

1 Гильбертовы пространства

1.1 Определение и простейшие свойства гильбертова пространства

Определение 1.1. Полное евклидово (унитарное) бесконечномерное пространство называется Гильбертовым (обычно обозначается H)

Теорема 1. Норма согласованная со скалярным произведением существует \Leftrightarrow выполнено равенство $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

1.2 Теорема об элементе с наименьшей нормой. Разложение гильбертова пространства в прямую ортогональную сумму подпространств

Определение 1.2. Множество называется выпуклым, если вместе с любой парой своих точек оно содержит и соединяющий их отрезок

Теорема 2. (об элементе с наименьшей нормой)

Пусть M - замкнутое выпуклое подмножество H , тогда в M существует элемент с наименьшей нормой и он единственен.

Определение 1.3. Множество всех элементов H ортогональных подмножеству L называется ортогональным дополнением к L (обозначается L^\perp)

Теорема 3. (о разложении Гильбертова пространства в сумму)

Пусть L - замкнутое линейное подмножество H , тогда справедливо $H = L \oplus L^\perp$, т.е. $\forall x \in H \exists! x_1 \in L, x_2 \in L^\perp : x = x_1 + x_2$

1.3 Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала

Лемма 1.1. Пусть $f(x)$ - линейный ограниченный функционал над H и $f \neq 0$, тогда $\dim(\ker f)^\perp = 1$

Теорема 4. (Рисса о представлении линейного ограниченного функционала)

$\forall f(x) \in H^* \exists! h \in H : f(x) = (x, h), \|f\| = \|h\|$

1.4 Слабая сходимость

Свойства слабо сходящихся последовательностей:

1. $x_n \rightharpoonup x_0, \|x_n\| \rightarrow \|x_0\| \Rightarrow x_n \rightarrow x_0$
2. $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \geq \|x\|$
3. (Лемма Кадеца) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \exists \{n_k\} : \frac{x_{n_1} + \dots + x_{n_k}}{k} \rightarrow x$

1.5 Полные, замкнутые, ортонормированные системы

Определение 1.4. Система называется замкнутой в H , если любой элемент из H можно приблизить конечной линейной комбинацией из элементов системы с наперёд заданной точностью.

Определение 1.5. Система $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ называется полной, если из $(x, x_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ следует $x = 0$.

Теорема 5. В H понятие замкнутости и полноты эквивалентны.

Теорема 6. (Рисса-Фишера)

Пусть $\{e_n\}$ - полная система и пусть задана $\{c_k\} \subset \mathbb{C} : \sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 < \infty \Rightarrow \exists! x \in H : (x, e_k) = c_k$ и $\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 = \|x\|^2$

1.6 Процесс ортогонализации

Теорема 7. В сепарабельном H существует полная ортонормированная система.

Теорема 8. Все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны с изометрией между собой.

2 Пространства Соболева. Обобщённые решения краевых задач

Определение 2.1. Пространство Соболева: Рассмотрим пространство $C^1[0, 1]$ со скалярным произведением $(u, v)_w = \int_0^1 uv dt + \int_0^1 u'v' dt$ дополним это пространство по норме, тогда получим пространство Соболева $W_2^1(0, 1)$.

Определение 2.2. Рассмотрим $\|u_n - u_m\|_{W_2^1(0, 1)}$ - фундаментальная, тогда Обобщённой производной функции и называется $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n' = v$

Лемма 2.1. Пусть $u(x) \in C^1[0, 1]$, тогда $\|u\|_C \leq \sqrt{2}\|u\|_{W_2^1(0,1)}$

Теорема 9. (Вложения)

Пространство $W_2^1(0, 1) \subset C(0, 1)$, причем ограничено ($\exists M > 0 : \|u\|_C \leq M\|u\|_{W_2^1(0,1)}$)

Теорема 10. Вложение $W_2^1(0, 1) \subset C(0, 1)$ компактно.

Следствие 2.1. Из последовательности, ограниченной в $W_2^1(0, 1) \subset C(0, 1)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в $L_2[0, 1]$.

2.1 Обобщённые решения краевых задач

Пространство $\dot{W}_2^1(0, 1)$ - пространство Соболева, но функции дополнительно обращаются в 0 на концах отрезка.

