УДК 517.956

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ПОЛУПОЛОСЕ

© 2024 г. Н.Ю. Капустин, Д.Д. Васильченко

В работе доказаны теоремы существования и единственности решения задачи для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе, а также получены интегральные представления для частных производных решения.

DOI:

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

в полуполосе $D = \{(x, y) : \ 0 < x < \pi, y > 0\}$ в классе функций $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$ с граничными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \ u(\pi, y) = 0, \ y > 0, \tag{2}$$

$$\lim_{y \to 0+0} \int\limits_0^\pi \left[\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \varphi(x)\right]^2 dx = 0, \ \varphi(x) \in L_2(0, \pi), \ k \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty), \tag{3}$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, y \to +\infty. \tag{4}$$

Аналогичная задача рассматривалась как вспомогательная при изучении задачи Трикоми-Неймана для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с граничными условиями второго рода на боковых сторонах полуполосы и коэффициентом $1/k$ при $u'_y(x, y), |k| > 1,$ в статье [1]. На линии изменения типа ставилось условие склеивания нормальных производных по Франклю. Случай $k = 1$ (классическая задача с непрерывным градиентом) не рассматривался и теорема единственности для вспомогательной задачи не доказывалась.

На задачу Трикоми с эллиптической частью в виде полуполосы обратил внимание А.В. Бицадзе в связи с математическим моделированием плоскопараллельных движений газа. В данном случае построение решения конформным отображением приводится к краевой задаче относительно аналитической функции в верхней полуплоскости [2, стр. 327]. На основании известной формулы Шварца [2, стр. 315] А.В. Бицадзе было выписано в квадратурах решение этой краевой задачи.

В работе [4] получено интегральное представление регулярного решения задачи для уравнения Лапласа в полукруге с краевым условием первого рода на полуокружности и двумя различными краевыми условиями типа наклонной производной на двух прямолинейных участках границы.

Теорема 1. *Решение задачи (1 - 4) существует, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right], \tag{5}$$

где коэффициенты $A_n,\ n=0,1,2,\dots$ *определяются из разложения*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right]=\frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}\varphi(x). \tag{6}$$

Доказательство. Докажем существование решения задачи $(1-4)$. В силу основного результата работы [2] система $\{\sin\left[(n+1/2)\,x-\operatorname{arctg}1/k\right]\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,\pi)$ при $k\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$. Поэтому справедливо двухстороннее неравенство Бесселя:

$$C_1\|\varphi\|_{L_2(0,\pi)}\le\sum_{n=0}^{\infty}A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\le C_2\|\varphi\|_{L_2(0,\pi)},\ 0<C_1<C_2,$$

где C_1,C_2 не зависят от φ. Следовательно, сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|A_n|$ и сходится равномерно ряд (5). Функция (5) является решением уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям (2) по построению. Условие (4) выполняется, так как $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-(n+1/2)y}=e^{-y/2}/(1-e^{-y})$. Проверим выполнение условия (3).

Согласно разложению (6), условие (3) принимает вид

$$I(y)=\int\limits_0^{\pi}\left[\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi(x)\right]^2dx,$$

рассмотрим подынтегральное выражение подробнее:

$$M(y)=\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi(x)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{1}{k}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]+\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\right)\right]+\varphi(x)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right]\right)\right]+\varphi(x)=$$

$$=\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right]\right].$$

$$I(y)=\int\limits_0^{\pi}[M(y)]^2\,dx.$$

Докажем, что $I(y)\to 0$ при $y\to 0+0$. Запишем неравенство

$$I(y)\le I_1(y)+I_2(y),\ \text{где}$$

$$I_1(y)=\frac{2\sqrt{1+k^2}}{k}\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{m}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right]\right]^2dx,$$

$$I_2(y)=\frac{2\sqrt{1+k^2}}{k}\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right]\right]^2dx.$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. В силу левой части неравенства Бесселя имеем оценку

$$I_2(y)=\frac{2\sqrt{1+k^2}}{k}\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right]\right]^2dx\le$$

$$\le C_3\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)^2\le C_3\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{\varepsilon}{2},$$

если m достаточно велико.

Во втором слагаемом мы имеем дело с конечным числом элементов, поэтому:

$$I_1(y)=\frac{2\sqrt{1+k^2}}{k}\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{m}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right]\right]^2dx\le$$

$$\le C_4\sum_{n=0}^{m}A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)^2<\frac{\varepsilon}{2}$$

при $0<y<\delta$, если δ достаточно мало. Условие (3) выполнено. Теорема доказана.

