Системы уравнений "реакция-диффузия" в ограниченной области

В.В. Нефедов, В.В. Тихомиров

15 апреля 2024 г.

Рассматриваются задача динамики и предельного поведения репликторных систем. Основной целью исследования является изучение влияния фактора пространства на поведение распределённых систем. Рассмотрим общую постановку.
Пусть в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^m$ задана система вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = F(u) + D\Delta u(x,t), \tag{0.1}$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t), \dots, u_n(x,t))\,,\ x \in \Omega,\ t \geqslant 0,$
$F(u) = (f_1(u), \dots, f_n(u))\,,$
$D = \{d_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ - симметрическая матрица, имеющая положительные собственные значения.
В начальный момент времени заданы начальные условия

$$u(x,0) = \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \tag{0.2}$$

и на границе $\Gamma$ области $\Omega$ заданы однородные условия Неймана

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{x\in\Gamma} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial u_i}{\partial n}\right)_{x\in\Gamma} = 0,\ i = \overline{1,n}, \tag{0.3}$$

здесь $\vec{n}$ - внешняя нормаль к границе $\Gamma$.
Системы (0.1)-(0.3) являются замкнутыми, когда потоки реагирующих компонент через границу области равны нулю. Эти системы получили название систем "реакция-диффузия". Вектор-функция $F(u)$ определяет реакцию компонентов, которая описывается динамической системой

$$\frac{dv(t)}{dt} = F(v(t)).$$

Матрица $D$ описывает диффузионные потоки, возникающие в пространстве области $\Omega$. В классическом случае рассматриваются диагональные матрицы $D$. В этом случае не учитываются так называемые кросс-диффузионные потоки, когда диффузионный поток одной из компонент системы оказывает влияние на динамику другой компоненты.
В этой работе будем рассматривать слабые решения [1] задачи (0.1) - (0.3), которые являются элементами (при фиксированном $t$) пространства Соболева $H^1(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[u_i^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\right]\right)dx\right)^{1/2},$$

и при любых $x \in \Omega$ представляют гладкую функцию переменной $t \geqslant 0$.
Класс таких фукнций, удовлетворяющих перечисленным выше требованиям, будем обозначать через $H^1(\Omega_t)$.
В нашей работе мы не обсуждаем вопрос о существовании слабых решений.
Введём следующее понятие.

**Определение 0.1.** *Вектор-функция $v(x) \in H^1(\Omega)$ такая, что*

$$F(v) + D\Delta v(x) = 0,\ x \in \Omega,\ \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_{\Gamma} = 0, \tag{0.4}$$

*называется стационарным положением равновесия системы (0.1) - (0.3).*

Если положение равновесия $v(x) \neq const$, то его называют пространственно неоднородными. Задача об обтекании пространственно неоднородных равновесий сложна. Будем предполагать, что $v(x)$ пространственно однородное положение равновесие, то есть есть решение задачи

$$F(v) = 0,\ \Delta v(x) = 0,\ \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_{\Gamma} = 0.$$

Исследование таких положений равновесия дают информацию о предельном положении системы при $t \to \infty$. Как и в случае динамических систем введем аналог понятия устойчивости по Ляпунову стационарных положений равновесия.

**Определение 0.2.** *Положение равновесия $v(x)$ системы (0.1)-(0.3) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых решений $u(x,t)$ системы (0.1)-(0.3) с начальными даными $\varphi(x)$, такими, что $\|v(x) - \varphi(x)\|_{H^1(\Omega)} < \delta$ выполняется $\|v(x) - u(x,t)\|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon$ для всех $t > 0$.*

Если, кроме того, выполняется условие $u(x,t) \to v(x)$ в пространстве $H^1(\Omega)$ при $t \to \infty$, то положение равновесия называется асимптотически устойчивым.
Пусть далее $v(x)$ - пространственно-однородное положение равновесия системы (0.1)-(0.3).
Рассмотрим матрицу Якоби вектор-функции $f$: $A = \left(\dfrac{\partial v}{\partial u}\right)|_{u=v}$.
Исследование устойчивости положения равновесия можно осуществить с помощью аналога теоремы Ляпунова-Пуанкаре об устойчивости по первому приближению и оно сводится к исследованию спектра следующей задачи на собственные значения:

$$Az(x) + D\Delta z(x) = \lambda z(x),\ \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_\Gamma = 0,\ z \in H^1(\Omega). \tag{0.5}$$