1-ая краевая задача

$$\begin{cases} (a(t)u'(t))' - c(t)u(t) = -f(t), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ 0 < a_0 \leq a(t) \leq a_1 < \infty, \\ 0 \leq c_0 \leq c(t) \leq c_1 < \infty, \\ f(t) \in L_2(0, 1), \\ a(t), b(t) - \text{Ограниченные и измеримые на } [0, 1] \end{cases} \quad (2.1)$$

Определение 2.3. Обобщённым решением первой краевой задачи (2.1) называется функция $u \in \dot{W}_2^1(0, 1)$, удовлетворяющая тождеству $\forall v \in \dot{W}_2^1(0, 1)$

$$\int_0^1 (a(t)u'(t)v'(t) + c(t)u(t)v(t)) dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt$$

Теорема 11. Обобщённое решение задачи (2.1) существует и единственно

Лемма 2.2. (Неравенство Пуанкаре)

Пусть $u \in \dot{W}_2^1(0, 1)$, тогда $\int_0^1 u^2 dt \leq \int_0^1 (u')^2 dt$

2-ая краевая задача

$$\begin{cases} (a(t)u'(t))' - c(t)u(t) = -f(t), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \\ 0 < a_0 \leq a(t) \leq a_1 < \infty, \\ 0 < c_0 \leq c(t) \leq c_1 < \infty, \\ f(t) \in L_2(0, 1), \\ a(t), b(t) - \text{Ограниченные и измеримые на } [0, 1] \end{cases} \quad (2.2)$$

Определение 2.4. Обобщённым решением второй краевой задачи (2.2) называется функция $u \in \dot{W}_2^1(0, 1)$, удовлетворяющая тождеству $\forall v \in \dot{W}_2^1(0, 1)$

$$\int_0^1 (a(t)u'(t)v'(t) + c(t)u(t)v(t)) dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt$$

Теорема 12. Обобщённое решение задачи (2.2) существует и единственно

3 Компактные (вполне непрерывные) операторы в гильбертовом пространстве

3.1 Сопряженный оператор

Определение 3.1. Оператор B называется сопряжённым к оператору A , если $\forall x, y \in H : (Ax, y) = (x, By)$

Теорема 13. Пусть A - линейный ограниченный оператор, тогда $\exists A^*$ - линейный и ограниченный и $\|A\| = \|A^*\|$

3.2 Вполне непрерывные операторы

Определение 3.2. Оператор A называется вполне непрерывным, если слабосходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся.

Лемма 3.1. Пусть A - линейный ограниченный, тогда из $x_n \rightharpoonup x$ следует $Ax_n \rightarrow Ax$

Определение 3.3. Пусть A - вполне непрерывный, тогда A^* - вполне непрерывный

3.3 Компактный оператор

Определение 3.4. Оператор A называется компактным, если ограниченное множество переводит в предкомпактное.

Теорема 14. Оператор A - компактный \Leftrightarrow он вполне непрерывен.

3.4 Приближение компактных операторов

Теорема 15. Пусть A - ограниченный, A_n - вполне непрерывны и $\|A_n\| \rightarrow \|A\|$, тогда A - компактный.

Лемма 3.2. Пусть A - компактный, тогда $\exists z \in H : \|z\| = 1$ и $\|Az\| = \|A\|$.

Теорема 16. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ - ОНБ в сепарабельном H . $P_n x = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k$. Пусть A - компактный, тогда $\|A - P_n A P_n\| \rightarrow 0$.

4 Теория Фредгольма для вполне непрерывных операторов

4.1 Третья теорема Фредгольма

Будем рассматривать оператор $T = E - A$, где A - вполне непрерывный.

Теорема 17. $\exists a > 0 : \|Tx\| \geq a\|x\|, \forall x \perp \ker T$

Теорема 18. $R(T)$ - замкнуто

Теорема 19. Пусть B - линейный ограниченный оператор, тогда справедливо разложение $H = \ker B \oplus \overline{R(B^*)} = \ker B^* \oplus \overline{R(B)}$

Теорема 20. (III - Фредгольма)

Уравнение $Tx = y$ разрешимо $\Leftrightarrow y \perp \ker T^*$

4.2 Первая теорема Фредгольма

Теорема 21. $\text{def } T = \dim \ker T < \infty$

Теорема 22. (о стабилизации ядер)

$\exists N \in \mathbb{N} : \ker T \subset \ker T^2 \subset \dots \subset \ker T^N = \ker T^{N+1} = \dots$

Теорема 23. (I - Фредгольма)

Уравнение $Tx = y$ разрешимо при \forall правой части $\Leftrightarrow \ker T = \emptyset$

4.3 Вторая теорема Фредгольма

Теорема 24. (II - Фредгольма)

$\text{def } T = \text{def } T^* < \infty$

4.4 Общее операторное уравнение. Альтернатива Фредгольма

$$(A - \lambda E)x = y, \lambda \neq 0 \in \mathbb{C}, A - \text{вп. непр.}$$

можем переписать в виде

$$(E - \tilde{A})x = \tilde{y}, \tilde{y} = -y/\lambda, \tilde{A} = -A/\lambda$$

Теорема 25. Уравнение $(A - \lambda E)x = y$ разрешимо для любой правой части $\Leftrightarrow \ker A - \lambda E = \{0\}$

Теорема 26. $\text{def}(A - \lambda E) = \text{def}(A^* - \bar{\lambda}E) < \infty$

Теорема 27. Уравнение $(A - \lambda E)x = y$ разрешимо $\Leftrightarrow y \perp \ker A^* - \bar{\lambda}E$.

