Задача 6.9

Огородников Д.М., Васильченко Д.Д.

МГУ им. М.В. Ломоносова

31 октября 2023 г.

Постановка задача

Одномерная цепочка чередующихся атомов разной массой m и M. Соединены пружинами одинаковой жесткости β и длины l
Вывести уравнение движения масс. Получить дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$ и построить соотвествующие графики для акустической и оптической ветвей дисперсионной кривой.

Решение

Обозначим смещения η_n и ξ_n. Рассмотрим внешние силы взаимодействия только соседних атомов.

$$\begin{cases} M\ddot{\xi}_n = \beta(\eta_n - 2\xi_n + \eta_{n+1}) \\ m\ddot{\eta}_n = \beta(\xi_{n-1} - 2\eta_n + \xi_n) \end{cases}$$

Будем искать частное решение в виде бегущих волн:

$$\begin{cases} \xi_n = \xi_0 e^{i(\omega t - kb})} \\ \eta_n = \eta_0 e^{i(\omega t - kb + \frac{kb}{2})}, k \in [-\frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{b}] \end{cases}$$

Подставляем

$$\begin{cases} (M\omega^2 - 2\beta)\xi_0 + \beta(e^{\frac{ikb}{2}} - e^{-\frac{ikb}{2}})\eta_0 = 0 \\ \beta(e^{\frac{ikb}{2}} - e^{-\frac{ikb}{2}})\xi_0 + (m\omega^2 - 2\beta)\eta_0 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение для коэффициентов $detA = 0$

$$Mm\omega^4 - 2\beta(M+m)\omega^2 + 2\beta^2(1 - \cos kb) = 0$$

Решение имеет вид:

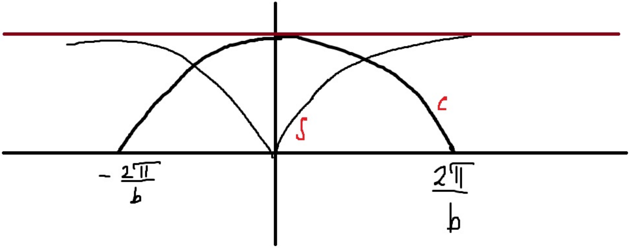
$$\omega^2 = \frac{\beta}{Mm}\left(M + m \pm \sqrt{M^2 + m^2 + 2Mm\cos kb}\right)$$

Рассмотрим случай $M = m$, тогда

$$\omega^2 = \frac{2\beta}{m}\left(1 \pm \cos\frac{kb}{2}\right)$$

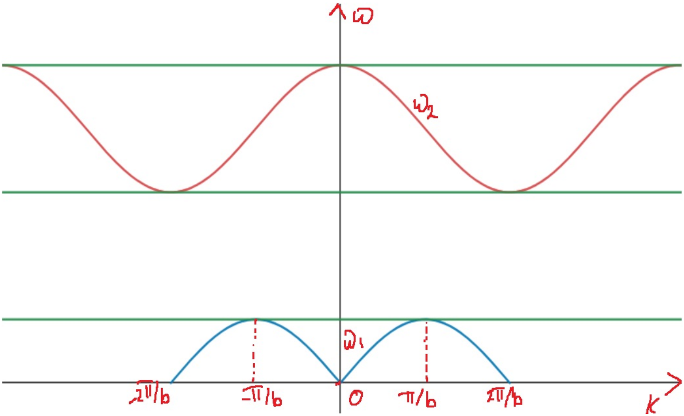
$$\omega_+ = 2\sqrt{\frac{\beta}{m}}\cos\frac{kb}{4}$$

$$\omega_- = 2\sqrt{\frac{\beta}{m}}\sin\frac{kb}{4}$$



Случай $M \neq m$:

1. $-\ \omega_1(k)$ - акустическая
2. $+\ \omega_2(k)$ - оптическая



При малых k ω_1 мала и изменяется линейно в зависимости k. В этом случае $\xi_0 = \eta_0$. Поэтому располагаются на малых по сравнению с длиной волны отрезке.
ω_2 при $k \to 0$ стремится к своему максимуму. Поэтому $M\xi_0 = -m\eta_0$. Следовательно соседние атомы колеблютя в противоположных фазах.