},\ |z| > r_0(\varepsilon), \forall\varepsilon > 0$.*

Лемма 5. *Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ регулярна в круге $|z| < R$ и удовлетворяет в этом круге условию $\mathrm{Re}F(z) \le u$. Тогда $|c_n| \le \frac{2(u - \mathrm{Re}c_0)}{R^n},\ n \ge 1$.*

Теорема 15. *(Адамара)*
$f \in A(\mathbb{C}),\ \rho(f) < +\infty,\ 0 < |z_m| \uparrow +\infty$ - нули $f(z)$. Тогда $f(z) = z^\lambda e^{h(z)}F(z)$, где λ - кратность корня $z = 0$. $F(z)$ - каноническое произведение $h(z)$ - полином степени не выше ρ.

Теорема 16. *(Бореля) Пусть $f(z)$ - целая функция конечного порядка ρ, $z_1, z_2, \dots,$ - её нули, τ - показатель сходимости $\{z_n\}$, k - наименьшее целое число, удовлетворяющее $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{|z_m|^{k+1}} < \infty$. Тогда имеет место представление*

$$f(z) = z^\lambda e^{h(z)}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_m}\right)\exp\left(\frac{z}{z_m} + \frac{z^2}{2z_m^2} + \dots + \frac{z^k}{kz_m^k}\right),$$

где $h(z)$ - многочлен и $\rho = \max(h, \tau)$, где $h = \mathrm{deg}h$.

5 А-точки целой функции конечного порядка.

Определение 5. *Точки $a_1, a_2, \dots,$ удовлетворяющие условию $f(z) = A$, называются A-точками.*

Теорема 17. *Пусть $f(z)$ - целая функция конечного порядка ρ. Если ρ - не целое, то последовательность A-точек имеет показатель сходимости $\tau_A = \rho\ \forall A$. Если ρ - целое, то последовательность A-точек имеет показатель сходимости $\tau_A = \rho$ для всех A за исключением может быть одного значения A.*

6 Оценки снизу произвольной аналитической функции.

Функции, которые не обращаются в 0

Лемма 6. *Пусть $f(z) \in A(\{|z| \le R_0\})$ и пусть $n(r)$ - число нулей $f(z)$ в круге $|z| < r < R_0$. Если $f(0) = 1$, то $n(r) \le \ln M(er),\ er \le R_0$.*

Лемма 7. *Пусть $f(z) \in A(\{|z| < R\})$ и в этом круге $\mathrm{Re}f(z) \le A(R)$. Тогда $M(r) \le [A(R) - \mathrm{Re}f(0)]\,\frac{2r}{R-r} + |f(0)|,\ 0 < r < R$.*

Лемма 8. *Пусть $f(z) \in A(\{|z| \le R\}),\ f(0) = 1$ и $f(z)$ не обращается в 0 в круге $|z| < R$. Тогда $\ln|f(z)| \ge -\frac{2r}{R-r}\ln M(r),\ |z| \le r < R$.*

Теорема 18. *(Картана)*
Каковы бы не были число H и комплексные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можно найти в комплексной плоскости такую систему кружков с общей суммой радиусов $2H$, что для всякой точки z, лежащей вне этих кружков выполняется неравенство

$$|(z-a_1)\ldots(z-a_n)| > \left(\frac{H}{e}\right)^n$$

Оценка снизу произвольной аналитической функции

Теорема 19. *Пусть $f(z) \in A(\{|z| \leq 2eR\}),\ f(0) = 1$ и $0 < \mu < \frac{3}{2}e$. Тогда внутри круга $|z| \leq R$, но вне исключающих кружков с общей суммой радиусов равное $r\mu R$,*

$$\ln|f(z)| > -H(\mu)\ln M(2eR),\ H(\mu) = 2 + \ln\frac{3e}{2\mu}$$

7 Целые функции экспоненциального типа. Опорные функции и сопряжённые диаграммы.

Определение 6. *Целая функция $f(z)$ называется функцией экспоненциального типа, если её порядок $\rho < 1$ или $\rho = 1$, но тогда и тип конечен.*

Обычно записывают в виде $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$.

