УДК 517.956

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ПОЛУПОЛОСЕ

Н.Ю. Капустин, Д.Д. Васильченко

[1,2] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова*
e-mail: [1] *n.kapustin@bk.ru,* [2] *dvasil.arm@gmail.com,*

Поступила в редакцию 24.06.2024 г., после доработки 23.09.2024 г.; принята к публикации ..2024 г.

В работе доказаны теоремы существования и единственности решения задачи для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе, а также получены интегральные представления для частных производных решения.

DOI:

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

в полуполосе $D = \{(x, y) :\ 0 < x < \pi, y > 0\}$ в классе функций $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$ с граничными условиями:

$$u(0, y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0,\ y > 0, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to 0+0} \int\limits_0^\pi \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \varphi(x)\right]^2 dx = 0,\ \varphi(x) \in L_2(0, \pi), \tag{3}$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, y \to +\infty. \tag{4}$$

Аналогичная задача рассматривалась как вспомогательная при изучении задачи Трикоми-Неймана для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с граничными условиями второго рода на боковых сторонах полуполосы и коэффициентом $1/k$ при $u'_y(x, y), |k| > 1,$ в статье [1]. На линии изменения типа ставилось условие склеивания нормальных производных по Франклю. Случай $k = 1$ (классическая задача с непрерывным градиентом) не рассматривался и теорема единственности для вспомогательной задачи не доказывалась.

На задачу Трикоми с эллиптической частью в виде полуполосы обратил внимание А.В. Бицадзе в связи с математическим моделированием плоскопараллельных движений газа. В данном случае построение решения конформным отображением приводится к краевой задаче относительно аналитической функции в верхней полуплоскости [2, стр. 327]. На основании известной формулы Шварца [2, стр. 315] А.В. Бицадзе было выписано в квадратурах решение этой краевой задачи.

В работе [4] получено интегральное представление регулярного решения задачи для уравнения Лапласа в полукруге с краевым условием первого рода на полуокружности и двумя различными краевыми условиями типа наклонной производной на двух прямолинейных участках границы.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Решение задачи (1 - 4) существует, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right], \tag{5}$$

где коэффициенты $A_n,\ n=0,1,2,\ldots$ *определяются из разложения*

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}}. \tag{6}$$

Доказательство. Докажем существование решения задачи $(1-4)$. В силу основного результата работы [2] система $\{\sin\left[(n+1/2)\,x+\pi/4\right]\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,\pi)$. Разложим $\varphi(x)/\sqrt{2}$ по этой системе. Коэффициенты разложения в формуле (6) удовлетворяют неравенствам Бесселя

$$C_1\|\varphi\|_{L_2(0,\pi)}\leq\sum_{n=0}^{\infty}A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\leq C_2\|\varphi\|_{L_2(0,\pi)},\ 0<C_1<C_2,$$

где C_1,C_2 не зависят от φ. Следовательно, сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|A_n|$ и сходится равномерно ряд (5). Функция (5) является решением уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям (2) по построению. Условие (4) выполняется, так как $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-(n+1/2)y}=e^{-y/2}/(1-e^{-y})$. Проверим выполнение условия (3).

Согласно разложению (6), условие (3) принимает вид

$$I(y)=2\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx.$$

Докажем, что $I(y)\to 0$ при $y\to 0+0$. Запишем неравенство

$$I(y)\leq I_1(y)+I_2(y),\ \text{где}$$

$$I_1(y)=4\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{m}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx,$$

$$I_2(y)=4\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx.$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. В силу левой части неравенства Бесселя имеем оценку

$$I_2(y)=4\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx\leq$$

$$\leq C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1\right)^2 \leq C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

если m достаточно велико.

Во втором слагаемом мы имеем дело с конечным числом элементов, поэтому:

$$I_1(y) = 4\int_0^{\pi} \left[\sum_{n=0}^{m} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right) \left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1\right) \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{4}\right]\right]^2 dx \leq$$

$$\leq C_4 \sum_{n=0}^{m} A_n^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $0 < y < \delta$, если δ достаточно мало. Условие (3) выполнено. Теорема доказана.