Здесь $\delta_{ij}$ - символ Кронекера.
Соответствующие собственные значения образуют неубывающую последовательность

$$\mu_0 \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n \leqslant \ldots,\ \mu_n \to +\infty,\ t \to +\infty$$

Если для всех собственных значениий задачи (0.5) выполняется условие $Re\ \lambda_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots,$ то положение равновесия является асимптотически устойчивым.Точную формулировку

## НЕ ХВАТАЕТ 5 СТРАНИЦЫ!!!!

Соответствующие собственные значения образуют неубывающую последовательность

$$\mu_0 \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n \leqslant \ldots,\ \mu_n \to +\infty,\ t \to +\infty$$

С учётом представления (0.7) исходная задача принимает вид

$$\left(B - \mu_k \Lambda\right) R^k = \lambda_k R^K,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Если умножить это равенство скалярно в пространстве $L_2(\Omega)$ на функции $\varphi_i(x),\ i = 1, 2, \ldots$ и воспользоваться соотношением (0.9), то получим матричные равенства для векторов $R^k$ в форме задач на собственные значения:

$$\left(B - \mu_k \Lambda\right) R^k = \lambda_k R^K,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{0.6}$$

Таким образом, задача об отыскании собственных значений континуальной системы (0.5) сводится к алгебраической задаче о собственных значений счетной последовательности матриц вида

$$D_k = B - \mu_k \Lambda,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{0.7}$$

Есди для всех собственных значений задачи (0.10) выполняется условие $Re\ \lambda_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots,$ то пространственно-однородное положение равновесия $v$ системы (0.1)-(0.3) является устойчивым.
Если же хотя бы для одного значения $k$ это условие не выполняется, то положение равновесия неустойчиво.

Рассмотрим несколько примеров применения сформулированных результатов к конкретным задачам.

**Пример 1.** *Запишем уравнение Фишера-Колмогорова на интервале $(0, 1)$ с однородными краевыми условиями Неймана*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = u(1-u) + d\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0. \end{cases}$$

*Это уравнение имеет два пространственно-однородных положения равновесия $v_1(x) = 0$ и $v_2(x) = 1$. Второе положение равновесия определяется собственными функциями и собственными значениями задачи (0.8):*

$$\varphi_k(x) = \sqrt{2}\cos k\pi x,\ \mu_k = (k\pi)^2,\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

*Равенство (0.11) принимает вид*

$$\lambda_= D_k = -1 - d\,(k\pi)^2,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

*Следовательно, положение равновесия является асимптотически устойчивым.*
*В случае $v_1(x) = 0$ из равенства (0.11) получим, что $\lambda_k = 1 - d\,(k\pi)^2,\ k = 0, 1, 2, \ldots.$*
*Положение равновесия неустойчиво $\lambda_0 = 1 > 0$.*

Рассмотрим ещё один пример системы типа реакция-диффузия.

**Пример 2.** *Исследуем влияние диффузии на поведение замкнутой системы "реакция-диффузия"общего вида при $t \to \infty$. Остановимся на случае $n = 2$. Рассмотрим систему вида*

$$\begin{cases} u_t = f(u,v) + d_1(u_{xx} + u_{yy}), \\ v_t = g(u,v) + d_2(v_{xx} + v_{yy}), \\ u = u(x,y,t),\ \ v = v(x,y,t),\ \ (x,y) \in \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{0.8}$$

$d_1, d_2 > 0$ - *коэффициенты диффузии.*
*Функции $u$ и $v$ удовлетворяют условиям Неймана (случай замкнутой системы)*

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = 0,\ \ \frac{\partial v}{\partial n}|_\Gamma = 0 \tag{0.9}$$

*На границе $\Gamma$ ограниченной замкнутой области $\Omega$ с начальными условиями*

$$u(x,0) = 0,\ \ u(0,y) = 0,\ \ v(x,0) = 0,\ \ v(0,y) = 0. \tag{0.10}$$

*Ради определённости будем предполагать, что область $\Omega$ является квадратом: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$.*
*Вектор-функция $F = \{f(u,v), g(u,v)\}$ определяет реакцию компонента системы (0.13)-(0.14), которая описывается динамической системой*

$$\frac{dv(t)}{dt} = F(v(t)),\ \ v(t) = \{f, g\}. \tag{0.11}$$

*Матрица diag $(d_1, d_2)$ описывает диффузионные потоки, возникающие в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Решения системы (0.12)-(0.14) будем рассматривать в пространстве Соболева $H^1(\Omega)$.*
*Для исследования поведения решений системы (0.12)-(0.14) при $t \to \infty$ воспользуемся энергетическими (вариационными) методом [3] – [5]. Для этого введем в рассмотрение (вариационную) функцию времени*

$$S(t) = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2\right) dxdy, \tag{0.12}$$

