

Обобщённые функции

Ломов И.С.

Элементарная теория обобщённых функций

Основные функции в \mathbb{R}^1

Определение. Под основной функцией понимают любую вещественную функцию, финитную на \mathbb{R} и определенную на \mathbb{R} и непрерывную вместе с любой производной конечного порядка на \mathbb{R} .

Если $\varphi = 0$ вне $[a, b]$, то говорят, что φ сосредоточена на $[a, b]$. В этом случае $[a, b]$ - носитель $\varphi(x)$. $\text{supp}\varphi(x) = \{x : \varphi(x) \neq 0\}$. Пространство финитных функций является линейным, проверяется тривиально.

Предельный переход в K

Пусть φ_n - последовательность основных функций.

Определение. $\varphi_n(x) \rightarrow 0$ в K , если все $\varphi_n(x)$ сосредоточены на одном отрезке, последовательность $\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n \rightarrow \infty$ на этом отрезке и $\forall k \in \mathbb{N} \varphi_n^{(k)} \rightrightarrows 0$ при $n \rightarrow \infty$

Очевидно, что $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в K , если $\varphi \in K$ и $\varphi_n - \varphi \rightarrow 0$ в K .

Пример. "Шапочка"

$$\varphi(x; a) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - x^2}}, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

Пусть $\varphi_n = \frac{1}{n} \varphi(x; a) \rightarrow 0$ в K , но если возьмем $\varphi_n = \frac{1}{n} \varphi(\frac{x}{n}, a)$, то сходимости не будет т.к. функции сосредоточены на разных отрезках.

Пример. "Срезка"

$$1_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq R \\ 0, & |x| > 3R \\ \text{монотонно убывает, } x \in [-3R, -R] \\ \text{Монотонно возрастает, } x \in [R, 3R] \end{cases}$$

Пусть $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow g(x)1_R(x) \in K$. В этом случае на $x \in [-R, R] \Rightarrow g(x)1_R(x) = g(x)$.

Более общая срезка:

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, & |x| \leq \varepsilon \\ 0, & |x| > \varepsilon \end{cases}$$

C_ε выбираем из условия $\int \omega_\varepsilon(x) dx = 1$.

Лемма. $\exists \eta(x) \in K$, такая, что $\forall x : 0 \leq \eta(x) \leq 1; x \in G_\varepsilon = (a - \varepsilon, b + \varepsilon); G = (a, b)$ и $\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \in G_\varepsilon \\ 0, & x \notin G_\varepsilon \end{cases}$

Доказательство. Пусть $\chi(x)$ - характеристическая функция множества $G_{2\varepsilon}$, то есть индикатор. Пусть $\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi(x) \omega_\varepsilon(x - y) dy$. Покажем, что эта функция принадлежит класса C^∞ . $\eta(x) = \int_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x - y) dy = \int_{a-2\varepsilon}^{b+2\varepsilon} \omega_\varepsilon(x - y) dy = \int_{x-(b+2\varepsilon)}^{x-(a-2\varepsilon)} \omega_\varepsilon(t) dt =$

$\{\omega_\varepsilon \in C^\infty\}$. Поэтому $\eta(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Проверим условие $0 \leq \eta(x) \leq 1$. Функция ω_ε неотрицательная, поэтому левая оценка выполнена, а правая оценка выполняется благодаря выбору константы C_ε так как $\int_{x-(b+2\varepsilon)}^{x-(a-2\varepsilon)} \omega_\varepsilon(t) dt \leq \int_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(t) dt = 1$. В итоге $0 \leq \eta(x) \leq 1$.

Остаётся проверить последнее условие: Пусть $|y - x| \leq \varepsilon \Rightarrow x - \varepsilon \leq y \leq x + \varepsilon$, тогда $\eta(x) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \chi(y) \omega_\varepsilon(x-y) dy =$

$$\begin{cases} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \omega_\varepsilon(x-y) dy = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega_\varepsilon dy = 1, & x \in G_\varepsilon \subset G_{2\varepsilon} \\ 0, & x \notin G_\varepsilon, \text{ потому что индикатор обращается в ноль} \end{cases}$$

Если $a = b = 0, \varepsilon = R \Rightarrow \eta(x) = 1_R(x)$. □

Теорема. (нормируемость пространства K)
 \nexists такой, что если $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в K , то $\rho(\varphi_n, \varphi) \rightarrow 0$.

