Изучение функциональных методов решения задач математической физички с обобщёнными решениями

Васильченко Д.Д.

1 Свойства пространства финитных бесконечно дифференцируемых функций и определение обобщённой производной произвольного порядка

Пусть задано открытое ограниченное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Пространство $D(\Omega)$ состоит из всех бесконечное число раз дифференцируемых функций $v: \ \Omega \to \mathbb{R}^1$ с компактными носителями. Будем говорить, что последовательность функций $v_1, v_2, \dots$ из$D(\Omega)$ сходится к функции $V \in D(\Omega)$, если при каждом $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ последовательность $D^\alpha v_k(x)$ равномерно на Ω сходится к функции $D^\alpha v(x)$.

Рассмотрим множество $C^m(\overline{\Omega})$ всех непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций, имеющиъ в области Ω все производные до порядка m, непрерывные в $\overline{\Omega}$. В множесте $C^m(\overline{\Omega})$ можно ввести норму

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \le m} \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)| = \max_{0 \le k \le m} \|f\|_{C^k(\overline{\Omega})}.$$

Множество $C^m(\overline{\Omega})$ является сепарабельным банаховым пространством.

Функция $D^\alpha f(x) \in L_p(\Omega)$ называется обобщённой производной порядка α в области Ω функции $f(x) \in L_p(\Omega)$, если для любой функции $\varphi(x) \in D(\Omega)$ выполняется тождество

$$\int\limits_\Omega D^\alpha f(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x) dx$$

2 Примеры классических функций с обобщёнными производными и без них

Пример 1. *Функция $f(x) = |x_1|$ в шаре $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | \ |x| < 1\}$ имеет первые обобщённые производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \mathrm{sign} x_1, \ \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \ i = 2, 3, \dots, n$ из $L_p(\Omega)$ при любом p таком, что $1 \le p \le \infty$. В самом деле, расписывая ($\alpha = (1, 0, \dots, 0)$)*

$$\int\limits_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x) dx = + \int\limits_{\Omega \cap \{x_1 \ge 0\}} x_1 D^\alpha \varphi(x) dx - \int\limits_{\Omega \cap \{x_1 \le 0\}} x_1 D^\alpha \varphi(x) dx = + \int\limits_{\Omega \cap \{x_1 \ge 0\}} \varphi(x) dx - \int\limits_{\Omega \cap \{x_1 \le 0\}} \varphi(x) dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \mathrm{sign} x_1 \varphi(x) dx$$

Пример 2. *Функция $f(x) = \mathrm{sign} x_1$ в шаре $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | \ |x| < 1\}$ не имеет обобщённой производной $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$. Это следует из того, что функция $V(x)$, удовлетворяющая*

$$\int\limits_\Omega \mathrm{sign} x_1 D^\alpha \varphi(x) dx = \int\limits_\Omega V(x) \varphi(x) dx$$

является сингулярной.

3 Определение и свойства пространств Соболева

Для всякого целого $m \geq 0$ и действительного числа p, такого, что $1 \leq p \leq \infty$, определим пространство Соболева $W_p^m(\Omega)$, состоящее из тех функций $u \in L_p(\Omega)$, для которых все частные производные $D^\alpha u(x)$ (в смысле обобщённых производных) при $|\alpha| \leq m$ принадлежат пространству $L_p(\Omega)$.

Можно ввести норму

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum_{s=0}^{m} |u|_{s,p,\Omega}^p\right)^{1/p}$$

$$|u|_{m,p,\Omega} \equiv |u|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{0,p,\Omega}^p\right)^{1/p}.$$

Относительно такой нормы пространство $W_p^m(\Omega)$ является банаховым пространством.

Есть и другой способ получения пространства Соболева. Пространство $\overset{0}{W_p^m}(\Omega)$ является замыканием множества $D(\Omega)$ в норме пространства $W_p^m(\Omega)$. Очевидно, что $\overset{0}{W_p^m}(\Omega) \subset W_p^m(\Omega)$. Докажем, что в пространстве $\overset{0}{W_p^m}(\Omega)$ полунорма $|*|_{m,\Omega}$ эквивалентна норме $\|*\|_{m,\Omega}$.

В случае $m = 1$ доказательство опирается на широко известное неравенство Фридрихса

$$|u|^2 1, \Omega = \int\limits_\Omega |\mathrm{grad} u|^2 dx \geq \gamma \int\limits_\Omega u^2 dx = \gamma \|u\|_{0,\Omega}^2,$$

где $\gamma = na^{-1}$, причем a - длина стороны n-мерного куба, содержащего область Ω. Докажем это неравенство для случая, когда $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Предположим, что область Ω можно заключить в квадрат $\Pi = \{x: \ 0 < x_1 < a, \ 0 < x_2 < a\}$. Так как пространство $\overset{0}{W_p^m}(\Omega)$ есть замыкание множества $D(\Omega)$ в норме W_2^1, то достаточно доказать неравенство лишь для функций из класса $D(\Omega)$.