Определение 7. *Функция $\gamma(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{t^{k+1}}$ назыается функцией, ассоциированной по Борелю с $f(z)$. (Ряд сходится при $|t| > \sigma$)*

Примеры:

1. $Ae^z \doteqdot \frac{A}{t-a}$
2. $\sin z \doteqdot \frac{1}{t^2+1}$
3. $\cos z \doteqdot \frac{t}{t^2+1}$

Определение 8. *Пусть $\overline{G}$ - ограниченное выпуклое замкнутое множество. Опорной функцией множества $\overline{G}$ называется функция $K(\varphi) = \max\limits_{z\in\overline{G}} \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.*

Геометрический смысл: $\mathrm{Re}(ze^{-i\varphi})$ - проекция вектора z на направление $\arg z = \varphi$. $K(\varphi)$ - максимальная из таких проекций при $z \in \overline{G}$. Возьмём вдали от начала координат прямую l, перпендикулярную лучу $\arg z = \varphi$ и будем перемещать её параллельно самой себе до соприкосновения с множеством $\overline{G}$. Пусть в момет соприкосновения она занимает положение l_0. Расстояние от начала координат до прямой l_0 и есть $K(\varphi)$. Пусть z_0 - тчока соприкосновения l_0 с $\overline{G}$. Тогда $K(\varphi) = \mathrm{Re}(z_0 e^{-i\varphi})$. Прямая l_0 - опорная к множеству $\overline{G}$.

Для круга опорная функция $K(\varphi) = \sigma$. Для отрезка $[-\sigma i, \sigma i]$ $K(\varphi) = \sigma|\sin\varphi|$.

Если $K(\varphi)$ - опорная функция множества $\overline{G}$, то $K(\varphi) + \varepsilon$ - опорная функция ε-расширения G.

Теорема 20. *Опорная функция $K(\varphi)$ непрерывна. Если опорные функции выпуклых множеств $\overline{G_1}, \overline{G_2}$ равны, то $\overline{G_1} \equiv \overline{G_2}$.*

7.1 Сопряженные диаграммы

Определение 9. *Пусть M - ограниченное множество на плоскости. Пересечение $\overline{G}$ всех замкнутых выпуклых множеств, содержащих M, называется выпуклой оболочкой множества M.*

Определение 10. *Пусть $f(z) \in A(\mathbb{C})$ и $f(z) \doteqdot \gamma(t)$. Выпуклая оболчка множества особенностей $\gamma(t)$ называется сопряженной диаграммой функции $f(z)$. Будем её обозначать $\overline{D}$.*

Если $f(z)$ имеет тип σ, то на окружности $|t| = \sigma$ у $\gamma(t)$ имеются особенности, поэтому $\overline{D} \subset \{|t| < \sigma\}$. На каждой опорной прямой к множеству $\overline{D}$ имеется хотя бы одна особенность. Свойства:

1. $\max K(\varphi) = \sigma$ и если $z_0 = \sigma e^{i\varphi_0} \in \overline{D}$, то этот максимум равено $K(\varphi_0)$.
2. $k(\varphi) \geq -\sigma$.

Примеры:

1. $Ae^z \doteqdot \dfrac{A}{t-a}$. $\overline{D}$ - точка $t = a$.
2. $\sin z \doteqdot \dfrac{1}{t^2+1}$. $\overline{D}$ - отрезок $[-i, i]$.

8 Функция, ассоциированная по Борелю. Интегральное представление целой функции экспоненциального типа.

Теорема 21. *Пусть $f(z)$ - целая экспоненциального типа, $f(z) \doteqdot \gamma(t)$, $\overline{D}$ - сопряженная диаграмма $f(z)$. Тогда*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \gamma(t) e^{zt} dt,$$

где C - замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$.

Следствие. *Пусть $K(\varphi)$ - опорная функция множества $\overline{D}$. Тогда $|f(re^{i\varphi})| < A(\varepsilon) e^{[K(-\varphi)+\varepsilon]r}$, $\forall \varepsilon > 0$.*

Лемма 9. *Пусть $f(z)$ нерперывна на луче l, $\arg z = \varphi_0$ и удовлетворяет условию $|f(z)| \leq Ae^{a|z|}, z \in l$. Тогда в полуплоскости $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) > a+\delta, \delta > 0$ интеграл сходится, представляет собой аналитическую функцию и имеет оценку $|F(t)| < \dfrac{A}{\delta}$.*

Определение 11. *Функция $h(\varphi) = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ называется индикатрисой роста функции $f(z)$. Характеризует рост функции вдоль лучей.*

Теорема 22. *Пусть $f(z)$ - целая функция экспоненциального типа с индикатрисой роста $h(\varphi)$, $f(z) \doteqdot \gamma(t)$. В полуплоскости $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) > h(\varphi_0)$ функция $\gamma(t)$ - аналитическая и*

$$\gamma(t) = \int\limits_0^\infty f(z) e^{-zt} dz$$

Теорема 23. *(Полиа)*
Пусть $f(z)$ - целая экспоненциального типа с индикатрисой роста $h(\varphi)$ и $\overline{D}$ - сопряженная диаграмма, $K(\varphi)$ - опорная функция $\overline{D}$. Тогда $h(\varphi) = K(-\varphi)$.

9 Примеры использования операционного исчисления для решения дифференциальных уравнений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)}(x) + \cdots + a_n y(x) = \varphi(x), \quad y(0) = \alpha_0, \ldots, y^{(n-1)}(0) = \alpha_n$$

Теорема 24. *Если* $f(z) \doteqdot \gamma(t)$, *то* $f^{(m)}(z) = t^m \gamma(t) - t^{m-1} f(0) - \cdots - f^{(m-1)}(0)$.

Пусть $\varphi(x) \doteqdot \gamma_1(t)$. Решение ищем в виде функции экспоненциального типа и пусть $y(x) \doteqdot \gamma(t)$. Переходя к функциям, ассоциированным по Борелю получим алгебраическое уравнение относительно t, решая его найдём искомую функцию.

Пример 1. $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$.
$y(x) \doteqdot \gamma(t)$, $y'(x) \doteqdot t\gamma(t)$, $y''(x) \doteqdot t^2\gamma(t) - 1$. *Тогда получим*
$t^2\gamma(t) - 1 - 2t\gamma(t) + \gamma(t) = 0$ *следовательно* $y(t) = \dfrac{1}{(t-1)^2}$. *Получаем* $y(x) = xe^x$.

10 Критерий Маркушевича полноты систем аналитических функций в области.

Лемма 10. *Пусть* $f_1(z), f_2(z), \ldots$ *- последовательность функций аналитических в замкнутом круге* $|z| \leq R < \infty$ *и пусть эта последовательность сходится в* L_2 *на* $|z| = R$ *(* $\int\limits_{|z|=R} |f_n(z) - f_m(z)|^2 dz < \varepsilon,\ n, m > N(\varepsilon)$*). Тогда* $\{f_n(z)\}$ *сходится равномерно внутри круга* $|z| < R$.

Определение 12. *Пусть* D *- односвязная область,* $\varphi_n \in A(D)$. *Множество* $M = \{\varphi : \varphi(z) = \lim\limits_{\nu\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\nu} a_{k,\nu}\varphi_k(z)\}$ *называется линейной оболочкой* $\{\varphi_n\}$ $(\mathrm{span}\{\varphi_n\})$.

Теорема 25. *Пусть* $\mathrm{span}\{\varphi_n\} \neq A(D) \Rightarrow \exists$ *функционал* $l(\varphi):\ l(\varphi) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C \gamma(t)\varphi(t)dt,\ \gamma \in A(\overline{\mathrm{ext} C}),\ \gamma(\infty) = 0,\ l(\varphi_k) = 0, k \in \mathbb{N}, l(A) \neq 0,\ A \in A(D)\backslash\mathrm{span}\{\varphi_n\}$.

Определение 13. *Пуст* D *- односвязная область.* $\{\varphi_k\}$ *полна в* $A(D)$, *если* $\mathrm{span}\{\varphi_n\} = A(D)$.

Теорема 26. *(Критерий Маркушевича)*
$\{\varphi_k(z)\}$ *полна в* $D \Leftrightarrow$ *из равенств* $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C \gamma(t)\varphi_k(t)dt = 0, (k \in \mathbb{N})$, C *- замкнутый контур, лежащий в* D, $\gamma(t) \in A(\overline{\mathrm{ext} C}), \gamma(\infty) = 0$ *всегда вытекает* $y(t) \equiv 0$.

