Обобщённые функции

Ломов И.С.

1 Элементарная теория обобщённых функций

1.1 Основные функции в $\mathbb{R}^1$

Определение. *Под основной функцией понимают любую вещественную функцию, финитную на $\mathbb{R}$ и определенную на $\mathbb{R}$ и непрерывную вместе с любой производной конечного порядка на $\mathbb{R}$.*

Если $\varphi = 0$ вне $[a,b]$, то говорят, что φ сосредоточена на $[a,b]$. В этом случае $[a,b]$ - носитель $\varphi(x)$. $\operatorname{supp}\varphi(x) = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}$. Пространство финитных функций является линейным, проверяется тривиально.

1.1.1 Предельный переход в K

Пусть φ_n - последовательность основных функций.

Определение. *$\varphi_n(x) \to 0$ в K, если все $\varphi_n(x)$ сосредоточены на одном отрезке, последовательность $\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$ на этом отрезке и $\forall k \in \mathbb{N}$ $\varphi_n^{(k)} \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$*

Очевидно, что $\varphi_n \to \varphi$ в K, если $\varphi \in K$ и $\varphi_n - \varphi \to 0$ в K.

Пример. *"Шапочка"*

$$\varphi(x;a) = \begin{cases} e^{-\dfrac{a^2}{a^2-x^2}}, \ |x| \leqslant a \\ 0, \ |x| > a \end{cases}$$

Пусть $\varphi_n = \dfrac{1}{n}\varphi(x;a) \to 0$ в K, но если возьмем $\varphi_n = \dfrac{1}{n}\varphi(\dfrac{x}{n}, a)$, то сходимости не будет т.к. функции сосредоточены на разных отрезках.

Пример. *"Срезка"*

$$1_R(x) = \begin{cases} 1, \ |x| \leqslant R \\ 0, \ |x| > 3R \\ \text{монотонно убывает}, x \in [-3R, -R] \\ \text{Монотонно возрастает}, x \in [R, 3R] \end{cases}$$

Пусть $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow g(x)1_R(x) \in K$. В этом случае на $x \in [-R,R] \Rightarrow g(x)1_R(x) = g(x)$.
Более общая срезка:

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-x^2}}, \ |x| \leqslant \varepsilon \\ 0, \ |x| > \varepsilon \end{cases}$$

C_ε выбираем из условия $\int \omega_\varepsilon(x)dx = 1$.

Лемма. $\exists \eta(x) \in K$*, такая, что* $\forall x: \ 0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$*;* $x \in G_\varepsilon = (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$*;* $G = (a,b)$ *и* $\eta(x) = \begin{cases} 1, \ x \in G_\varepsilon \\ 0, \ x \notin G_\varepsilon \end{cases}$

Доказательство. Пусть $\chi(x)$ - характеристическая функция множества $G_{2\varepsilon}$, то есть индикатор. Пусть $\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi(x)\omega_\varepsilon(x-y)dy$. Покажем, что эта функция принадлежит класса C^∞. $\eta(x) = \int\limits_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)dy = \int\limits_{a-2\varepsilon}^{b+2\varepsilon} \omega_\varepsilon(x-y)dy = \int\limits_{x-(b+2\varepsilon)}^{x-(a-2\varepsilon)} \omega_\varepsilon(t)dt = \{\omega_\varepsilon \in C^\infty\}$. Поэтому $\eta(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.
Проверим условие $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$. Функция ω_ε неотрицательная, поэтому левая оценка выполнена, а правая оценка выполняется благодаря выбору константы C_ε так как $\int\limits_{x-(b+2\varepsilon)}^{x-(a-2\varepsilon)} \omega_\varepsilon(t)dt \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(t)dt = 1$. В итоге $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$.

Остаётся проверить последнее условие: Пусть $|y-x| \leqslant \varepsilon \Rightarrow x-\varepsilon \leqslant y \leqslant x+\varepsilon$, тогда $\eta(x) = \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \chi(y)\omega_\varepsilon(x-y)dy =$

$$\begin{cases} \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \omega_\varepsilon(x-y)dy = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega_\varepsilon dy = 1, \ x \in G_\varepsilon \subset G_{2\varepsilon} \\ 0, \ x \notin G_\varepsilon, \text{потому что индикатор обращатеся в ноль} \end{cases}$$

Если $a=b=0, \varepsilon = R \Rightarrow \eta(x) = 1_R(x)$. □

Теорема. *(неметризуемость пространства K)*
$\nexists \rho$ такой, что если $\varphi_n \to \varphi$ в K, то $\rho(\varphi_n, \varphi) \to 0$.

