

# Системы уравнений "реакция-диффузия" в ограниченной области

В.В. Нефедов, В.В. Тихомиров

23 апреля 2024 г.

Рассматриваются задача динамики и предельного поведения репликаторных систем. Основной целью исследования является изучение влияния фактора пространства на поведение распределённых систем. Рассмотрим общую постановку.

Пусть в ограниченной области  $\Omega \in \mathbb{R}^m$  задана система вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = F(u) + D\Delta u(x, t), \quad (0.1)$$

где  $u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))$ ,  $x \in \Omega$ ,  $t \geq 0$ ,

$F(u) = (f_1(u), \dots, f_n(u))$ ,

$D = \{d_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$  - симметрическая матрица, имеющая положительные собственные значения.

В начальный момент времени заданы начальные условия

$$u(x, 0) = \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \quad (0.2)$$

и на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  заданы однородные условия Неймана

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{x \in \Gamma} = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{\partial u_i}{\partial n} \right)_{x \in \Gamma} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (0.3)$$

здесь  $\vec{n}$  - внешняя нормаль к границе  $\Gamma$ .

Системы (0.1)-(0.3) являются замкнутыми, когда потоки реагирующих компонент через границу области равны нулю. Эти системы получили название систем "реакция-диффузия". Вектор-функция  $F(u)$  определяет реакцию компонентов, которая описывается динамической системой

$$\frac{dv(t)}{dt} = F(v(t)).$$

Матрица  $D$  описывает диффузионные потоки, возникающие в пространстве области  $\Omega$ . В классическом случае рассматриваются диагональные матрицы  $D$ . В этом случае не учитываются так называемые кросс-диффузионные потоки, когда диффузионный поток одной из компонент системы оказывает влияние на динамику другой компоненты.

В этой работе будем рассматривать слабые решения [1] задачи (0.1) - (0.3), которые являются элементами (при фиксированном  $t$ ) пространства Соболева  $H^1(\Omega)$  с нормой

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n \left[ u_i^2 + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 \right] \right) dx \right)^{1/2},$$

и при любых  $x \in \Omega$  представляют гладкую функцию переменной  $t \geq 0$ .

Класс таких функций, удовлетворяющих перечисленным выше требованиям, будем обозначать через  $H^1(\Omega_t)$ .

В нашей работе мы не обсуждаем вопрос о существовании слабых решений.

Введём следующее понятие.

**Определение 0.1.** Вектор-функция  $v(x) \in H^1(\Omega)$  такая, что

$$F(v) + D\Delta v(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad \left( \frac{\partial v}{\partial n} \right)_{\Gamma} = 0, \quad (0.4)$$

называется стационарным положением равновесия системы (0.1) - (0.3).

Если положение равновесия  $v(x) \neq const$ , то его называют пространственно неоднородными. Задача об обтекании пространственно неоднородных равновесий сложна. Будем предполагать, что  $v(x)$  пространственно однородное положение равновесия, то есть есть решение задачи

$$F(v) = 0, \quad \Delta v(x) = 0, \quad \left( \frac{\partial v}{\partial n} \right)_{\Gamma} = 0.$$

Исследование таких положений равновесия дают информацию о предельном положении системы при  $t \rightarrow \infty$ . Как и в случае динамических систем введем аналог понятия устойчивости по Ляпунову стационарных положений равновесия.

**Определение 0.2.** Положение равновесия  $v(x)$  системы (0.1)-(0.3) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любых решений  $u(x, t)$  системы (0.1)-(0.3) с начальными данными  $\varphi(x)$ , такими, что  $\|v(x) - \varphi(x)\|_{H^1(\Omega)} < \delta$  выполняется  $\|v(x) - u(x, t)\|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon$  для всех  $t > 0$ .

Если, кроме того, выполняется условие  $u(x, t) \rightarrow v(x)$  в пространстве  $H^1(\Omega)$  при  $t \rightarrow \infty$ , то положение равновесия называется асимптотически устойчивым.

Пусть далее  $v(x)$  - пространственно-однородное положение равновесия системы (0.1)-(0.3).

Рассмотрим матрицу Якоби вектор-функции  $f$ :  $A = \left( \frac{\partial v}{\partial u} \right)_{|u=v}$ .

Исследование устойчивости положения равновесия можно осуществить с помощью аналога теоремы Ляпунова-Пуанкаре об устойчивости по первому приближению и оно сводится к исследованию спектра следующей задачи на собственные значения:

$$Az(x) + D\Delta z(x) = \lambda z(x), \quad \left( \frac{\partial v}{\partial n} \right)_{\Gamma} = 0, \quad z \in H^1(\Omega). \quad (0.5)$$

Здесь  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера.