Теорема 27. *(Гельфонда)*
Пусть $f(z) \in A(\mathbb{C}),\ \rho(f) < +\infty,\ f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k,\ a_k \neq 0, k \in \mathbb{N}$. $\{\lambda_k\}$ *имеет показатель сходимости* $\tau > \rho(f)$. *Тогда* $\{f(\lambda_k z)\}$ *полна в* $A(\mathbb{C})$.

Теорема 28. *(Маркушевича)*
Пусть $f \in A(\mathbb{C}),\ 0 < \rho = \rho(f) < +\infty,\ \sigma = \sigma(f),\ f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k, a_k \neq 0, k \in \mathbb{N}$. $\{\lambda_k\} : \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{k}{|\lambda|^\rho} = \tau$.
Тогда $\{f(\lambda_k z)\}$ *полна в* $A\left(\left\{|z| < R_0 = \left(\dfrac{\tau}{\sigma e \rho}\right)^{1/\rho}\right\}\right)$.

Теорема 29. *(Мюнтца)*
Пусть $0 < \lambda_k \uparrow \infty$. *Есил* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} = \infty$, *то система* $1 \cup \{x^{\lambda_k}\}, k \geq 1$ *полна на* $[0, 1]$.

11 Ряды Дирихле: абсциссы простой, равномерной, абсолютной сходимости, теорема единственности.

Лемма 11. *(Преобразование Абеля)*

$$\sum_{n=p}^{q} A_n B_n = \sum_{n=p}^{q-1} (B_n - B_{n+1}) C_n + B_q C_q,\ C_n = A_p + \cdots + A_n$$

Определение 14. *Ряд Дирихле* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$*, у которого* $\lambda_n > 0$*,* $0 < \lambda_n \uparrow \infty$*. (показатели вещсетсвенны).*

Лемма 12. *Пусть ряд Дирихле сходится в точке* z_0*, тогда он сходится (вообще говоря не абсолютно) в полуплоскости* $\mathrm{Re} z > \mathrm{Re} z_0$*. В каждом секторе* $|\arg(z - z_0)| \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$ *он сходится равномерно.*

11.1 Асимптотика суммы ряда. Разложения

Лемма 13. *Разложение в ряд Дирихле единсвтенно. В указанном выше секторе при* $x \to +\infty$ $f(z) \approx a_1 e^{-\lambda_1 z}, a_1 \ne 0$.

11.2 Абсциссы

Ряд Дирихле или всюду сходится, или всюду расходится, или $\exists \in \mathbb{R}$: сходится при $\mathrm{Re} z > c$ и расходится при $\mathrm{Re} z < c$. $\mathrm{Re} z = c$ - прямая сходимости. c - абсцисса сходимости.

Ряд Дирихле или сходится во всей плоскости, или нигде не сходится абсолютно, или $\exists a \in \mathbb{R}$: ряд асболютно сходится в $\mathrm{Re} z > a$, не сходится абсолютно в $\mathrm{Re} z < a$. a -абсцисса абсолютной сходимости.

Если $a < +\infty$, то $\forall \varepsilon > 0$ в полуплоскости $\mathrm{Re} z > a + \varepsilon$ ряд сходится равномерно. Точная нижняя грань r чисел $\{\alpha\}$ таких, что в $\mathrm{Re} z > \alpha$ ряд сходится равномерно называется абсциссой равномерной сходимости.

$$c \le r \le a$$

Теорема 30. *Пусть* $L = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \dfrac{\ln n}{\lambda_n}$*. Тогда* $a - c \le L$*.*

Теорема 31. *В случае* $L = 0$ *абсцисса сходимсоти вычисляется по формуле* $a = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \dfrac{\ln |a_k|}{\lambda_k}$*.*

12 Ряды с комплексными показателями. Область абсолютной сходимости, область сходимости.

Будем рассматривать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$, где $\lambda_n \in \mathbb{C}$.

Теорема 32. *Множество точек абсолютной сходимости ряда (указан выше) выпукло.*

Теорема 33. *Пусть* D *- открытая область, состоящая только из внутренних точек множества* M *абсолютной сходимости ряда. Внутри* D *ряд сходится равномерно.*

Множество точек простой сходимости ряда

Пусть $0 < |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots,\ \lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln n}{|\lambda_n|} = H < \infty$.