Доказательство. Известна теорема о метрических пространствах: если есть в метрическом пространстве счётное число последовательностей

$$\begin{array}{cccccc} \varphi_1^{(1)} & \varphi_2^{(1)} & \dots & \varphi_n^{(1)} & \to & \varphi^{(1)} \\ \varphi_1^{(2)} & \varphi_2^{(2)} & \dots & \varphi_n^{(2)} & \to & \varphi^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(m)} & \varphi_2^{(m)} & \dots & \varphi_n^{(m)} & \to & \varphi^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

таких, что $\varphi^{(m)} \to \varphi$ при $m \to \infty$, то $\exists \{\varphi_{n_m}^{(m)}\}$ - сходящаяся к φ при $n \to \infty$. Рассмотрим контрпример: $\varphi_n^{(m)}(x) = \dfrac{1}{n}\varphi(\dfrac{x}{m}; a)$. Для любого фиксированного m $\varphi_n^{(m)}(x) \to 0$ в K.Но если взять последовательность $\varphi_{n_m}^{(m)}(x) \to \dfrac{1}{n_m}\varphi(\dfrac{1}{m}; a)$, то не будет общего носителя. □

1.2 Обобщённые функции в $\mathbb{R}^1$

Определение. *E - множество обычных вещественных функций, определенных на $\mathbb{R}$, локально интегрируемых.*

Пусть $f(x) \in E$, ставим в соответствие функционал на множестве K: $(f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$ (1).

Функционал (1) очевидно является линейным, его непрерывность следует из $\{\varphi_n(x)\} \subset K$, $\varphi_n(x) \to 0$ в $K \Rightarrow (f, \varphi_n) \to 0$.

Лемма. *Существуют линейные непрерывные функционалы на K, которые не представимы в виде (1).*

Доказательство. $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака: $\delta(x) : \varphi(x) \to \varphi(0)$. Покажем, что этот функционал не представим в виде (1). Пусть $\exists f(x) \in E : \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \forall \varphi \in K$. Пусть $\varphi(x) = \varphi(x; a)$, тогда $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx =$ $\int\limits_{-a}^{a} f(x)e^{-\dfrac{a^2}{a^2-x^2}}dx \leqslant \int\limits_{-a}^{a} |f(x)|dx \to 0$ при $a \to 0$. Но $\varphi(0; a) = \dfrac{1}{e}$.Поэтому данный функционал в виде (1) не представим. □

Определение. *Обобщённой функцией (распределением) назовем любой линейный непрерывный функционал на множестве K. Если функционал представим в виде (1), то он регулярный, иначе сингулярный.*

K' - множество всех обобщённых функций над K.
Любой обычной функции $f(x)$ отвечает обобщённая функция, определяемая по формуле (1) $f(x) = \text{const}: \ (c, \varphi) = c\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx$. $f(x) : \forall x \to f(x)$ почти всюду. $f : \forall \varphi \to (f, \varphi)$. Не можем говорить про равенство в точке, но можем говорить об эквивалентности на (a, b).

1.2.1 Сингулярные функции

1. $\delta(x)$.
2. $\delta(x-a), \forall a \in \mathbb{R}$.
3. $\delta'(x)$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x} \notin E$

Пусть $f_1, f_2 \in K'$ равны, если $(f_1, \varphi) = (f_2, \varphi), \forall \varphi \in K$, не являются равными, если $\exists \varphi \in K : (f_1, \varphi) \neq (f_2, \varphi)$. Класс K достаточно широк, чтобы различать непрерывные функции:

Лемма. *Пусть $f_1(x), f_2(x) \in E$ - различные непрерывные функции, тогда f_1, f_2 -различные обобщённые функции.*

Доказательство. Нужно показать, что $\exists \varphi_0 : (f_1, \varphi_0) \neq (f_2, \varphi_0)$. Рассмотрим $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, тогда $\exists x_0 : f(x_0) \neq 0$ и $\exists [\alpha, \beta] : \ x_0 \in [\alpha, \beta]$ на этом отрезке функция $f(x)$ сохраняет знак. Рассмотрим $\varphi_0(x) = \begin{cases} e^{-\dfrac{1}{(\beta - x)(x-\alpha)}}, \ x \in [\alpha, \beta] \\ 0, \ x \in \mathbb{R} \backslash [\alpha, \beta] \end{cases}$.

Заметим, что $\varphi_0 \in K$. $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_0(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x) e^{-\dfrac{1}{(\beta - x)(x-\alpha)}} dx > 0$ т.к. $f(x)$ - сохраняет знак, а экспонента строго положительна, поэтому $f_1 \neq f_2$. □

Пусть $p \geqslant 0$, целое число

Определение. *Обобщённая функция f имеет порядок сингулярности $\leqslant p$, если её можно представить в следующем виде:*

$$(f, \varphi) = \sum_{k=0}^{p} \int\limits_{\mathbb{R}} f_k(x) \varphi^{(k)}(x) dx = \sum_{k=0}^{p} (f_k(x), \varphi^{(k)}(x)), \forall \varphi \in K, \tag{1}$$

где $f_1(x), \ldots, f_p(x) \in E$

Пример. *$f(x) \in E$, тогда регулярная $\Rightarrow p = 0$.*

Пример. *$\delta(x)$. Рассмотрим функцию Хевисайда $\theta(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \in E$. $(\theta(x), \varphi(x)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x)dx$*

$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0) = -\int\limits_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} -\theta(x)\varphi'(x)dx$. Поэтому порядок сингурлярности $\delta(x)$ равен 1, а для $\delta'(x)$ $p \leqslant 2$.

