Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра общей математики

Васильченко Дмитрий Дмитриевич

Об интегральном представлении производных решения задачи для уравнения Лапласа с интегральным граничным условием

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

Н. Ю. Капустин

Москва, 2025

Содержание

1 Введение

В работе рассматривается классическая задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с полуполосой в эллиптической части и условием непрерывности градиента на линии изменения типа. Доказаны теоремы единственности решения задачи Трикоми теоремы существования и единственности решения вспомогательной задачи для уравнения Лапласа и получены интегральные представления для первых частных производных решения.

На задачу Трикомми с эллиптической частью в виде полуполосы оратил внимание А.В. Бицадзе в связи с математическим моделированием плоскопараллельных установившихся движений газа. В данном случае построение решения элементарным конформным отображанием приводится к краевой задаче для определения аналитической функции в верхней полуплоскости [1, стр. 327]. На основавнии известной формулы Шварца [1, стр.315] А.В. Бицадзе было выписано в квадратурах решение этой задачи.

В работе [2] спектральным методом на основе результатов, полученных в статье [3], получено интегральное представление решения задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в аналогичной области с полуполосой и условием Франкля на линии изменения типа. В статье [4] изучалась вспомогательная задача Лапласа связи с задачей Трикоми-Неймана, когда на левой стороне полуполосы в эллиптической части условие первого рода, а на правой - условие второго рода. В отличие от работы [2] в статье [4] рассмотрен случай, соответствующий непрерывному градиенту на линии изменения типа. Построены интегральные представления для первых частных производных решения и доказана теорема единственности решения вспомогательной задачи. В работе [5] выписано интегральное представление регулярного решения задачи для уравнения Лапласа в полукруге с краевым условием первого рода на полуокружности и двумя различными краевыми условиями типа наклонной производной на двух прямолинейных участках границы.

2 Акутальность

Исследования уравнений смешанного типа имеют глубокие исторические корни, восходящие к 1920-м годам, когда Франческо Трикоми впервые рассмотрел краевую задачу для эллиптико-гиперболического уравнения, получившую впоследствии его имя. Дальнейшее развитие этой теории связано с работами С. Геллерстедта, который обобщил подход Трикоми на более широкий класс уравнений. Значительный вклад в развитие теории внесли такие выдающиеся математики, как М.А. Лаврентьев, Ф.И. Франкль, И.Н. Векуа и другие, показавшие важность этих уравнений для трансзвуковой газовой динамики, магнитогидродинамики и теории деформации поверхностей. Особый интерес представляют параболо-гиперболические уравнения, описывающие процессы, сочетающие волновые и диффузионные свойства, что делает их незаменимыми при моделировании сложных физических явлений.

В прикладном аспекте уравнения смешанного типа находят применение в самых разных областях. Например, при изучении движения газа в каналах с пористыми стенками давление в канале описывается волновым уравнением, тогда как в самой пористой среде - уравнением диффузии. Аналогичные ситуации возникают в электродинамике при анализе неоднородных сред, содержащих как диэлектрические, так и проводящие компоненты. В механике эти уравнения используются для моделирования колебаний струн и стержней с сосредоточенными массами, что имеет прямое отношение к задачам аэроупругости и вибрации конструкций. Тепловые процессы в средах с различными временами релаксации также естественным образом приводят к уравнениям смешанного типа.

Семидесятые-восьмидесятые годы XX века ознаменовались бурным развитием спектральной теории для уравнений смешанного типа, чему способствовали работы Е.И. Моисеева, С.М. Пономарева и Т.Ш. Кальменова. Особое внимание уделялось задачам со спектральным параметром в граничных условиях, которые часто оказываются несамосопряженными. Фундаментальные результаты в этом направлении были получены В.А. Ильиным, разработавшим строгую теорию для несамосопряженных операторов и установившим критерии базисности собственных функций. А.А. Шкаликов построил общую теорию спектральных задач с параметром в граничных условиях, доказав важные теоремы о полноте и базисности решений. Е.И. Моисеев предложил эффективный метод представления решений в виде биортогональных рядов, что потребовало глубокого анализа специальных тригонометрических систем.