Предположим, что $u(x) \in D(\Omega)$. Продолжим функцию $u(x)$ на всю плоскость $\mathbb{R}^2$ нулём. При таком продолжении фукнция будет принадлежать $D(\Pi)$. Пусть $(x_1, x_2) \in \Pi$; тогда, учитывая, что $u(0, x_2) = 0$, имеем

$$u(x_1, x_2) = \int\limits_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1}(\xi_1, x_2) d\xi$$

. Применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$u^2(x_1, x_2) \leq x_1 \int\limits_0^{x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}(\xi_1, x_2) d\xi_1\right)^2 \leq a \int\limits_0^{a} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}(\xi_1, x_2) d\xi_1\right)^2.$$

Проинтегрировав это неравенство в пределах $0 < x_1 < a, \ 0 < x_2 < a$, имеем

$$\int\limits_\Pi u^2(x) dx \leq a^2 \int\limits_\Pi \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right)^2 dx.$$

Аналогично можем получить неравенство для производной по второй переменной, далее просуммируем эти неравенства и получим требуемое.

Таким образом получили, что для любой $u \in \overset{0}{W_p^m}(\Omega)$ выполнены оценки

$$(1+\gamma)^{1/2} \|u\|_{1,\Omega} \leq |u|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega},$$

которые показывают эквивалентность $|u|_{1,\Omega}$ норме $\|u\|_{1,\Omega}$.

Пример 3. *Пусть* $n = 1$ *и* $\Omega = \{x : 0 < x < 1\}$. *В* Ω *рассмотрим функцию*

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ x < 0.5, \\ 0, \ x \geq 0.5. \end{cases}$$

Покажем, что $f(x) \in W_p^\lambda(\Omega)$ *при любом* λ, *таком, что* $0 < \lambda < 1/p, \ 1 < p < \infty$. *Действительно,*

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{1+\lambda p}} dxdy = 2 \int\limits_{0.5}^1 \int\limits_0^{0.5} \frac{dy}{(x - y)^{1+\lambda p}} dx \leq \frac{2}{\lambda p} \int\limits_{0.5}^1 (x - 0.5)^{-\lambda p} dx < \infty, \text{если } \lambda p < 1.$$

Пример 4. *Пусть* $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | \ |x_i| < 1, i = 1, \ldots, n\}$ *и*

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ |x_i| < 0.5, i = 1, \ldots, n \\ 0, \text{в остальных точках } \Omega. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что $f(x) \in W_2^\lambda(\Omega)$ *при любом* λ , *удовлетворяющем условию* $0 < \lambda < 0.5$.

4 Теоремы вложения

Теорема 1. *Пусть граница* Γ *области* Ω *принадлежит классу* C^m.*Если* $u \in W_p^m(\Omega)$, *то след* $v = u|_\Gamma$ *принадлежит пространству* $W_p^{m-1/p}(\Gamma)$ *и выполняется оценка*

$$\|v\|_{m-1/p,p,\Gamma} \leq K_1 \|u\|_{m,p,\Omega}.$$

Обратно, если $v \in W_p^{m-1/p}(\Gamma)$, *то существует функция* $u \in W_p^m(\Omega)$ *такая, что* $v = u|_\Gamma$, *и выполнена оценка*

$$\|u\|_{m-1,2,\Omega} \leq K_2 \|v\|_{m-1/p,p,\Gamma}$$

Теорема 2. *(теорема вложения Соболева)*
Пусть Ω *- открытая область в* $\mathbb{R}^n$ *с непрерывной по Липшицу границей и пусть* Ω^k *-* k*-мерная область, полученная пересечением* Ω *с* k*-мерной гиперплоскотсью в* $\mathbb{R}^n$, $1 \leq k \leq n$. *Пусть, далее ,* m *- неотрицательное действительное число и* $1 \leq p \leq \infty$. *Тогда выполнены следующие вложения:*

1. *если* $mp < n$ *и* $n - mp < k \leq n$, *то*

   $$W_p^m \subset L_q(\Omega^k), \ p \leq q \leq kp/(n - mp);$$

   В частности при $k = n$ *справедливо*

   $$\|u\|_{0,1,\Omega} \leq C\|u\|_{m,p,\Omega}, \ p \leq q \leq np/(n - mp);$$

2. *если* $mp = n$, *то для любого* $k : \ 1 \leq k \leq n$

   $$W_p^m(\Omega) \subset L_q(\Omega^k), \ p \leq q < \infty;$$

   В частности при $k = n$ *справедливо*

   $$\|u\|_{0,q,\Omega} \leq C\|u\|_{m,p,\Omega}, \ p \leq q < \infty;$$

   Если $p = 1$ *и* $m = n$, *то вложение имеет место и для* $q = \infty$.

