Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра функционального анализа и его применений

Васильченко Дмитрий Дмитриевич

Об одной задаче для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями

Курсовая работа

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Капустин Н.Ю.

Москва, 2024

Содержание

1 Введение

Рассмотрим базовые определения:

Определение 1. *Последовательность* $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ *векторов банахова пространства* B *называется* ***базисом*** *этого пространства, если каждый элемент* $x \in B$ *разлагается единственным образом в ряд*

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j$$

Определение 2. *Две последовальности* $\{x_j\}$ *и* $\{\omega_j\}$ *с элементами из Гильбертова пространства* H *называются* ***биортогональными****, если*

$$(x_j, \omega_k) = \delta_{jk},\ \ j, k \in \mathbb{N}$$

Определение 3. *Базис* $\{\psi_i\}$ *гильбертова простнаства* H*, получаемый из ортнормированного базиса с помощью ограниченного обратимого отображения называется* ***базисом Рисса****.*

2 Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

В полуполосе $D = \{(x, y) | 0 < x < \pi, 0 < y\}$
В классе функций $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$
с граничными условиями

$$u(0, y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0 \tag{2}$$

$$\lim_{y \to 0+0} \int\limits_0^{\pi} \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x)\right]^2 dx = 0,\ \varphi(x) \in L_2[0, \pi] \tag{3}$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, y \to \infty \tag{4}$$

Аналогичная задача рассматривалась как вспомогательная с граничными условиями второго рода на боковых сторонах полуполосы и коэффициентом $\dfrac{1}{k}$ при $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ в работе [1].

3 Теорема сущестоввания

Теорема 1. *Решение задачи (1 - 4) существует, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right) y} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right], \tag{5}$$

где коэффициенты $A_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ *находятся из разложения*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) x + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}} \tag{6}$$

Доказательство. Докажем существование решения задачи (1) – (4). В силу основного результата работы [2] система $\{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,\pi)$. Поэтому коэффициенты разложения в формуле (6) удовлетворяют неравенствам Бесселя

$$C_1\|\varphi\|_{L_2(0,\pi)} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant C_2\|\varphi\|_{L_2(0,\pi)}, 0<C_1<C_2,$$

а значит сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|A_n|$ и сходится равномерно ряд (5). То, что функция (5) при $y>0$ - решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) - это очевидно. В силу равенства $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} = \dfrac{e^{-y/2}}{1-e^{-y}}$, также очевидно, что выполнено условие (4). Проверим выполнение условия (3).

Выразим функцию $\varphi(x)$ из представления (6) и подставим в условие (3)

$$I(y)=2\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx$$

Докажем, что $I(y)\to 0$ при $y\to 0+0$.

$$I(y)\leqslant 4\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{m}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx+$$

$$+4\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx$$

В силу левой части неравенства Бесселя имеем оценку

$$\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx\leqslant$$

$$\leqslant C_3\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)^2\leqslant C_3\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{\varepsilon}{2}$$

Это верно $\forall\varepsilon>0$, если $m\geqslant N=N(\varepsilon)$

Во втором слагаемом мы имеем дело с конечным числом элементов, поэтому:

$$\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{m}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx\leqslant$$

$$\leqslant C_4\sum_{n=0}^{m}A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)^2<\frac{\varepsilon}{2}$$

Это верно, если $0 < y < \delta$ (m зафиксировано в зависимости от N). Условие (3) выполнено. Теорема доказана. $\square$

4 Теорема единственности

Теорема 2. *Решение задачи (1 - 4) единственно*

Доказательство. Докажем единственность решения этой задачи. Пусть $u(x, y)$ - разность двух решений - решение задачи с $\varphi(x) \equiv 0$. Необходимо получить выражение, где слева будет входить модуль или чётная степень функции u, а справа будет 0.

Введём обозначения $A_\varepsilon = (0, \varepsilon), A_R = (0, R), B_R = (\pi, R), B_\varepsilon = (\pi, \varepsilon)$. $D_{R\varepsilon}$ - прямоугольник $A_\varepsilon A_R B_R B_\varepsilon$. Справедливы следующие соотношения:

$$0 = \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} (R - y)(u_{xx} + u_{yy}) dxdy = I$$

Заметим, что $(R-y)(u_{xx} + u_{yy})u = ((R-y)\, u_x u)_x + ((R-y)\, u_y u)_y - (R-y)\left(u_x^2 + u_y^2\right) + u_y u =$
$= (R-y)\left(u_{xx}u + u_x^2\right) + \left(-u_y + (R-y)\, u_{yy}u + (R-y)\, u_y^2\right) - (R-y)\left(u_x^2 + u_y^2\right) + u_y u$

Подставим это выражение в интеграл

$$I = \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} ((R-y)\, u_x u)_x\, dxdy + \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} ((R-y)\, u_y u)_y\, dxdy - \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2 + u_y^2\right) + \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} u_y u dxdy =$$

Упростим теперь эти интегралы:

$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} ((R-y)\, u_x u)_x\, dxdy = \int\limits_{[\varepsilon,R]} [(R-y) u_x u]\, |_0^\pi dy =$

$\int\limits_{[\varepsilon,R]} [(R-y) u_x(\pi, y) u(\pi, y) - (R-y) u_x(0, y) u(0, y)]\, dy = 0$ т.к. оба подынтегральных выражения равны нулю в силу условия (2), поэтому

$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} ((R-y)\, u_y u)_y\, dxdy = \int\limits_{[0,\pi]} [(R-y)\, u_y u]\, |_\varepsilon^R dx = \int\limits_{[0,\pi]} [0 - (R-\varepsilon)\, u_y(x,\varepsilon) u(x,\varepsilon)]\, dx =$
$= -\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon)\, u_y u dx$

$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} u_y u dxdy = \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} \left(\frac{u^2}{2}\right)'_y dxdy = \int\limits_{[0,\pi]} \left[\frac{u^2(x,R)}{2} - \frac{u^2(x,\varepsilon)}{2}\right] dx$

В итоге получим

$$= -\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2 + u_y^2\right) dxdy - \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon)\, u_y u dx - \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \int\limits_{A_R B_R} \frac{u^2}{2} dx =$$

Добавим и вычтем $\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon)\, u_x u dx$, тогда

$$= -\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2 + u_y^2\right) dxdy - \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon)\left(u_y - u_x\right) u dx - \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon)\, u_x u dx - \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx +$$

$$+ \int\limits_{A_R B_R} \frac{u^2}{2} dx$$

Отсюда следует

$$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\frac{1}{2}\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2dx+\frac{R-\varepsilon}{2}u^2(\pi,\varepsilon)=$$

$$=\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}(R-\varepsilon)\left(u_x-u_y\right)udx+\frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R} u^2dx \leqslant \{\text{Неравенство Коши-Буняковского}\}$$

$$\leqslant (R-\varepsilon)\left[\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}\left(u_y-u_x\right)^2dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2dx\right]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R} u^2dx=I$$

Рассмотрим следующее неравенство: $(2ar-b)^2 \geqslant 0 \Rightarrow 4a^2r^2-4abr+b^2 \geqslant 0 \Rightarrow ab \leqslant ra^2+\frac{b}{4r}$

Возьмём $a=\left[(R-\varepsilon)\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}\left(u_y-u_x\right)^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$, $b=\left[(R-\varepsilon)\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}u^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$, $r=R-\varepsilon$, тогда

$$I \leqslant (R-\varepsilon)^2\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}\left(u_y-u_x\right)^2dx+\frac{1}{4}\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}u^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R}u^2dx,$$

$$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\frac{1}{4}\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2dx+\frac{R-\varepsilon}{2}u^2(\pi,\varepsilon)\leqslant$$

$$\leqslant (R-\varepsilon)^2\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}\left(u_y-u_x\right)^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R}u^2dx$$

Устремим $\varepsilon \to 0+0$, тогда в силу условия (3)

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}\left(u_y-u_x\right)^2dx=0$$

и получим соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi u^2(x,0)dx+\frac{R}{2}u^2(\pi,0)\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R}u^2dx$$

Устремим теперь $R\to\infty$, тогда в силу условия (4) $\int\limits_{A_R B_R}u^2dx \to 0$, тем самым, это возможно только в случае $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Моисеев Т.Е. Вафадорова Г.О.* Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения, **2015** Т. 51. №8. С.1070-1075

[2] *Моисеев Е.И.* О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения, **1987** Т. 23. №1. С.177-189