Об интегральном представлении производных решения задачи для уравнения Лапласа с интегральным граничным условием

Васильченко Дмитрий Дмитриевич

Кафедра общей математики

e-mail: dvasil.arm@gmail.com

Научный руководитель — д.ф.-м.н. проф. Капустин Николай Юрьевич

Научный консультант — д.ф.-м.н. проф. Капустин Николай Юрьевич

Введение. В работе рассматривается классическая задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с полуполосой в эллиптической части и условием непрерывности градиента на линии изменения типа. Доказаны теоремы единственности решения задачи Трикоми теоремы существования и единственности решения вспомогательной задачи для уравнения Лапласа и получены интегральные представления для первых частных производных решения.

На задачу Трикомми с эллиптической частью в виде полуполосы оратил внимание А.В. Бицадзе в связи с математическим моделированием плоскопараллельных установившихся движений газа. В данном случае построение решения элементарным конформным отображанием приводится к краевой задаче для определения аналитической функции в верхней полуплоскости [1]. На основавнии известной формулы Шварца [1] А.В. Бицадзе было выписано в квадратурах решение этой задачи.

В работе [2] спектральным методом на основе результатов, полученных в статье [3], получено интегральное представление решения задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в аналогичной области с полуполосой и условием Франкля на линии изменения типа. В статье [4] изучалась вспомогательная задача Лапласа связи с задачей Трикоми-Неймана, когда на левой стороне полуполосы в эллиптической части условие первого рода, а на правой - условие второго рода. В отличие от работы [2] в статье [4] рассмотрен случай, соответствующий непрерывному градиенту на линии изменения типа. Построены интегральные представления для первых частных производных решения и доказана теорема единственности решения вспомогательной задачи. В работе [5] выписано интегральное представление регулярного решения задачи для уравнения Лапласа в полукруге с краевым условием первого рода на полуокружности и двумя различными краевыми условиями типа наклонной производной на двух прямолинейных участках границы.

Актуальность. Исследования уравнений смешанного типа имеют глубокие исторические корни, восходящие к 1920-м годам, когда Франческо Трикоми впервые рассмотрел краевую задачу для эллиптико-гиперболического уравнения, получившую впоследствии его имя. Дальнейшее развитие этой теории связано с работами С. Геллерстедта, который обобщил подход Трикоми на более широкий класс уравнений. Значительный вклад в развитие теории внесли такие выдающиеся математики, как М.А. Лаврентьев, Ф.И. Франкль, И.Н. Векуа и другие, показавшие важность этих уравнений для трансзвуковой газовой динамики, магнитогидродинамики и теории деформации поверхностей. Особый интерес представляют параболо-гиперболические уравнения, описывающие процессы, сочетающие волновые и диффузионные свойства, что делает их незаменимыми при моделировании сложных физических явлений.

В прикладном аспекте уравнения смешанного типа находят применение в самых разных областях. Например, при изучении движения газа в каналах с пористыми стенками давление в канале описывается волновым уравнением, тогда как в самой пористой среде - уравнением диффузии. Аналогичные ситуации возникают в электродинамике при анализе неоднородных сред, содержащих как диэлектрические, так и проводящие компоненты. В механике эти уравнения используются для моделирования колебаний струн и стержней с сосредоточенными массами, что имеет прямое отношение к задачам аэроупругости и вибрации конструкций. Тепловые процессы в средах с различными временами релаксации также естественным образом приводят к уравнениям смешанного типа.

Семидесятые-восьмидесятые годы XX века ознаменовались бурным развитием спектральной теории для уравнений смешанного типа, чему способствовали работы Е.И. Моисеева, С.М. Пономарева и Т.Ш. Кальменова. Особое внимание уделялось задачам со спектральным параметром в граничных условиях, которые часто оказываются несамосопряженными. Фундаментальные результаты в этом направлении были получены В.А. Ильиным, разработавшим строгую теорию для несамосопряженных операторов и установившим критерии базисности собственных функций. А.А. Шкаликов построил общую теорию спектральных задач с параметром в граничных условиях, доказав важные теоремы о полноте и базисности решений. Е.И. Моисеев предложил эффективный метод представления решений в виде биортогональных рядов, что потребовало глубокого анализа специальных тригонометрических систем.

