Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра общей математики

Васильченко Дмитрий Дмитриевич

Об интегральном представлении производных решения задачи для уравнения Лапласа с интегральным граничным условием

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

Н. Ю. Капустин

Москва, 2025

Содержание

1 Введение

Смешанные уравнения представляют собой класс уравнений, которые включают элементы как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений с частными производными. Эти уравнения возникают в различных приложениях, где необходимо учитывать как временные, так и пространственные изменения системы. Например, они могут описывать процессы в биологии, такие как распространение веществ в тканях, или в физике, где необходимо учитывать как временные, так и пространственные изменения полей.

Исследование смешанных уравнений началось с работ таких ученых, как Трикоми, Франкль и Геллерстедта, которые заложили основы для дальнейшего развития этой области. В частности, Трикоми ввел понятие смешанного типа уравнений и разработал первые методы их решения. Впоследствии другие ученые, такие как Моисеев, продолжили развитие этой темы, предложив новые подходы и методы для решения смешанных уравнений.

Одной из основных трудностей при решении смешанных уравнений является необходимость учитывать специфические особенности этих уравнений, такие как наличие граничных условий и начальных данных. Это требует разработки специальных численных методов, которые могли бы эффективно справляться с этими особенностями. В настоящее время активно исследуются различные подходы к решению смешанных уравнений, включая методы конечных разностей, конечных элементов и спектральные методы.

Таким образом, исследование смешанных уравнений является важной и актуальной задачей, которая требует дальнейшего развития и совершенствования методов их решения. В данной работе будут рассмотрены основные подходы к решению смешанных уравнений и проанализированы их применения в различных областях науки и техники.

2 Акутальность

В последние годы наблюдается значительный рост интереса к исследованию смешанного типа уравнений, которые сочетают в себе элементы как обыкновенных, так и дифференциальных уравнений с частными производными. Это связано с тем, что такие уравнения находят широкое применение в различных областях науки и техники, включая математическое моделирование, физику, биологию и инженерию. Смешанные уравнения позволяют более точно описывать сложные процессы, которые не могут быть полностью охвачены традиционными методами.

Одной из ключевых причин актуальности данной темы является необходимость разработки новых методов для решения смешанных уравнений, которые могли бы учитывать специфические особенности этих уравнений и обеспечивать высокую точность и эффективность вычислений. В настоящее время существует множество подходов к решению таких уравнений, однако каждый из них имеет свои ограничения и требует дальнейшего совершенствования.

Кроме того, смешанные уравнения часто возникают при моделировании различных процессов естествознания, например, при изучении дифференциальных операторов, которые описывают физические явления. Это делает данную тему особенно важной для дальнейшего развития науки и техники.

Одной из важнейших задач математической физики является исследование краевых задач для уравнений с частными производными. Такие задачи возникают при моделировании широкого круга явлений — от течения жидкостей и газов до процессов электромагнитного и теплового переноса. Особое место среди них занимают уравнения смешанного типа, к числу которых относится уравнение Лаврентьева–Бицадзе. Эти уравнения характеризуются тем, что тип уравнения (эллиптический или гиперболический) зависит от значений переменных и может меняться в пределах области определения. Это существенно усложняет математическое исследование таких задач и требует разработки особых методов их анализа.

Классическим примером уравнения смешанного типа является уравнение Трикоми:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

которое описывает, в частности, переход течения газа от дозвукового режима к сверхзвуковому. Это уравнение имеет гиперболический тип в области $y<0$ и эллиптический тип в области $y < 0$, что делает задачу существенно более сложной, чем стандартные эллиптические или гиперболические задачи. Уравнение Лаврентьева–Бицадзе является более общей формой уравнений подобного рода, включающей дополнительные параметры и члены, и рассматривается как обобщение уравнения Трикоми.

Общая форма уравнения Лаврентьева–Бицадзе может быть записана как:

$$\operatorname{sign}(y - y_0)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

где y_0 — кривая, на которой тип уравнения меняется. Это уравнение применимо к моделированию целого ряда физических процессов, в которых происходит переход между различными режимами движения среды. Например, оно возникает при моделировании неустановившихся течений вязкой жидкости, колебаний неоднородных мембран, а также в задачах теории упругости и аэродинамики.