Соответствующие собственные значения образуют неубывающую последовательность

$$\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots, \quad \mu_n \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty$$

Если для всех собственных значений задачи (0.5) выполняется условие  $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , то положение равновесия является асимптотически устойчивым. Точную формулировку этой теоремы можно найти в [2]. Рассмотрим линейное преобразование

$$z(x) = C * w(x),$$

где  $C$  - матрица такая, что  $C^T DC = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .  $C^T$  - транспонированная.

С учётом преобразования система (0.5) принимает вид

$$Bw(x) + \Lambda \Delta w(x) = \lambda w(x), \quad \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)_{\Gamma} = 0, \quad w \in H^1(\Omega), \quad (0.6)$$

где  $B = C^T AC$ . Решение задачи (0.6) будем искать в виде

$$w^k(x) = R^k \varphi_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (0.7)$$

здесь  $R^k$  - некоторый вектор из  $\mathbb{R}^n$ , а  $\varphi_k(x)$  - собственные функции следующей краевой задачи на собственные значения:

$$\Delta \varphi(x) = -\mu \varphi(x), \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{\Gamma} = 0, \quad \varphi \in H^1(\Omega) \quad (0.8)$$

Известно [3], что задача (0.7) имеет биортогональную систему собственных функций  $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , которые образуют систему в  $H^1(\Omega)$ , причём

$$(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = \int_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad (0.9)$$

где  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера.

Соответствующие собственные значения образуют неубывающую последовательность

$$\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots, \quad \mu_n \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty$$

С учётом представления (0.7) исходная задача принимает вид

$$(B - \mu_k \Lambda) R^k = \lambda_k R^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Если умножить это равенство скалярно в пространстве  $L_2(\Omega)$  на функции  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  и воспользоваться соотношением (0.9), то получим матричные равенства для векторов  $R^k$  в форме задач на собственные значения:

$$(B - \mu_k \Lambda) R^k = \lambda_k R^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (0.10)$$

Таким образом, задача об отыскании собственных значений континуальной системы (0.5) сводится к алгебраической задаче о собственных значениях счетной последовательности матриц вида

$$D_k = B - \mu_k \Lambda, \quad k = 1, 2, \dots \quad (0.11)$$

Если для всех собственных значений задачи (0.10) выполняется условие  $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то пространственно-однородное положение равновесия  $v$  системы (0.1)-(0.3) является устойчивым.

Если же хотя бы для одного значения  $k$  это условие не выполняется, то положение равновесия неустойчиво.

Рассмотрим несколько примеров применения сформулированных результатов к конкретным задачам.

**Пример 1.** Запишем уравнение Фишера-Колмогорова на интервале  $(0, 1)$  с однородными краевыми условиями Неймана

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = u(1 - u) + d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & 0 < x < 1, \\ u(x, 0) = u_0(x), & u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0. \end{cases}$$

Это уравнение имеет два пространственно-однородных положения равновесия  $v_1(x) = 0$  и  $v_2(x) = 1$ . Второе положение равновесия определяется собственными функциями и собственными значениями задачи (0.8):

$$\varphi_k(x) = \sqrt{2} \cos k\pi x, \quad \mu_k = (k\pi)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Равенство (0.11) принимает вид

$$\lambda_k = D_k = -1 - d(k\pi)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, положение равновесия является асимптотически устойчивым.

В случае  $v_1(x) = 0$  из равенства (0.11) получим, что  $\lambda_k = 1 - d(k\pi)^2$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Положение равновесия неустойчиво  $\lambda_0 = 1 > 0$ .

Рассмотрим ещё один пример системы типа реакция-диффузия.

**Пример 2.** Исследуем влияние диффузии на поведение замкнутой системы "реакция-диффузия" общего вида при  $t \rightarrow \infty$ . Остановимся на случае  $n = 2$ . Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} u_t = f(u, v) + d_1(u_{xx} + u_{yy}), \\ v_t = g(u, v) + d_2(v_{xx} + v_{yy}), \\ u = u(x, y, t), \quad v = v(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (0.12)$$

$d_1, d_2 > 0$  - коэффициенты диффузии.

Функции  $u$  и  $v$  удовлетворяют условиям Неймана (случай замкнутой системы)

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \quad (0.13)$$

На границе  $\Gamma$  ограниченной замкнутой области  $\Omega$  с начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad v(0, y) = 0. \quad (0.14)$$

Ради определённости будем предполагать, что область  $\Omega$  является квадратом:  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$ .