Современные исследования в этой области охватывают широкий круг проблем, включая нелокальные граничные задачи, где условия связывают значения решения в различных точках, и обратные задачи, направленные на восстановление параметров уравнений по дополнительным данным. Особую практическую значимость имеют численные методы, разработанные, в частности, А.М. Ахтямовым для диагностики механических систем. Развитие вычислительных алгоритмов открывает новые возможности для применения теории уравнений смешанного типа в инженерных расчетах и компьютерном моделировании. Таким образом, эта область математики продолжает оставаться актуальной как с теоретической, так и с прикладной точек зрения, предлагая богатый инструментарий для решения сложных задач современной физики и техники.

3 Постановка задачи

Рассматривается задача Трикоми для уравнения Лавертьева-Бицадзе

$$\operatorname{sgn}(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0 \tag{1}$$

в области $D=D^+\cup D^-$, где $D^+=\{(x,y):\ 0<x<\pi,\ 0<y<+\infty\}$, $D^-=\{(x,y):\ -y<x<y+\pi,\ -\pi/2<y<0\}$ в классе функций $u(x,y)\in C^2(D^+)\cap C^2(D^-)\cap C(\overline{D^+\cup D^-})$ с граничными условиями

$$u(0,y)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y)=0,\ 0<y<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,-x)=f(x),\ 0\le x\le \pi/2,\ f(0)=0, \tag{3}$$

$$u(x,y)\rightrightarrows 0,\ y\to+\infty \tag{4}$$

и условием непрерывности градиента

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,-0),\ 0<x<\pi. \tag{5}$$

4 Теорема о единственности решения

Теорема 1. *Решение задачи (1) - (5) единственно.*

Доказательство. Пусть существуют два решения $u_1(x,y),u_2(x,y)$ задачи (1)-(5). Тогда $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ есть решение задачи (1)-(5) с функцией $f(x)\equiv 0$. В этом случае $u(x,y)=F(x+y)-F(0)$.

Отсюда следует, что равенство $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ выполняется для всех точек x и y из области гиперболичности. Используя условие склеивания (5) будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}|_{y=0+0} = 0. \tag{6}$$

В результате получаем задачу для нахождения гармонической функции $u(x, y)$ в области D^+ с граничными условиями (2),(4),(6).

В силу принципа Зарембы-Жиро и равенства (6) экстремум не может достигаться на интервале $\{(x, y) : \ 0 < x < \pi, \ y = 0\}$. На замкнутых боковых сторонах и на бесконечности экстремум не может достигаться в силу условий (2) и (4). Теорема доказана.

Известно, что общее решение в D^- уравнения (1) имеет вид

$$u(x, y) = F(x + y) + f(\frac{x - y}{2}) - F(0). \tag{7}$$

Продифференцируем равенство (7):

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)|_{y=0+0} = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \ 0 < x < \pi.$$

Используя условие склеивания (5), приходим к равенству

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \ 0 < x < \pi.$$

5 Постановка вспомогательной задачи

Получим в области D^+ вспомогательную задачу для оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \tag{8}$$

с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0, \ 0 < y < +\infty, \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \tag{10}$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, \ y \to +\infty \tag{11}$$

Упростим постановку вспомогательной задачи. Обозначим $\varphi(x) = f'(x/2)$ и положим $\varphi(x) \in L_2(0, \pi)$, тогда условие на линии $y = 0$ понимается в интегральном смысле, и получим следующую постановку.

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0 \tag{12}$$

в области $D^+=\{(x,y):\ 0<x<\pi,\ 0<y<+\infty\}$ в классе функций $u(x,y)\in C^2(D^+)\cap C^1(\overline{D^+}\cap\{y>0\})\cap C(\overline{D^+})$ с граничными условиями

$$u(0,y)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y)=0,\ 0<y<+\infty, \tag{13}$$

$$\lim_{y\to 0+0}\int\limits_0^\pi\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\varphi(x)\right]^2dx=0,\ \varphi(x)\in L_2(0,\pi) \tag{14}$$

$$u(x,y)\rightrightarrows 0,\ y\to+\infty \tag{15}$$

6 Существование и единственность решения вспомогательной задачи

Теорема 2. *Решение задачи (12) - (15) существует, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right], \tag{16}$$

где коэффициенты $A_n,\ n=0,1,2,\ldots$ *определяются из разложения*

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}} \tag{17}$$

Доказательство.