Современные исследования в этой области охватывают широкий круг проблем, включая нелокальные граничные задачи, где условия связывают значения решения в различных точках, и обратные задачи, направленные на восстановление параметров уравнений по дополнительным данным. Особую практическую значимость имеют численные методы, разработанные, в частности, А.М. Ахтямовым для диагностики механических систем. Развитие вычислительных алгоритмов открывает новые возможности для применения теории уравнений смешанного типа в инженерных расчетах и компьютерном моделировании. Таким образом, эта область математики продолжает оставаться актуальной как с теоретической, так и с прикладной точек зрения, предлагая богатый инструментарий для решения сложных задач современной физики и техники.

Постановка задачи. Рассматривается задача Трикоми для уравнения Лавертьева-Бицадзе

$$\operatorname{sgn}(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0 \tag{1}$$

в области $D=D^+\cup D^-$, где $D^+=\{(x,y):\ 0<x<\pi,\ 0<y<+\infty\}$, $D^-=\{(x,y):\ -y<x<y+\pi,\ -\pi/2<y<0\}$ в классе функций $u(x,y)\in C^2(D^+)\cap$ $\cap C^2(D^-)\cap C(\overline{D^+\cup D^-})$ с граничными условиями

$$u(0,y)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y)=0,\ 0<y<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,-x)=f(x),\ 0\leqslant x\leqslant \pi/2,\ f(0)=0, \tag{3}$$

$$u(x,y)\rightrightarrows 0,\ y\to+\infty \tag{4}$$

и условием непрерывности градиента

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,-0),\ 0<x<\pi. \tag{5}$$

Теорема 1. *Решение задачи (1)-(5) единственно.*

Постановка вспомогательной задачи для уравнения Лапласа. Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0 \tag{6}$$

в области $D^+=\{(x,y):\ 0<x<\pi,\ 0<y<+\infty\}$ в классе функций $u(x,y)\in C^2(D^+)$ $\cap C^1(\overline{D^+}\cap\{y>0\})\cap C(\overline{D^+})$ с граничными условиями

$$u(0,y)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y)=0,\ 0<y<+\infty, \tag{7}$$

$$\lim_{y\to 0+0}\int\limits_0^\pi\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\varphi(x)\right]^2dx=0,\ \varphi(x)\in L_2(0,\pi) \tag{8}$$

$$u(x,y)\rightrightarrows 0,\ y\to+\infty \tag{9}$$

Основные результаты.

Теорема 2. *Решение задачи (6) - (9) существует, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right], \tag{10}$$

где коэффициенты $A_n,\ n=0,1,2,\ldots$ *определяются из разложения*

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}}. \tag{11}$$

Теорема 3. *Решение задачи (6)-(9) единственно.*

Теорема 4. *Пусть* $u(x,y)$ *- решение задачи* $(6)-(9)$, *тогда* u_x, u_y *представимы в виде*

$$u_y(x,y) = -Im\ \frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{iz}{2}} \int\limits_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t)dt \tag{12}$$

$$u_x(x,y) = Re\ \frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{iz}{2}} \int\limits_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t)dt, \tag{13}$$

в области D^+, *где* $z = x + iy$.

Литература

[1] Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М. : Наука, 1931. 448 с.

[2] Моисеев Е. И., Моисеев Т. Е., Вафадорова Г. О. Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 8. С. 1070–1075.

[3] Моисеев Е. И. О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 177–189.

[4] Капустин Н. Ю., Васильченко Д. Д. Краевая задача для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 12. С. 1713–1718.

[5] Моисеев Т. Е. Об интегральном представлении решения уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 10. С. 1446–1451.