1.3 Действие с обобщёнными функциями

1.3.1 Сложение

Сложение и умножение на вещественное число: $\forall f_1, f_2 \in K', \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \ (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi) = \alpha_1(f_1, \varphi) + \alpha_2(f_2, \varphi) \Rightarrow \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in k'$

1.3.2 Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию

$\forall f \in k', \ \forall \alpha(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

1. $f = f(x) \in E \Rightarrow (\alpha(x)f(x), \varphi(x)) = \int\limits_{\mathbb{R}} \alpha(x)f(x)\varphi(x)dx = (f(x), \alpha(x)\varphi(x))$ т.к. $\alpha(x)\varphi(x) \in K$.

2. $f \in K'$ $(\alpha(x)f, \varphi) = (f, \alpha(x)\varphi) \Rightarrow \alpha(x)f \in K'$ т.к. функционал линейный и непрерывный.

1.3.3 Дифференциорвание

$\forall f \in K' : \ f' : (f', \varphi) = -(f, \varphi'), \forall \varphi \in K$. Пусть $\varphi_n \to 0$ в K, тогда $\varphi_n' \to 0$ в $K \Rightarrow (f, \varphi_n') \to 0$ т.к. f-непрерывный функционал $\Rightarrow (f', \varphi_n) \to 0$, то есть f' - линейный непрерывный функционал $f' \in K$.

Свойства производной:

1. $(f'', \varphi) = (f, \varphi'')$, $(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)})$

2. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall f_1, f_2 \in K'$ $((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)', \varphi) = -(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi') = -\alpha_1(f_1, \varphi') - \alpha_2(f_2, \varphi') = \alpha_1(f_1', \varphi) + \alpha_2(f_2', \varphi)$. То есть $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)' = \alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2'$

3. $\alpha(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}), f \in K'$ $((\alpha(x)f)', \varphi) = -(\alpha(x)f, \varphi') = -(f, \alpha(x)\varphi') = -(f, \alpha(x)\varphi' + \alpha'(x)\varphi - \alpha'(x)\varphi) = -(f, (\alpha\varphi)') + (f, \alpha'\varphi) = (f', \alpha\varphi) + (\alpha' f, \varphi) = (\alpha f' + \alpha' f, \varphi), \forall \varphi \in K$. То есть $((\alpha(x)f)', \varphi) = (\alpha' f + \alpha f', \varphi)$

Пример. *$\theta(x)$: $(\theta'(x), \varphi) = -(\theta(x), \varphi'(x)) = -\int\limits_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) \Rightarrow \theta'(x) = \delta(x)$.*

Пример. *$\delta(x)$: $(\delta'(x), \varphi(x)) = -(\delta(x), \varphi'(x)) = -\int\limits_{\mathbb{R}} \delta(x)\varphi'(x) = -\varphi'(0)$. Получается, что $\delta' : \varphi(x) \to -\varphi'(0)$.*

Пример. *Пусть $f(x)$ - кусочно абсолютно непрерывная функция, $x_1, \ldots, x_n$ - точки разрыва. $h_1, \ldots, h_n$ - скачки в точках разрыва $f(x_i + 0) - f(x_i - 0) = h_i$. Чему равна производная такой функции?*
Введём $f_1(x) = f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} h_k \theta(x - x_k)$ - убрали скачки и сделали непрерывной. $f_1(x)$ -абсолютно непрерывная функция и $\exists f_1'(x)$ п.в. совпадает с $f'(x)$. $f'(x) = f_1'(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} h_k \delta(x - x_k)$ в K.

Пример. *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n} = f(x) = \begin{cases}\dfrac{\pi - x}{2},\ x\in(0,\pi]\\ 0,\ x=0\\ -\dfrac{\pi+x}{2},\ x\in[-\pi,0)\end{cases}$ *Это* 2π *-периодическая функция. По полученной ранее формуле получаем, что* $f' = -\dfrac{1}{2} + \pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2\pi k)$

Пример. *Сходимость ряда.*
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin nx}{n}\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$ *- расходится в пространстве* E*. Посмотрим в пространстве* K'*:* $\left(\left(\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{\sin nx}{N}\right)',\varphi\right) = \left(\sum\limits_{n=1}^{N}\cos nx,\varphi\right) = -(\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{\sin nx}{n},\varphi') = -\int\limits_{\mathbb{R}}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{\sin nx}{n}\varphi' dx \to -\int\limits_{\mathbb{R}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}\varphi' dx = -(f(x),\varphi'(x)) = (f'(x),\varphi)$*. В пространстве* K' *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx = -\dfrac{1}{2} + \pi\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(x-2\pi k)$

Пример. $y = \ln|x| \in E$*, но* $y' \notin E$*, а что в* K'*?*

$$((\ln|x|)',\varphi) = -(\ln|x|,\varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln|x|\varphi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\ln|x|\varphi' dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\ln|x|\varphi' dx\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln|x|\varphi(x)|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\varphi dx + \ln|x|\varphi|_{\varepsilon}^{\infty} - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{x}\varphi dx\right) = -\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln\varepsilon\varphi(-\varepsilon) - \ln\varepsilon\varphi(\varepsilon) - \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln\varepsilon\varphi'(x)\,(-2\varepsilon) - \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx = (\frac{1}{x},\varphi).$$ *Поэтому* $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$ *в* K'.

