

# Об одной задаче для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями

Капустин Н.Ю., Васильченко Д. Д.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

в полуполосе  $D = \{(x, y) : 0 < x < \pi, y > 0\}$  в классе функций  $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$

с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0, \quad y > 0, \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} \int_0^\pi \left[ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \varphi(x) \right]^2 dx = 0, \quad \varphi(x) \in L_2(0, \pi), \quad (3)$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, \quad y \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

В работе будут доказаны теоремы существования и единственности решения этой задачи, а также получены интегральные представления для частных производных решения.

Аналогичная задача рассматривалась как вспомогательная при изучении задачи Трикоми-Неймана для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с граничными условиями второго рода на боковых сторонах полуполосы и коэффициентом  $\frac{1}{k}$  при  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ ,  $|k| > 1$ , в статье [1]. На линии изменения типа ставилось условие склеивания нормальных производных по Франклю. Случай  $k = 1$  (классическая задача с непрерывным градиентом) не рассматривался и теорема единственности для вспомогательной задачи не доказывалась.

На задачу Трикоми с эллиптической частью в виде полуполосы обратил внимание А.В. Бицадзе в связи с математическим моделированием плоскопараллельных движений газа. В данном случае построение решения конформным отображением приводится к краевой задаче относительно аналитической функции в верхней полуплоскости [2, стр. 327]. На основании известной формулы Шварца [2, стр. 315] А.В. Бицадзе было выписано в квадратурах решение этой краевой задачи.

В работе [4] получено интегральное представление регулярного решения задачи для уравнения Лапласа в полукруге с краевым условием первого рода на полуокружности и двумя различными краевыми условиями типа наклонной производной на двух прямолинейных участках границы.

**Теорема 1.** *Решение задачи (1 - 4) существует, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)y} \sin \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right)x \right], \quad (5)$$

где коэффициенты  $A_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  определяются из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}}. \quad (6)$$

Доказательство. Докажем существование решения задачи (1 - 4). В силу основного результата работы [2] система  $\left\{ \sin \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{4} \right] \right\}_{n=0}^{\infty}$  образует базис Рисса в пространстве

$L_2(0, \pi)$ . Разложим  $\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}}$  по этой системе. Коэффициенты разложения в формуле (6) удовлетворяют неравенствам Бесселя

$$C_1 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \leq C_2 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)}, \quad 0 < C_1 < C_2,$$

где  $C_1, C_2$  не зависят от  $\varphi$ . Следовательно сходится ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|$  и сходится равномерно ряд (5).

Дифференцировать ряд (5) по  $x$  в  $D$  можно так как каждая из функций  $A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]$  имеет в области  $D$  производную, сам ряд (5) сходится равномерно и ряд производных

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]$$

сходится равномерно в  $D$ . Аналогично можно показать, что (5) можно дважды дифференцировать по  $x$  и  $y$ . Функция (5) является решением уравнения (1) и удовлетворяет граничному условию (2). Условие (4) выполняется так как  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})y} = \frac{e^{-y/2}}{1 - e^{-y}}$ . Проверим выполнение условия (3).

Согласно разложению (6), условие (3) принимает вид

$$I(y) = 2 \int_0^{\pi} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \left( e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1 \right) \sin \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx$$

Докажем, что  $I(y) \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow 0+0$ . Запишем

$$I(y) \leq I_1(y) + I_2(y), \quad \text{где}$$

$$I_1(y) = 4 \int_0^{\pi} \left[ \sum_{n=0}^m A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \left( e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1 \right) \sin \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx,$$

$$I_2(y) = 4 \int_0^{\pi} \left[ \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \left( e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1 \right) \sin \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx.$$

Зафиксируем  $\forall \varepsilon > 0$ . В силу левой части неравенства Бесселя имеем оценку

$$I_2(y) = 4 \int_0^{\pi} \left[ \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \left( e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1 \right) \sin \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx \leq$$

$$\leq C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \left( e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1 \right)^2 \leq C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

если  $m$  достаточно велико.

Во втором слагаемом мы имеем дело с конечным числом элементов, поэтому:

$$\begin{aligned} I_1(y) &= 4 \int_0^\pi \left[ \sum_{n=0}^m A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx \leq \\ &\leq C_4 \sum_{n=0}^m A_n^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

при  $0 < y < \delta$ , если  $\delta$  достаточно мало. Условие (3) выполнено. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Решение задачи (1- 4) единственно*

Доказательство. Докажем единственность решения этой задачи. Пусть  $u(x, y)$  - решение однородной задачи. Введём обозначения  $C_\varepsilon = (0, \varepsilon)$ ,  $C_R = (0, R)$ ,  $D_R = (\pi, R)$ ,  $D_\varepsilon = (\pi, \varepsilon)$ .  $\Pi_{R\varepsilon}$  - прямоугольник  $C_\varepsilon C_R D_R D_\varepsilon$ . Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R - y)(u_{xx} + u_{yy}) dx dy = \\ &= \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} ((R - y) u_x u)_x dx dy + \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} ((R - y) u_y u)_y dx dy - \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} u_y u dx dy = \\ &= - \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy - \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R - \varepsilon) (u_y - u_x) u dx - \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R - \varepsilon) u_x u dx - \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \\ &\quad + \int_{C_R D_R} \frac{u^2}{2} dx \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} &\int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R - \varepsilon) (u_x - u_y) u dx + \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx \leq \\ &\leq (R - \varepsilon) \left[ \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx \leq \\ &\leq (R - \varepsilon)^2 \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx + \frac{1}{4} \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx, \\ &\iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx + \frac{R - \varepsilon}{2} u^2(\pi, \varepsilon) \leq \\ &\leq (R - \varepsilon)^2 \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx \end{aligned}$$

В силу (3)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx = 0$$

отсюда вытекает соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \iint_{\Pi_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_0^\pi u^2(x, 0) dx + \frac{R}{2} u^2(\pi, 0) \leq \frac{1}{2} \int_{C_R D_R} u^2 dx$$

Устремим теперь  $R \rightarrow \infty$ , тогда  $\int_{C_R D_R} u^2 dx \rightarrow 0$ , отсюда  $u(x, y) \equiv 0$  в  $\bar{D}$ . Теорема доказана.

**Теорема 3.** Пусть  $u(x, y)$  - решение задачи (1) – (4), тогда  $u_x, u_y$  представимы в виде

$$u_y(x, y) = -Im \frac{\sqrt{1 - e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt, \quad (7)$$

$$u_x(x, y) = Re \frac{\sqrt{1 - e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt, \quad (8)$$

где  $z = x + iy$ .

Доказательство. Рассмотрим равенство (6). Система синусов  $\left\{ \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right\}_{n=0}^\infty$  образует базис в  $L_2(0, \pi)$ . Поэтому для коэффициентов  $A_n \left( n + \frac{1}{2} \right)$  справедливо следующее представление [2]:

$$A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) = \int_0^\pi h_{n+1}(t) \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt,$$

где

$$h_n(t) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^n \sin kt B_{n-k}, \quad B_l = \sum_{m=0}^l C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-l}^m (-1)^{l-m}, \quad C_l^n = \frac{l(l-1) \dots (l-n+1)}{n!}.$$

Пусть  $u(x, y)$  - решение задачи (1 – 4), тогда

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^\infty A_n e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)y} \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right]$$

и соответственно

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &= - \sum_{n=0}^\infty A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)y} \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] = \\ &= - \sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)y} \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] dt, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &= -Im \sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)y} e^{i\left(n + \frac{1}{2}\right)x} dt = \\ &= -Im \sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{i\left(n + \frac{1}{2}\right)z} dt = |m = n + 1| = \\ &= -Im \sum_{m=1}^\infty \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{i\left(m - \frac{1}{2}\right)z} dt = \\ &= -Im e^{-\frac{iz}{2}} \sum_{m=1}^\infty \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{imz} dt. \end{aligned}$$

Поменяем местами знаки интегрирования и суммирования

$$u_y(x, y) = -Im e^{-\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^\infty h_m(t) e^{imz} dt$$

Введём новое обозначение:

$$I(t, z) = \sum_{m=1}^\infty h_m(t) e^{imz}$$

$$I(t, z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^n \sin kt B_{n-k} e^{inz} = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^\infty \sin kt \sum_{n=k}^\infty e^{inz} B_{n-k}$$

и новый индекс  $m = n - k$

$$I(t, z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^\infty \sin kt \sum_{m=0}^\infty e^{i(m+k)z} B_m = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^\infty e^{ikz} \sin kt \sum_{m=0}^\infty e^{imz} B_m$$

$$\sum_{k=1}^\infty e^{ikz} \sin kt = \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)}) (1 - e^{i(z-t)})}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^\infty e^{ilz} B_l = \sum_{l=0}^\infty e^{ilz} \sum_{m=0}^l C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^{l-m} = \sum_{m=0}^\infty \sum_{l=m}^\infty e^{ilz} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^{l-m} =$$

Введём новый индекс суммирования  $k = l - m$

$$\sum_{m=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty e^{i(m+k)z} C_{\gamma/\pi}^k C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^k = \sum_{m=0}^\infty e^{imz} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m \sum_{k=0}^\infty C_{\gamma/\pi}^k (-1)^k e^{ikz} = (1 + e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta} (1 - e^{iz})^{\gamma/\pi} =$$

$$= (1 + e^{iz})^{1/2} (1 - e^{iz})^{1/2} = \sqrt{1 - e^{i2z}},$$

так как в нашем случае  $\beta = -1$ ,  $\gamma = \pi/2$ . Окончательно получаем формулу

$$u_y(x, y) = -Im e^{-\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} I(t, z) dt =$$

$$= -Im e^{-\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)}) (1 - e^{i(z-t)})} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt =$$

$$= -Im \frac{2}{\pi} e^{-\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{1}{2 \cos t/2 \sqrt{\tan t/2}} \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)}) (1 - e^{i(z-t)})} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt,$$

т.е. представление:

$$u_y(x, y) = -Im \frac{\sqrt{1 - e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{(1 - e^{i(z+t)}) (1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt.$$

Рассуждая аналогично, получим представление

$$u_x(x, y) = Re \frac{\sqrt{1 - e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{(1 - e^{i(z+t)}) (1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt.$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Моисеев Е.И. Моисеев Т.Е. Вафадорова Г.О.* Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения, **2015** Т. 51. №8. С.1070-1075
- [2] *Моисеев Е.И.* О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения, **1987** Т. 23. №1. С.177-189
- [3] *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. // М., Наука, **1981**, 448 стр.
- [4] *Моисеев Т. Е.* Об интегральном представлении решения уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения, **2011**, т. 47, №10, с.1446-1451.