Докажем существование решения задачи $(12)-(15)$.Сперва необходимо убедиться в том, что система $\left\{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространтсве $L_2(0,\pi)$. Согласно результатам работы [3] система вида $\{\sin\left[(n+\beta/2)\,x+\gamma/2\right]\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространствен $L_2(0,\pi)$, тогда и только тогда, когда $-\frac{1}{2}<\gamma/\pi<\frac{3}{2}$ и $-\frac{3}{2}<\gamma/\pi+\beta<\frac{1}{2}$. В нашем случае $\gamma=\pi/2$, $\beta=-1$.

$$-\frac{3}{2}<\gamma/\pi+\beta<\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{3}{2}<\frac{1}{2}-1<\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{3}{2}<-\frac{1}{2}<\frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2}<\gamma/\pi<\frac{3}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}<\frac{3}{2}.$$

Неравества выполнены, а значит система $\left\{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$. Поэтому коэффициенты разложения в формуле (17) удовлетворяют двустороннему неравенству Бесселя

$$C_1\|\varphi\|^2_{L_2(0,\pi)} \le \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \le C_2\|\varphi\|^2_{L_2(0,\pi)}, 0<C_1<C_2,$$

где константы C_1, C_2 не зависят от φ, а значит сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|A_n|$ и сходится равномерно ряд (16). То, что функция (16) при $y>0$ - решение уравнения (12), удовлетворяющее условиям (13) - это очевидно. В силу равенства $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}=\dfrac{e^{-y/2}}{1-e^{-y}}$, также очевидно, что выполнено условие (15). Проверим выполнение условия (14). Выразим функцию $\varphi(x)$ из представления (17) и подставим в условие (14). Сперва рассмотрим подробнее подынтегральное выражение в (14).

$$M(x)=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi(x)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(-\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\right)\right]+\varphi(x)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sqrt{2}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\right)\right]+\varphi(x)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sqrt{2}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(-\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right)\right]+\varphi(x)=$$

$$=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1-e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right].$$

Таким образом получаем следующее выражение

$$I(y)=2\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx$$

Докажем, что $I(y)\to 0$ при $y\to 0+0$.

$$I(y)\le 4\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{m}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx+$$

$$+4\int_0^\pi \left[\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2 dx$$

В силу левой части неравенства Бесселя имеем оценку

$$\int_0^\pi \left[\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2 dx \le$$

$$\le C_3\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)^2 \le C_3\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Это верно $\forall\varepsilon > 0$, если $m \ge N = N(\varepsilon)$

Во втором слагаемом мы имеем дело с конечным числом элементов, поэтому:

$$\int_0^\pi \left[\sum_{n=0}^{m} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2 dx \le$$

$$\le C_4\sum_{n=0}^{m} A_n^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Это верно, если $0 < y < \delta$ (m зафиксировано в зависимости от N). Условие (14) выполнено. Теорема доказана.

Теорема 3. *Решение задачи (12) - (15) единственно.*

Доказательство. Докажем единственность решения этой задачи. Пусть $u(x, y)$ - разность двух решений - решение задачи с $\varphi(x) \equiv 0$. Необходимо получить выражение, где слева будет входить модуль или чётная степень функции u, а справа будет 0.

Введём обозначения $A_\varepsilon = (0, \varepsilon), A_R = (0, R), B_R = (\pi, R), B_\varepsilon = (\pi, \varepsilon)$. $D_{R\varepsilon}$ - прямоугольник $A_\varepsilon A_R B_R B_\varepsilon$. Справедливы следующие соотношения:

$$0 = \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} (R-y)(u_{xx}+u_{yy})dxdy = I$$

Заметим, что

$$(R-y)(u_{xx}+u_{yy})u = \left((R-y)\,u_x u\right)_x + \left((R-y)\,u_y u\right)_y - (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) + u_y u =$$

$$= (R-y)\left(u_{xx}u + u_x^2\right) + \left(-u_y + (R-y)\,u_{yy}u + (R-y)\,u_y^2\right) - (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) + u_y u$$

Подставим это выражение в интеграл

$$I = \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} \left(\left(R-y\right) u_x u \right)_x dxdy + \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} \left(\left(R-y\right) u_y u \right)_y dxdy - \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} \left(R-y\right) \left(u_x^2 + u_y^2\right) + \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} u_y u dxdy$$

Упростим теперь эти интегралы:

$$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} \left(\left(R-y\right) u_x u \right)_x dxdy = \int\limits_{[\varepsilon,R]} \left[(R-y) u_x u \right] |_0^\pi dy =$$

$$= \int\limits_{[\varepsilon,R]} \left[(R-y) u_x(\pi,y) u(\pi,y) - (R-y) u_x(0,y) u(0,y) \right] dy = 0$$

т.к. оба подынтегральных выражения равны нулю в силу условия (13).

$$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} \left(\left(R-y\right) u_y u \right)_y dxdy = \int\limits_{[0,\pi]} \left[\left(R-y\right) u_y u \right] |_\varepsilon^R dx = \int\limits_{[0,\pi]} \left[0 - \left(R-\varepsilon\right) u_y(x,\varepsilon) u(x,\varepsilon) \right] dx =$$

$$= - \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \left(R-\varepsilon\right) u_y u dx,$$

$$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} u_y u dxdy = \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} \left(\frac{u^2}{2} \right)_y' dxdy = \int\limits_{[0,\pi]} \left[\frac{u^2(x,R)}{2} - \frac{u^2(x,\varepsilon)}{2} \right] dx$$

В итоге получим

$$I = -\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} \left(R-y\right) \left(u_x^2 + u_y^2\right) dxdy - \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \left(R-\varepsilon\right) u_y u dx - \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \int\limits_{A_R B_R} \frac{u^2}{2} dx$$

Добавим и вычтем $\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \left(R-\varepsilon\right) u_x u dx$, тогда

$$I = -\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} \left(R-y\right) \left(u_x^2 + u_y^2\right) dxdy - \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \left(R-\varepsilon\right) \left(u_y - u_x\right) u dx - \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \left(R-\varepsilon\right) u_x u dx - \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx +$$

$$+ \int\limits_{A_R B_R} \frac{u^2}{2} dx$$

Отсюда следует

$$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} \left(R-y\right) \left(u_x^2 + u_y^2\right) dxdy + \frac{1}{2} \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx + \frac{R-\varepsilon}{2} u^2(\pi,\varepsilon) =$$

$$= \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \left(R-\varepsilon\right) \left(u_x - u_y\right) u dx + \frac{1}{2} \int\limits_{A_R B_R} u^2 dx \leq \{\text{Неравенство Коши-Буняковского}\}$$

$$\leq (R-\varepsilon)\left[\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}(u_y-u_x)^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}u^2dx\right]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R}u^2dx$$

Рассмотрим следующее неравенство: $(2ar-b)^2 \geq 0 \Rightarrow 4a^2r^2-4abr+b^2 \geq 0 \Rightarrow ab \leq ra^2+\frac{b}{4r}$

Возьмём $a=\left[(R-\varepsilon)\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}(u_y-u_x)^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$, $b=\left[(R-\varepsilon)\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}u^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$, $r=R-\varepsilon$, тогда

$$I \leq (R-\varepsilon)^2\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}(u_y-u_x)^2\,dx+\frac{1}{4}\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}u^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R}u^2dx,$$

$$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\frac{1}{4}\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}u^2dx+\frac{R-\varepsilon}{2}u^2(\pi,\varepsilon) \leq$$

$$\leq (R-\varepsilon)^2\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}(u_y-u_x)^2\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R}u^2dx$$

Устремим $\varepsilon \to 0+0$, тогда в силу условия (14)

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}(u_y-u_x)^2\,dx=0$$

и получим соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\iint\limits_{D_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi u^2(x,0)dx+\frac{R}{2}u^2(\pi,0) \leq \frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R}u^2dx$$

Устремим теперь $R \to \infty$, тогда в силу условия (15) $\int\limits_{A_R B_R}u^2dx \to 0$, тем самым, это возможно только в случае $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

7 Интегральное представление первых частных производных решения вспомогательной задачи

Теорема 4. *Пусть* $u(x,y)$ *- решение задачи* (12)$-$(15)*, тогда* u_x, u_y *представимы в виде*

$$u_y(x,y)=-Im\,\frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi}e^{\frac{iz}{2}}\int\limits_0^\pi\frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}\varphi(t)dt \qquad (18)$$

$$u_x(x,y)=Re\,\frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi}e^{\frac{iz}{2}}\int\limits_0^\pi\frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}\varphi(t)dt, \qquad (19)$$

в области D^+*, где* $z=x+iy$*.*

Доказательство.