Пример. *Пусть* $y = x_+^{\lambda}, \lambda\in(-1,0)$*,* $x_+^{\lambda} = \begin{cases}x^{\lambda},\ x>0\\ 0, x\leqslant 0\end{cases} \in E$*. Что происходит в* K'*?*

$$((x_+^{\lambda})',\varphi) = -(x_+^{\lambda},\varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_+^{\lambda}\varphi'(x)dx = -\int\limits_{0}^{\infty}x^{\lambda}\varphi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}x^{\lambda}\varphi'(x)dx = -\varepsilon^{\lambda}\varphi(\varepsilon) - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)dx = -\varepsilon^{\lambda}\varphi(\varepsilon) - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\lambda x^{\lambda-1}(\varphi(x)-\varphi(0))dx - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\lambda x^{\lambda-1}\varphi(0)dx = \varepsilon^{\lambda}(\varphi(0)-\varphi(\varepsilon)) - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\lambda x^{\lambda-1}(\varphi(x)-\varphi(0))dx \to -\int\limits_{0}^{\infty}\lambda x^{\lambda-1}(\varphi(x)-\varphi(0))dx$$

В итоге $(x_+^{\lambda})' : \varphi(x) \to \int\limits_{0}^{\infty}\lambda x^{\lambda-1}(\varphi(x)-\varphi(0))dx$ *в* K'.

1.4 Предельный переход в K'

Рассмотрим $\{f_n\}, f_n\in K', f\in K'$

Определение. $f_n \to f$ *в* K'*, если* $(f_n,\varphi)\to(f,\varphi), \forall\varphi\in K$

Пусть $f_n, f\in E, n\geqslant 1, f_n \rightrightarrows f$ в среднем на $[a,b]$ (f_n, f сосредоточены на $[a,b]$). $|(f_n - f,\varphi)| = |\int\limits_{-\infty}^{\infty}(f_n-f)\varphi dx| \leqslant \{\text{КБШ}\} \leqslant \left(\int\limits_a^b(f_n-f)^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_a^b\varphi^2dx\right)^{1/2} \to 0$. То есть следует сходимость в K'.

Лемма. *Пределом регулярных функций может быть сингулярная*

Доказательство. $f_n(x) = \begin{cases}\dfrac{n}{2},\ x\in[-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}]\\ 0,\ |x|>\dfrac{1}{n}\end{cases}$

$(f_n(x),\varphi(x)) = \dfrac{n}{2}\int\limits_{-1/n}^{1/n}\varphi(x)dx = \{\text{формула среднего}\} = \dfrac{n}{2}\varphi(\xi)\dfrac{2}{n} \to \varphi(0) = (f(x),\varphi(x)) \Rightarrow f_n(x)\to\delta(x)$ в K'. □

1.5 Масса материальной точки

1.6 Плоскость электрического диполя

1.7 Первообразная обобщённых функций

Рассмотрим уравнение $y' = 0$ в K' (1).

Лемма. *В пространстве K' уравнение (1) имеет решение* $y = \text{const}$.

Доказательство. $(y', \varphi) = -(y, \varphi') = 0(2)$. (2) определяет решение уравнения на пробных функциях, которые являются производными от других пробных функций $\psi(x) \in K$, $\psi(x) \geqslant 0$ - не может быть пробной так как пробные функции не являются монотонными. Обозначим пространство $K_0 = \{\varphi_0(x) \in K | \exists \varphi_1(x) - \text{пробная} : \varphi_0(x) = \varphi_1'(x)\}, K_0 \subset K$ □

Лемма. $\varphi_0(x) \in K_0 \Leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)dx = 0$

Доказательство. $\Leftarrow$: Пусть $\varphi_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_0(t)dt \Rightarrow \varphi_1(x) \in C^\infty,\ \varphi_1'(x) = \varphi_0(x)$. Пусть φ_0 сосредоточена на $[a, b]$, тогда $\int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_0(t)dt = \varphi_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(t)dt = 0$ при $x > b$.

$\Rightarrow$: $\varphi_0 \in K_0,\ \exists \varphi_1 : \varphi_0 = \varphi_1'$. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_0 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1' dx = \varphi_1|_a^b$. Рассмотрим $\forall \varphi_1 \in K : \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1 dx = 1, \varphi_1 \in K \backslash K_0$. Рассмотрим $\forall \varphi \in K$, представим в виде $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) * \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx, \forall \varphi \in K$, здесь φ_0 - проекция φ на K_0, а $\varphi_1(x) * \int \ldots$ - проекция на $K \backslash K_0$. Получается, что $\dim(K \backslash K_0) = 1$.
$(y, \varphi) = (y, \varphi_0) + (y_1, \varphi_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$. Пусть $(y, \varphi_1) = c_1$ - произвольная постоянная. $(y, \varphi) = c_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = (c_1, \varphi), \forall \varphi \in K$. То есть $y = c_1$ в K'. □

Пример. $\lim\limits_{A \to \infty} \dfrac{1}{\pi} \dfrac{\sin Ax}{x} =?$

$$(\frac{1}{\pi}\frac{\sin Ax}{x}, \varphi(x)) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Ax}{x}\varphi(x)dx = \{\pm\varphi(0)\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Ax}{x}\varphi(0)dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Ax}{x}(\varphi(x) - \varphi(0))dx =$$
$$= \varphi(0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a} \frac{\sin Ax}{x}(\varphi(x) - \varphi(0))dx + \int\limits_{|x| \geqslant a} \varphi(0)\frac{\sin Ax}{x}dx = \varphi(0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a} \varphi'(\xi)\sin Ax dx + \int\limits_{|x| \geqslant a} \varphi(0)\frac{\sin Ax}{x}dx$$
$\int\limits_{|x| \geqslant a} \varphi(0)\dfrac{\sin Ax}{x}dx$ *- хвост сходящегося ряда, поэтому стремится к нулю.*
$\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a} \varphi'(\xi)\sin Ax dx = -\dfrac{1}{A}\varphi' \cos Ax|_{-a}^{a} + \dfrac{1}{A}\int\limits_{-a}^{a} \varphi''(x)\cos Ax dx \to 0$ *при* $A \to +\infty$.
Получили, что $\lim\limits_{A \to \infty} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin Ax}{x} = \delta(x)$ *в* K'.

Пример. $\lim\limits_{A \to \infty} \sin Ax = 0$. *Проверяется аналогично предыдущему пункту.*

Рассматриваем уравнение $y' = f,\ f \in K'(2)$.

Лемма. $\forall f \in K'$ *уравнение (2) имеет решение в* K'.

Доказательство. $(y', \varphi) = -(y, \varphi') = (f, \varphi) = (f, \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi'(\xi)d\xi)$

$(y, \varphi') = (f, -\int\limits_{-\infty}^{x} \varphi'(\xi)d\xi),\ \forall \varphi \in K(3)$. Пусть $\varphi_1(x) \in K,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x)dx = 1,\ \forall \varphi \in K :\ \varphi(x) = \varphi_1(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx + \varphi_0(x)$. Определим функционал y_0 по действию на $\varphi_0(x)$. $(y_0, \varphi) = (y, \varphi_0) = (f, -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\xi)d\xi)$, y_0 - частное решение (2) или неопределенный интеграл функции f. $(y, \varphi) = (y_1, \varphi_1)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi dx + (y, \varphi_0) \Rightarrow$ решение уравнения (2) $\exists$ в K' и записывается в виде $y = y_0 + C$. □

Пример. *Решить уравнение* $y' + y = \theta(x)$ *в* K'.
$y = ze^{-x}, y' = z'e^{-x} - ze^{-x}$, *тогда наше уравнение:* $z'e^{-x} = \theta(x)$, $z' = \theta(x)e^x$. *По формуле, полученной выше:* $(z_0, \varphi) = (z, \varphi_0) = (f, -\int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_0(\xi)d\xi) = (\theta(x)e^x, -\int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_0(\xi)d\xi) = -\int\limits_{0}^{\infty} e^x \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_0(\xi)d\xi dx = -e^x \int\limits_{\infty}^{x} \varphi_0 d\xi|_{x=0}^{\infty} + \int\limits_{0}^{\infty} e^x\varphi_0(x)dx = \{\varphi_0 \in K_0 : \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_0 dx\xi = 0\} = \int\limits_{\infty}^{0} \varphi_0 d\xi + \int\limits_{0}^{\infty} e^x\varphi_0(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_0 d\xi + \int\limits_{0}^{\infty} (e^x - 1)\varphi_0 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(x)(e^x - 1)\varphi_0(x)dx$. *Поэтому* $z_0(x) = \theta(x)(e^x - 1) \Rightarrow z(x) = \theta(x)(e^x - 1) + C$, $y = \theta(x)(1 - e^{-x}) + Ce^{-x}$

1.8 Обобщённые функции в $\mathbb{R}^n$

Определение. *Функция называется обычной, если она определена на $\mathbb{R}^n$, принимает вещественные значения, интегрируема (по Лебегу) по любому n-мерному брусу.*

Множество всех обычных функций: $E = E_n = E(\mathbb{R}^n)$

Определение. *Функция называется пробной (основной), если бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$ и равна 0 вне некоторого бруса.*

Наименьшее замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ вне которого пробная функция равна нулю называется её носителем. Множестов пробных функция $K = K_n$.