Одним из наиболее ярких применений уравнения Лаврентьева–Бицадзе является теория газовой динамики, где оно описывает поведение упругих сред при наличии переходов между дозвуковым и сверхзвуковым режимами. В частности, при анализе течений вокруг тел в сверхзвуковом потоке задача Трикоми возникает естественным образом при линерализации уравнений Эйлера. Она также появляется при изучении фильтрации в неоднородных пористых средах, где свойства среды зависят от положения, и при моделировании электрических и магнитных полей в сложных геометриях, где требуется учитывать разную природу распространения поля в различных областях.

Формальная постановка краевой задачи для уравнения Лаврентьева–Бицадзе также требует внимательного подхода. Одной из наиболее изученных задач является задача Трикоми, в которой область разбивается на гиперболическую и эллиптическую части, соединённые на линии изменения типа. При этом на гиперболической части области ставится задача Коши, а на эллиптической — задача Дирихле или смешанная задача, что требует согласования условий на линии раздела.

Исторически интерес к уравнениям смешанного типа усилился в XX веке в связи с развитием аэродинамики и теории струйных течений. Работы М.А. Лаврентьева, А.В. Бицадзе, Ф.И. Франкля и других учёных заложили основы современной теории таких уравнений. Их подходы позволили не только строго обосновать существование решений, но и разработать методы численного и приближённого решения.

Таким образом, исследование уравнений Лаврентьева–Бицадзе и связанных с ними задач, таких как задача Трикоми, имеет не только фундаментальный интерес, но и большое прикладное значение. Понимание структуры решений таких уравнений позволяет глубже проникнуть в природу сложных физических процессов и разрабатывать более точные и устойчивые методы моделирования.

3 Основные результаты

3.1 Постановка задачи

Рассматривается задача Трикоми для уравнения Лавертьева-Бицадзе

$$(sgn(y))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \tag{1}$$

в области $D = D^+ \cup D^-$, где $D^+ = \{(x,y):\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < +\infty\}$,
$D^- = \{(x,y):\ -y < x < y + \pi,\ -\pi/2 < y < 0\}$ в классе функций $u(x,y) \in C^2(D^+) \cap C^2(D^-) \cap C(\overline{D^+ \cup D^-})$ с граничными условиями

$$u(0,y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0,\ 0 < y < +\infty, \tag{2}$$

$$u(x,-x) = f(x),\ 0 \le x \le \pi/2,\ f(0) = 0, \tag{3}$$

$$u(x,y) \rightrightarrows 0,\ y \to +\infty \tag{4}$$

и условием непрерывности градиента

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,-0),\ 0 < x < \pi. \tag{5}$$

3.2 Теорема единственности

Теорема 1. *Решение задачи (1) - (5) единственно.*

Доказательство. Пусть существуют два решения $u_1(x,y), u_2(x,y)$ задачи (1)-(5). Тогда $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ есть решение задачи (1)-(5) с функцией $f(x) \equiv 0$. В этом случае $u(x,y) = F(x+y) - F(0)$.

Отсюда следует, что равенство $\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ выполняется для всех точек x и y из области гиперболичности. Используя условие склеивания (5) будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}|_{y=0+0} = 0. \tag{6}$$

В результате получаем задачу для нахождения гармонической функции $u(x,y)$ в области D^+ с граничными условиями (2),(4),(6).

В силу принципа Зарембы-Жиро и равенства (6) экстремум не может достигаться на интервале $\{(x, y) : \ 0 < x < \pi, \ y = 0\}$. На замкнутых боковых сторонах и на бесконечности экстремум не может достигаться в силу условий (2) и (4). Теорема доказана.

