

Интегральное представление решения уравнения Лапласа

Ранее была рассмотрена задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (0.1)$$

В полуполосе $D = \{(x, y) | 0 < x < \pi, 0 < y\}$

В классе функций $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$
с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0 \quad (0.2)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} \int_0^\pi \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x) \right]^2 dx = 0, \quad \varphi(x) \in L_2[0, \pi] \quad (0.3)$$

$$u(x, y) \Rightarrow 0, y \rightarrow \infty \quad (0.4)$$

И была доказана теорема:

Теорема 1. *Решение задачи (2.1 - 2.4) существует и единственно, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)y} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right], \quad (0.5)$$

где коэффициенты A_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ находятся из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}} \quad (0.6)$$

Рассмотрим теперь интегральное представление производных решения этой задачи:

Теорема 2. Пусть $u(x, y)$ - решение задачи (1) – (4), тогда u_x, u_y представимы в виде

$$u_y(x, y) = -Im \frac{\sqrt{1 - e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{+iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt \quad (0.7)$$

$$u_x(x, y) = Re \frac{\sqrt{1 - e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{+iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt \quad (0.8)$$

Доказательство. :

Рассмотрим уравнение (6). Система синусов $\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right]$ образует базис в $L_2(0, \pi)$. Поэтому для коэффициентов $A_n \left(n + \frac{1}{2} \right)$ справедливо следующее представление:

$$A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) = \int_0^\pi h_{n+1}(t) \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt,$$

где

$$h_n(t) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^n \sin kt B_{n-k}$$

Пусть $u(x, y)$ - решение задачи (1)-(4), тогда

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)y} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]$$

и соответственно

$$u_y(x, y) = - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)y} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]$$

Здесь как раз возникает нужный нам коэффициент $A_n \left(n + \frac{1}{2} \right)$, поэтому

$$u_y(x, y) = - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)y} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] dt$$

$$\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] = Im \, e^{i \left(n + \frac{1}{2} \right) x}, \text{ ПОЭТОМУ}$$

$$u_y(x, y) = -Im \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left(n + \frac{1}{2} \right) y} e^{i \left(n + \frac{1}{2} \right) x} dt$$

Обозначим $z = x + iy$

$$u_y(x, y) = -Im \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{i \left(n + \frac{1}{2} \right) z} dt$$

Для дальнейших операций нам было бы удобно, чтобы суммирование начиналось от 1, а не 0, поэтому сделаем замену $m = n + 1$

$$u_y(x, y) = -Im \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{i \left(m - \frac{1}{2} \right) z} dt$$

$$u_y(x, y) = -Im \, e^{-\frac{iz}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{imz} dt$$

Поменяем местами знаки интергирования и суммирования

$$u_y(x, y) = -Im \, e^{-\frac{iz}{2}} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz} dt$$

Введём новое обозначение:

$$I(t, z) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz}$$

$$I(t, z) = \frac{2 (2 \cos t/2)^{\beta}}{\pi (\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sin kt B_{n-k} e^{inz} = \frac{2 (2 \cos t/2)^{\beta}}{\pi (\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{n=k}^{\infty} e^{inz} B_{n-k}$$

Введём новый индекс $m = n - k$

$$I(t, z) = \frac{2 (2 \cos t/2)^{\beta}}{\pi (\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} B_m = \frac{2 (2 \cos t/2)^{\beta}}{\pi (\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} B_m$$

Первый ряд можем вычислить по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \frac{1}{2i} (e^{ikt} - e^{-ikt}) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - e^{i(z+t)}} - \frac{1}{1 - e^{i(z-t)}} \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \frac{e^{i(z+t)} - e^{i(z-t)}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} = \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})}\end{aligned}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} B_l = \sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} \sum_{m=0}^l C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^{l-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} e^{ilz} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^{l-m} =$$

Введём новый индекс суммирования $k = l - m$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} C_{\gamma/\pi}^k C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^k = \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m \sum_{k=0}^{\infty} C_{\gamma/\pi}^k (-1)^k e^{ikz} = (1 + e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta} (1 - e^{iz})^{\gamma/\pi}$$

В нашем случае $\beta = -1, \gamma = \pi/2$, поэтому

$$= (1 + e^{iz})^{1/2} (1 - e^{iz})^{1/2} = \sqrt{1 - e^{i2z}}$$

Собираем все решение:

$$u_y(x, y) = -Im \, e^{\frac{-iz}{2}} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} I(t, z) dt$$

$$u_y(x, y) = -Im \, e^{\frac{-iz}{2}} \int_0^{\pi} \frac{2 (2 \cos t/2)^{\beta}}{\pi (\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

Подставляя β и γ получим

$$u_y(x, y) = -Im \, \frac{2}{\pi} e^{\frac{-iz}{2}} \int_0^{\pi} \frac{1}{2 \cos t/2 \sqrt{\tan t/2}} \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

$$u_y(x, y) = -Im \, \frac{e^{\frac{+iz}{2}}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin t} \sqrt{1 - e^{i2z}}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt$$

□