Определение. $\{\varphi_n\}, \varphi_n \in K_n, \varphi_n \to 0$ *при* $n \to \infty$ *в* K_n, *если все* φ_n *сосредоточена на одном брусе и* $\varphi_n \rightrightarrows 0$ *в* K_n *вместе со всеми производными.*

Определение. *Обобщённой функцией назовём любой линейный непрерывный функционал на пространстве K_n. Если $f \in E_n$, то она поражадает функционал $(f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\varphi dx (1)$. Тогда f - регулярная обобщённая функция.*

Замечание. *Существуют функционалы не представимые в виде (1). Например $\delta(x) : (\delta, \varphi) = \varphi(0)$*

Определение. *Обобщённая функция $f \in K'_n$ имеет порядок синуглярности $\leqslant p$, если она представима в виде:*

$$(f, \varphi) = \sum_{|k| \leqslant p} f_k(x) D^k \varphi(x) dx = \sum_{|k| \leqslant p} (f_k, D^k \varphi)(2),$$

где $k = (k_1, \dots, k_n), |k| = k_1 + \dots + k_n, D^k = \dfrac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$

1.8.1 Действия с обобщёнными функциям

1. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall f_1, f_2 \in K'_n \Rightarrow (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi) = \alpha_1 (f_1, \varphi) + \alpha_2 (f_2, \varphi)$
2. $\forall f \in K'_n, \alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (\alpha(x) f, \varphi) = (f, \alpha(x)\varphi)$
3. Предельный переход. $\{f_\nu\}, f_\nu \in K'_n, f \in K'_n$, $f_\nu \to f$ в K'_n, если $(f_\nu, \varphi) \to (f_0, \varphi), \ \forall \varphi \in K_n$.
4. $(D^k f, \varphi) = (-1)^{|k|} (f, D^k \varphi)$

Примеры на дифференциорование

Пример. $(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \varphi) = (f, \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}) = (f, \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}) = (\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \varphi)$. *То есть для обобщённых функций также смешанные производные совпадают.*

Пример.

Определение. *Обычная $g(x) \in E_n$ называется обобщённой производной по Соболеву от функции (обычной) f на множестве G, если $\forall \varphi \in C^\infty(G)$, сосредоточенной строго внутри G выполнено $(-1)^{|k|} \int\limits_G g(x)\varphi(x) dx = \int\limits_G f(x) D^k \varphi(x) dx \Rightarrow g(x) = D^k f$ в K'.*

Пример. $\theta(x) = \begin{cases} 1, \ x_1, \dots, x_n \geqslant 0 \\ 0, \ \mathbb{R}^n \backslash \{x_1, \dots, x_n \geqslant 0\} \end{cases}$

$$(\frac{\partial^n \theta}{\partial x_1 \dots \partial x_n}, \varphi(x)) = (-1)^n (\theta, \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \dots \partial x_n}) = (-1)^n \int\limits_{x_1, \dots, x_n \geqslant 0} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \dots \partial x_n} dx_1 \dots dx_n = \varphi(0, \dots, 0) = (\delta(x), \varphi)$$

Пример. *Оператор Лапласа от сферических функций:*

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \ f(r), \ r = \sqrt{\sum_{m=1}^n x_m^2}, \ \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{2x_j}{r} = \frac{x_j}{r}, \ \frac{\partial f}{\partial x_j} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_j} = f'(r) \frac{x_j}{r}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = f''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + f'(r) \frac{r - \frac{x_j^2}{r}}{r^2} = f''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + f'(r) \frac{r^2 - x_j^2}{r^3}$$

$\Delta f(r) = f''(r) + f'(r) \dfrac{r^2 n - r^2}{r^3} = f''(r) + f'(r) \dfrac{n-1}{r}$. *Пусть теперь $f(r) = r^p$, тогда $\Delta f(r) = r^{p-2} p(p + n - 2) \ \ (1)$.*

1.9 Формула Грина

$$\int\limits_G \Delta f\varphi d\sigma = \int\limits_G f\Delta\varphi d\sigma + \int\limits_{\Gamma=\delta G}\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial f}{\partial n}\right)d\sigma_p$$

$G : \varepsilon \leqslant r \leqslant a,\ a : \varphi(x) = 0$ вне $|x| \leqslant a$.

$\int\limits_{r\geqslant\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{r^{n-2}}dx = \int\limits_{r\geqslant\varepsilon}\varphi\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)dx - \int\limits_{r=\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{1}{r^{n-2}}d\sigma + \int\limits_{r=\varepsilon}\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)d\sigma$

$\Delta\frac{1}{r^{n-2}} = 0$ из (1).

