

Обобщённые функции

Ломов И.С.

1 Элементарная теория обобщённых функций

1.1 Основные функции в \mathbb{R}^1

Определение. Под основной функцией понимают любую вещественную функцию, финитную на \mathbb{R} и определенную на \mathbb{R} и непрерывную вместе с любой производной конечного порядка на \mathbb{R} .

Если $\varphi = 0$ вне $[a, b]$, то говорят, что φ сосредоточена на $[a, b]$. В этом случае $[a, b]$ - носитель $\varphi(x)$. $\text{supp}\varphi(x) = \{x : \varphi(x) \neq 0\}$. Пространство финитных функций является линейным, проверяется тривиально.

1.1.1 Предельный переход в K

Пусть φ_n - последовательность основных функций.

Определение. $\varphi_n(x) \rightarrow 0$ в K , если все $\varphi_n(x)$ сосредоточены на одном отрезке, последовательность $\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n \rightarrow \infty$ на этом отрезке и $\forall k \in \mathbb{N} \varphi_n^{(k)} \rightrightarrows 0$ при $n \rightarrow \infty$

Очевидно, что $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в K , если $\varphi \in K$ и $\varphi_n - \varphi \rightarrow 0$ в K .

Пример. "Шапочка"

$$\varphi(x; a) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - x^2}}, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

Пусть $\varphi_n = \frac{1}{n} \varphi(x; a) \rightarrow 0$ в K , но если возьмем $\varphi_n = \frac{1}{n} \varphi(\frac{x}{n}, a)$, то сходимости не будет т.к. функции сосредоточены на разных отрезках.

Пример. "Срезка"

$$1_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq R \\ 0, & |x| > 3R \\ \text{монотонно убывает, } x \in [-3R, -R] \\ \text{Монотонно возрастает, } x \in [R, 3R] \end{cases}$$

Пусть $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow g(x)1_R(x) \in K$. В этом случае на $x \in [-R, R] \Rightarrow g(x)1_R(x) = g(x)$.

Более общая срезка:

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, & |x| \leq \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$$

C_ε выбираем из условия $\int \omega_\varepsilon(x) dx = 1$.

Лемма. $\exists \eta(x) \in K$, такая, что $\forall x : 0 \leq \eta(x) \leq 1$; $x \in G_\varepsilon = (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$; $G = (a, b)$ и $\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_\varepsilon \\ 0, & x \notin G_\varepsilon \end{cases}$

Доказательство. Пусть $\chi(x)$ - характеристическая функция множества $G_{2\varepsilon}$, то есть индикатор. Пусть $\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi(x) \omega_\varepsilon(x - y) dy$. Покажем, что эта функция принадлежит класса C^∞ . $\eta(x) = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x - y) dy = \int_{a-2\varepsilon}^{b+2\varepsilon} \omega_\varepsilon(x - y) dy = \int_{x-(b+2\varepsilon)}^{x-(a-2\varepsilon)} \omega_\varepsilon(t) dt =$

$\{\omega_\varepsilon \in C^\infty\}$. Поэтому $\eta(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Проверим условие $0 \leq \eta(x) \leq 1$. Функция ω_ε неотрицательная, поэтому левая оценка выполнена, а правая оценка выполняется благодаря выбору константы C_ε так как $\int_{x-(b+2\varepsilon)}^{x-(a-2\varepsilon)} \omega_\varepsilon(t) dt \leq \int_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(t) dt = 1$. В итоге $0 \leq \eta(x) \leq 1$.

Остаётся проверить последнее условие: Пусть $|y - x| \leq \varepsilon \Rightarrow x - \varepsilon \leq y \leq x + \varepsilon$, тогда $\eta(x) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \chi(y) \omega_\varepsilon(x-y) dy =$
 $\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \omega_\varepsilon(x-y) dy = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega_\varepsilon dy = 1, x \in G_\varepsilon \subset G_{2\varepsilon}$ Если $a = b = 0, \varepsilon = R \Rightarrow \eta(x) = 1_R(x)$. \square
 $\left\{ \begin{array}{l} 0, x \notin G_\varepsilon, \text{ потому что индикатор обращается в ноль} \end{array} \right.$

Теорема. (нормируемость пространства K)
 \nexists такой, что если $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в K , то $\rho(\varphi_n, \varphi) \rightarrow 0$.