3. *Если* $mp > n$, *то*

   $$W_p^m(\Omega) \subset L_\infty(\Omega);$$

   если $mp > n > (m - 1)p$, *то*

   $$W_p^m(\Omega) \subset C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}), \ 0 < \lambda \leq m - \frac{n}{p};$$

   если $n = (m - 1)p$, *то*

   $$W_p^m(\Omega) \subset C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}), \ 0 < \lambda < 1.$$

Теорема 3. *(Упрощённый вариант теоремы вложения)*
Пусть $u \in W_2^1(a,b)$. Тогда $u \in C[a,b]$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $u \in W_2^1(a,b)$. Это означает, что u и её первая производная u' принадлежат $L^2(a,b)$. Для любых $x, y \in [a,b]$ с $x < y$ имеем:

$$u(y) - u(x) = \int_x^y u'(t)\,dt.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$|u(y) - u(x)| = \left| \int_x^y u'(t)\,dt \right| \le \int_x^y |u'(t)|\,dt.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского для интеграла, получаем:

$$\int_x^y |u'(t)|\,dt \le \left(\int_x^y 1^2\,dt \right)^{1/2} \left(\int_x^y |u'(t)|^2\,dt \right)^{1/2}.$$

Учитывая, что $\int_x^y 1^2\,dt = y - x$, получаем:

$$|u(y) - u(x)| \le (y-x)^{1/2} \left(\int_a^b |u'(t)|^2\,dt \right)^{1/2}.$$

Так как $u' \in L^2(a,b)$, интеграл $\int_a^b |u'(t)|^2\,dt$ конечен. Пусть $C = \left(\int_a^b |u'(t)|^2\,dt \right)^{1/2}$. Тогда:

$$|u(y) - u(x)| \le C(y-x)^{1/2}.$$

Это показывает, что u является равномерно непрерывной функцией на $[a,b]$. Следовательно, $u \in C[a,b]$.
□

5 Лемма Брэмбла-Гильберта

Лемма 1. *(Брэмбла-Гильберта)*
Пусть Ω - открытая выпуклая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с диаметром d.Пусть, далее, линейный функционал $l(u)$ ограничен в пространстве $W_2^m(\Omega)$, где $0 < m = \overline{m} + \lambda$, $\overline{m}$ - целое неотрицательное чилсло, $0 < \lambda \le 1$, т.е.

$$|l(u)| \le M \left(\sum_{j=0}^{\overline{m}} d^{2j} |u|_{j,\Omega}^2 + d^{2m} |u|_{m,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

Если $l(u)$ обращается в нуль на многочленах степени $\overline{m}$ по переменным $x_1, \ldots, x_n$, то существует постоянная $\overline{M}$, зависящая от Ω, но не зависящая от $u(x)$, такая, что выполнено неравенство

$$|l(u)| \le M\overline{M} d^m |u|_{m,\Omega}.$$

Пример 5. *Применим лемму Брэмбла-Гильберта для оценки погрешности приближенного интегрирования*

$$l(u) = \int\limits_0^h u(x)dx - \frac{h}{2}(u(0) + u(h)),\ \ u \in W_2^2.$$

Чтобы применить оценки теоремы вложения сделаем замену переменной $t = x/h$ и положим $\tilde{u}(t) = u(th)$, тогда

$$l(\tilde{u}) = \frac{h}{2} \left[2 \int\limits_0^1 \tilde{u}(t)dt - \tilde{u}(0) - \tilde{u}(1) \right].$$

Так как

$$\max_{t\in[0,1]}|\tilde{u}(t)| \le \sqrt{2}\left(\int\limits_0^1\left(\tilde{u}^2+\tilde{u'}^2\right)dt\right)^{1/2} \le \sqrt{2}\|\tilde{u}\|_{W_2^2(0,1)},$$

то

$$|l(\tilde{u})| \le \frac{5}{2}h\|\tilde{u}\|_{W_2^2(0,1)}.$$

$l(\tilde{u})=0$ *на многочленах первой степени, поэтому по лемме Брэмбла-Гильберта*

$$|l(u)| \le Mh\|\tilde{u}\|_{W_2^2(0,1)} = Mh^{5/2}\|u\|_{W_2^2(0,h)}.$$

Теперь оценим ошибку квадратурной формулы трапеций на $[0,1]$ *с шагом* $h=1/N$ *на функциях из класса* $W_2^2([0,1])$*:*

$$l(f)=\int\limits_0^1 f(x)dx-\frac{h}{2}\sum_{i=1}^N(f(x_{i-1})+f(x_i)),\ x_i=ih.$$

Перепишем в виде

$$l(f)=\sum_{i=1}^N\left\{\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx-\frac{h}{2}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\right\}$$

для каждого слагаемого в скобке применим оценку, полученную выше.