Теорема 34. *Пусть ряд сходится в области* E*. Если точка* $z_0 \in E$ *такова, что она удалена от границы* E *на расстояние, большее* H*, то в ней ряд сходится абсолютно.*

Следствие. *Если ряд сходится во всей плоскости, то при условии* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{\ln n}{|\lambda_n|} = H < \infty$ *он сходится абсолютно во всей плоскости.*

Следствие. *При* $H = 0$ *открытая область сходимости ряда совпадает с открытой областью абсолютной сходимости ряда.*

13 Биортогональная система функций. Необходимые и достаточные условия существования

Определение 15. *Система функций* ψ_ν *называется биортогональной к системе функций* $e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z}, \ldots$, *где* λ_i *различные комплексные числа и* $0 \le |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots$, *если*

1. $\psi_\nu(z) \in A(\{|z| \ge r_0\}),\ \psi_\nu(\infty) = 0$
2. $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=r_0} e^{\lambda_\mu t}\psi_\nu(t)dt = \delta_{\nu\mu}$

Лемма 14. *При условии* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{n}{|\lambda_n|} = \tau < \infty$ *выполняется соотношение* $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{1}{r}\ln\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{r^2}{|\lambda_n|^2}\right) \le \pi\tau$.

Теорема 35. *Для существования системы* $\{\psi_\nu(t)\}$ *биортогональной к* $\{e^{\lambda_\mu z}\}$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{n}{|\lambda_n|} = \tau < \infty$.

Теорема 36. *При условии* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{n}{|\lambda_n|} = \tau < \infty$ *система фукнций*

$$\psi_\nu(t) = \frac{1}{L'(\lambda_\nu)}\int\limits_0^{\infty e^{i\varphi_0}}\frac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_\nu}e^{-\lambda t}d\lambda,\ \mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) > h(\varphi_0),$$

где $h(\varphi)$ *- индикатриса роста* $L(\lambda)$.

14 Формула для коэффициентов ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k e^{\lambda_k z}$

$\overline{D}$ - сопряженная диаграмма к $L(\lambda)$. $\overline{D}_\alpha$ - сдвиг $\overline{D}$ на вектор α.

Теорема 37. *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *- простые нули функции* $L(\lambda)$, $\overline{D}$ *- сопряженная диаграмма* $L(\lambda)$, $\psi_k(t)$ *- функции:* $\psi_k(t) = \dfrac{1}{L'(\lambda_k)}\int\limits_0^{\infty e^{i\varphi_0}}\dfrac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}e^{-\lambda t}d\lambda$. *Если ряд* $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}$ *сходится в области* G, *которая содержит в себе некоторую* $\overline{D}_\alpha$, *то*

$$a_k = e^{-\alpha\lambda_k}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \psi_k(t)f(t+\alpha)dt,\ k \ge 1,$$

где C *- замкнутый контур, охватывающий* $\overline{D}$ *и выбран так, чтобы переменная* $(t+\alpha)$, *когда* $t \in C$ *находилась бы в* G.

14.1 Уточнение формулы

Лемма 15. *Пусть H - область, в которой функция регулярна, и пусть E - область такая, что $\forall\alpha \in E$ множество $\overline{D}_\alpha \subset H$. Тогда в области E функция $A(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_C \psi_k(t)f(t+\alpha)dt$ - аналитическая.*

Теорема 38. *Пусть ряд $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}$ сходится в области G и $\overline{D}_{\alpha_0} \subset G$, а сумма ряда $f(z)$ регулярна в области H, $G \subset H$. Пусть далее, E - область: $\alpha \in E$, если $\overline{D}_\alpha \subset H$ и $\alpha_0 \in E$. Тогда*

$$a_k = e^{-\alpha\lambda_k}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \psi_k(t)f(t+\alpha)dt,\ k \geq 1,\ \alpha \in E.$$

15 Случай, когда показатели имеют нулевую плотность. Теоремы Полиа и Фабри

В качестве $L(\lambda)$ берём $L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty\,\prime}(1 - \dfrac{\lambda^2}{\lambda_k^2})$.