Доказательство. Известна теорема о метрических пространствах: если есть в метрическом пространстве счётное чис-

ло последовательностей $\begin{matrix} \varphi_1^{(1)} & \varphi_2^{(1)} & \dots & \varphi_n^{(1)} & \rightarrow & \varphi^{(1)} \\ \varphi_1^{(2)} & \varphi_2^{(2)} & \dots & \varphi_n^{(2)} & \rightarrow & \varphi^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(m)} & \varphi_2^{(m)} & \dots & \varphi_n^{(m)} & \rightarrow & \varphi^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$ таких, что $\varphi^{(m)} \rightarrow \varphi$ при $m \rightarrow \infty$, то $\exists \{\varphi_{n_m}^{(m)}\}$ - сходящаяся

к φ при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим контрпример: $\varphi_n^{(m)}(x) = \frac{1}{n} \varphi(\frac{x}{m}; a)$. Для любого фиксированного m $\varphi_n^{(m)}(x) \rightarrow 0$ в K . Но если взять последовательность $\varphi_{n_m}^{(m)}(x) \rightarrow \frac{1}{n_m} \varphi(\frac{1}{m}; a)$, то не будет общего носителя. □

Обобщённые функции в \mathbb{R}^1

Определение. E - множество обычных вещественных функций, определенных на \mathbb{R} , локально интегрируемых.

Пусть $f(x) \in E$, ставим в соответствие функционал на множестве K : $(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx$ (1).

Функционал (1) очевидно является линейным, его непрерывность следует из $\{\varphi_n(x)\} \subset K, \varphi_n(x) \rightarrow 0$ в $K \Rightarrow (f, \varphi_n) \rightarrow 0$.

Лемма. Существуют линейные непрерывные функционалы на K , которые не представимы в виде (1).

Доказательство. $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака: $\delta(x) : \varphi(x) \rightarrow \varphi(0)$. Покажем, что этот функционал не представим в виде (1). Пусть $\exists f(x) \in E : \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0), \forall \varphi \in K$. Пусть $\varphi(x) = \varphi(x; a)$, тогда $\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx =$

$\int_{-a}^a f(x) e^{-\frac{a^2}{a^2 - x^2}} dx \leq \int_{-a}^a |f(x)| dx \rightarrow 0$ при $a \rightarrow 0$. Но $\varphi(0; a) = \frac{1}{e}$. Поэтому данный функционал в виде (1) не представим. □

Определение. Обобщённой функцией (распределением) назовем любой линейный непрерывный функционал на множестве K . Если функционал представим в виде (1), то он регулярный, иначе сингулярный.

K' - множество всех обобщённых функций над K .

Любой обычной функции $f(x)$ отвечает обобщённая функция, определяемая по формуле (1) $f(x) = \text{const} : (c, \varphi) = c \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$. $f(x) : \forall x \rightarrow f(x)$ почти всюду. $f : \forall \varphi \rightarrow (f, \varphi)$. Не можем говорить про равенство в точке, но можем говорить об эквивалентности на (a, b) .

Сингулярные функции

1. $\delta(x)$.
2. $\delta(x - a), \forall a \in \mathbb{R}$.
3. $\delta'(x)$
4. $f(x) = \frac{1}{x} \notin E$

Пусть $f_1, f_2 \in K'$ равны, если $(f_1, \varphi) = (f_2, \varphi), \forall \varphi \in K$, не являются равными, если $\exists \varphi \in K : (f_1, \varphi) \neq (f_2, \varphi)$. Класс K достаточно широк, чтобы различать непрерывные функции:

Лемма. Пусть $f_1(x), f_2(x) \in E$ - различные непрерывные функции, тогда f_1, f_2 - различные обобщённые функции.

Доказательство. Нужно показать, что $\exists \varphi_0 : (f_1, \varphi_0) \neq (f_2, \varphi_0)$. Рассмотрим $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, тогда $\exists x_0 : f(x_0) \neq 0$ и $\exists [\alpha, \beta] : x_0 \in [\alpha, \beta]$ на этом отрезке функция $f(x)$ сохраняет знак. Рассмотрим $\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{-\frac{1}{(\beta-x)(x-\alpha)}}}, & x \in [\alpha, \beta] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta] \end{cases}$.

Заметим, что $\varphi_0 \in K$. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_0(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)e^{-\frac{1}{(\beta-x)(x-\alpha)}}dx > 0$ т.к. $f(x)$ - сохраняет знак, а экспонента строго положительна, поэтому $f_1 \neq f_2$. \square

Пусть $p \geq 0$, целое число

Определение. *Обобщённая функция f имеет порядок сингулярности $\leq p$, если её можно представить в следующем виде:*

$$(f, \varphi) = \sum_{k=0}^p \int_{\mathbb{R}} f_k(x) \varphi^{(k)}(x) dx = \sum_{k=0}^p (f_k(x), \varphi^{(k)}(x)), \forall \varphi \in K, \quad (1)$$

где $f_1(x), \dots, f_p(x) \in E$

Пример. $f(x) \in E$, тогда регулярная $\Rightarrow p = 0$.