Теорема 2. *Решение задачи (1- 4) единственно*

Доказательство. Докажем единственность решения этой задачи. Пусть $u(x,y)$ - решение однородной задачи. Введём обозначения $C_\varepsilon = (0,\varepsilon), C_R = (0,R), D_R = (\pi,R), D_\varepsilon = (\pi,\varepsilon)$. $\prod_{R\varepsilon}$ - прямоугольник $C_\varepsilon C_R D_R D_\varepsilon$. Справедливы следующие соотношения:

$$0 = \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)(u_{xx}+u_{yy})dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} \left((R-y)\,u_x u\right)_x dxdy + \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} \left((R-y)\,u_y u\right)_y dxdy - \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) dxdy + \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} u_y u dxdy =$$

$$= -\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) dxdy - \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)\left(u_y - u_x\right) udx - \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)\,u_x udx - \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \frac{u^2}{2}dx +$$

$$+ \int\limits_{C_R D_R} \frac{u^2}{2}dx.$$

Отсюда следует цепочка неравенств

$$\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)\left(u_x - u_y\right) udx + \frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx \leq$$

$$\leq (R-\varepsilon)\left[\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \left(u_y - u_x\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx \leq$$

$$\leq (R-\varepsilon)^2 \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \left(u_y - u_x\right)^2 dx + \frac{1}{4}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx,$$

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) dxdy + \frac{1}{4}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx + \frac{R-\varepsilon}{2} u^2(\pi,\varepsilon) \leq$$

$$\leq (R-\varepsilon)^2 \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y - u_x)^2\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{C_R D_R} u^2 dx.$$

В силу (3) имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (u_y - u_x)^2\, dx = 0,$$

откуда вытекает соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2 + u_y^2\right) dxdy + \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi u^2(x,0)dx + \frac{R}{2}u^2(\pi,0) \leq \frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx.$$

Устремим теперь $R\to\infty$, тогда $\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx \to 0$, отсюда $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $u(x,y)$ *- решение задачи* $(1)-(4)$, *тогда* u_x, u_y *представимы в виде*

$$u_y(x,y) = -\mathrm{Im}\frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{iz}{2}} \int\limits_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}\varphi(t)dt, \tag{7}$$

$$u_x(x,y) = \mathrm{Re}\frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{iz}{2}} \int\limits_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}\varphi(t)dt, \tag{8}$$

где $z = x+iy$.

Доказательство. Рассмотрим равенство (6). Система синусов $\{\sin\left[(n+1/2)\,x+\pi/4\right]\}_{n=0}^\infty$ образует базис в $L_2(0,\pi)$. Поэтому для коэффициентов $A_n\,(n+1/2)$ справедливо следующее представление [2]:

$$A_n\left(n+\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^\pi h_{n+1}(t)\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}dt,$$

где

$$h_n(t) = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^\beta}{(\mathrm{tg}\, t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^n \sin kt B_{n-k},\ B_l = \sum_{m=0}^l C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-l}^m (-1)^{l-m},\ C_l^n = \frac{l(l-1)\ldots(l-n+1)}{n!}.$$

Пусть $u(x,y)$ - решение задачи $(1-4)$, тогда

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^\infty A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

и соотвественно

$$u_y(x,y) = -\sum_{n=0}^\infty A_n \left(n+\frac{1}{2}\right) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] =$$

$$= -\sum_{n=0}^\infty \int\limits_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] dt,$$

или

$$u_y(x,y) = -Im \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} dt =$$

$$= -Im \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z} dt = |m = n+1| =$$

$$= -Im \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z} dt =$$

$$= -Im\ e^{-\dfrac{iz}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{imz} dt.$$

Поменяем местами знаки интергирования и суммирования

$$u_y(x,y) = -\mathrm{Im}\ e^{-\dfrac{iz}{2}} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz} dt.$$

Введём новое обозначение:

$$I(t,z) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz}$$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin kt B_{n-k} e^{inz} = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{n=k}^{\infty} e^{inz} B_{n-k}$$

и новый индекс $m = n - k$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} B_m = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} B_m,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt = \frac{e^{iz} \sin t}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} B_l = \sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} \sum_{m=0}^{l} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{l-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} e^{ilz} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{l-m} = |k = l-m| =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} C_{\gamma/\pi}^{k} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{k} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} C_{\gamma/\pi}^{k} (-1)^k e^{ikz} = (1+e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta} (1-e^{iz})^{\gamma/\pi} =$$

$$= (1+e^{iz})^{1/2} (1-e^{iz})^{1/2} = \sqrt{1-e^{i2z}},$$

так как в нашем случае $\beta = -1,\ \gamma = \pi/2$. Окончательно получаем формулу

$$u_y(x,y) = -\mathrm{Im}\ e^{\dfrac{-iz}{2}} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} I(t,z) dt =$$

$$= -\operatorname{Im} e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \sqrt{1-e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt =$$

$$= -\operatorname{Im} \frac{2}{\pi} e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2\cos t/2 \sqrt{\operatorname{tg} t/2}} \frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \sqrt{1-e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt,$$

т.е. представление:

$$u_y(x,y) = -\operatorname{Im} \frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{\dfrac{iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t) dt.$$

Рассуждая аналогично, получим представление

$$u_x(x,y) = \operatorname{Re} \frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{\dfrac{iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t) dt.$$

Теорема доказана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеев, Е.И. Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе/ Моисеев, Е.И., Моисеев Т.Е., Вафадорова Г.О. // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8 —. С. 1070–1075.

