Интегральное представление решения уравнения Лапласа

Ранее была рассмотрена задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{0.1}$$

В полуполосе $D = \{(x, y) | 0 < x < \pi, 0 < y\}$
В классе функций $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$
с граничными условиями

$$u(0, y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0 \tag{0.2}$$

$$\lim_{y \to 0+0} \int\limits_0^\pi \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x) \right]^2 dx = 0,\ \varphi(x) \in L_2[0, \pi] \tag{0.3}$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, y \to \infty \tag{0.4}$$

И была доказана теорема:

Теорема 1. *Решение задачи (2.1 - 2.4) существует и единственно, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right) y} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) x \right], \tag{0.5}$$

где коэффициенты $A_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ *находятся из разложения*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) x + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}} \tag{0.6}$$

Рассмотрим теперь интегральное представление производных решения этой задачи:

Теорема 2. *Пусть* $u(x,y)$ *- решение задачи* $(1)-(4)$*, тогда* u_x, u_y *представимы в виде*

$$u_y(x,y) = -Im\ \frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{+iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t) dt \tag{0.7}$$

$$u_x(x,y) = Re\ \frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{+iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t) dt \tag{0.8}$$

Доказательство. :
Рассмотрим уравнение (6). Система синусов $\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]$ образует базис в $L_2(0,\pi)$. Поэтому для коэффициентов $A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)$ справедливо следующее представление:

$$A_n\left(n+\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{\pi} h_{n+1}(t) \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt,$$

где

$$h_n(t) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{n} \sin kt B_{n-k}$$

Пусть $u(x,y)$ - решение задачи (1)-(4), тогда

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

и соотвественно

$$u_y(x,y) = -\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

Здесь как раз возникает нужный нам коэффициент $A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)$, поэтому

$$u_y(x,y) = -\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] dt$$

$\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] = Im\ e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}$, поэтому

$$u_y(x,y) = -Im\ \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}dt$$

Обозначим $z = x + iy$

$$u_y(x,y) = -Im\ \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z}dt$$

Для дальнейших операций нам было бы удобно, чтобы суммирование начинолось от 1, а не 0, поэтому сделаем замену $m = n + 1$

$$u_y(x,y) = -Im\ \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_m(t)e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}dt$$

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{-\frac{iz}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_m(t)e^{imz}dt$$

Поменяем местами знаки интергирования и суммирования

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{-\frac{iz}{2}}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}\sum_{m=1}^{\infty}h_m(t)e^{imz}dt$$

Введём новое обозначение:

$$I(t,z) = \sum_{m=1}^{\infty}h_m(t)e^{imz}$$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin kt B_{n-k}e^{inz} = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\sin kt\sum_{n=k}^{\infty}e^{inz}B_{n-k}$$

Введём новый индекс $m = n - k$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\sin kt\sum_{m=0}^{\infty}e^{i(m+k)z}B_m = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}e^{ikz}\sin kt\sum_{m=0}^{\infty}e^{imz}B_m$$

Первый ряд можем вычислить по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz}\sin kt = \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz}\frac{1}{2i}\left(e^{ikt}-e^{-ikt}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-e^{i(z+t)}}-\frac{1}{1-e^{i(z-t)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{e^{i(z+t)}-e^{i(z-t)}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} = \frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz}B_l = \sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz}\sum_{m=0}^{l} C_{\gamma/\pi}^{l-m}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}(-1)^{l-m} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} e^{ilz}C_{\gamma/\pi}^{l-m}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}(-1)^{l-m} =$$

Введём новый индекс суммирования $k = l - m$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e^{i(m+k)z}C_{\gamma/\pi}^{k}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}(-1)^{k} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}\sum_{k=0}^{\infty} C_{\gamma/\pi}^{k}(-1)^{k}e^{ikz} = (1+e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta}(1-e^{iz})^{\gamma/\pi}$$

В нашем случае $\beta = -1, \gamma = \pi/2$, поэтому

$$= (1+e^{iz})^{1/2}(1-e^{iz})^{1/2} = \sqrt{1-e^{i2z}}$$

Собираем все решение:

$$u_y(x,y) = -Im\, e^{\frac{-iz}{2}}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}I(t,z)dt$$

$$u_y(x,y) = -Im\, e^{\frac{-iz}{2}}\int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}\sqrt{1-e^{i2z}}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}dt$$

Подставляя β и γ получим

$$u_y(x,y) = -Im\,\frac{2}{\pi}e^{\frac{-iz}{2}}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\cos t/2\sqrt{\tan t/2}}\frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}\sqrt{1-e^{i2z}}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}dt$$

$$u_y(x,y) = -Im\,\frac{e^{\frac{+iz}{2}}}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{\sin t}\sqrt{1-e^{i2z}}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}\varphi(t)dt$$

□

Замечание по поводу интегрального представления самого решения

Трудности с получением интегрального представления решения задачи (1)-(4) Возникают в связи с тем, что в исходном разложении мы имеем коэффициенты $A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)$, а не A_n. Если попытаться прямо подставить интегральное представление в коэффициенты, то

$$I(t,z)=\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\sin kt\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{i(m+k)z}B_m}{m+k-\dfrac{1}{2}}$$

Пока просуммировать эти ряды не удаётся

В качестве второго подхода можно попытаться избавиться от $\left(n+\frac{1}{2}\right)$ при помощи интегрирования, тогда получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\frac{\pi}{4}\right]=\int\limits_0^x\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}dt-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{\sqrt{2}}$$

Но данная система синусов не образует базис Рисса.