

## 1 Гильбертовы пространства

### 1.1 Определение и простейшие свойства гильбертова пространства

**Определение 1.1.** Полное евклидово (унитарное) бесконечномерное пространство называется Гильбертовым (обычно обозначается  $H$ )

**Теорема 1.** Норма согласованная со скалярным произведением существует  $\Leftrightarrow$  выполнено равенство  $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

### 1.2 Теорема об элементе с наименьшей нормой. Разложение гильбертова пространства в прямую ортогональную сумму подпространств

**Определение 1.2.** Множество называется выпуклым, если вместе с любой парой своих точек оно содержит и соединяющий их отрезок

**Теорема 2.** (об элементе с наименьшей нормой)

Пусть  $M$  - замкнутое выпуклое подмножество  $H$ , тогда в  $M$  существует элемент с наименьшей нормой и он единственен.

**Определение 1.3.** Множество всех элементов  $H$  ортогональных подмножеству  $L$  называется ортогональным дополнением к  $L$  (обозначается  $L^\perp$ )

**Теорема 3.** (о разложении Гильбертова пространства в сумму)

Пусть  $L$  - замкнутое линейное подмножество  $H$ , тогда справедливо  $H = L \oplus L^\perp$ , т.е.  $\forall x \in H \exists! x_1 \in L, x_2 \in L^\perp : x = x_1 + x_2$

### 1.3 Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала

**Лемма 1.1.** Пусть  $f(x)$  - линейный ограниченный функционал над  $H$  и  $f \neq 0$ , тогда  $\dim(\ker f)^\perp = 1$

**Теорема 4.** (Рисса о представлении линейного ограниченного функционала)

$\forall f(x) \in H^* \exists! h \in H : f(x) = (x, h), \|f\| = \|h\|$

### 1.4 Слабая сходимость

Свойства слабо сходящихся последовательностей:

1.  $x_n \rightharpoonup x_0, \|x_n\| \rightarrow \|x_0\| \Rightarrow x_n \rightarrow x_0$
2.  $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \geq \|x\|$
3. (Лемма Кадеца)  $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \exists \{n_k\} : \frac{x_{n_1} + \dots + x_{n_k}}{k} \rightarrow x$

### 1.5 Полные, замкнутые, ортонормированные системы

**Определение 1.4.** Система называется замкнутой в  $H$ , если любой элемент из  $H$  можно приблизить конечной линейной комбинацией из элементов системы с наперёд заданной точностью.

**Определение 1.5.** Система  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  называется полной, если из  $(x, x_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$  следует  $x = 0$ .

**Теорема 5.** В  $H$  понятие замкнутости и полноты эквивалентны.

**Теорема 6.** (Рисса-Фишера)

Пусть  $\{e_n\}$  - полная система и пусть задана  $\{c_k\} \subset \mathbb{C} : \sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 < \infty \Rightarrow \exists! x \in H : (x, e_k) = c_k$  и  $\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 = \|x\|^2$

### 1.6 Процесс ортогонализации

**Теорема 7.** В сепарабельном  $H$  существует полная ортонормированная система.

**Теорема 8.** Все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны с изометрией между собой.

## 2 Пространства Соболева. Обобщённые решения краевых задач

**Определение 2.1.** Пространство Соболева: Рассмотрим пространство  $C^1[0, 1]$  со скалярным произведением  $(u, v)_w = \int_0^1 uv dt + \int_0^1 u'v' dt$  дополним это пространство по норме, тогда получим пространство Соболева  $W_2^1(0, 1)$ .

**Определение 2.2.** Рассмотрим  $\|u_n - u_m\|_{W_2^1(0, 1)}$  - фундаментальная, тогда Обобщённой производной функции и называется  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n' = v$

**Лемма 2.1.** Пусть  $u(x) \in C^1[0, 1]$ , тогда  $\|u\|_C \leq \sqrt{2}\|u\|_{W_2^1(0,1)}$

**Теорема 9.** (Вложения)

Пространство  $W_2^1(0, 1) \subset C(0, 1)$ , причем ограничено ( $\exists M > 0 : \|u\|_C \leq M\|u\|_{W_2^1(0,1)}$ )

**Теорема 10.** Вложение  $W_2^1(0, 1) \subset C(0, 1)$  компактно.

**Следствие 2.1.** Из последовательности, ограниченной в  $W_2^1(0, 1) \subset C(0, 1)$  можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в  $L_2[0, 1]$ .