Доказательство. Известна теорема о метрических пространствах: если есть в метрическом пространстве счётное чис-

ло последовательностей $\begin{array}{ccccccc} \varphi_1^{(1)} & \varphi_2^{(1)} & \dots & \varphi_n^{(1)} & \rightarrow & \varphi^{(1)} \\ \varphi_1^{(2)} & \varphi_2^{(2)} & \dots & \varphi_n^{(2)} & \rightarrow & \varphi^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(m)} & \varphi_2^{(m)} & \dots & \varphi_n^{(m)} & \rightarrow & \varphi^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$ таких, что $\varphi^{(m)} \rightarrow \varphi$ при $m \rightarrow \infty$, то $\exists \{\varphi_{n_m}^{(m)}\}$ - сходящаяся

к φ при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим контрпример: $\varphi_n^{(m)}(x) = \frac{1}{n} \varphi(\frac{x}{m}; a)$. Для любого фиксированного m $\varphi_n^{(m)}(x) \rightarrow 0$ в K . Но если взять последовательность $\varphi_{n_m}^{(m)}(x) \rightarrow \frac{1}{n_m} \varphi(\frac{1}{m}; a)$, то не будет общего носителя. \square

1.2 Обобщённые функции в \mathbb{R}^1

Определение. E - множество обычных вещественных функций, определенных на \mathbb{R} , локально интегрируемых.

Пусть $f(x) \in E$, ставим в соответствие функционал на множестве K : $(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx$ (1).

Функционал (1) очевидно является линейным, его непрерывность следует из $\{\varphi_n(x)\} \subset K, \varphi_n(x) \rightarrow 0$ в $K \Rightarrow (f, \varphi_n) \rightarrow 0$.

Лемма. Существуют линейные непрерывные функционалы на K , которые не представимы в виде (1).

Доказательство. $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака: $\delta(x) : \varphi(x) \rightarrow \varphi(0)$. Покажем, что этот функционал не представим в виде (1). Пусть $\exists f(x) \in E : \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0), \forall \varphi \in K$. Пусть $\varphi(x) = \varphi(x; a)$, тогда $\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx =$

$\int_{-a}^a f(x) e^{-\frac{a^2}{a^2 - x^2}} dx \leq \int_{-a}^a |f(x)| dx \rightarrow 0$ при $a \rightarrow 0$. Но $\varphi(0; a) = \frac{1}{e}$. Поэтому данный функционал в виде (1) не представим. \square

Определение. Обобщённой функцией (распределением) назовем любой линейный непрерывный функционал на множестве K . Если функционал представим в виде (1), то он регулярный, иначе сингулярный.

K' - множество всех обобщённых функций над K .

Любой обычной функции $f(x)$ отвечает обобщённая функция, определяемая по формуле (1) $f(x) = \text{const} : (c, \varphi) = c \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$. $f(x) : \forall x \rightarrow f(x)$ почти всюду. $f : \forall \varphi \rightarrow (f, \varphi)$. Не можем говорить про равенство в точке, но можем говорить об эквивалентности на (a, b) .

1.2.1 Сингулярные функции

1. $\delta(x)$.
2. $\delta(x - a), \forall a \in \mathbb{R}$.
3. $\delta'(x)$
4. $f(x) = \frac{1}{x} \notin E$

Пусть $f_1, f_2 \in K'$ равны, если $(f_1, \varphi) = (f_2, \varphi), \forall \varphi \in K$, не являются равными, если $\exists \varphi \in K : (f_1, \varphi) \neq (f_2, \varphi)$. Класс K достаточно широк, чтобы различать непрерывные функции:

Лемма. Пусть $f_1(x), f_2(x) \in E$ - различные непрерывные функции, тогда f_1, f_2 - различные обобщённые функции.

Доказательство. Нужно показать, что $\exists \varphi_0 : (f_1, \varphi_0) \neq (f_2, \varphi_0)$. Рассмотрим $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, тогда $\exists x_0 : f(x_0) \neq 0$ и $\exists [\alpha, \beta] : x_0 \in [\alpha, \beta]$ на этом отрезке функция $f(x)$ сохраняет знак. Рассмотрим $\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{-\frac{1}{(\beta-x)(x-\alpha)}}}, & x \in [\alpha, \beta] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta] \end{cases}$.

Заметим, что $\varphi_0 \in K$. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_0(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)e^{-\frac{1}{(\beta-x)(x-\alpha)}}dx > 0$ т.к. $f(x)$ - сохраняет знак, а экспонента строго положительна, поэтому $f_1 \neq f_2$. \square

Пусть $p \geq 0$, целое число

Определение. *Обобщённая функция f имеет порядок сингулярности $\leq p$, если её можно представить в следующем виде:*

$$(f, \varphi) = \sum_{k=0}^p \int_{\mathbb{R}} f_k(x) \varphi^{(k)}(x) dx = \sum_{k=0}^p (f_k(x), \varphi^{(k)}(x)), \forall \varphi \in K, \quad (1)$$

где $f_1(x), \dots, f_p(x) \in E$

Пример. $f(x) \in E$, тогда регулярная $\Rightarrow p = 0$.