2. Моисеев, Е.И. О базисности одной системы синусов / Е.И. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 1987. —Т. 23, № 1 — С. 177–189.

3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. — М. : Наука, 1981. — 448 с.

4 Моисеев, Т. Е. Об интегральном представлении решения уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями / Т.Е. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 2011. —Т. 47, № 10, С. 1446–1451.

BOUNDARY PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS IN A SEMIBAND

N. Y. Kapustin [1], **D. D. Vasilchenko** [2],

[1,2] *Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.*
e-mail: [1] *n.kapustin@bk.ru,* [2] *dvasil.arm@gmail.com*

Theorems on the existence and uniqueness of the solution to the Laplace equation with mixed boundary conditions in a semiband have been proven in the work. Additionally, integral representations for the partial derivatives of the solution have been obtained.

Keywords: word1, word2, word3.

FUNDING

The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the implementation of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under agreement No. 075-15-2022-284.

REFERENCES

1. Kiguradze, I.T. and Chanturia, T.A., *Asimtoticheskiye svoystva resheniy neavtonomnykh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* (Asymptotic Properties of Solutions to Nonautonomous Ordinary Differential Equations), Moscow: Nauka, 1981.
2. Vladimirov, V.S., *Uravneniya matematicheskoy fiziki* (Equations of Mathematical Physics), Moscow: Nauka, 1981.
3. Bellman, R. and Cooke, C.L., *Differential-Difference Equations*, New York–London: Academic Press, 1963.
4. Pinney, E., *Ordinary Difference-Differential Equations*, Berkeley–Los Angeles: Univ. California, 1958.
5. Vladimirov, V.S., Vasharin A.A., Karimova, Kh.Kh. [et al.] *Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki* (Collection of Problems on Equations of Mathematical Physics), Moscow: Fizmatlit, 2003.
6. Kiguradze, I.T., Blow-up Knezer solutions of nonlinear higher-order differential equations, *Differ. Equations*, 2001, vol. 37, no 6, pp. 768–777.
7. Vlasov, V.V. and Medvedev, D.A., Functional-differential equations in Sobolev Spaces and related problems of spectral theory, *J. Math. Sci.*, 2010, vol. 164, no 5, pp. 659–841.
8. Gel'fand, I.M. and Shilov, G.E., Fourier transforms of rapidly growing functions and questions of uniqueness of the solution of the Cauchy problem, *Usp. Mat. Nauk*, 1953, vol. 8, no 6 (58), pp. 3–54.
9. Kusano, T. and Naito, M., Nonlinear oscillation of fourth-order differential equations, *Canad. J. Math.*, 1976, vol. 28, no 4, pp. 840–852.
10. Sadovnichii, V.A., Sultanaev, Ya.T., and Valeev, N.F., Optimization spectral problem for the Sturm–Liouville operator in a vector function space, *Doklady Math.*, 2023, vol. 108, no 2, pp. 406–410.
11. Atamas', E.I., Il'in, A.V., Korovin, S.K., and Fomichev, V.V., Algorithms for robust inversion of dynamical systems, *Differ. Equations*, 2023, vol. 59, no Suppl. 2, pp. 73–246.
12. Zhao, Y., Wen, G., Duan, Z. [et al.], A new observer-type consensus protocol for linear multi-agent dynamical systems, *Asian J. Control*, 2013, vol. 15, no 2, pp. 571–582.

Капустин Николай Юрьевич (Kapustin Nikolay Yurievich)

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова. Факультет Вычислительной математики и кибернетики. Профессор. 121467, г.Москва, ул. Молодогвардейская, д.4, кв. 33, 121467, т. 84959390836 (м).

Васильченко Дмитрий Дмитриевич (Vasilchenko Dmitrii Dmitrievich)

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова. Факультет Вычислительной математики и кибернетики. Студент. 123557, г.Москва, Пер. Тишинский Б., д.2, кв. 68, 123557, т. 89154111973 (м).

Н.Ю. Капустин, Д.Д. Васильченко О краевой задаче для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе // Дифференциальные уравнения

УДК 517.956

Уравнения с частными производными