Пример. $\delta(x)$. Рассмотрим функцию Хевисайда $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \in E$. $(\theta(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$

$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0) = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 -\theta(x) \varphi'(x) dx$. Поэтому порядок сингулярности $\delta(x)$ равен 1, а для $\delta'(x)$ $p \leq 2$.

Действие с обобщёнными функциями

Сложение

Сложение и умножение на вещественное число: $\forall f_1, f_2 \in K', \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi) = \alpha_1 (f_1, \varphi) + \alpha_2 (f_2, \varphi) \Rightarrow \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in K'$

Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию

$\forall f \in K', \forall \alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

1. $f = f(x) \in E \Rightarrow (\alpha(x)f(x), \varphi(x)) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(x)f(x)\varphi(x)dx = (f(x), \alpha(x)\varphi(x))$ т.к. $\alpha(x)\varphi(x) \in K$.
2. $f \in K' (\alpha(x)f, \varphi) = (f, \alpha(x)\varphi) \Rightarrow \alpha(x)f \in K'$ т.к. функционал линейный и непрерывный.

Дифференцирование

$\forall f \in K' : f' : (f', \varphi) = -(f, \varphi'), \forall \varphi \in K$. Пусть $\varphi_n \rightarrow 0$ в K , тогда $\varphi'_n \rightarrow 0$ в $K \Rightarrow (f, \varphi'_n) \rightarrow 0$ т.к. f -непрерывный функционал $\Rightarrow (f', \varphi_n) \rightarrow 0$, то есть f' - линейный непрерывный функционал $f' \in K$.

Свойства производной:

1. $(f'', \varphi) = (f, \varphi'')$, $(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)})$
2. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall f_1, f_2 \in K' ((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)', \varphi) = -(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi') = -\alpha_1 (f_1, \varphi') - \alpha_2 (f_2, \varphi') = \alpha_1 (f'_1, \varphi) + \alpha_2 (f'_2, \varphi)$.
То есть $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)' = \alpha_1 f'_1 + \alpha_2 f'_2$
3. $\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}), f \in K' ((\alpha(x)f)', \varphi) = -(\alpha(x)f, \varphi') = -(f, \alpha(x)\varphi') = -(f, \alpha(x)\varphi' + \alpha'(x)\varphi - \alpha'(x)\varphi) = -(f, (\alpha\varphi)') + (f, \alpha'\varphi) = (f', \alpha\varphi) + (\alpha'f, \varphi) = (\alpha f' + \alpha'f, \varphi), \forall \varphi \in K$. То есть $((\alpha(x)f)', \varphi) = (\alpha'f + \alpha f', \varphi)$

Пример. $\theta(x) : (\theta'(x), \varphi) = -(\theta(x), \varphi'(x)) = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) \Rightarrow \theta'(x) = \delta(x)$.

Пример. $\delta(x) : (\delta'(x), \varphi(x)) = -(\delta(x), \varphi'(x)) = - \int_{\mathbb{R}} \delta(x) \varphi'(x) = -\varphi'(0)$. Получается, что $\delta' : \varphi(x) \rightarrow -\varphi'(0)$.

Пример. Пусть $f(x)$ - кусочно абсолютно непрерывная функция, x_1, \dots, x_n - точки разрыва. h_1, \dots, h_n - скачки в точках разрыва $f(x_i + 0) - f(x_i - 0) = h_i$. Чему равна производная такой функции?

Введём $f_1(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n h_k \theta(x - x_k)$ - убрали скачки и сделали непрерывной. $f_1(x)$ - абсолютно непрерывная функция

и $\exists f'_1(x)$ н.в. совпадает с $f'(x)$. $f'(x) = f'_1(x) + \sum_{k=1}^n h_k \delta(x - x_k)$ в K .

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & x \in (0, \pi] \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{\pi + x}{2}, & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$ Это 2π -периодическая функция. По полученной ранее формуле получаем, что $f' = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi k)$

Пример. Сходимость ряда.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ - расходится в пространстве E . Посмотрим в пространстве K' : $\left(\left(\sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{N} \right)', \varphi \right) = \left(\sum_{n=1}^N \cos nx, \varphi \right) = - \left(\sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{n}, \varphi' \right) = - \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{n} \varphi' dx \rightarrow - \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \varphi' dx = -(f(x), \varphi'(x)) = (f'(x), \varphi)$. В пространстве K' ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi k)$