Пример. $\delta(x)$. Рассмотрим функцию Хевисайда $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \in E$. $(\theta(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$

$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0) = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 -\theta(x) \varphi'(x) dx$. Поэтому порядок сингулярности $\delta(x)$ равен 1, а для $\delta'(x)$ $p \leq 2$.

1.3 Действие с обобщёнными функциями

1.3.1 Сложение

Сложение и умножение на вещественное число: $\forall f_1, f_2 \in K', \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi) = \alpha_1 (f_1, \varphi) + \alpha_2 (f_2, \varphi) \Rightarrow \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in K'$

1.3.2 Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию

$\forall f \in K', \forall \alpha(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

1. $f = f(x) \in E \Rightarrow (\alpha(x)f(x), \varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(x)f(x)\varphi(x)dx = (f(x), \alpha(x)\varphi(x))$ т.к. $\alpha(x)\varphi(x) \in K$.

2. $f \in K' (\alpha(x)f, \varphi) = (f, \alpha(x)\varphi) \Rightarrow \alpha(x)f \in K'$ т.к. функционал линейный и непрерывный.

1.3.3 Дифференцирование

$\forall f \in K' : f' : (f', \varphi) = -(f, \varphi'), \forall \varphi \in K$. Пусть $\varphi_n \rightarrow 0$ в K , тогда $\varphi'_n \rightarrow 0$ в $K \Rightarrow (f, \varphi'_n) \rightarrow 0$ т.к. f -непрерывный функционал $\Rightarrow (f', \varphi_n) \rightarrow 0$, то есть f' - линейный непрерывный функционал $f' \in K$.

Свойства производной:

1. $(f'', \varphi) = (f, \varphi'')$, $(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)})$

2. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall f_1, f_2 \in K' ((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)', \varphi) = -(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi') = -\alpha_1 (f_1, \varphi') - \alpha_2 (f_2, \varphi') = \alpha_1 (f'_1, \varphi) + \alpha_2 (f'_2, \varphi)$.
То есть $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)' = \alpha_1 f'_1 + \alpha_2 f'_2$

3. $\alpha(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}), f \in K' ((\alpha(x)f)', \varphi) = -(\alpha(x)f, \varphi') = -(f, \alpha(x)\varphi') = -(f, \alpha(x)\varphi' + \alpha'(x)\varphi) = -(\alpha'(x)\varphi) - (f, \alpha(x)\varphi') = -(\alpha'(x)\varphi) + (f, \alpha'\varphi) = (f', \alpha\varphi) + (\alpha'f, \varphi) = (\alpha f' + \alpha'f, \varphi), \forall \varphi \in K$. То есть $((\alpha(x)f)', \varphi) = (\alpha'f + \alpha f', \varphi)$

Пример. $\theta(x) : (\theta'(x), \varphi) = -(\theta(x), \varphi'(x)) = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) \Rightarrow \theta'(x) = \delta(x)$.

Пример. $\delta(x) : (\delta'(x), \varphi(x)) = -(\delta(x), \varphi'(x)) = - \int_{\mathbb{R}} \delta(x) \varphi'(x) = -\varphi'(0)$. Получается, что $\delta' : \varphi(x) \rightarrow -\varphi'(0)$.

Пример. Пусть $f(x)$ - кусочно абсолютно непрерывная функция, x_1, \dots, x_n - точки разрыва. h_1, \dots, h_n - скачки в точках разрыва $f(x_i + 0) - f(x_i - 0) = h_i$. Чему равна производная такой функции?

Введём $f_1(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n h_k \theta(x - x_k)$ - убрали скачки и сделали непрерывной. $f_1(x)$ - абсолютно непрерывная функция

и $\exists f'_1(x)$ н.в. совпадает с $f'(x)$. $f'(x) = f'_1(x) + \sum_{k=1}^n h_k \delta(x - x_k)$ в K .