Вектор-функция  $F = \{f(u, v), g(u, v)\}$  определяет реакцию компонента системы (0.13)-(0.14), которая описывается динамической системой

$$\frac{dv(t)}{dt} = F(v(t)), \quad v(t) = \{f, g\}.$$

Матрица  $\text{diag}(d_1, d_2)$  описывает диффузионные потоки, возникающие в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Решения системы (0.12)-(0.14) будем рассматривать в пространстве Соболева  $H^1(\Omega)$ .

Для исследования поведения решений системы (0.12)-(0.14) при  $t \rightarrow \infty$  воспользуемся энергетическими (вариационными) методом [3] – [5]. Для этого введем в рассмотрение (вариационную) функцию времени

$$S(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) dx dy, \quad (0.15)$$

которая играет роль энергии системы.

Вычислим производную функции (0.15) с учётом (0.12)-(0.14), в результате получим

$$\frac{dS(t)}{dt} = \int_0^1 \int_0^1 (u_x u_{xt} + v_x v_{xt} + u_y u_{yt} + v_y v_{yt}) dx dy. \quad (0.16)$$

Формулу (0.16) можно представить в виде

$$S''(t) = S'_1(t) + S'_2(t),$$

где

$$S'_1(t) = \int_0^1 \int_0^1 [u_x (d_1 u_{xx})_x + u_x (f_u u_x + f_v v_x) + v_x (d_2 v_{xx})_x + v_x (g_u u_x + g_v v_x)] dx dy \quad (0.17)$$

$$S'_2(t) = \int_0^1 \int_0^1 [u_y (d_1 u_{yy})_y + u_y (f_u u_y + f_v v_y) + v_y (d_2 v_{yy})_y + v_y (g_u u_y + g_v v_y)] dx dy \quad (0.18)$$

Введём обозначения

$$d = \min(d_1, d_2), \quad m = \max_{u, v} [|f_u| + |f_v| + |g_u| + |g_v| + |f_v| + |g_u|] \quad (0.19)$$

**Теорема.** Если  $d > \frac{m}{\pi^2}$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$ , и поэтому все частные производные  $u_x, v_x, u_y, v_y$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , а само решение выходит на константу.

*Доказательство.* Рассмотрим интеграл (0.17). После интегрирования по частям, с учётом краевых условий, запишем (0.17) в виде

$$S'_1(t) = - \int_0^1 \int_0^1 (d_1 u_{xx}^2 + d_2 v_{xx}^2) dx dy + \int_0^1 \int_0^1 (f_u u_x^2 + g_v v_x^2 + (f_u + g_u) u_x v_x) dx dy,$$

тогда в силу обозначений (0.19) и неравенства Коши-Буняковского имеем

$$S'_1(t) \leq -d \int_0^1 \int_0^1 (u_{xx} + v_{xx}) dx dy + m \int_0^1 \int_0^1 (u_x^2 + v_x^2) dx dy \quad (0.20)$$

так как  $u_x(0) = 0, u_x(1) = 0$ , то для первого из интегралов в правой части последнего неравенства справедливо неравенство Фридрихса, а потому справедливы неравенства

$$\int_0^1 u_{xx}^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 u_x^2 dx; \quad \int_0^1 v_{xx}^2 dx \geq \pi^2 \int_0^1 v_x^2 dx. \quad (0.21)$$

Используя (0.20) и (0.21), получим оценку

$$S'_1(t) \leq (m - d\pi^2) S_1(t).$$

Из последнего неравенства заключаем, что если  $d > \frac{m}{\pi^2}$ , то  $S'_1(t) < 0$ . Поскольку  $S_1(t) \geq 0$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} S_1(t) = 0$ , и поэтому  $u_x(x, y, t) \rightarrow 0$  и  $v_x(x, y, t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Применяя аналогичные рассуждения в отношении интеграла (18) получаем соотношении  $\lim_{t \rightarrow \infty} S_2(t) = 0$ , а следовательно и соотношение  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$ . Поэтому очевидно, что все частные производные  $u_x, v_x, u_y, v_y$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , а само решение выходит на константу. Теорема доказана.  $\square$

**Замечание 0.1.** Ясно, что полученный результат распространяется на случай системы (0.1)-(0.3), однако, этот результат не всегда удастся использовать в конкретных случаях, так как вычисление постоянной  $m$  зависит от априорных знаний о решении системы (0.12)-(0.14) (или системы (0.1) - (0.3)) и его производных.

**Вывод 1.** Предложенный метод [3 – 4] позволяет сохранить устойчивость при достаточно больших коэффициентах диффузии. Такого вида устойчивости принято называть пространственно-диффузионной устойчивостью, даже в случае неустойчивой системы (при  $\alpha = 0$ ).

Литература: