1 Гильбертовы пространства

1.1 Определение и простейшие свойства гильбертова пространства

Определение 1.1. *Полное евклидово (унитарное) бесконечномерное пространство называется Гильбертовым (обычно обозначается H)*

Теорема 1. *Норма согласованная со скалярным произведением существует* $\Leftrightarrow$ *выполнено равенство* $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\| + \|y\|\right)^2$

1.2 Теорема об элементе с наименьшей нормой. Разложение гильбертова пространства в прямую ортогональную сумму подпространств

Определение 1.2. *Множество называется выпуклым, если вместе с любой парой своих точек оно содержит и соединяющий их отрезок*

Теорема 2. *(об элементе с наименьшей нормой)*
Пусть M - замкнутое выпуклое подмножество H, тогда в M существует элемент с наименьшей нормой и он единственен.

Определение 1.3. *Множество всех элементов H ортогональных подмножеству L называется ортогональным дополнением к L (обозначается $L^{\perp}$)*

Теорема 3. *(о разложении Гильбертова пространства в сумму)*
Пусть L - замкнутое линейное подмножество H, тогда справедливо $H = L \oplus L^{\perp}$, т.е. $\forall x \in H\ \exists!\ x_1 \in L, x_2 \in L^{\perp}:\ x = x_1 + x_2$

1.3 Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала

Лемма 1.1. *Пусть $f(x)$ - линейный ограниченный функционал над H и $f \not\equiv 0$, тогда* $\dim\left(\ker f\right)^{\perp} = 1$

Теорема 4. *(Рисса о представлении линейного ограниченного функционала)*
$\forall\ f(x) \in H^*\ \exists!\ h \in H:\ f(x) = (x, h),\ \|f\| = \|h\|$

1.4 Слабая сходимость

Свойства слабо сходящихся последовательностей:

1. $x_n \rightharpoonup x_0,\ \|x_n\| \to \|x_0\| \Rightarrow x_n \to x_0$
2. $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \geqslant \|x\|$
3. (Лемма Кадеца) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \exists\{n_k\}:\ \dfrac{x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}}{k} \to x$

1.5 Полные, замкнутые, ортонормированные системы

Определение 1.4. *Система называется замкнутой в H, если любой элемент из H можно приблизить конечной линейной комбинацией из элементов системы с наперёд заданной точностью.*

Определение 1.5. *Система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется полной, если из $(x, x_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ следует $x = 0$.*

Теорема 5. *В H понятие замкнутости и полноты эквивалентны.*

Теорема 6. *(Рисса-Фишера)*
Пусть $\{e_n\}$ - полная система и пусть задана $\{c_k\} \subset \mathbb{C}:\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty \Rightarrow \exists!\ x \in H:\ (x, e_k) = c_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$

1.6 Процесс ортогонализации

Теорема 7. *В сепарабельном H существует полная ортонормированная система.*

Теорема 8. *Все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны с изометией между собой.*

2 Пространства Соболева. Обобщённые решения краевых задач