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2}, & x \in (0, \pi] \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{\pi+x}{2}, & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$ Это 2π -периодическая функция. По полученной ранее формуле получаем, что $f' = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k)$

Пример. Сходимость ряда.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ - расходится в пространстве E . Посмотрим в пространстве K' : $\left(\left(\sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{N} \right)', \varphi \right) = \left(\sum_{n=1}^N \cos nx, \varphi \right) = - \left(\sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{n}, \varphi' \right) = - \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{n} \varphi' dx \rightarrow - \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \varphi' dx = -(f(x), \varphi'(x)) = (f'(x), \varphi)$. В пространстве K' ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi k)$

Пример. $y = \ln |x| \in E$, но $y' \notin E$, а что в K' ?

$$\begin{aligned} ((\ln |x|)', \varphi) &= -(\ln |x|, \varphi') = - \int_{-\infty}^{\infty} \ln |x| \varphi'(x) dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln |x| \varphi' dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \ln |x| \varphi' dx \right) = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\ln |\varphi(x)| \Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} \varphi dx + \ln |\varphi(x)| \Big|_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi dx \right) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\ln \varepsilon \varphi(-\varepsilon) - \ln \varepsilon \varphi(\varepsilon) - \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\ln \varepsilon \varphi'(x)(-2\varepsilon) - \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \left(\frac{1}{x}, \varphi \right). \text{ Поэтому } (\ln |x|)' = \frac{1}{x} \text{ в } K'. \end{aligned}$$

Пример. Пусть $y = x_+^\lambda, \lambda \in (-1, 0), x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \in E$. Что происходит в K' ?

$$\begin{aligned} ((x_+^\lambda)', \varphi) &= -(x_+^\lambda, \varphi') = - \int_{-\infty}^{\infty} x_+^\lambda \varphi'(x) dx = - \int_0^{\infty} x^\lambda \varphi'(x) dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{\varepsilon}^{\infty} x^\lambda \varphi'(x) dx = -\varepsilon^\lambda \varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{\infty} \lambda x^{\lambda-1} \varphi(x) dx = -\varepsilon^\lambda \varphi(\varepsilon) - \\ &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \lambda x^{\lambda-1} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx - \int_{\varepsilon}^{\infty} \lambda x^{\lambda-1} \varphi(0) dx = \varepsilon^\lambda (\varphi(0) - \varphi(\varepsilon)) - \int_{\varepsilon}^{\infty} \lambda x^{\lambda-1} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \rightarrow - \int_0^{\infty} \lambda x^{\lambda-1} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \\ &\text{В итоге } (x_+^\lambda)' : \varphi(x) \rightarrow \int_0^{\infty} \lambda x^{\lambda-1} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \text{ в } K'. \end{aligned}$$

1.4 Пределный переход в K'

Рассмотрим $\{f_n\}, f_n \in K', f \in K'$

Определение. $f_n \rightarrow f$ в K' , если $(f_n, \varphi) \rightarrow (f, \varphi), \forall \varphi \in K$

Пусть $f_n, f \in E, n \geq 1, f_n \rightrightarrows f$ в среднем на $[a, b]$ (f_n, f сосредоточены на $[a, b]$). $|(f_n - f, \varphi)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f_n - f) \varphi dx \right| \leq \{КБШ\} \leq \left(\int_a^b (f_n - f)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b \varphi^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow 0$. То есть следует сходимость в K' .

Лемма. Пределом регулярных функций может быть сингулярная

$$\text{Доказательство. } f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$(f_n(x), \varphi(x)) = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x) dx = \{\text{формула среднего}\} = \frac{n}{2} \varphi(\xi) \frac{2}{n} \rightarrow \varphi(0) = (f(x), \varphi(x)) \Rightarrow f_n(x) \rightarrow \delta(x) \text{ в } K'. \quad \square$$

1.5 Масса материальной точки

1.6 Плоскость электрического диполя

1.7 Первообразная обобщённых функций

Рассмотрим уравнение $y' = 0$ в K' (1).

Лемма. В пространстве K' уравнение (1) имеет решение $y = \text{const}$.

Доказательство. $(y', \varphi) = -(y, \varphi') = 0$ (2). (2) определяет решение уравнения на пробных функциях, которые являются производными от других пробных функций $\psi(x) \in K$, $\psi(x) \geq 0$ - не может быть пробной так как пробные функции не являются монотонными. Обозначим пространство $K_0 = \{\varphi_0(x) \in K | \exists \varphi_1(x) - \text{пробная} : \varphi_0(x) = \varphi_1'(x)\}$, $K_0 \subset K$ \square

Лемма. $\varphi_0(x) \in K_0 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) dx = 0$