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx-\frac{h}{2}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right] \le Mh^{5/2}\|f\|_{W_2^2(x_{i-1},x_i)},$$

суммируя получим

$$|l(f)| \le Mh^{5/2}\sum_{i=1}^N\|f\|_{W_2^2(x_{i-1},x_i)} \le Mh^2\|f\|_{W_2^2(0,1)}.$$

6 Определение обобщённого решения задачи Дирихле для эллиптического оператора

Пусть в конечной области Ω пространства $\mathbb{R}^n$ с границей Γ задано самосопряженное эллиптическое уравнение второго порядка

$$Lu=-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+q(x)u=f(x),\ x\in Q, \tag{1}$$

коэффициенты которого удовлетворяют следующим условиям:

$$a_{ij}=a_{ji}\in C^1(\overline{\Omega}),\ f(x)\in C(\overline{\Omega}), q(x)\in C(\overline{\Omega}), \tag{2}$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \gamma\sum_{i=1}^n\xi_i^2,\ \gamma=\text{const}>0 \tag{3}$$

для любого $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ (равномерная эллиптичность).

Функция $u(x)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ называется решением (классическим решением) первой краевой задачи (или задачи Дирихле) для выше укзанного уравнения, если в Ω она удовлетворяет этому уравнению, а на границе Γ - условию

$$u(x)=\mu(x),\ x\in\Gamma, \tag{4}$$

где $\mu(x)$ - заданная функция.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты* $a_ij(x)$ *и* $q(x)$ *оператора* L *принадлежат* $C^{m-1,\alpha}(\overline{\Omega})$, a_{ij} *удовлетворяют неравенству (3),* $q(x)\ge 0$, *а граница* Γ *принадлежит классу* $C^{m,\alpha}$. *Тогда для любых* $f\in C^{m-2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *и* $\mu\in C^{m,\alpha}(\Gamma)$ *задача (1)-(4) имеет единственное решение из класса* $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$, $m\ge 2$.

7 Точная интегро-дифференциальная схема

8 Точная разностная схема для задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим краевую задачу

$$L^(k,q)u \equiv \frac{d}{dx}(k(x)\frac{du}{dx}) - q(x)u(x) = -f(x),\ x \in (0,1) \equiv \Omega \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

$$\text{Пусть } 0 < M_1 \le k(x) \le M_2 < \infty, k(x) \text{ - измеримая функция;} \tag{3}$$

$$q(x) = Q'(x), Q(x) \in W_p^{\lambda}(\Omega), p \ge 2, 0 < \lambda \le 1, \tag{4}$$

причем $\int\limits_0^1 Q(x)v'(x)dx \ge 0$ для любой функции $v \in \overset{0}{W}{}_1^2(\Omega)$ такой, что $v(x) \ge 0$.

$$f(x) = F'(x), F(x) \in W_r^{\theta}(\Omega), r \ge 2, 0 < \theta \le 1. \qquad (5).$$

На отрезке $[0,1]$ введем равномерную сетку

$$\omega = \{x_= i/h, i = 1, \dots, N-1, h = 1/N\}, x_0 = 0, x_N = 1$$

и построим разностную схему, заменяющую задачу (1)-(2)

$$y(x_i) = A_i y(x_{i+1}) + B_i y(x_{i-1}) + F_i\ (i = 1, 2, \dots, N-1), \tag{6}$$

$$y(0) = y(1) = 0,$$

где A_i, B_i и F_i - некоторые функционалы от коэффициентов $k(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ исходного уравнения.

Трехточечную разностую схему вида (6) назовем точной для задачи

$$\int\limits_0^1 \left[k(\xi)u'(\xi)\eta'(\xi) - Q(\xi)(u(\xi)\eta(\xi))'\right] d\xi = -\int\limits_0^1 F(\xi)\eta'(\xi)d\xi, \tag{7}$$

если выполняются условия

1. $A_i = A_i(k(*), q(*)),\ B_i = B_i(k(*), q(*)), F_i = F_i(k(*), q(*), f(*))$, где F_i - линейный функционал от 3 переменной.

2. $y(x) = u(x), x \in \omega$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (3)-(5). Тогда для задачи (1)-(2) существует хотя бы одна точная трехточечная разностная схема.*