Известно, что общее решение в D^- уравнения (1) имеет вид

$$u(x, y) = F(x + y) + f(\frac{x - y}{2}) - F(0). \tag{7}$$

Продифференцируем равенство (7):

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)|_{y=0+0} = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \ 0 < x < \pi.$$

Используя условие склеивания (5), приходим к равенству

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \ 0 < x < \pi.$$

4 Постановка вспомогательной задачи

Получим в области D^+ вспомогательную задачу для оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \tag{8}$$

с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0, \ 0 < y < +\infty, \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \tag{10}$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, \ y \to +\infty \tag{11}$$

Упростим постановку вспомогательной задачи. Обозначим $\varphi(x) = -f'(x/2)$ и положим $\varphi(x) \in L_2(0, \pi)$, тогда условие на линии $y = 0$ понимается в интегральном смысле, и получим следующую постановку.

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \tag{12}$$

в области $D^+ = \{(x, y) : \ 0 < x < \pi, \ 0 < y < +\infty\}$ в классе функций $u(x, y) \in {}^2(D^+) \cap C^1(\overline{D^+} \cap \{y > 0\}) \cap C(\overline{D^+})$ с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0, \ 0 < y < +\infty, \tag{13}$$

$$\lim_{y\to 0+0}\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \varphi(x)\right]^2 dx = 0, \ \varphi(x) \in L_2(0, \pi) \tag{14}$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, \ y \to +\infty \tag{15}$$

4.1 Существование и единственность решения вспомогательной задачи

Теорема 2. *Решение задачи (12) - (15) существует, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right], \tag{16}$$

где коэффициенты $A_n,\ n=0,1,2,\dots$ *находятся из разложения*

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}} \tag{17}$$

Доказательство.

Докажем существование решения задачи (1) $-$ (4).Сперва необходимо убедиться в том, что система $\{\sin\left[\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x+\dfrac{\pi}{4}\right]\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространтсве $L_2(0,\pi)$. Согласно результатам работы [2] система вида $\{\sin\left[(n+\beta/2)\,x+\gamma/2\right]\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространствен $L_2(0,\pi)$, тогда и только тогда, когда $-\dfrac{1}{2}<\gamma/\pi<\dfrac{3}{2}$ и $-\dfrac{3}{2}<\gamma/\pi+\beta<\dfrac{1}{2}$. В нашем случае $\gamma=\pi/2,\beta=-1$.

$$-\frac{3}{2}<\gamma/\pi+\beta<\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{3}{2}<\frac{1}{2}-1<\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{3}{2}<-\frac{1}{2}<\frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2}<\gamma/\pi<\frac{3}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}<\frac{3}{2}.$$

Неравества выполнены, а значит система $\{\sin\left[\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x+\dfrac{\pi}{4}\right]\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$. Поэтому коэффициенты разложения в формуле (6) удовлетворяют двустороннему неравенству Бесселя

$$C_1\|\varphi\|_{L_2(0,\pi)}\le\sum_{n=0}^{\infty}A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\le C_2\|\varphi\|_{L_2(0,\pi)},0<C_1<C_2,$$

где константы C_1,C_2 не зависят от φ, а значит сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|A_n|$ и сходится равномерно ряд (5). То, что функция (5) при $y>0$ - решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) - это очевидно. В силу равенства $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}=\dfrac{e^{-y/2}}{1-e^{-y}}$, также очевидно, что выполнено условие (4). Проверим выполнение условия (3). Выразим функцию $\varphi(x)$ из представления (6) и подставим в условие (3)

$$I(y)=2\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx$$

Докажем, что $I(y) \to 0$ при $y \to 0+0$.

$$I(y) \leq 4\int\limits_0^\pi \left[\sum_{n=0}^{m} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2 dx+$$

$$+4\int\limits_0^\pi \left[\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2 dx$$

В силу левой части неравенства Бесселя имеем оценку

$$\int\limits_0^\pi \left[\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2 dx \leq$$

$$\leq C_3\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)^2 \leq C_3\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Это верно $\forall\varepsilon > 0$, если $m \geq N = N(\varepsilon)$

Во втором слагаемом мы имеем дело с конечным числом элементов, поэтому:

$$\int\limits_0^\pi \left[\sum_{n=0}^{m} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2 dx \leq$$

$$\leq C_4\sum_{n=0}^{m} A_n^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Это верно, если $0 < y < \delta$ (m зафиксировано в зависимости от N). Условие (3) выполнено. Теорема доказана.