Доказательство. \Leftarrow : Пусть $\varphi_1(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_0(t) dt \Rightarrow \varphi_1(x) \in C^\infty$, $\varphi_1'(x) = \varphi_0(x)$. Пусть φ_0 сосредоточена на $[a, b]$, тогда

$$\int_{-\infty}^x \varphi_0(t) dt = \varphi_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t) dt = 0 \text{ при } x > b.$$

\Rightarrow : $\varphi_0 \in K_0$, $\exists \varphi_1 : \varphi_0 = \varphi_1'$. $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1' dx = \varphi_1|_a^b$. Рассмотрим $\forall \varphi_1 \in K : \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1 dx = 1, \varphi_1 \in K \setminus K_0$. Рассмотрим

$\forall \varphi \in K$, представим в виде $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) * \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx, \forall \varphi \in K$, здесь φ_0 - проекция φ на K_0 , а $\varphi_1(x) * \int \dots$ - проекция на $K \setminus K_0$. Получается, что $\dim(K \setminus K_0) = 1$.

$(y, \varphi) = (y, \varphi_0) + (y_1, \varphi_0) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$. Пусть $(y, \varphi_1) = c_1$ - произвольная постоянная. $(y, \varphi) = c_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = (c_1, \varphi), \forall \varphi \in K$. То есть $y = c_1$ в K' . \square

Пример. $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin Ax}{x} = ?$

$$\left(\frac{1}{\pi} \frac{\sin Ax}{x}, \varphi(x)\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Ax}{x} \varphi(x) dx = \{\pm \varphi(0)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Ax}{x} \varphi(0) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Ax}{x} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx =$$

$$= \varphi(0) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sin Ax}{x} (\varphi(x) - \varphi(0)) dx + \int_{|x| \geq a} \varphi(0) \frac{\sin Ax}{x} dx = \varphi(0) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \varphi'(\xi) \sin Axdx + \int_{|x| \geq a} \varphi(0) \frac{\sin Ax}{x} dx$$

$\int_{|x| \geq a} \varphi(0) \frac{\sin Ax}{x} dx$ - хвост сходящегося ряда, поэтому стремится к нулю.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \varphi'(\xi) \sin Axdx = -\frac{1}{A} \varphi' \cos Ax|_{-a}^a + \frac{1}{A} \int_{-a}^a \varphi''(x) \cos Axdx \rightarrow 0 \text{ при } A \rightarrow +\infty.$$

Получили, что $\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin Ax}{x} = \delta(x)$ в K' .

Пример. $\lim_{A \rightarrow \infty} \sin Ax = 0$. Проверяется аналогично предыдущему пункту.

Рассматриваем уравнение $y' = f, f \in K'(2)$.

Лемма. $\forall f \in K'$ уравнение (2) имеет решение в K' .

Доказательство. $(y', \varphi) = -(y, \varphi') = (f, \varphi) = (f, \int_{-\infty}^x \varphi'(\xi) d\xi)$

$$(y, \varphi') = (f, - \int_{-\infty}^x \varphi'(\xi) d\xi), \forall \varphi \in K(3). \text{ Пусть } \varphi_1(x) \in K, \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) dx = 1, \forall \varphi \in K : \varphi(x) = \varphi_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx + \varphi_0(x).$$

Определим функционал y_0 по действию на $\varphi_0(x)$. $(y_0, \varphi) = (y, \varphi_0) = (f, - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\xi) d\xi)$, y_0 - частное решение (2) или

неопределенный интеграл функции f . $(y, \varphi) = (y_1, \varphi_1) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx + (y, \varphi_0) \Rightarrow$ решение уравнения (2) \exists в K' и записывается в виде $y = y_0 + C$. \square

Пример. Решить уравнение $y' + y = \theta(x)$ в K' .

$y = ze^{-x}, y' = z'e^{-x} - ze^{-x}$, тогда наше уравнение: $z'e^{-x} = \theta(x), z' = \theta(x)e^x$. По формуле, полученной выше: $(z_0, \varphi) = (z, \varphi_0) = (f, - \int_{-\infty}^x \varphi_0(\xi) d\xi) = (\theta(x)e^x, - \int_{-\infty}^x \varphi_0(\xi) d\xi) = - \int_0^{\infty} e^x \int_{-\infty}^x \varphi_0(\xi) d\xi dx = -e^x \int_{-\infty}^x \varphi_0 d\xi|_{x=0} + \int_0^{\infty} e^x \varphi_0(x) dx = \{\varphi_0 \in$

$K_0 : \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0 dx = 0\} = \int_0^{\infty} \varphi_0 d\xi + \int_0^{\infty} e^x \varphi_0(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0 d\xi + \int_0^{\infty} (e^x - 1) \varphi_0 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)(e^x - 1) \varphi_0(x) dx$. Поэтому $z_0(x) = \theta(x)(e^x - 1) \Rightarrow z(x) = \theta(x)(e^x - 1) + C, y = \theta(x)(1 - e^{-x}) + Ce^{-x}$

1.8 Обобщённые функции в \mathbb{R}^n

Определение. Функция называется обычной, если она определена на \mathbb{R}^n , принимает вещественные значения, интегрируема (по Лебегу) по любому n -мерному брусу.