## 2.1 Обобщённые решения краевых задач

Пространство  $\dot{W}_2^1(0, 1)$  - пространство Соболева, но функции дополнительно обращаются в 0 на концах отрезка.  
**1-ая краевая задача**

$$\begin{cases} (a(t)u'(t))' - c(t)u(t) = -f(t), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ 0 < a_0 \leq a(t) \leq a_1 < \infty, \\ 0 \leq c_0 \leq c(t) \leq c_1 < \infty, \\ f(t) \in L_2(0, 1), \\ a(t), b(t) - \text{Ограниченные и измеримые на } [0, 1] \end{cases} \quad (2.1)$$

**Определение 2.3.** Обобщённым решением первой краевой задачи (2.1) называется функция  $u \in \dot{W}_2^1(0, 1)$ , удовлетворяющая тождеству  $\forall v \in \dot{W}_2^1(0, 1)$

$$\int_0^1 (a(t)u'(t)v'(t) + c(t)u(t)v(t)) dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt$$

**Теорема 11.** Обобщённое решение задачи (2.1) существует и единственно

**Лемма 2.2.** (Неравенство Пуанкаре)

Пусть  $u \in \dot{W}_2^1(0, 1)$ , тогда  $\int_0^1 u^2 dt \leq \int_0^1 (u')^2 dt$

**2-ая краевая задача**

$$\begin{cases} (a(t)u'(t))' - c(t)u(t) = -f(t), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \\ 0 < a_0 \leq a(t) \leq a_1 < \infty, \\ 0 < c_0 \leq c(t) \leq c_1 < \infty, \\ f(t) \in L_2(0, 1), \\ a(t), b(t) - \text{Ограниченные и измеримые на } [0, 1] \end{cases} \quad (2.2)$$

**Определение 2.4.** Обобщённым решением второй краевой задачи (2.2) называется функция  $u \in \dot{W}_2^1(0, 1)$ , удовлетворяющая тождеству  $\forall v \in \dot{W}_2^1(0, 1)$

$$\int_0^1 (a(t)u'(t)v'(t) + c(t)u(t)v(t)) dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt$$

**Теорема 12.** Обобщённое решение задачи (2.2) существует и единственно

## 3 Компактные (вполне непрерывные) операторы в гильбертовом пространстве

### 3.1 Сопряженный оператор

**Определение 3.1.** Оператор  $B$  называется сопряжённым к оператору  $A$ , если  $\forall x, y \in H : (Ax, y) = (x, By)$

**Теорема 13.** Пусть  $A$  - линейный ограниченный оператор, тогда  $\exists A^*$  - линейный и ограниченный и  $\|A\| = \|A^*\|$

### 3.2 Вполне непрерывные операторы

**Определение 3.2.** Оператор  $A$  называется вполне непрерывным, если слабосходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся.

**Лемма 3.1.** Пусть  $A$  - линейный ограниченный, тогда из  $x_n \rightharpoonup x$  следует  $Ax_n \rightarrow Ax$

**Определение 3.3.** Пусть  $A$  - вполне непрерывный, тогда  $A^*$  - вполне непрерывный

### 3.3 Компактный оператор

**Определение 3.4.** Оператор  $A$  называется компактным, если ограниченное множество переводит в предкомпактное.

**Теорема 14.** Оператор  $A$  - компактный  $\Leftrightarrow$  он вполне непрерывен.

### 3.4 Приближение компактных операторов

**Теорема 15.** Пусть  $A$  - ограниченный,  $A_n$  - вполне непрерывны и  $\|A_n\| \rightarrow \|A\|$ , тогда  $A$  - компактный.

**Лемма 3.2.** Пусть  $A$  - компактный, тогда  $\exists z \in H : \|z\| = 1$  и  $\|Az\| = \|A\|$ .

**Теорема 16.** Пусть  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  - ОНБ в сепарабельном  $H$ .  $P_n x = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k$ . Пусть  $A$  - компактный, тогда  $\|A - P_n A P_n\| \rightarrow 0$ .

## 4 Теория Фредгольма для вполне непрерывных операторов

### 4.1 Третья теорема Фредгольма

Будем рассматривать оператор  $T = E - A$ , где  $A$  - вполне непрерывный.

**Теорема 17.**  $\exists a > 0 : \|Tx\| \geq a\|x\|, \forall x \perp \ker T$

**Теорема 18.**  $R(T)$  - замкнуто

**Теорема 19.** Пусть  $B$  - линейный ограниченный оператор, тогда справедливо разложение  $H = \ker B \oplus \overline{R(B^*)} = \ker B^* \oplus \overline{R(B)}$

**Теорема 20.** (III - Фредгольма)

Уравнение  $Tx = y$  разрешимо  $\Leftrightarrow y \perp \ker T^*$

### 4.2 Первая теорема Фредгольма

**Теорема 21.**  $\text{def } T = \dim \ker T < \infty$

**Теорема 22.** (о стабилизации ядер)

$\exists N \in \mathbb{N} : \ker T \subset \ker T^2 \subset \dots \subset \ker T^N = \ker T^{N+1} = \dots$

**Теорема 23.** (I - Фредгольма)

Уравнение  $Tx = y$  разрешимо при  $\forall$  правой части  $\Leftrightarrow \ker T = \emptyset$