Теорема 3. *Решение задачи (12) - (15) единственно.*

Доказательство. Докажем единственность решения этой задачи. Пусть $u(x, y)$ - разность двух решений - решение задачи с $\varphi(x) \equiv 0$. Необходимо получить выражение, где слева будет входить модуль или чётная степень функции u, а справа будет 0.

Введём обозначения $A_\varepsilon = (0, \varepsilon), A_R = (0, R), B_R = (\pi, R), B_\varepsilon = (\pi, \varepsilon)$. $D_{R\varepsilon}$ - прямоугольник $A_\varepsilon A_R B_R B_\varepsilon$. Справедливы следующие соотношения:

$$0 = \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} (R-y)(u_{xx}+u_{yy})dxdy = I$$

Заметим, что

$$(R-y)(u_{xx}+u_{yy})u = ((R-y)\,u_x u)_x + ((R-y)\,u_y u)_y - (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) + u_y u =$$

$$= (R-y)\left(u_{xx}u+u_x^2\right) + \left(-u_y + (R-y)\,u_{yy}u + (R-y)\,u_y^2\right) - (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) + u_y u$$

Подставим это выражение в интеграл

$$I = \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} ((R-y)\,u_x u)_x\,dxdy + \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} ((R-y)\,u_y u)_y\,dxdy - \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) + \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} u_y u dxdy$$

Упростим теперь эти интегралы:

$$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} ((R-y)\,u_x u)_x\,dxdy = \int\limits_{[\varepsilon,R]} \left[(R-y)u_x u\right]|_0^\pi dy =$$

$$= \int\limits_{[\varepsilon,R]} \left[(R-y)u_x(\pi,y)u(\pi,y) - (R-y)u_x(0,y)u(0,y)\right] dy = 0$$

т.к. оба подынтегральных выражения равны нулю в силу условия (2), поэтому

$$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} ((R-y)\,u_y u)_y\,dxdy = \int\limits_{[0,\pi]} \left[(R-y)\,u_y u\right]|_\varepsilon^R dx = \int\limits_{[0,\pi]} \left[0 - (R-\varepsilon)\,u_y(x,\varepsilon)u(x,\varepsilon)\right] dx =$$

$$= -\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon)\,u_y u dx,$$

$$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} u_y u dxdy = \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} \left(\frac{u^2}{2}\right)_y' dxdy = \int\limits_{[0,\pi]} \left[\frac{u^2(x,R)}{2} - \frac{u^2(x,\varepsilon)}{2}\right] dx$$

В итоге получим

$$= -\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) dxdy - \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon)\,u_y u dx - \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \frac{u^2}{2}dx + \int\limits_{A_R B_R} \frac{u^2}{2}dx =$$

Добавим и вычтем $\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon)\,u_x u dx$, тогда

$$= -\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) dxdy - \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon)\left(u_y-u_x\right) u dx - \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon)\,u_x u dx - \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \frac{u^2}{2}dx +$$

$$+ \int\limits_{A_R B_R} \frac{u^2}{2}dx$$

Отсюда следует

$$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\frac{1}{2}\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2dx+\frac{R-\varepsilon}{2}u^2(\pi,\varepsilon)=$$

$$=\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon)\left(u_x-u_y\right)udx+\frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R} u^2dx\le\{\text{Неравенство Коши-Буняковского}\}$$

$$\le(R-\varepsilon)\left[\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \left(u_y-u_x\right)^2dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2dx\right]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R} u^2dx=I$$

Рассмотрим следующее неравенство: $(2ar-b)^2\ge0\Rightarrow4a^2r^2-4abr+b^2\ge0\Rightarrow ab\le ra^2+\frac{b}{4r}$