Множество всех обычных функций: $E = E_n = E(\mathbb{R}^n)$

Определение. Функция называется пробной (основной), если бесконечно дифференцируема в \mathbb{R}^n и равна 0 вне некоторого бруса.

Наименьшее замкнутое множество в \mathbb{R}^n вне которого пробная функция равна нулю называется её носителем. Множество пробных функция $K = K_n$.

Определение. $\{\varphi_n\}, \varphi_n \in K_n, \varphi_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ в K_n , если все φ_n сосредоточена на одном брусе и $\varphi_n \rightrightarrows 0$ в K_n вместе со всеми производными.

Определение. Обобщённой функцией назовём любой линейный непрерывный функционал на пространстве K_n . Если $f \in E_n$, то она порождает функционал $(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx(1)$. Тогда f - регулярная обобщённая функция.

Замечание. Существуют функционалы не представимые в виде (1). Например $\delta(x) : (\delta, \varphi) = \varphi(0)$

Определение. Обобщённая функция $f \in K'_n$ имеет порядок сингулярности $\leq p$, если она представима в виде:

$$(f, \varphi) = \sum_{|k| \leq p} f_k(x) D^k \varphi(x) dx = \sum_{|k| \leq p} (f_k, D^k \varphi)(2),$$

где $k = (k_1, \dots, k_n), |k| = k_1 + \dots + k_n, D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$

1.8.1 Действия с обобщёнными функциям

1. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall f_1, f_2 \in K'_n \Rightarrow (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi) = \alpha_1 (f_1, \varphi) + \alpha_2 (f_2, \varphi)$
2. $\forall f \in K'_n, \alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (\alpha(x) f, \varphi) = (f, \alpha(x) \varphi)$
3. Предельный переход. $\{f_\nu\}, f_\nu \in K'_n, f \in K'_n, f_\nu \rightarrow f$ в K'_n , если $(f_\nu, \varphi) \rightarrow (f, \varphi), \forall \varphi \in K_n$.
4. $(D^k f, \varphi) = (-1)^{|k|} (f, D^k \varphi)$

Примеры на дифференцирование

Пример. $(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \varphi) = (f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}) = (f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}) = (\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \varphi)$. То есть для обобщённых функций также смешанные производные совпадают.

Пример.

Определение. Обычная $g(x) \in E_n$ называется обобщённой производной по Соболеву от функции (обычной) f на множестве G , если $\forall \varphi \in C^\infty(G)$, сосредоточенной строго внутри G выполнено $(-1)^{|k|} \int_G g(x) \varphi(x) dx = \int_G f(x) D^k \varphi(x) dx \Rightarrow g(x) = D^k f$ в K' .

Пример. $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ 0, & \mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_n \geq 0\} \end{cases}$

$$(\frac{\partial^n \theta}{\partial x_1 \dots \partial x_n}, \varphi(x)) = (-1)^n (\theta, \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \dots \partial x_n}) = (-1)^n \int_{x_1, \dots, x_n \geq 0} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \dots \partial x_n} dx_1 \dots dx_n = \varphi(0, \dots, 0) = (\delta(x), \varphi)$$

Пример. Оператор Лапласа от сферических функций:

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, f(r), r = \sqrt{\sum_{m=1}^n x_m^2}, \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{2x_j}{r} = \frac{x_j}{r}, \frac{\partial f}{\partial x_j} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x_j} = f'(r) \frac{x_j}{r}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = f''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + f'(r) \frac{r - \frac{x_j^2}{r}}{r^2} = f''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + f'(r) \frac{r^2 - x_j^2}{r^3}$$

$$\Delta f(r) = f''(r) + f'(r) \frac{r^2 n - r^2}{r^3} = f''(r) + f'(r) \frac{n-1}{r}. \text{ Пусть теперь } f(r) = r^p, \text{ тогда } \Delta f(r) = r^{p-2} p(p+n-2) \quad (1).$$

1.9 Формула Грина

$$\int_G \Delta f \varphi d\sigma = \int_G f \Delta \varphi d\sigma + \int_{\Gamma=\delta G} \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial f}{\partial n} \right) d\sigma_p$$

$G : \varepsilon \leq r \leq a$, $a : \varphi(x) = 0$ вне $|x| \leq a$.

$$\int_{r \geq \varepsilon} \frac{\Delta \varphi}{r^{n-2}} dx = \int_{r \geq \varepsilon} \varphi \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) dx - \int_{r=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{1}{r^{n-2}} d\sigma + \int_{r=\varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) d\sigma$$

$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = 0$ из (1).

