



Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра функционального анализа и его применений

Васильченко Дмитрий Дмитриевич

**Об одной задаче для уравнения Лапласа со смешанными граничными
условиями**

Курсовая работа

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

Капустин Н.Ю.

Москва, 2024

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	3
3	Теорема существования	3
4	Теорема единственности	5
	Список литературы	7

1 Введение

Рассмотрим базовые определения:

Определение 1. Последовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ векторов банахова пространства B называется **базисом** этого пространства, если каждый элемент $x \in B$ разлагается единственным образом в ряд

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j$$

Определение 2. Две последовательности $\{x_j\}$ и $\{\omega_j\}$ с элементами из Гильбертова пространства H называются **биортогональными**, если

$$(x_j, \omega_k) = \delta_{jk}, \quad j, k \in \mathbb{N}$$

Определение 3. Базис $\{\psi_i\}$ гильбертова пространства H , получаемый из ортонормированного базиса с помощью ограниченного обратимого отображения называется **базисом Рисса**.

2 Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

В полуполосе $D = \{(x, y) | 0 < x < \pi, 0 < y\}$

В классе функций $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$

с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} \int_0^{\pi} \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x) \right]^2 dx = 0, \quad \varphi(x) \in L_2[0, \pi] \quad (3)$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, \quad y \rightarrow \infty \quad (4)$$

Аналогичная задача рассматривалась как вспомогательная с граничными условиями второго рода на боковых сторонах полуполосы и коэффициентом $\frac{1}{k}$ при $\frac{\partial u}{\partial y}$ в работе [1].

3 Теорема существования

Теорема 1. Решение задачи (1 - 4) существует, причём его можно представить в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)y} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right], \quad (5)$$

где коэффициенты A_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ находятся из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

Доказательство. Докажем существование решения задачи (1) – (4). В силу основного результата работы [2] система $\{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(0, \pi)$. Поэтому коэффициенты разложения в формуле (6) удовлетворяют неравенствам Бесселя

$$C_1 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \leq C_2 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)}, 0 < C_1 < C_2,$$

а значит сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|$ и сходится равномерно ряд (5). То, что функция (5) при $y > 0$ - решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) - это очевидно. В силу равенства $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})y} = \frac{e^{-y/2}}{1 - e^{-y}}$, также очевидно, что выполнено условие (4). Проверим выполнение условия (3).

Выразим функцию $\varphi(x)$ из представления (6) и подставим в условие (3)

$$I(y) = 2 \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx$$

Докажем, что $I(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow 0 + 0$.

$$\begin{aligned} I(y) &\leq 4 \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=0}^m A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx + \\ &+ 4 \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx \end{aligned}$$

В силу левой части неравенства Бесселя имеем оценку

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \left[\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx \leq \\ &\leq C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \left(e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right)^2 \leq C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Это верно $\forall \varepsilon > 0$, если $m \geq N = N(\varepsilon)$

Во втором слагаемом мы имеем дело с конечным числом элементов, поэтому:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \left[\sum_{n=0}^m A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx \leq \\ &\leq C_4 \sum_{n=0}^m A_n^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \left(e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Это верно, если $0 < y < \delta$ (м зафиксировано в зависимости от N). Условие (3) выполнено. Теорема доказана. \square

4 Теорема единственности

Теорема 2. *Решение задачи (1 - 4) единственно*

Доказательство. Докажем единственность решения этой задачи. Пусть $u(x, y)$ - разность двух решений - решение задачи с $\varphi(x) \equiv 0$. Необходимо получить выражение, где слева будет входить модуль или чётная степень функции u , а справа будет 0.

Введём обозначения $A_\varepsilon = (0, \varepsilon)$, $A_R = (0, R)$, $B_R = (\pi, R)$, $B_\varepsilon = (\pi, \varepsilon)$. $D_{R\varepsilon}$ - прямоугольник $A_\varepsilon A_R B_R B_\varepsilon$. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 0 &= \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y)(u_{xx} + u_{yy}) dx dy = \\
 &= \iint_{D_{R\varepsilon}} ((R - y) u_x)_x dx dy + \iint_{D_{R\varepsilon}} ((R - y) u_y)_y dx dy - \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) + \iint_{D_{R\varepsilon}} u_y u dx dy = \\
 &= - \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R - \varepsilon) u_y u dx - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \int_{A_R B_R} \frac{u^2}{2} dx = \\
 &= - \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R - \varepsilon) (u_y - u_x) u dx - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R - \varepsilon) u_x u dx - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \\
 &\quad + \int_{A_R B_R} \frac{u^2}{2} dx
 \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}
 &\iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{2} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx + \frac{R - \varepsilon}{2} u^2(\pi, \varepsilon) = \\
 &= \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R - \varepsilon) (u_x - u_y) u dx + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx \leq \\
 &\leq (R - \varepsilon) \left[\int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx \leq \\
 &\leq (R - \varepsilon)^2 \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx + \frac{1}{4} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx, \\
 &\iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx + \frac{R - \varepsilon}{2} u^2(\pi, \varepsilon) \leq \\
 &\leq (R - \varepsilon)^2 \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx
 \end{aligned}$$

Устремим $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$, тогда в силу неравенства $(a - b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx = 0$$

и получим соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_0^\pi u^2(x, 0) dx + \frac{R}{2} u^2(\pi, 0) \leq \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx$$

Устремим теперь $R \rightarrow \infty$, тогда $\int_{A_R B_R} u^2 dx \rightarrow 0$, тем самым, это возможно только в случае $u(x, y) \equiv 0$ в \overline{D} . □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Моисеев Т.Е. Вафадорова Г.О.* Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения, **2015** Т. 51. №8. С.1070-1075
- [2] *Моисеев Е.И.* О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения, **1987** Т. 23. №1. С.177-189