Теорема 2. *Решение задачи (1- 4) единственно*

Доказательство. Докажем единственность решения этой задачи. Пусть $u(x,y)$ - решение однородной задачи. Введём обозначения $C_\varepsilon=(0,\varepsilon),C_R=(0,R),D_R=(\pi,R),D_\varepsilon=(\pi,\varepsilon)$. $\prod_{R\varepsilon}$ - прямоугольник $C_\varepsilon C_R D_R D_\varepsilon$. Справедливы следующие соотношения:

$$0=\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)(u_{xx}+u_{yy})dxdy=$$

$$=\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}\left((R-y)\,u_xu\right)_x dxdy+\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}\left((R-y)\,u_yu\right)_y dxdy-\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}u_yudxdy=$$

$$=-\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy-\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(R-\varepsilon)\left(u_y-u_x\right)udx-\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(R-\varepsilon)\,u_xudx-\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}\frac{u^2}{2}dx+$$

$$+\int\limits_{C_RD_R}\frac{u^2}{2}dx.$$

Отсюда следует цепочка неравенств

$$\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(R-\varepsilon)\left(u_x-u_y\right)udx+\frac{1}{2}\int\limits_{C_RD_R}u^2dx\le$$

$$\le (R-\varepsilon)\left[\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(u_y-u_x)^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}u^2dx\right]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R}u^2dx\le$$

$$\le (R-\varepsilon)^2\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(u_y-u_x)^2\,dx+\frac{1}{4}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}u^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R}u^2dx,$$

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\frac{1}{4}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}u^2dx+\frac{R-\varepsilon}{2}u^2(\pi,\varepsilon)\le$$

$$\le (R-\varepsilon)^2\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(u_y-u_x)^2\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R}u^2dx.$$

В силу (3) имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(u_y-u_x)^2\,dx=0,$$

откуда вытекает соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi u^2(x,0)dx+\frac{R}{2}u^2(\pi,0)\le\frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R}u^2dx.$$

Устремим теперь $R\to\infty$, тогда $\int\limits_{C_R D_R}u^2dx\to 0$, отсюда $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $u(x,y)$ - решение задачи $(1)-(4)$ и $|k|>1$, тогда решение и представимо в виде*

$$u(x,y)=Re\frac{1}{\pi}e^{\frac{iz}{2}}\int\limits_0^\pi\frac{(\operatorname{tg}t/2)^\alpha}{\cos t/2}\frac{(1+e^{iz})\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}\left(\frac{1+e^{iz}}{1-e^{iz}}\right)^\alpha F(t)dt,\tag{7}$$

где $z=x+iy,\ F(x)=\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}\left(\int\limits_0^x\varphi(t)dt+\sum\limits_{n=0}^\infty A_n\right),\ \alpha=\dfrac{2\operatorname{arctg}1/k}{\pi}$.

Доказательство. Рассмотрим равенство (6).

$$\sum_{n=0}^\infty A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right]=\frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}\varphi(x).$$

Проинтегрируем его от 0 до x.

$$-\sum_{n=0}^\infty A_n\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}+\sum_{n=0}^\infty A_n\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right]=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\int\limits_0^x\varphi(t)dt,$$

Заметим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^\infty A_n\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}=u(0,0)$, поэтому

$$\sum_{n=0}^\infty A_n\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right]=F(x),$$

где $F(x)=\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}\left(\int\limits_0^x \varphi(t)dt+\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n\right)$.
Система синусов $\left\{\cos\left[\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x-\operatorname{arctg}1/k\right]\right\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис в $L_2(0,\pi)$ при $k\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$. Поэтому для коэффициентов A_n справедливо следующее представление [2]:

$$A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^{\pi}h_{n+1}(t)F(t)dt,$$

где

$$h_n(t)=\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg}t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{n}\sin ktB_{n-k},\ B_l=\sum_{m=0}^{l}C_{\gamma/\pi}^{l-m}C_{-\gamma/\pi-l}^{m}(-1)^{l-m},\ C_l^n=\frac{l(l-1)\dots(l-n+1)}{n!}.$$

Пусть $u(x,y)$ - решение задачи $(1-4)$, тогда

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_ne^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