Рассмотрим уравнение (17). Система синусов $\left\{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис в $L_2(0,\pi)$. Поэтому для коэффициентов $A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)$ справедливо следующее представление:

$$A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^{\pi}h_{n+1}(t)\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}dt,$$

где

$$h_n(t)=\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{n}\sin ktB_{n-k}.$$

Пусть $u(x,y)$ - решение задачи (12)-(15), тогда

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

и соотвественно

$$u_y(x,y)=-\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

Здесь как раз возникает нужный нам коэффициент $A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)$, поэтому

$$u_y(x,y)=-\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]dt$$

$\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]=Im\ e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}$, поэтому

$$u_y(x,y)=-Im\ \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}dt$$

Обозначим $z=x+iy$

$$u_y(x,y)=-Im\ \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z}dt$$

Для дальнейших операций нам было бы удобно, чтобы суммирование начинолось от 1, а не 0, поэтому сделаем замену $m=n+1$

$$u_y(x,y)=-Im\ \sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{m}(t)e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}dt$$

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{-\dfrac{iz}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{imz} dt$$

Поменяем местами знаки интергирования и суммирования

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{-\dfrac{iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz} dt$$

Введём новое обозначение:

$$I(t,z) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz}$$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin kt B_{n-k} e^{inz} = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{n=k}^{\infty} e^{inz} B_{n-k}$$

Введём новый индекс $m = n - k$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} B_m = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} B_m$$

Первый ряд можем вычислить по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt = \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \frac{1}{2i} \left(e^{ikt} - e^{-ikt} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - e^{i(z+t)}} - \frac{1}{1 - e^{i(z-t)}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{e^{i(z+t)} - e^{i(z-t)}}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)} = \frac{e^{iz} \sin t}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} B_l = \sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} \sum_{m=0}^{l} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{l-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} e^{ilz} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{l-m} =$$

Введём новый индекс суммирования $k = l - m$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} C_{\gamma/\pi}^{k} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{k} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} C_{\gamma/\pi}^{k} (-1)^{k} e^{ikz} =$$

$$= (1 + e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta} (1 - e^{iz})^{\gamma/\pi}$$

В нашем случае $\beta = -1, \gamma = \pi/2$, поэтому

$$(1 + e^{iz})^{1/2} (1 - e^{iz})^{1/2} = \sqrt{1 - e^{i2z}}$$

Собираем все решение:

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} I(t,z) dt$$

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^\pi \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \sqrt{1-e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

Подставляя β и γ получим

$$u_y(x,y) = -Im\ \frac{2}{\pi} e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^\pi \frac{1}{2\cos t/2\sqrt{\tan t/2}} \frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \sqrt{1-e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

$$u_y(x,y) = -Im\ \frac{e^{\dfrac{+iz}{2}}}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}\sqrt{1-e^{i2z}}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t) dt$$

Аналогично докажем соотношение для частной производной по x.

$$u_x(x,y) = \sum_{n=0}^\infty A_n \left(n+\frac{1}{2}\right) e^{-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)y} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

Здесь как раз возникает нужный нам коэффициент $A_n\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$, поэтому

$$u_x(x,y) = \sum_{n=0}^\infty \int\limits_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)y} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] dt$$

$\cos\left[\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\right] = \mathrm{Re}\ e^{i\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}$, поэтому

$$u_x(x,y) = \mathrm{Re}\ \sum_{n=0}^\infty \int\limits_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)y} e^{i\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x} dt$$

Обозначим $z = x + iy$

$$u_x(x,y) = \mathrm{Re}\ \sum_{n=0}^\infty \int\limits_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{i\left(n+\dfrac{1}{2}\right)z} dt$$