$\int\limits_{r=\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{1}{r^{n-2}}d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\int\limits_{r=\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}d\sigma \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ так как $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ ограниченно

$\int\limits_{r=\varepsilon}\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)d\sigma = \left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = \frac{-(n-2)r^{n-3}}{r^{2(n-2)}} = \frac{-(n-2)}{r^{n-1}}\right\} = -\frac{(n-2)}{\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{r=\varepsilon}\varphi d\sigma = -\frac{(n-2)\Omega_n}{\varepsilon^{n-1}\Omega_n}\int\limits_{r=\varepsilon}\varphi d\sigma$

$= \left\{\frac{1}{\varepsilon^{n-1}\Omega_n}\int\limits_{r=\varepsilon}\varphi d\sigma = S_\varepsilon[\varphi] - \text{ среднее значение функции на сфере}\right\} = -(n-2)\Omega_n S_\varepsilon[\varphi] \to -(n-2)\Omega_n\varphi(0) =$

$= (-(n-2)\Omega_n\delta(x), \varphi(x)),\ \forall\varphi \in K_n$

В итоге получили, что $\Delta\frac{1}{r^{n-2}} = -(n-2)\Omega_n\delta(x), n > 2$. При $n = 3 :\ \ \Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(x)$ и имеет первый порядок сингулярности.

1.10 Дифференциальный оператор

Определение. *Пусть $P(x_1, \ldots, x_n)$ - многочлен относительно переменных $x_1, \ldots, x_n$. Рассмотрим дифференциальный оператор $P(\frac{\partial}{\partial dx}) = P(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$. Обобщённая функция $E(x)$ называется фундаментальным решением оператор $P(\frac{\partial}{\partial dx})$, если она является решением уравнения $P(\frac{\partial}{\partial dx})E(x) = \delta(x)$*

Замечание. *Для оператора Лапласа $E(x) = -\frac{1}{(n-2)\Omega_n}\frac{1}{r^{n-2}}, \forall n > 2$.*

Пример. *$P\theta(x) = \delta(x)$, функция хевисайда является фундаментольной для $P(\frac{\partial}{\partial dx}) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$*

2 Преобразование Фурье и свертка обобщённых функций

2.1 Преобразование Фурье в $K = K_1$

Рассмотрим $\forall\varphi(x) \in K$, $\mathrm{supp}\varphi(x) \subset [-a, a]$.

Определение. *Преобразованием Фурье функции $\varphi \in K$ называется*

$$F[\varphi] \equiv \psi(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{i\sigma x}dx = \int\limits_{-a}^{a}\varphi(x)e^{i\sigma x}dx$$

Определение. *Обратным преобразованием Фурье функции $\psi(\sigma)$ называется*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

Оно однозначно восстанавливает $\varphi(x)$ по $\psi(\sigma)$.

Теорема. *(свойства преобразования Фурье)*
I. *Пусть $\varphi(x) \in K$, $\mathrm{supp}\varphi \subset [-a, a]$ для некоторого $a > 0$. Тогда функцию $\psi(\sigma)$ можно продолжить аналитически на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, функция $\psi(s),\ s = \sigma + i\tau,\ \sigma, \tau \in \mathbb{R}$ так что $\forall q \in \{0\} \cup \mathbb{N}\ \exists C_q = const > 0 :\ |s^q\psi(s)| \leqslant c_q e^{a|\tau|}$ (1)*
II. *Пусть $\psi(s)$ - целая функция на $\mathbb{C}$ и справедлива оценка (1). Тогда $\exists$ функция $\varphi(x) \in K$, $\mathrm{supp}\varphi \subset [-a, a]$, для которой функции $\psi(\sigma)$ ($\sigma = \mathrm{Re}s$) является её преобразованием Фурье.*

Доказательство. **I.** Положим $\psi(s)=\int\limits_{-a}^{a}\varphi(x)e^{isx}dx,\ \forall s=\sigma+i\tau\in\mathbb{C}$. $|\psi(s)|\leqslant\int\limits_{-a}^{a}|\varphi(x)||e^{isx}|dx=\int\limits_{-a}^{a}|\varphi(x)|e^{-\tau x}dx\leqslant C_0e^{a|\tau|}$, $C_0=\int\limits_{-a}^{a}|\varphi(x)|dx$, получили оценку для $q=0$.

$\psi^{(l)}(s)=\int\limits_{-a}^{a}\varphi(x)(ix)^le^{isx}dx$ - существует, непрерывная $\forall s\in\mathbb{C}$, поэтому $\psi(s)$ - аналитическая функция на $\mathbb{C}$.

Чтобы получить оценку (1) нужно q раз интегрировать по частям: $\psi(s)=\int\limits_{-a}^{a}\varphi(x)e^{isx}dx=\{\text{по частям}\}=$

$=(-1)^q\int\limits_{-a}^{a}\varphi^{(q)}(x)\dfrac{1}{(is)^q}e^{isx}dx\Rightarrow|s^q\psi(s)|\leqslant C_qe^{a|\tau|},\ C_q=\int\limits_{-a}^{a}|\varphi^{(q)}(x)|dx$

Попутно установили формулу $F[\varphi^{(1)}(x)]=(-is)^qF[\varphi(x)]$ (2)

II. Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$ (3), эта функция единственна из единственности обратного преобразования Фурье.

Пусть в (1) $s=\sigma$ (то есть мнимая часть равна 0) $\Rightarrow|\psi(\sigma)|\leqslant C_0,\ |\sigma^p\psi(\sigma)|\leqslant C_q\Rightarrow(1+|\sigma|^p)|\psi(\sigma)|\leqslant C,\ \psi(\sigma)\leqslant\dfrac{C}{1+|\sigma|^q},\ \forall q>1, C=C(q)$

$\varphi^{(l)}(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma)(-i\sigma)^le^{-i\sigma x}d\sigma$, пусть $q=l+2$, тогда интеграл сходится равномерно по x на любом отрезке числовой прямой (по признаку Вейерштрасса) $\Rightarrow\varphi(x)\in C^\infty(\mathbb{R})$

Докажем, что в правой части формулы (3) можно интегрироваь по любой прямой в $\mathbb{C}$ параллельной оси $O\sigma$, то есть $\varphi(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma+i\tau)e^{-i(\sigma+i\tau)x}d\sigma,\ \forall\tau\in\mathbb{R}$ (4). Рассмотрим функцию $f(s)=\psi(s)e^{-isx}$, она целая. Рассмотрим прямоугольник $\Gamma=(-A)(B)(C)(A),-A=(-\sigma_0,0),B=(-\sigma_0,\tau_0),C=(\sigma_0,\tau_0),A=(\sigma_0,0)$. Наша функция аналитична в $\mathbb{C}$, поэтому по теореме Коши $\int\limits_\Gamma f(s)ds=\int\limits_\Gamma\psi(s)e^{-isx}ds=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Теперь распишем интегралы по границам этого прямоугольника: $|\int\limits_{AC}\psi(\sigma_0+i\tau)e^{-(\sigma_0+i\tau)x}d\tau|=|\int\limits_{0}^{\tau_0}\psi(\sigma_0+i\tau)e^{-(\sigma_0+i\tau)x}d\tau|\leqslant\left\{|s|^2|\psi(s)|\leqslant Ce^{a|\tau|},|\psi(s)|\leqslant\dfrac{C_1}{|\sigma_0+i\tau|^2}\right\}\leqslant$

$\leqslant C_1\int\limits_0^\tau\dfrac{1}{|\sigma_0+i\tau|^2}e^{\tau x}d\tau\sim\dfrac{1}{|\sigma_0|}\to0$ при $\sigma_0\to\infty$. То есть по отрезкам (AC) и (-AB) интеграл стремится к 0 и формула (4) верна.

$|\psi(s)|\leqslant C_0e^{a|\tau|}|s|^2|\psi(s)|\leqslant C_2e^{a|\tau|}\Rightarrow|\psi(s)|\leqslant\dfrac{\tilde{C}}{1+|s|^2}e^{a|\tau|}\leqslant\dfrac{\tilde{C}}{1+|\sigma|^2}e^{a|\tau},\ |s|\geqslant|\sigma|$.

Подставим в (4) для фиксированного $\tau\neq0$. $|\varphi(x)|\leqslant\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\tilde{C}}{1+|\sigma|^2}e^{a|\tau|}e^{\tau x}d\sigma=\tilde{\tilde{C}}e^{a|\tau|+\tau x}$, $\tilde{\tilde{C}}$ не зависит от τ.

Пусть $x>a,a-x<0$, пусть $\tau<0\Rightarrow\tau=-|\tau|,\ |\varphi(x)|\leqslant\tilde{\tilde{C}}e^{|\tau|(a-x)}\to0$ при $\tau\to\infty$, аналогично для $x<-a$, то есть показали, что $\mathrm{supp}\varphi(x)\subset[-a,a]$. □

Определение. *Обозначим через Z множество всех целых функций $\psi(s)$, допускающих оценки (1).*

Тогда по доказанной выше теореме преобразование Фурье это измофорфизм между K и Z. На Z определяем Z' также как делали это ранее (множество линейных ограниченных функционалов).

2.2 Операции в пространствах Z, Z'

2.2.1 Пространство Z

Можно умножать $\psi(s)\in Z$ на функции $G(s)$ -целые, для которых справедлива оценка $|G(s)|\leqslant C(1+|s|^m)e^{\sigma|\tau|}$, $\tau=\mathrm{Im}s$, для некоторого $m=0,1,2,\ldots,\ b\geqslant0,b\in\mathbb{R}$. $G(s)\psi(s)\in Z$ так как $|G(s)\psi(s)|\leqslant C(1+|s|^m)e^{b|\tau|}|\psi(s)|\leqslant\tilde{C}e^{(b+a)|\tau|}$.

Операциям в K отвечают двойственные операции в Z.

Производная: $F[\varphi^{(q)}(x)]=(-is)^qF[\varphi(x)]=(-is)^1\psi(s)$. Обратно $\dfrac{\partial}{\partial s}\psi(s)=\int\limits_{-a}^{a}(ix)\varphi(x)e^{isx}dx$. Операции дифференцирования в Z отвечает операция умножения на (ix) в K и так как $(ix)^q\varphi(x)\in K$, то операция не выводит за пределы K $\Rightarrow\psi^{(q)}(s)\in Z$.