

Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с полуполосой в эллиптической части

Капустин Н.Ю., Васильченко Д.Д.

Рассматривается задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$(sgn(y)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (1)$$

в области $D = D^+ \cup D^-$, где $D^+ = \{(x, y) : 0 < x < \pi, 0 < y < +\infty\}$,
 $D^- = \{(x, y) : -y < x < y + \pi, -\pi/2 < y < 0\}$ в классе функций $u(x, y) \in C^2(D^+) \cap C^2(D^-) \cap C(\overline{D^+ \cup D^-})$
с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, -x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi/2, \quad f(0) = 0, \quad (3)$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, \quad y \rightarrow +\infty \quad (4)$$

и условием склеивания Франкля

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y}(x, +0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, -0), \quad 0 < x < \pi, \quad (5)$$

где $k \in (-\infty, +\infty), k \neq 0$.

Теорема 1. *Решение задачи (1) - (5) единственно.*

Доказательство. Пусть существуют два решения $u_1(x, y), u_2(x, y)$ задачи (1)-(5). Тогда $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ есть решение задачи (1)-(5) с функцией $f(x) \equiv 0$. В этом случае $u(x, y) = F(x + y) - F(0)$.

Отсюда следует, что равенство $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ выполняется для всех точек x и y из области гиперболичности. Используя условие склеивания (5) будем иметь

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{y=0+0} = 0. \quad (6)$$

В результате получаем задачу для нахождения гармонической функции $u(x, y)$ в области D^+ с граничными условиями (2), (4), (6).

В силу принципа Зарембы-Жиро и равенства (6) экстремум не может достигаться на интервале $\{(x, y) : 0 < x < \pi, y = 0\}$. На замкнутых боковых сторонах и на бесконечности экстремум не может достигаться в силу условий (2) и (4). Теорема доказана.

Известно, что общее решение в D^- уравнения (1) имеет вид

$$u(x, y) = F(x + y) + f\left(\frac{x - y}{2}\right) - F(0). \quad (7)$$

Продифференцируем равенство (7):

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \Big|_{y=0+0} = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 < x < \pi.$$

Используя условие склеивания (5), приходим к равенству

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0 + 0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0 + 0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 < x < \pi.$$

Тогда получим в области D^+ вспомогательную задачу для оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (8)$$

с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < +\infty, \quad (9)$$

$$\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0+0) = -f' \left(\frac{x}{2} \right), \quad (10)$$

$$u(x, y) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow +\infty \quad (11)$$

Теорема 2. Пусть $|k| < 1$, $k \neq 0$, $f(x) \in C[0, \pi/2] \cap C^2(0, \pi/2)$, $f'(x) \in L_2(0, \pi/2)$. Тогда решение задачи (8)-(11) существует и представимо в виде ряда

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-ny} \sin nx, \quad (12)$$

причем условие (10) понимается в интегральном смысле

$$\int_0^{\pi} \left[\frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + f' \left(\frac{x}{2} \right) \right]^2 dx \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0+0,$$

а коэффициенты A_n определяются из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin [nx + \arctg k] = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} f' \left(\frac{x}{2} \right) \quad (13)$$

Теорема 3. Пусть $k > 0$, тогда решение задачи (8) - (11) единственно

Теорема 4. Пусть $|k| < 1$, $k \neq 0$ и $u(x, y)$ - решение задачи (8) - (11), тогда u_x, u_y представимы в виде

$$u_y(x, y) = -\frac{2k}{\pi\sqrt{1+k^2}} \operatorname{Im} \left(\frac{1-e^{iz}}{1+e^{iz}} \right)^{\gamma/\pi} e^{iz} \int_0^{\pi} \frac{1}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{\sin t}{(1-e^{i(z+t)})(1-e^{i(z-t)})} f' \left(\frac{t}{2} \right) dt,$$

$$u_x(x, y) = \frac{2k}{\pi\sqrt{1+k^2}} \operatorname{Re} \left(\frac{1-e^{iz}}{1+e^{iz}} \right)^{\gamma/\pi} e^{iz} \int_0^{\pi} \frac{1}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{\sin t}{(1-e^{i(z+t)})(1-e^{i(z-t)})} f' \left(\frac{t}{2} \right) dt,$$

где $\gamma = 2 \arctg k$, $z = x + iy$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеев, Е.И. Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе/ Моисеев, Е.И., Моисеев Т.Е., Вафадорова Г.О. // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8 — С. 1070–1075.
2. Моисеев, Е.И. О базисности одной системы синусов / Е.И. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 1987. — Т. 23, № 1 — С. 177–189.