Для дальнейших операций нам было бы удобно, чтобы суммирование начинолось от 1, а не 0, поэтому сделаем замену $m = n + 1$

$$u_x(x,y) = \mathrm{Re}\ \sum_{m=1}^\infty \int\limits_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{i\left(m-\dfrac{1}{2}\right)z} dt$$

$$u_x(x,y) = \mathrm{Re}\ e^{-\dfrac{iz}{2}} \sum_{m=1}^\infty \int\limits_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{imz} dt$$

Поменяем местами знаки интергирования и суммирования

$$u_x(x,y) = \operatorname{Re} e^{-\frac{iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz} dt$$

Введём новое обозначение:

$$I(t,z) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz}$$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin kt B_{n-k} e^{inz} = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{n=k}^{\infty} e^{inz} B_{n-k}$$

Введём новый индекс $m = n - k$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} B_m = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} B_m$$

Первый ряд можем вычислить по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt = \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \frac{1}{2i} \left(e^{ikt} - e^{-ikt} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - e^{i(z+t)}} - \frac{1}{1 - e^{i(z-t)}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{e^{i(z+t)} - e^{i(z-t)}}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)} = \frac{e^{iz} \sin t}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} B_l = \sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} \sum_{m=0}^{l} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{l-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} e^{ilz} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{l-m} =$$

Введём новый индекс суммирования $k = l - m$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} C_{\gamma/\pi}^{k} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{k} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} C_{\gamma/\pi}^{k} (-1)^{k} e^{ikz} =$$

$$= (1 + e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta} (1 - e^{iz})^{\gamma/\pi}$$

В нашем случае $\beta = -1, \gamma = \pi/2$, поэтому

$$= (1 + e^{iz})^{1/2} (1 - e^{iz})^{1/2} = \sqrt{1 - e^{i2z}}$$

Собираем все решение:

$$u_x(x,y) = \operatorname{Re} e^{\frac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} I(t,z) dt$$

$$u_x(x,y) = \operatorname{Re} e^{\frac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{e^{iz} \sin t}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

Подставляя β и γ получим

$$u_x(x,y) = \operatorname{Re} \frac{2}{\pi} e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2\cos t/2\sqrt{\tan t/2}} \frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \sqrt{1-e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

$$u_x(x,y) = \operatorname{Re} \frac{e^{\dfrac{iz}{2}}}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin t}\sqrt{1-e^{i2z}}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t) dt$$

Теорема доказана.

8 Заключение

В данной работе исследована задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в смешанной области, состоящей из эллиптической и гиперболической частей. Основные результаты работы можно сформулировать следующим образом:

1. Доказана теорема единственности решения поставленной задачи, основанная на принципе Зарембы-Жиро и анализе поведения решения на границах области.

2. Построена вспомогательная задача для оператора Лапласа в полуполосе, эквивалентная исходной задаче. Для этой вспомогательной задачи:

    (a) Доказана теорема существования решения в виде равномерно сходящегося ряда

    (b) Установлена единственность решения с использованием специального интегрального тождества

    (c) Получены интегральные представления для частных производных решения

Основным результатом работы является теорема 4, дающая явные интегральные представления для первых производных решения через заданное начальное условие $\varphi(x) \in L_2(0,\pi)$. Эти представления имеют комплексный вид и выражаются через специальные интегральные операторы.

Полученные результаты развивают теорию краевых задач для уравнений смешанного типа и могут быть применены:

1. В теории дифференциальных уравнений с частными производными

2. При исследовании задач газовой динамики

3. В теории фильтрации и других прикладных задачах

Перспективными направлениями дальнейших исследований могут быть:

1. Обобщение результатов на случай нелинейных уравнений
2. Исследование задач с более сложными граничными условиями
3. Развитие численных методов решения на основе полученных аналитических представлений

Список литературы

[1] *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.:Наука, 1981. – 448 с.

[2] *Моисеев Е.И., Моисевв Т.Е., Вафадорова Г.О.* Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51 №8. С. 1070-1075.

[3] *Моисеев Е.И.* О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23 №1. С. 177-189.

[4] *Капустин Н.Ю., Васильченко Д.Д.* Краевая задача для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60 №12. С. 1713-1718.

[5] *Моисеев Т.Е.* Об интегральном представлении решения уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47 №10. С. 1446-1451.