Теорема 39. *Пусть $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k}{|\lambda_k|} = 0,\ \delta = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{|\lambda_k|}\ln|\dfrac{1}{L'(\lambda_k)|} = 0$. Пусть далее ряд $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}$ сходится в некоторой области G. Тогда область сходимости ряда и область H регулярности суммы ряда совпадают.*

Теорема 40. *Пусть $\tau = 0$, $|\lambda_{k+1}| - |\lambda_k| \geq h = \mathrm{const} > 0$. Тогда область сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}$ и область регулярности суммы совпадают. Область H - выпукла.*

Теорема 41. *Пусть $0 < \lambda_k \uparrow \infty,\ \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k}{\lambda_k} = 0$ и $\delta = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{\lambda_k}\ln|\dfrac{1}{L'(\lambda_k)}| = 0,\ L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty\,\prime}\left(1 - \dfrac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right)$. Пусть далее ряд $F(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\lambda_k z}$ сходится в полуплоскости $\mathrm{Re}z > a$, $-\infty < a < +\infty$. Тогда прямая сходимости $\mathrm{Re}z = a$ - естественная граница для суммы ряда $F(z)$.*

Теорема 42. *(Полиа)*
Пусть $0 < \lambda_n \uparrow +\infty,\ \tau = 0,\ \lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0$. Тогда $\mathrm{Re}z = a$ - естественная граница для $f(z)$.

Теорема 43. *(Фабри)*
$f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}$, $\lambda_k \in \mathbb{N}$, $\tau = 0$ сходится при $|z| < R$. Тогда $\{|z| = R\}$ - естественная граница для суммы ряда $f(z)$.

16 Случай, когда показатели положительны и имеют ненулевую плотность. Теорема Полиа. Теоремы для степенных рядов.

Считаем, что $0 < \lambda_k \uparrow +\infty$ и $\exists$ конечный $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k}{\lambda_k} = \sigma$. σ - плотность последовательности. Полагаем $L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right)$. Сопряженная диаграмма $\overline{D} = [-\pi\sigma i, \pi\sigma i]$.

Теорема 44. *Пусть $0 < \lambda_k \uparrow +\infty,\ \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k}{\lambda_k} = \sigma$ и пусть ряд $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}$ сходится в полуплоскости $\mathrm{Re}z < a,\ -\infty < a < +\infty$. Если $\delta = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\dfrac{1}{\lambda_k}\ln|\dfrac{1}{L'(\lambda_k)}| = 0$, то в каждом отрезке длины $2\pi\sigma$ прямой сходимости $\mathrm{Re}z = a$ у суммы ряда имеется хотя бы одна особенность.*

Теорема 45. *(Полиа)*
Пусть $0 < \lambda_k \uparrow +\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{\lambda_k} = \sigma$ *и* $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h > 0$. *Пусть далее ряд* $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}$ *сходится в полуплоскости* $\mathrm{Re} z < a$, $-\infty < a < +\infty$. *Тогда в каждом отрезке длины* $2\pi\sigma$ *прямой сходимости* $\mathrm{Re} z = a$ *у суммы ряда имеется хотя бы одна особенность.*

Теорема 46. *(про степенные ряды)*
Пусть λ_k, $k \geq 1$ *- целые положительные числа и* $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{\lambda_k} = \sigma$. *Пусть далее степенной ряд* $F(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^{\lambda_k}$ *имеет конечный радиус сходимости* R, $0 < R < \infty$. *Тогда на каждой замкнутой дуге окружности* $|z| = R$, *опирающейся на центральный угол, равный* $2\pi\sigma$, *у функции* $F(z)$ *имеется по меньшей мере одна особенность.*

17 Свойства функций $\Phi(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \dfrac{e^{-zt}}{L(t)} dt$, $F(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \dfrac{e^{-zt}}{L(t)(t-\beta)} dt, \beta > 0$

Как и ранее $L(\lambda) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right)$. Γ - граница угла $|\arg t| < \varphi_0 < \dfrac{\pi}{2}$. Полагаем $0 < \lambda_k \uparrow \infty$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{\lambda_k} = \sigma$.

Теорема 47. *Исследуемая функция обладает следующими свойствами:*

1. *при* $\sigma = 0$ *регулярна в полуплоскости* $\mathrm{Re} z > 0$; *при* $\sigma > 0$ *в плоскости с разрезами по отрезкам* $(-i\infty, -i\pi\sigma], [i\pi\sigma, +i\infty)$
2. *В полуплоскости* $\mathrm{Re} z > 0$ *она представима в виде*
$$\Phi(z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\lambda_\nu < r_k} \frac{e^{-\lambda_\nu z}}{L'(\lambda_\nu)},\ r_k \to \infty$$
при $\sigma > 0$ *в полуплоскости* $\mathrm{Re} z < 0$ *представима в виде*
$$\Phi(z) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\lambda_\nu < r_k} \frac{e^{\lambda_\nu z}}{L'(\lambda_\nu)},\ r_k \to \infty$$
3. *При* $\sigma < \infty$ *функция* $\Phi(z)$ *в полуплоскости* $\mathrm{Re} z > 0$ *представляется рядом*
$$\Phi(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_\nu z}}{L'(\lambda_\nu)}$$

Теорема 48. *Пусть* $0 < \lambda_k \uparrow \infty$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{\lambda_k} = \sigma$, *тогда фукнция* $F(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \dfrac{e^{-zt}}{L(t)(t-\beta)} dt, \beta > 0$, $L(\lambda) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right)$, *где* Γ *- граница угла* $|\arg t| < \varphi_0 < \dfrac{\pi}{2}$ *обладает следующими свойствами:*

1. *при* $\sigma = 0$ *она регулярна в* $\mathrm{Re} z > 0$, *при* $\sigma > 0$ *в плоскости с разрезами по отрезкам* $(-i\infty, -i\pi\sigma], [i\pi\sigma, +i\infty)$
2. *в* $\mathrm{Re} z > 0$ *представима в виде*
$$F(z) = \frac{e^{-\beta z}}{L(\beta)} + \lim_{k\to\infty} \sum_{\lambda_\nu < r_k} \frac{e^{-\lambda_\nu}}{(\lambda_\nu - \beta)L'(\lambda_\nu)},$$
а при $\sigma > 0$ *в* $\mathrm{Re} z < 0$ *представима в виде*
$$F(z) = -\lim_{k\to\infty} \sum_{\lambda_\nu < r_k} \frac{e^{\lambda_\nu z}}{(\lambda_\nu + \beta)L'(\lambda_\nu)}$$

18 Оценка полинома из экспонент в полуплоскости. Полнота систем функций в криволинейном угле.

Теорема 49. *Пусть* $0 < \lambda_{\uparrow} + \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{\lambda_k} = \sigma$ *и величина* δ *конечна. Пусть, далее,* E*-односвязная область, содержащая в себе замкнутой вертикальный отрезок длина* $2\pi\sigma$ *с серединой в точке* z_0*. Если* $P(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e^{\lambda_k z}$*, то в полуплоскости* $\mathrm{Re} z < \mathrm{Re} z_0 - \delta + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$*.Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k e^{\lambda_k z}| \le A \max\limits_{t\in\overline{E}} |P(t)|$*, где* $A = const$*, не зависит от* $P(z)$*.*

Теорема 50. *Пусть* λ_k, $k \ge 1$ *- целые положительные числа,* $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{\lambda_k} = \sigma$*. Пусть, далее,* Γ_1 *- непрерывная кривая, идучая из начала координат в* ∞*, пересекающаяся с каждой окружностью* $|z| = r$, $0 < r < \infty$ *в единственной точке.* Γ_2 *- кривая, полученння поворотом* Γ_1 *вокруг начала координат на угол* $2\pi\sigma$*.* D *- угловая область, ограниченная кривыми* Γ_1, Γ_2*. Тогда система* $\{z^{\lambda_k}\}$ *полна в области* D*.*

19 Полнота системы степеней в области, содержащей начало координат. Теорема Коревара. Полнота системы экспонент в криволинейной полосе.

Класс функций, аналитических в D и имеющих в окрестности начала координат разложение вида $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^{\lambda_k}$, обозначим $H\{\lambda_k\}$.

Теорема 51. *(Кореавара)*
Пусть D *- односвязная область,* $0 \in D$, λ_k, $k \ge 1$ *- целые положительные числа. Если плотность* $\sigma = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{\lambda_k}$ *равна 0 или 1, то система* $\{z^{\lambda_k}\}$ *полна в области* D *в классе* $H\{\lambda_k\}$*.*

Пусть $y = f(x)$ - непрерывная кривая, определённая на всей вещественной оси, и $f(x) < y < f(x) + 2\pi\sigma$, $-\infty < x < \infty$ - криволинейная полоса

Теорема 52. *TЕсли* $\{\lambda_k\}$ *имеет плотность* σ*, то система* $\{e^{\lambda_k} z\}$ *полна в указанной выше полосе.*