

Задачи. Коллоквиум 2 семестр

1 Несобственные интегралы

1. (5) Вычислить $\int_B e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx$, где B - множество, на котором подынтегральное выражение имеет смысл
2. (5) Исследовать на сходимость в зависимости от $p_i, i = \overline{1, n}$: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\prod_{i=1}^n |x - a_i|^{p_i}}$
3. (4) Вычислить $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$
4. (4) Исследовать на сходимость $\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$
5. (3) Вычислить $V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$
6. (3) Исследовать на сходимость: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^p dx$

2 Вычисление площадей

1. (5) Вычислить площадь фигуры, ограниченной $x^3 + y^3 = 3axy$
2. (4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной $x = a(2 \cos t - \cos 2t), y = a(2 \sin t - \sin 2t)$
3. (4) Вычислить площадь фигуры, заключенной между $y^2 = 2px$ и $27py^2 = 8(x-p)^3$
4. (3) Вычислить площадь фигуры, ограниченной $r = a(1 + \cos \varphi)$
5. (3) Вычислить площадь фигуры, заключенной между $y = 2x - x^2$ и $x + y = 0$

3 Вычисление длин дуг

1. (5) Вычислить длину дуги, заданной $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}, 0 \leq x \leq \frac{5}{3}a$
2. (4) Вычислить длину дуги, заданной $\varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), 1 \leq r \leq 3$
3. (3) Вычислить длину дуги, заданной $y = \ln \cos x, 0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}$

4 Вычисление объёма

1. (5) Вычислить объём тела вращения вокруг осей Ox и Oy $x = a \sin t^3, y = b \cos t^3$
2. (4) Вычислить объём тела вращения вокруг осей Ox и Oy $y = e^{-x}, 0 \leq x < \infty$
3. (3) Вычислить объём тела вращения вокруг оси Ox $y = b \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{2}{3}}, 0 \leq x \leq a$
4. (3) Вычислить объём тела, ограниченного $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Теоретические задачи

1. Приведите пример неквадрируемой фигуры.
2. Интегрируема ли функция, являющаяся композицией интегрируемых функций?
3. Интегрируема ли функция Римана на отрезке $[0,1]$?
4. Эквивалентны ли существование первообразной функции на отрезке и её интегрируемость на этом отрезке?