$\int_{r=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{1}{r^{n-2}} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{r=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} d\sigma \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ так как $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ ограничено

$$\begin{aligned} \int_{r=\varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) d\sigma &= \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \right) = \frac{-(n-2)r^{n-3}}{r^{2(n-2)}} = \frac{-(n-2)}{r^{n-1}} \right\} = -\frac{(n-2)}{\varepsilon^{n-1}} \int_{r=\varepsilon} \varphi d\sigma = -\frac{(n-2)\Omega_n}{\varepsilon^{n-1}\Omega_n} \int_{r=\varepsilon} \varphi d\sigma \\ &= \left\{ \frac{1}{\varepsilon^{n-1}\Omega_n} \int_{r=\varepsilon} \varphi d\sigma = S_\varepsilon[\varphi] - \text{среднее значение функции на сфере} \right\} = -(n-2)\Omega_n S_\varepsilon[\varphi] \rightarrow -(n-2)\Omega_n \varphi(0) = \\ &= -(n-2)\Omega_n \delta(x), \varphi(x), \forall \varphi \in K_n \end{aligned}$$

В итоге получили, что $\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = -(n-2)\Omega_n \delta(x)$, $n > 2$. При $n = 3$: $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(x)$ и имеет первый порядок сингулярности.

1.10 Дифференциальный оператор

Определение. Пусть $P(x_1, \dots, x_n)$ - многочлен относительно переменных x_1, \dots, x_n . Рассмотрим дифференциальный оператор $P(\frac{\partial}{\partial dx}) = P(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$. Обобщённая функция $E(x)$ называется фундаментальным решением оператора $P(\frac{\partial}{\partial dx})$, если она является решением уравнения $P(\frac{\partial}{\partial dx})E(x) = \delta(x)$

Замечание. Для оператора Лапласа $E(x) = -\frac{1}{(n-2)\Omega_n} \frac{1}{r^{n-2}}$, $\forall n > 2$.

Пример. $P\theta(x) = \delta(x)$, функция хевисайда является фундаментальной для $P(\frac{\partial}{\partial dx}) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$

2 Преобразование Фурье и свертка обобщённых функций

2.1 Преобразование Фурье в $K = K_1$

Рассмотрим $\forall \varphi(x) \in K$, $\text{supp} \varphi(x) \subset [-a, a]$.

Определение. Преобразованием Фурье функции $\varphi \in K$ называется

$$F[\varphi] \equiv \psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx = \int_{-a}^a \varphi(x) e^{i\sigma x} dx$$

Определение. Обратным преобразованием Фурье функции $\psi(\sigma)$ называется

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma$$

Оно однозначно восстанавливает $\varphi(x)$ по $\psi(\sigma)$.

Теорема. (свойства преобразования Фурье)

I. Пусть $\varphi(x) \in K$, $\text{supp} \varphi \subset [-a, a]$ для некоторого $a > 0$. Тогда функцию $\psi(\sigma)$ можно продолжить аналитически на всю комплексную плоскость \mathbb{C} , функция $\psi(s)$, $s = \sigma + i\tau$, $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ так что $\forall q \in \{0\} \cup \mathbb{N} \exists C_q = \text{const} > 0 : |s^q \psi(s)| \leq C_q e^{a|\tau|}$ (1)

II. Пусть $\psi(s)$ - целая функция на \mathbb{C} и справедлива оценка (1). Тогда \exists функция $\varphi(x) \in K$, $\text{supp} \varphi \subset [-a, a]$, для которой функции $\psi(\sigma)$ ($\sigma = \text{Res}$) является её преобразованием Фурье.

Доказательство. I. Положим $\psi(s) = \int_{-a}^a \varphi(x)e^{isx}dx$, $\forall s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$. $|\psi(s)| \leq \int_{-a}^a |\varphi(x)||e^{isx}|dx = \int_{-a}^a |\varphi(x)|e^{-\tau x}dx \leq$

$C_0 e^{a|\tau|}$, $C_0 = \int_{-a}^a |\varphi(x)|dx$, получили оценку для $q = 0$.