и соотвественно

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}F(t)h_{n+1}(t)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]dt,$$

или

$$u(x,y)=Re\ \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}F(t)h_{n+1}(t)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}dt=$$

$$=Re\ \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}F(t)h_{n+1}(t)e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z}dt=|m=n+1|=$$

$$=Re\ \sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}F(t)h_m(t)e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}dt=$$

$$=Re\ e^{-\dfrac{iz}{2}}\ \sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}F(t)h_m(t)e^{imz}dt.$$

Поменяем местами знаки интергирования и суммирования

$$u(x,y)=Re\ e^{-\dfrac{iz}{2}}\ \int\limits_0^{\pi}F(t)\sum_{m=1}^{\infty}h_m(t)e^{imz}dt$$

Введём новое обозначение:

$$I(t,z)=\sum_{m=1}^{\infty}h_m(t)e^{imz}$$

$$I(t,z)=\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin kt B_{n-k}e^{inz}=\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\sin kt\sum_{n=k}^{\infty}e^{inz}B_{n-k}$$

и новый индекс $m=n-k$

$$I(t,z)=\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\sin kt\sum_{m=0}^{\infty}e^{i(m+k)z}B_m=\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}e^{ikz}\sin kt\sum_{m=0}^{\infty}e^{imz}B_m$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}e^{ikz}\sin kt=\frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^{\infty}e^{ilz}B_l=\sum_{l=0}^{\infty}e^{ilz}\sum_{m=0}^{l}C_{\gamma/\pi}^{l-m}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}(-1)^{l-m}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}e^{ilz}C_{\gamma/\pi}^{l-m}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}(-1)^{l-m}=$$

Введём новый индекс суммирования $k=l-m$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}e^{i(m+k)z}C_{\gamma/\pi}^{k}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}(-1)^{k}=\sum_{m=0}^{\infty}e^{imz}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}\sum_{k=0}^{\infty}C_{\gamma/\pi}^{k}(-1)^{k}e^{ikz}=(1+e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta}(1-e^{iz})^{\gamma/\pi}$$

так как в нашем случае $\beta=-1,\ \gamma=-2\operatorname{arctg}1/k$. Окончательно получаем формулу

$$u(x,y)=Re\ e^{\frac{-iz}{2}}\int_0^{\pi}F(t)I(t,z)dt=$$

$$=Re\ e^{\frac{-iz}{2}}\int_0^{\pi}\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}}\frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}(1+e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta}(1-e^{iz})^{\gamma/\pi}F(t)dt=$$

$$=Re\frac{2}{\pi}e^{\frac{iz}{2}}\int_0^{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}}\frac{(1+e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta}(1-e^{iz})^{\gamma/\pi}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}F(t)dt,$$

т.е. представление:

$$u(x,y)=Re\frac{1}{\pi}e^{\frac{iz}{2}}\int_0^{\pi}\frac{(\operatorname{tg} t/2)^{(2\operatorname{arctg}1/k)/\pi}}{\cos t/2}\frac{(1+e^{iz})\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}\left(\frac{1+e^{iz}}{1-e^{iz}}\right)^{(2\operatorname{arctg}1/k)/\pi}F(t)dt.$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев Е.И., Моисеев Т.Е., Вафадорова Г.О.* Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения, **2015** Т. 51. №8. С.1070-1075
2. *Моисеев Е.И.* О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения, **1987** Т. 23. №1. С.177-189
3. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., Наука,**1981**, 448 стр.
4. *Моисеев Т. Е.* Об интегральном представлении решения уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения, **2011**, т. 47, №10, с.1446-1451.

УДК 517.956

Н.Ю. Капустин, Д.Д. Васильченко О краевой задаче для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе // Дифференциальные уравнения

В работе доказаны теоремы существования и единственности решения уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе, а также получены интегральные представления для частных производных решения.

Библиогр. 8 назв.

Капустин Николай Юрьевич
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова. Факультет Вычислительной математики и кибернетики. Профессор. 121467, г.Москва, ул. Молодогвардейская, д.4, кв. 33, 121467, т. 84959390836 (м).
Васильченко Дмитрий Дмитриевич
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова. Факультет Вычислительной математики и кибернетики. Студент. 123557, г.Москва, Пер. Тишинский Б., д.2, кв. 68, 123557, т. 89154111973 (м).