

# О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ПОЛУПОЛОСЕ

© 2024 г. Н.Ю. Капустин, Д.Д. Васильченко

В работе доказаны теоремы существования и единственности решения задачи для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе, а также получены интегральные представления для частных производных решения.

DOI:

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

в полуполосе  $D = \{(x, y) : 0 < x < \pi, y > 0\}$  в классе функций  $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(\bar{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$  с граничными условиями:

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0, \quad y > 0, \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} \int_0^\pi \left[ \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \varphi(x) \right]^2 dx = 0, \quad \varphi(x) \in L_2(0, \pi), \quad k \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty), \quad (3)$$

$$u(x, y) \Rightarrow 0, \quad y \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Аналогичная задача рассматривалась как вспомогательная при изучении задачи Трикоми-Неймана для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с граничными условиями второго рода на боковых сторонах полуполосы и коэффициентом  $1/k$  при  $u'_y(x, y)$ ,  $|k| > 1$ , в статье [1]. На линии изменения типа ставилось условие склеивания нормальных производных по Франклю. Случай  $k = 1$  (классическая задача с непрерывным градиентом) не рассматривался и теорема единственности для вспомогательной задачи не доказывалась.

На задачу Трикоми с эллиптической частью в виде полуполосы обратил внимание А.В. Бицадзе в связи с математическим моделированием плоскопараллельных движений газа. В данном случае построение решения конформным отображением приводится к краевой задаче относительно аналитической функции в верхней полуплоскости [2, стр. 327]. На основании известной формулы Шварца [2, стр. 315] А.В. Бицадзе было выписано в квадратурах решение этой краевой задачи.

В работе [4] получено интегральное представление регулярного решения задачи для уравнения Лапласа в полукруге с краевым условием первого рода на полуокружности и двумя различными краевыми условиями типа наклонной производной на двух прямолинейных участках границы.

**Теорема 1.** Пусть  $k \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ , тогда решение задачи (1 - 4) существует, причём его можно представить в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)y} \sin \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right)x \right], \quad (5)$$

где коэффициенты  $A_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  определяются из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{k} \right] = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \varphi(x). \quad (6)$$

**Доказательство.** Докажем существование решения задачи (1–4). В силу основного результата работы [2] система  $\{\sin[n + \beta/2] + \gamma/2\}_{n=1}^{\infty}$  образует базис Рисса в пространстве  $L_2(0, \pi)$  когда  $-3/2 < \gamma/\pi + \beta < 1/2$ . В нашем случае  $\gamma = \pi - 2 \arctg 1/k$ ,  $\beta = -1$ , так как в исходной системе индексирование начинается с нуля. Указанные неравенства выполнены при  $k \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ . Поэтому система  $\{\sin[(n + 1/2)x + \pi/2 - \arctg 1/k]\}_{n=0}^{\infty}$  образует базис Рисса в  $L_2(0, 1)$  и справедливо двухстороннее неравенство Бесселя:

$$C_1 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \leq C_2 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)}, \quad 0 < C_1 < C_2,$$

где  $C_1, C_2$  не зависят от  $\varphi$ . Следовательно, сходится ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|$  и сходится равномерно ряд (5). Функция (5) является решением уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям (2) по построению. Условие (4) выполняется, так как  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)y} = e^{-y/2}/(1 - e^{-y})$ . Проверим выполнение условия (3).

Согласно разложению (6), условие (3) принимает вид

$$I(y) = \int_0^{\pi} \left[ \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x) \right]^2 dx,$$

рассмотрим подынтегральное выражение подробнее:

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right)} \left( -\frac{1}{k} \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] - \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] \right) \right] + \varphi(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right)} \left( -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] \right) \right] + \varphi(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right)} \left( -\sin \left[ \arctg \frac{1}{k} \right] \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] - \cos \left[ \arctg \frac{1}{k} \right] \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] \right) \right] + \varphi(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right)} \left( -\cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x - \arctg \frac{1}{k} \right] \right) \right] + \varphi(x) = \\ &= \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( 1 - e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right)} \right) \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x - \arctg \frac{1}{k} \right] \right]. \end{aligned}$$

$$I(y) = \int_0^\pi [M(x)]^2 dx.$$

Докажем, что  $I(y) \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow 0+0$ . Запишем неравенство

$$I(y) \leq I_1(y) + I_2(y), \text{ где}$$

$$I_1(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k} \int_0^\pi \left[ \sum_{n=0}^m A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( 1 - e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} \right) \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x - \arctg \frac{1}{k} \right] \right]^2 dx,$$

$$I_2(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k} \int_0^\pi \left[ \sum_{n=m+1}^\infty A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( 1 - e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} \right) \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x - \arctg \frac{1}{k} \right] \right]^2 dx.$$

Зафиксируем произвольное число  $\varepsilon > 0$ . В силу левой части неравенства Бесселя имеем оценку

$$I_2(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k} \int_0^\pi \left[ \sum_{n=m+1}^\infty A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( 1 - e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} \right) \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x - \arctg \frac{1}{k} \right] \right]^2 dx \leq$$

$$\leq C_3 \sum_{n=m+1}^\infty A_n^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \left( 1 - e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} \right)^2 \leq C_3 \sum_{n=m+1}^\infty A_n^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

если  $m$  достаточно велико.

Во втором слагаемом мы имеем дело с конечным числом элементов, поэтому:

$$I_1(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k} \int_0^\pi \left[ \sum_{n=0}^m A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( 1 - e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} \right) \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x - \arctg \frac{1}{k} \right] \right]^2 dx \leq$$

$$\leq C_4 \sum_{n=0}^m A_n^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \left( 1 - e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

при  $0 < y < \delta$ , если  $\delta$  достаточно мало. Условие (3) выполнено. Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $k > 0$ , тогда решение задачи (1-4) единственно

**Доказательство.** Докажем единственность решения этой задачи. Пусть  $u(x, y)$  - решение однородной задачи. Введём обозначения  $C_\varepsilon = (0, \varepsilon)$ ,  $C_R = (0, R)$ ,  $D_R = (\pi, R)$ ,  $D_\varepsilon = (\pi, \varepsilon)$ .  $\Pi_{R\varepsilon}$  - прямоугольник  $C_\varepsilon C_R D_R D_\varepsilon$ . Справедливы следующие соотношения:

$$0 = \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R - y)(u_{xx} + u_{yy}) dx dy.$$

Заметим, что

$$(R - y)(u_{xx} + u_{yy})u = ((R - y)u_x u)_x + ((R - y)u_y u)_y - (R - y)(u_x^2 + u_y^2) + u_y u =$$

$$= (R - y) (u_{xx}u + u_x^2) + (-u_y + (R - y) u_{yy}u + (R - y) u_y^2) - (R - y) (u_x^2 + u_y^2) + u_yu$$

Подставим это выражение в интеграл:

$$I = \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} ((R - y) u_x u)_x dx dy + \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} ((R - y) u_y u)_y dx dy - \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) + \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} u_y u dx dy.$$

Упростим эти интегралы:

$$\iint_{\Pi_{R\varepsilon}} ((R - y) u_x u)_x dx dy = \int_{[\varepsilon, R]} [(R - y) u_x u]_0^\pi dy = \int_{[\varepsilon, R]} [(R - y) u_x(\pi, y) u(\pi, y) - (R - y) u_x(0, y) u(0, y)] dy = 0$$

т.к. оба подынтегральных выражения равны нулю в силу условия (2)

$$\iint_{\Pi_{R\varepsilon}} ((R - y) u_y u)_y dx dy = \int_{[0, \pi]} [(R - y) u_y u]_\varepsilon^R dx = \int_{[0, \pi]} [0 - (R - \varepsilon) u_y(x, \varepsilon) u(x, \varepsilon)] dx = - \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R - \varepsilon) u_y u dx$$

$$\iint_{\Pi_{R\varepsilon}} u_y u dx dy = \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} \left( \frac{u^2}{2} \right)'_y dx dy = \int_{[0, \pi]} \left[ \frac{u^2(x, R)}{2} - \frac{u^2(x, \varepsilon)}{2} \right] dx$$

В итоге получим

$$I = - \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy - \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R - \varepsilon) u_y u dx - \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \int_{C_R D_R} \frac{u^2}{2} dx$$

Добавим и вычтем  $\int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} k (R - \varepsilon) u_x u dx$ , тогда

$$I = - \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy - \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R - \varepsilon) (u_y - k u_x) u dx - \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R - \varepsilon) k u_x u dx - \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \int_{C_R D_R} \frac{u^2}{2} dx.$$

Отсюда следует

$$\iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{2} \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx + k \frac{R - \varepsilon}{2} u^2(\pi, \varepsilon) = \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R - \varepsilon) (u_y - k u_x) u dx + \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx \leq$$

$$\leq \{ \text{Неравенство Коши-Буняковского} \} \leq (R - \varepsilon) \left[ \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y - k u_x)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx = M$$

Рассмотрим следующее неравенство:  $(2ar - b)^2 \geq 0 \Rightarrow ra^2r^2 - 4abr + b^2 \geq 0 \Rightarrow ab \leq ra^2 + b/(4r)$ .

Возьмем  $a = \left[ (R - \varepsilon) \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y - k u_x)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$ ,  $b = \left[ (R - \varepsilon) \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$ ,  $r = R - \varepsilon$ , тогда

$$M \leq (R - \varepsilon)^2 \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y - k u_x)^2 dx + \frac{1}{4} \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx.$$

Перегруппируем

$$\iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)(u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx + k \frac{R-\varepsilon}{2} u^2(\pi, \varepsilon) \leq (R-\varepsilon)^2 \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y - k u_x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx.$$

В силу (3) имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y - k u_x)^2 dx = 0,$$

откуда вытекает соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)(u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_0^\pi u^2(x, 0) dx + k \frac{R}{2} u^2(\pi, 0) \leq \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx.$$

Устремим теперь  $R \rightarrow \infty$ , тогда  $\int_{C_R D_R} u^2 dx \rightarrow 0$ , а в левой части все слагаемые неотрицательны, отсюда  $u(x, y) \equiv 0$  в  $\overline{D}$ . Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеев Е.И., Моисеев Т.Е., Вафадорова Г.О. Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения, **2015** Т. 51. №8. С.1070-1075
2. Моисеев Е.И. О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения, **1987** Т. 23. №1. С.177-189
3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., Наука, **1981**, 448 стр.
4. Моисеев Т. Е. Об интегральном представлении решения уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения, **2011**, т. 47, №10, с.1446-1451.

Н.Ю. Капустин, Д.Д. Васильченко О краевой задаче для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе // Дифференциальные уравнения

В работе доказаны теоремы существования и единственности решения уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе, а также получены интегральные представления для частных производных решения.

Библиогр. 8 назв.

Капустин Николай Юрьевич

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова. Факультет Вычислительной математики и кибернетики. Профессор. 121467, г.Москва, ул. Молодогвардейская, д.4, кв. 33, 121467, т. 84959390836 (м).

Васильченко Дмитрий Дмитриевич

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова. Факультет Вычислительной математики и кибернетики. Студент. 123557, г.Москва, Пер. Тишинский Б., д.2, кв. 68, 123557, т. 89154111973 (м).