Теорема 28. (Альтернатива Фредгольма)

Либо уравнение $(A - \lambda E)x = y$ разрешимо для любой правой части, либо $\ker A - \lambda E \neq \{0\}$

5 Спектральная теория линейных ограниченных операторов

5.1 Спектр оператора

X - банахово.

Определение 5.1. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется регулярной точкой оператора A , если

1. $\ker(A - \lambda E) = \{0\}$
2. $R(A - \lambda E) = X$
3. $\exists (A - \lambda E)^{-1}$ - ограниченный и определённый на всем X .

Определение 5.2. Множество регулярных точек оператора A обозначаем $\rho(A)$

Определение 5.3. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ - спектр оператора A .

Теорема 29. Пусть A - ограниченный оператор и $|\lambda| > \|A\| \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$.

Определение 5.4. $R_A(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}$ - резольвента оператора A .

Теорема 30. Пусть A - ограниченный оператор, $\lambda \in \rho(A)$, $|\Delta| < \frac{1}{\|R_A(\lambda)\|} \Rightarrow \lambda + \Delta \in \rho(A)$.

Теорема 31. (Тождество Гильберта)

Если A - ограниченный и $\lambda, \mu \in \rho(A)$, то $R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\lambda - \mu)R_A(\lambda)R_A(\mu)$

Теорема 32. H - гильбертово. Пусть $A : H \rightarrow H$ - линейный ограниченный оператор, тогда $\sigma(A) \neq \emptyset$.

5.2 Спектр вполне непрерывного оператора

Определение 5.5. (Классификация точек спектра)

Пусть $\lambda \in \sigma(A)$, тогда

1. Если $\ker(A - \lambda E) \neq \{0\}$, то λ принадлежит точечному спектру $\sigma_p(A)$.
2. Если $\ker(A - \lambda E) = \{0\}$, $R(A - \lambda E) \neq X$, но $\overline{R(A - \lambda E)} = X$, то λ принадлежит непрерывному спектру $\sigma_c(A)$.
3. Если $\ker(A - \lambda E) = \{0\}$, $R(A - \lambda E) \neq X$ и $\overline{R(A - \lambda E)} \neq X$, то λ принадлежит остаточному спектру $\sigma_r(A)$.

Теорема 33. Пусть A - вполне непрерывный оператор и $\lambda \neq 0 \in \sigma(A)$, тогда $\lambda \in \sigma_p(A)$.

Теорема 34. Если $\dim H = \infty$ и A - вполне непрерывный, то $0 \in \sigma(A)$.

Теорема 35. Пусть A - вполне непрерывный оператор, тогда если в спектре $\sigma(A)$ есть последовательность λ_n , то $\lambda_n \rightarrow 0$.

5.3 Спектр самосопряженного оператора

H - гильбертово. $A : H \rightarrow H$ - линейный ограниченный самосопряженный.

Теорема 36. Пусть A - ограниченный самосопряженный оператор, тогда $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x) = \mu$.

Теорема 37. Ограниченный линейный оператор A - самосопряженный $\Leftrightarrow \operatorname{Im} (Ax, x) = 0, \forall x \in X$

Теорема 38. Пусть A - ограниченный линейный самосопряженный оператор, тогда $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$

Лемма 5.1. Собственные вектора A отвечающие различным собственным значениям ортогональны.

5.4 Теорема Гильберта-Шмидта

Пусть H - гильбертово. $A : H \rightarrow H$ - линейный вполне непрерывный самосопряженный оператор.

Теорема 39. Пусть $M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$, $-m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)$, тогда $\sigma(A) \subset [-m, M]$, если $\dim H = \infty$, то $0 \in [-m, M]$.

Теорема 40. $\exists \lambda$ - собственное значение A : $\|A\| = |\lambda|$

Теорема 41. (Гильберта-Шмидта)

В замыкании образа оператора A содержится полная ортонормированная система собственных векторов, отвечающих $\lambda \neq 0$