$\psi^{(l)}(s) = \int_{-a}^a \varphi(x)(ix)^l e^{isx}dx$ - существует, непрерывная $\forall s \in \mathbb{C}$, поэтому $\psi(s)$ - аналитическая функция на \mathbb{C} .

Чтобы получить оценку (1) нужно q раз интегрировать по частям: $\psi(s) = \int_{-a}^a \varphi(x)e^{isx}dx = \{\text{по частям}\} =$

$$= (-1)^q \int_{-a}^a \varphi^{(q)}(x) \frac{1}{(is)^q} e^{isx} dx \Rightarrow |s^q \psi(s)| \leq C_q e^{a|\tau|}, \quad C_q = \int_{-a}^a |\varphi^{(q)}(x)|dx$$

Попутно установили формулу $F[\varphi^{(1)}(x)] = (-is)^q F[\varphi(x)]$ (2)

II. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$ (3), эта функция единственна из единственности обратного преобразования Фурье.

Пусть в (1) $s = \sigma$ (то есть мнимая часть равна 0) $\Rightarrow |\psi(\sigma)| \leq C_0$, $|\sigma^p \psi(\sigma)| \leq C_q \Rightarrow (1 + |\sigma|^p)|\psi(\sigma)| \leq C$, $\psi(\sigma) \leq \frac{C}{1 + |\sigma|^q}$, $\forall q > 1, C = C(q)$

$\varphi^{(l)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma)(-i\sigma)^l e^{-i\sigma x}d\sigma$, пусть $q = l+2$, тогда интеграл сходится равномерно по x на любом отрезке числовой прямой (по признаку Вейерштрасса) $\Rightarrow \varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$

Докажем, что в правой части формулы (3) можно интегрировать по любой прямой в \mathbb{C} параллельной оси $O\sigma$, то

есть $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\sigma + i\tau)e^{-i(\sigma + i\tau)x}d\sigma$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$ (4). Рассмотрим функцию $f(s) = \psi(s)e^{-isx}$, она целая. Рассмотрим

прямоугольник $\Gamma = (-A)(B)(C)(A)$, $-A = (-\sigma_0, 0)$, $B = (-\sigma_0, \tau_0)$, $C = (\sigma_0, \tau_0)$, $A = (\sigma_0, 0)$. Наша функция аналитична в \mathbb{C} , поэтому по теореме Коши $\int_{\Gamma} f(s)ds = \int_{\Gamma} \psi(s)e^{-isx}ds = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Теперь распишем интегралы по границам этого

прямоугольника: $|\int_{AC} \psi(\sigma_0 + i\tau)e^{-(\sigma_0 + i\tau)x}d\tau| = |\int_0^{\tau_0} \psi(\sigma_0 + i\tau)e^{-(\sigma_0 + i\tau)x}d\tau| \leq \left\{ |s|^2 |\psi(s)| \leq C e^{a|\tau|}, |\psi(s)| \leq \frac{C_1}{|\sigma_0 + i\tau|^2} \right\} \leq$
 $\leq C_1 \int_0^{\tau} \frac{1}{|\sigma_0 + i\tau|^2} e^{\tau x} d\tau \sim \frac{1}{|\sigma_0|} \rightarrow 0$ при $\sigma_0 \rightarrow \infty$. То есть по отрезкам (AC) и (-AB) интеграл стремится к 0 и формула (4) верна.

$$|\psi(s)| \leq C_0 e^{a|\tau|} |s|^2 |\psi(s)| \leq C_2 e^{a|\tau|} \Rightarrow |\psi(s)| \leq \frac{\tilde{C}}{1 + |s|^2} e^{a|\tau|} \leq \frac{\tilde{C}}{1 + |\sigma|^2} e^{a|\tau|}, \quad |s| \geq |\sigma|.$$

Подставим в (4) для фиксированного $\tau \neq 0$. $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{C}}{1 + |\sigma|^2} e^{a|\tau|} e^{\tau x} d\sigma = \tilde{C} e^{a|\tau| + \tau x}$, \tilde{C} не зависит от τ .

Пусть $x > a$, $a - x < 0$, пусть $\tau < 0 \Rightarrow \tau = -|\tau|$, $|\varphi(x)| \leq \tilde{C} e^{|\tau|(a-x)} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, аналогично для $x < -a$, то есть показали, что $\text{supp} \varphi(x) \subset [-a, a]$. \square