

Обобщение задачи

Исходная задача

Ранее была рассмотрена задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (0.1)$$

В полуполосе $D = \{(x, y) | 0 < x < \pi, 0 < y\}$

В классе функций $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$

с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0 \quad (0.2)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} \int_0^\pi \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x) \right]^2 dx = 0, \quad \varphi(x) \in L_2[0, \pi] \quad (0.3)$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, y \rightarrow \infty \quad (0.4)$$

И была доказана теорема:

Теорема 1. *Решение задачи (0.1 - 0.4) существует и единственно, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)y} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right], \quad (0.5)$$

где коэффициенты A_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ находятся из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}} \quad (0.6)$$

Модифицированная задача

Рассмотри теперь задачу с некоторым параметром $k \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ в граничном условии (3). Итого получим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

В полуполосе $D = \{(x, y) | 0 < x < \pi, 0 < y\}$

В классе функций $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$

с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} \int_0^\pi \frac{1}{k} \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x) \right]^2 dx = 0, \quad \varphi(x) \in L_2[0, \pi] \quad (0.7)$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, y \rightarrow \infty$$

Получим похожую теорему, но с небольшими отличиями.

Теорема 2. *Решение задачи (0.1 - 0.4) существует и единственно, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right],$$

где коэффициенты A_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ находятся из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{k} \right] = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \varphi(x) \quad (0.8)$$

Доказательство. Доказательство единственности решения задачи проводится аналогично доказательству исходной задачи.

Перейдём к доказательству существования решения.

Система $\left\{ \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{k} \right] \right\}_{n=0}^{\infty}$ образует в $L_2(0, \pi)$ базис Рисса при $k \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, поэтому справедливо двухстороннее неравенство Бесселя:

$$C_1 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \leq C_2 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)}, \quad 0 < C_1 < C_2,$$

Поэтому сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|$, поэтому равномерно сходится ряд (0.5). Очевидно, что функция (0.5) является решением задачи (0.1).

Условие (0.4) выполняется т.к. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} = \frac{e^{-1/2}}{1 - e^{-y}}$. Проверим выполнение условия (0.3).

Подставим функцию (0.8) в условие (0.7), тогда

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_0^\pi \frac{1}{k} \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{k} \right] \right]^2 dx = \\ &= \int_0^\pi \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \left\{ e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \left[-\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] + \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{k} \right] \right\} \right) \right]^2 dx \end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее выражение в фигурных скобках

$$\begin{aligned} &\left\{ -e^{\dots} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - e^{\dots} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{k} \right] \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} e^{\dots} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right\} + \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{k} \right] = \end{aligned}$$

Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} = \sin(\arctan 1/k)$ и $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} = \cos(\arctan 1/k)$, тогда получаем

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} e^{\dots} \left\{ -\sin(\arctan 1/k) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \cos(\arctan 1/k) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \right\} + \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{k}\right] = \\
&= \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} e^{\dots} \left\{ -\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \arctan 1/k\right] \right\} + \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{k}\right] = \\
&= \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} e^{\dots} \left\{ -\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \arctan 1/k\right] \right\} + \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \arctan \frac{1}{k}\right] = \\
&= \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \arctan \frac{1}{k}\right] (1 - e^{\dots})
\end{aligned}$$

В итоге получаем

$$I(y) = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \int_0^\pi \left[\sum_{n=0}^\infty A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \arctan \frac{1}{k}\right] \left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1\right) \right]^2 dx$$

Оценим $I(y)$

$$\begin{aligned}
I(y) &\leq I_1(y) + I_2(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k} \int_0^\pi \left[\sum_{n=0}^m A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \arctan \frac{1}{k}\right] \left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1\right) \right]^2 dx + \\
&+ \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k} \int_0^\pi \left[\sum_{n=m+1}^\infty A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \arctan \frac{1}{k}\right] \left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1\right) \right]^2 dx
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в соответствии с неравенством Бесселя

$$I_1(y) \leq C \sum_{n=0}^m A_n^2 \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1\right) < C \sum_{n=0}^m A_n^2 \left(n + \frac{1}{2}\right) < \varepsilon/2$$

Это верно при $0 < y < \delta$, m зафиксировано в зависимости от N .

Второе слагаемое также оценим через неравенство Бесселя.

$$I_2(y) \leq C \sum_{n=m+1}^\infty A_n^2 \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1\right) < C \sum_{n=m+1}^\infty A_n^2 \left(n + \frac{1}{2}\right) < \varepsilon/2$$

Условие (0.7) выполнено. Теорема доказана. □