*которая играет роль энергии системы.*
*Вычислим производную функции (0.15) с учётом (0.12)-(0.14), в результате получим*

$$\frac{dS(t)}{dt} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left(u_x u_{xt} + v_x v_{xt} + u_y u_{ty} + v_y v_{yt}\right) dxdy. \tag{0.13}$$

*Формулу (0.16) можно представить в виде*

$$S''(t) = S_1'(t) + S_2'(t),$$

*где*

$$S_1'(t) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left[u_x\left(d_1 u_{xx}\right)_x + u_x\left(f_u u_x + f_v v_x\right) + v_x\left(d_2 v_{xx}\right)_x + v_x\left(g_u u_x + g_v v_x\right)\right] dxdy \tag{0.14}$$

$$S_2'(t) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left[u_y\left(d_1 u_{yy}\right)_y + u_y\left(f_u u_y + f_v v_y\right) + v_y\left(d_2 v_{yy}\right)_y + v_y\left(g_u u_y + g_v v_y\right)\right] dxdy \tag{0.15}$$

*Введём обозначения*

$$d = \min\left(d_1, d_2\right),\ \ m = \max_{u,v}\left[|f_u| + |f_v| + |g_u|, |g_v| + |f_v| + |g_u|\right] \tag{0.16}$$

**Теорема.** *Если $d > \frac{m}{\pi^2}$, то $\lim\limits_{t\to\infty} E(t) = 0$, и поэтому все частные производные $u_x, v_x, u_y, v_y$ стремятся к нулю при $t \to \infty$, а само решение выходит на константу.*

*Доказательство.* Рассмотрим интеграл (0.17). После интегрирования по частям, с учётом краевых условий, запишем (0.17) в виде

$$S_1'(t) = -\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left(d_1 u_{xx}^2 + d_2 v_{xx}^2\right) dxdy + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left(f_u u_x^2 + g_v v_x^2 + \left(f_u + g_u\right) u_x v_x\right) dxdy,$$

тогда в силу обозначений (0.19) и неравенства Коши-Буняковского имеем

$$S_1'(t) \leqslant -d\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left(u_{xx} + v_{xx}\right) dxdy + m\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \left(u_x^2 + v_x^2\right) dxdy \tag{0.17}$$

так как $u_x(0)=0, u_x(1)=0$, то для первого из интегралов в правой части последнего неравенства справедливо неравенство Фридрихса, а потому справедливы неравенства

$$\int\limits_0^1 u_{xx}^2 dx \geqslant \pi^2 \int\limits_0^1 u_x^2 dx; \ \int\limits_0^1 v_{xx}^2 dx \geqslant \pi^2 \int\limits_0^1 v_x^2 dx. \tag{0.18}$$

Используя (0.20) и (0.21), получим оценку

$$S_1'(t) \leqslant \left(m - d\pi^2\right) S_1(t).$$

Из последнего неравенства заключаем, что если $d > \frac{m}{\pi^2}$, то $S_1'(t) < 0$. Поскольку $S_1(t) \geqslant 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} S_1(t) = 0$, и поэтому $u_x(x,y,t) \to 0$ и $v_x(x,y,t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Применяя аналогичные рассуждения в отношении интеграла (18) получаем соотношении $\lim\limits_{t\to\infty} S_2(t) = 0$, а следовательно и соотношение $\lim\limits_{t\to\infty} S(t) = 0$.Поэтому очевидно, что все частные производные $u_x, v_x, u_y, v_y$ стремятся к нулю при $t \to \infty$, а само решение выходит на константу. Теорема доказана. □

**Замечание 0.1.** *Ясно, что полученный результат распространяется на случай системы (0.1)-(0.3), однако, этот результат не всегда удается использовать в конкертных случаях, так как вычисление постоянной m зависит от априорных знаний о решении системы (0.12)-(0.14) (или системы (0.1) - (0.3)) и его производных.*

**Вывод 1.** *Предложенный метод* $[3-4]$ *позволяет сохранить устойчивость при достаточно больших коэффициентах диффузии. Такого вида устойчивости принято называть пространственно-диффузионной устойчивостью, даже в случае неустойчивой системы (при* $\alpha = 0$*).*

Литература: