*УДК 517.956*

# О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ПОЛУПОЛОСЕ

**© 2024 г. Н.Ю. Капустин, Д.Д. Васильченко**

В работе доказаны теоремы существования и единственности решения задачи для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе, а также получены интегральные представления для частных производных решения.

DOI:

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

в полуполосе $D=\{(x,y):\ 0<x<\pi, y>0\}$ в классе функций $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^1(\overline{D}\cap\{y>0\})\cap C^2(D)$ с граничными условиями:

$$u(0,y)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y)=0,\ y>0, \tag{2}$$

$$\lim_{y\to 0+0}\int\limits_0^\pi\left[\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\varphi(x)\right]^2dx=0,\ \varphi(x)\in L_2(0,\pi),\ k\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty), \tag{3}$$

$$u(x,y)\rightrightarrows 0, y\to+\infty. \tag{4}$$

Аналогичная задача рассматривалась как вспомогательная при изучении задачи Трикоми-Неймана для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с граничными условиями второго рода на боковых сторонах полуполосы и коэффициентом $1/k$ при $u'_y(x,y), |k|>1$, в статье [1]. На линии изменения типа ставилось условие склеивания нормальных производных по Франклю. Случай $k=1$ (классическая задача с непрерывным градиентом) не рассматривался и теорема единственности для вспомогательной задачи не доказывалась.

На задачу Трикоми с эллиптической частью в виде полуполосы обратил внимание А.В. Бицадзе в связи с математическим моделированием плоскопараллельных движений газа. В данном случае построение решения конформным отображением приводится к краевой задаче относительно аналитической функции в верхней полуплоскости [2, стр. 327]. На основании известной формулы Шварца [2, стр. 315] А.В. Бицадзе было выписано в квадратурах решение этой краевой задачи.

В работе [4] получено интегральное представление регулярного решения задачи для уравнения Лапласа в полукруге с краевым условием первого рода на полуокружности и двумя различными краевыми условиями типа наклонной производной на двух прямолинейных участках границы.

**Теорема 1.** *Пусть $k\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$, тогда решение задачи (1 - 4) существует, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right], \tag{5}$$

*где коэффициенты* $A_n,\ n=0,1,2,\dots$ *определяются из разложения*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right]=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\varphi(x). \tag{6}$$

**Доказательство.** Докажем существование решения задачи $(1-4)$. В силу основного результата работы [2] система $\{\sin[n+\beta/2]+\gamma/2\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,\pi)$ когда $-3/2<\gamma/\pi+\beta<1/2$. В нашем случае $\gamma=\pi-2\operatorname{arctg}1/k$, $\beta=-1$, так как в исходной системе индексирование начинается с нуля. Указанные неравенства выполнены при $k\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$. Поэтому система $\{\sin[(n+1/2)\,x+\pi/2-\operatorname{arctg}1/k]\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса в $L_2(0,1)$ и справедливо двухстороннее неравенство Бесселя:

$$C_1\|\varphi\|_{L_2(0,\pi)}\le\sum_{n=0}^{\infty}A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\le C_2\|\varphi\|_{L_2(0,\pi)},\ \ 0<C_1<C_2,$$

где $C_1,C_2$ не зависят от $\varphi$. Следовательно, сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|A_n|$ и сходится равномерно ряд (5). Функция (5) является решением уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям (2) по построению. Условие (4) выполняется, так как $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-(n+1/2)y}=e^{-y/2}/(1-e^{-y})$. Проверим выполнение условия (3).

Согласно разложению (6), условие (3) принимает вид

$$I(y)=\int\limits_0^{\pi}\left[\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi(x)\right]^2dx,$$

рассмотрим подынтегральное выражение подробнее:

$$M(x)=\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi(x)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{1}{k}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\right)\right]+\varphi(x)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\right)\right]+\varphi(x)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(-\sin\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right]\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]-\cos\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right]\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\right)\right]+\varphi(x)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\left(-\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right]\right)\right]+\varphi(x)=$$

$$=\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1-e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right]\right].$$

$$I(y) = \int\limits_0^\pi [M(x)]^2\, dx.$$

Докажем, что $I(y) \to 0$ при $y \to 0+0$. Запишем неравенство

$$I(y) \le I_1(y) + I_2(y), \text{ где}$$

$$I_1(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k} \int\limits_0^\pi \left[ \sum_{n=0}^{m} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right) \left(1 - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\right) \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right] \right]^2 dx,$$

$$I_2(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k} \int\limits_0^\pi \left[ \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right) \left(1 - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\right) \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right] \right]^2 dx.$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу левой части неравенства Бесселя имеем оценку

$$I_2(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k} \int\limits_0^\pi \left[ \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right) \left(1 - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\right) \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right] \right]^2 dx \le$$

$$\le C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\right)^2 \le C_3 \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

если $m$ достаточно велико.

Во втором слагаемом мы имеем дело с конечным числом элементов, поэтому:

$$I_1(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k} \int\limits_0^\pi \left[ \sum_{n=0}^{m} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right) \left(1 - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\right) \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right] \right]^2 dx \le$$

$$\le C_4 \sum_{n=0}^{m} A_n^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $0 < y < \delta$, если $\delta$ достаточно мало. Условие (3) выполнено. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Пусть $k > 0$, тогда решение задачи (1- 4) единственно*

**Доказательство.** Докажем единственность решения этой задачи. Пусть $u(x,y)$ - решение однородной задачи. Введём обозначения $C_\varepsilon = (0,\varepsilon), C_R = (0,R), D_R = (\pi,R), D_\varepsilon = (\pi,\varepsilon)$. $\prod_{R\varepsilon}$ - прямоугольник $C_\varepsilon C_R D_R D_\varepsilon$. Справедливы следующие соотношения:

$$0 = \iint\limits_{\prod_{R\varepsilon}} (R-y)(u_{xx}+u_{yy})dxdy.$$

Заметим, что

$$(R-y)(u_{xx}+u_{yy})u = \left((R-y)\,u_x u\right)_x + \left((R-y)\,u_y u\right)_y - (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) + u_y u =$$

$$= (R-y)\left(u_{xx}u + u_x^2\right) + \left(-u_y + (R-y)\,u_{yy}u + (R-y)\,u_y^2\right) - (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) + u_y u$$

Подставим это выражение в интеграл:

$$I = \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} \left((R-y)\,u_x u\right)_x dxdy + \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} \left((R-y)\,u_y u\right)_y dxdy - \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) + \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} u_y u dxdy.$$

Упростим эти интегралы:

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} \left((R-y)\,u_x u\right)_x dxdy = \int\limits_{[\varepsilon,R]} \left[(R-y)u_x u\right]\big|_0^{\pi} dy = \int\limits_{[\varepsilon,R]} \left[(R-y)u_x(\pi,y)u(\pi,y) - (R-y)u_x(0,y)u(0,y)\right] dy = 0$$

т.к. оба подынтегральных выражения равны нулю в силу условия (2)

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} \left((R-y)\,u_y u\right)_y dxdy = \int\limits_{[0,\pi]} \left[(R-y)\,u_y u\right]\big|_{\varepsilon}^{R} dx = \int\limits_{[0,\pi]} \left[0 - (R-\varepsilon)\,u_y(x,\varepsilon)u(x,\varepsilon)\right] dx = -\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)\,u_y u dx$$

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} u_y u dxdy = \iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} \left(\frac{u^2}{2}\right)_y' dxdy = \int\limits_{[0,\pi]} \left[\frac{u^2(x,R)}{2} - \frac{u^2(x,\varepsilon)}{2}\right] dx$$

В итоге получим

$$I = -\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) dxdy - \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)\,u_y u dx - \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \int\limits_{C_R D_R} \frac{u^2}{2} dx$$

Добавим и вычтем $\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} k\,(R-\varepsilon)\,u_x u dx$, тогда

$$I = -\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) dxdy - \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)\left(u_y - ku_x\right) u dx - \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)\,k u_x u dx - \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \int\limits_{C_R D_R} \frac{u^2}{2} dx.$$

Отсюда следует

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) dxdy + \frac{1}{2}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx + k\frac{R-\varepsilon}{2}u^2(\pi,\varepsilon) = \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)\left(u_y - ku_x\right) u dx + \frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx \le$$

$$\le \{\text{Неравенство Коши-Буняковского}\} \le (R-\varepsilon)\left[\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \left(u_y - ku_x\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx = M$$

Рассмотрим следующее неравенство: $(2ar-b)^2 \ge 0 \Rightarrow ra^2r^2 - 4abr + b^2 \ge 0 \Rightarrow ab \le ra^2 + b/(4r)$.

Возьмем $a = \left[(R-\varepsilon)\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \left(u_y - ku_x\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$, $b = \left[(R-\varepsilon)\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$, $r = R-\varepsilon$, тогда

$$M \le (R-\varepsilon)^2 \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \left(u_y - ku_x\right)^2 dx + \frac{1}{4}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx.$$

Перегруппируем

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\frac{1}{4}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2dx+k\frac{R-\varepsilon}{2}u^2(\pi,\varepsilon)\le (R-\varepsilon)^2\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(u_y-ku_x)^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R}u^2dx.$$

В силу (3) имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(u_y-ku_x)^2dx=0,$$

откуда вытекает соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi u^2(x,0)dx+k\frac{R}{2}u^2(\pi,0)\le\frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R}u^2dx.$$

Устремим теперь $R\to\infty$, тогда $\int\limits_{C_R D_R} u^2dx\to 0$, а в левой части все слагаемы неотрицательны,п отсюда $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев Е.И., Моисеев Т.Е., Вафадорова Г.О.* Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения, **2015** Т. 51. №8. С.1070-1075
2. *Моисеев Е.И.* О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения, **1987** Т. 23. №1. С.177-189
3. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., Наука,**1981**, 448 стр.
4. *Моисеев Т. Е.* Об интегральном представлении решения уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения, **2011**, т. 47, №10, с.1446-1451.

УДК 517.956

Н.Ю. Капустин, Д.Д. Васильченко О краевой задаче для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе // Дифференциальные уравнения

В работе доказаны теоремы существования и единственности решения уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе, а также получены интегральные представления для частных производных решения.

Библиогр. 8 назв.

Капустин Николай Юрьевич
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова. Факультет Вычислительной математики и кибернетики. Профессор. 121467, г.Москва, ул. Молодогвардейская, д.4, кв. 33, 121467, т. 84959390836 (м).
Васильченко Дмитрий Дмитриевич
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова. Факультет Вычислительной математики и кибернетики. Студент. 123557, г.Москва, Пер. Тишинский Б., д.2, кв. 68, 123557, т. 89154111973 (м).