### 4.3 Вторая теорема Фредгольма

**Теорема 24.** (II - Фредгольма)

$\text{def } T = \text{def } T^* < \infty$

### 4.4 Общее операторное уравнение. Альтернатива Фредгольма

$$(A - \lambda E)x = y, \lambda \neq 0 \in \mathbb{C}, A - \text{вп. непр.}$$

можем переписать в виде

$$(E - \tilde{A})x = \tilde{y}, \tilde{y} = -y/\lambda, \tilde{A} = -A/\lambda$$

**Теорема 25.** Уравнение  $(A - \lambda E)x = y$  разрешимо для любой правой части  $\Leftrightarrow \ker A - \lambda E = \{0\}$

**Теорема 26.**  $\text{def}(A - \lambda E) = \text{def}(A^* - \bar{\lambda}E) < \infty$

**Теорема 27.** Уравнение  $(A - \lambda E)x = y$  разрешимо  $\Leftrightarrow y \perp \ker A^* - \bar{\lambda}E$ .

**Теорема 28.** (Альтернатива Фредгольма)

Либо уравнение  $(A - \lambda E)x = y$  разрешимо для любой правой части, либо  $\ker A - \lambda E \neq \{0\}$

## 5 Спектральная теория линейных ограниченных операторов

### 5.1 Спектр оператора

$X$  - банахово.

**Определение 5.1.** Точка  $\lambda \in \mathbb{C}$  называется регулярной точкой оператора  $A$ , если

1.  $\ker(A - \lambda E) = \{0\}$

2.  $R(A - \lambda E) = X$

3.  $\exists (A - \lambda E)^{-1}$  - ограниченный и определённый на всем  $X$ .

**Определение 5.2.** Множество регулярных точек оператора  $A$  обозначаем  $\rho(A)$

**Определение 5.3.**  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  - спектр оператора  $A$ .

**Теорема 29.** Пусть  $A$  - ограниченный оператор и  $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$ .

**Определение 5.4.**  $R_A(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}$  - резольвента оператора  $A$ .

**Теорема 30.** Пусть  $A$  - ограниченный оператор,  $\lambda \in \rho(A)$ ,  $|\Delta| < \frac{1}{\|R_A(\lambda)\|} \Rightarrow \lambda + \Delta \in \rho(A)$ .

**Теорема 31.** (Тождество Гильберта)

Если  $A$  - ограниченный и  $\lambda, \mu \in \rho(A)$ , то  $R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\lambda - \mu)R_A(\lambda)R_A(\mu)$

**Теорема 32.**  $H$  - гильбертово. Пусть  $A : H \rightarrow H$  - линейный ограниченный оператор, тогда  $\sigma(A) \neq \emptyset$ .

## 5.2 Спектр вполне непрерывного оператора

**Определение 5.5.** (Классификация точек спектра)

Пусть  $\lambda \in \sigma(A)$ , тогда

1. Если  $\ker(A - \lambda E) \neq \{0\}$ , то  $\lambda$  принадлежит точечному спектру  $\sigma_p(A)$ .
2. Если  $\ker(A - \lambda E) = \{0\}$ ,  $R(A - \lambda E) \neq X$ , но  $\overline{R(A - \lambda E)} = X$ , то  $\lambda$  принадлежит непрерывному спектру  $\sigma_c(A)$ .
3. Если  $\ker(A - \lambda E) = \{0\}$ ,  $R(A - \lambda E) \neq X$  и  $\overline{R(A - \lambda E)} \neq X$ , то  $\lambda$  принадлежит остаточному спектру  $\sigma_r(A)$ .

**Теорема 33.** Пусть  $A$  - вполне непрерывный оператор и  $\lambda \neq 0 \in \sigma(A)$ , тогда  $\lambda \in \sigma_p(A)$ .

**Теорема 34.** Если  $\dim H = \infty$  и  $A$  - вполне непрерывный, то  $0 \in \sigma(A)$ .

**Теорема 35.** Пусть  $A$  - вполне непрерывный оператор, тогда если в спектре  $\sigma(A)$  есть последовательность  $\lambda_n$ , то  $\lambda_n \rightarrow 0$ .

## 5.3 Спектр самосопряженного оператора

$H$  - гильбертово.  $A : H \rightarrow H$  - линейный ограниченный самосопряженный.

**Теорема 36.** Пусть  $A$  - ограниченный самосопряженный оператор, тогда  $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x) = \mu$ .

**Теорема 37.** Ограниченный линейный оператор  $A$  - самосопряженный  $\Leftrightarrow \operatorname{Im} (Ax, x) = 0, \forall x \in X$

**Теорема 38.** Пусть  $A$  - ограниченный линейный самосопряженный оператор, тогда  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$

**Лемма 5.1.** Собственные вектора  $A$  отвечающие различным собственным значениям ортогональны.