

Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с полуполосой в эллиптической части

Капустин Н.Ю., Васильченко Д.Д.

5 ноября 2024 г.

1 Постановка задачи

Рассматривается задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$(sgn(y)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (1)$$

в области $D = D^+ \cup D^-$, где $D^+ = \{(x, y) : 0 < x < \pi, 0 < y < +\infty\}$, $D^- = \{(x, y) : -y < x < y + \pi, -\pi/2 < y < 0\}$ в классе функций $u(x, y) \in C^2(D^+) \cap C^2(D^-) \cap C(\overline{D^+ \cup D^-})$ с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, -x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi/2, \quad f(0) = 0, \quad (3)$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, \quad y \rightarrow +\infty \quad (4)$$

и условием склеивания Франкля

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y}(x, +0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, -0), \quad 0 < x < \pi, \quad (5)$$

где $k \in (-\infty, +\infty), k \neq 0$.

Используя формулу для общего решения в области D^- получим в области D^+ вспомогательную задачу для оператора Лапласа с граничными условиями (2), (4) и условием

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \quad (6)$$

Теорема 1. *Решение задачи (1) - (5) единственно.*

Теорема 2. *Пусть $|k| < 1$, $k \neq 0$, $f(x) \in C[0, \pi/2] \cap C^2(0, \pi/2)$, $f'(x) \in L_2(0, \pi/2)$. Тогда решение задачи (8)-(11) существует, единственно и представимо в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-ny} \sin nx,$$

где коэффициенты A_n определяется из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin [nx + \operatorname{arctg} k] = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} f'\left(\frac{x}{2}\right) \quad (1)$$

2 Основные результаты

Теорема 1. *Решение задачи (1) - (5) единственно.*

Доказательство. Пусть существуют два решения $u_1(x, y), u_2(x, y)$ задачи (1)-(5). Тогда $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ есть решение задачи (1)-(5) с функцией $f(x) \equiv 0$. В этом случае $u(x, y) = F(x + y) - F(0)$.

Отсюда следует, что равенство $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ выполняется для всех точек x и y из области гиперболичности. Используя условие склеивания (5) будем иметь

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=0+0} = 0. \quad (2)$$

В результате получаем задачу для нахождения гармонической функции $u(x, y)$ в области D^+ с граничными условиями (2), (4), (6).

В силу принципа Зарембы-Жиро и равенства (6) экстремум не может достигаться на интервале $\{(x, y) : 0 < x < \pi, y = 0\}$. На замкнутых боковых сторонах и на бесконечности экстремум не может достигаться в силу условий (2) и (4). Теорема доказана.

Известно, что общее решение в D^- уравнения (1) имеет вид

$$u(x, y) = F(x + y) + f\left(\frac{x - y}{2}\right) - F(0). \quad (3)$$

Продифференцируем равенство (7):

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \Big|_{y=0+0} = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 < x < \pi.$$

Используя условие склеивания (5), приходим к равенству

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0 + 0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0 + 0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 < x < \pi.$$

Тогда получим в области D^+ вспомогательную задачу для оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (4)$$

с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < +\infty, \quad (5)$$

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0 + 0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0 + 0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \quad (6)$$

$$u(x, y) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow +\infty \quad (7)$$

Теорема 2. Пусть $|k| < 1$, $k \neq 0$, $f(x) \in C[0, \pi/2] \cap C^2(0, \pi/2)$, $f'(x) \in L_2(0, \pi/2)$. Тогда решение задачи (8)-(11) существует и представимо в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-ny} \sin nx,$$

причем условие (10) понимается в интегральном смысле

$$\int_0^{\pi} \left[\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + f'\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 dx \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0 + 0,$$

а коэффициенты A_n определяется из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin [nx + \arctg k] = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}} f'\left(\frac{x}{2}\right) \quad (8)$$

Доказательство.

Система $\{\sin[nx + \arctg k]\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в $L_2(0, \pi)$ при $k \in (-\infty, 1)$ в силу основного результата работы [2]. Поэтому справедливо двустороннее неравенство Бесселя

$$C_1 \|f'\|_{L_2(0, \pi)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2 \leq C_2 \|f'\|_{L_2(0, \pi)}, \quad 0 < C_1 < C_2,$$

где константы C_1, C_2 не зависят от f' . Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$ сходится и сходится равномерно ряд (12).

Функция (12) удовлетворяет уравнению (8) с граничными условиями (9) по построению. Условие (11) выполняется так как $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-ny} = \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}} = \frac{1}{e^y-1}$. Проверим выполнение условия (10). Пусть

$$M(x) = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + f' \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} M(x) &= -\frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n e^{-ny} \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} n A_n e^{-ny} \cos nx + f' \left(\frac{x}{2} \right) = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} n A_n e^{-ny} \left[\frac{1}{k} \sin nx + \cos nx \right] + f' \left(\frac{x}{2} \right) = \\ &= -\frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n e^{-ny} \left[\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \sin nx + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \cos nx \right] + f' \left(\frac{x}{2} \right) = \\ &= -\frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n e^{-ny} \sin [nx + \arctg k] + f' \left(\frac{x}{2} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n (1 - e^{-ny}) \sin [nx + \arctg k]. \end{aligned}$$

Покажем, что $\lim_{y \rightarrow 0+0} I(y) = 0$.

$$I(y) = \int_0^{\pi} M(x)^2 dx \leq I_1(y) + I_2(y),$$

$$I_1(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k} \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=1}^m n A_n \sin [nx + \arctg k] (1 - e^{-ny}) \right]^2 dx$$

$$I_2(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k} \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=m+1}^{+\infty} n A_n \sin [nx + \arctg k] (1 - e^{-ny}) \right]^2 dx$$

Зафиксируем произвольное положительное ε , тогда

$$I_2(y) \leq C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} n^2 A_n^2 (1 - e^{-ny})^2 \leq C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} n^2 A_n^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это верно, если m достаточно велико, т.к. ряд сходящийся.

$$I_1(y) \leq C_4 \sum_{n=1}^m n^2 A_n^2 (1 - e^{-ny})^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Это верно при $0 < y < \delta$, если δ достаточно мало. Теорема доказана.