Возьмём $a=\left[(R-\varepsilon)\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}\left(u_y-u_x\right)^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$, $b=\left[(R-\varepsilon)\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}u^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$, $r=R-\varepsilon$, тогда

$$I\le(R-\varepsilon)^2\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}\left(u_y-u_x\right)^2dx+\frac{1}{4}\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}u^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R}u^2dx,$$

$$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\frac{1}{4}\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2dx+\frac{R-\varepsilon}{2}u^2(\pi,\varepsilon)\le$$

$$\le(R-\varepsilon)^2\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}\left(u_y-u_x\right)^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R}u^2dx$$

Устремим $\varepsilon\to0+0$, тогда в силу условия (3)

$$\lim_{\varepsilon\to0+0}\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}\left(u_y-u_x\right)^2dx=0$$

и получим соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to0+0}\iint\limits_{D_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi u^2(x,0)dx+\frac{R}{2}u^2(\pi,0)\le\frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R}u^2dx$$

Устремим теперь $R\to\infty$, тогда в силу условия (4) $\int\limits_{A_R B_R}u^2dx\to0$, тем самым, это возможно только в случае $u(x,y)\equiv0$ в $\overline{D}$.

4.2 Интегральное представление первых частных производных решения вспомогательной задачи

Теорема 4. *Пусть* $u(x,y)$ *- решение задачи* $(8)-(11)$*, тогда* u_x,u_y *представимы в виде*

$$u_y(x,y)=-Im\ \frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi}e^{\dfrac{iz}{2}}\int\limits_0^\pi\frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}\varphi(t)dt \qquad (18)$$

$$u_x(x,y)=Re\ \frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi}e^{\frac{iz}{2}}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}\varphi(t)dt \tag{19}$$

Доказательство.

Рассмотрим уравнение (6). Система синусов $\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]$ образует базис в $L_2(0,\pi)$. Поэтому для коэффициентов $A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)$ справедливо следующее представление:

$$A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^{\pi}h_{n+1}(t)\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}dt,$$

где

$$h_n(t)=\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{n}\sin ktB_{n-k}.$$

Пусть $u(x,y)$ - решение задачи (1)-(4), тогда

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}A_ne^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

и соотвественно

$$u_y(x,y)=-\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

Здесь как раз возникает нужный нам коэффициент $A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)$, поэтому

$$u_y(x,y)=-\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]dt$$

$\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]=Im\ e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}$, поэтому

$$u_y(x,y)=-Im\ \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}dt$$

Обозначим $z=x+iy$

$$u_y(x,y)=-Im\ \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z}dt$$

Для дальнейших операций нам было бы удобно, чтобы суммирование начинолось от 1, а не 0, поэтому сделаем замену $m=n+1$

$$u_y(x,y)=-Im\ \sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_m(t)e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}dt$$

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{-\dfrac{iz}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{imz} dt$$

Поменяем местами знаки интергирования и суммирования

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{-\dfrac{iz}{2}} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz} dt$$

Введём новое обозначение:

$$I(t,z) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz}$$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin kt B_{n-k} e^{inz} = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{n=k}^{\infty} e^{inz} B_{n-k}$$

Введём новый индекс $m = n - k$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} B_m = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} B_m$$

Первый ряд можем вычислить по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt = \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \frac{1}{2i} \left(e^{ikt} - e^{-ikt}\right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - e^{i(z+t)}} - \frac{1}{1 - e^{i(z-t)}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{e^{i(z+t)} - e^{i(z-t)}}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)} = \frac{e^{iz} \sin t}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} B_l = \sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} \sum_{m=0}^{l} C^{l-m}_{\gamma/\pi} C^{m}_{-\gamma/\pi-\beta} (-1)^{l-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} e^{ilz} C^{l-m}_{\gamma/\pi} C^{m}_{-\gamma/\pi-\beta} (-1)^{l-m} =$$

Введём новый индекс суммирования $k = l - m$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} C^{k}_{\gamma/\pi} C^{m}_{-\gamma/\pi-\beta} (-1)^{k} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} C^{m}_{-\gamma/\pi-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} C^{k}_{\gamma/\pi} (-1)^{k} e^{ikz} =$$

$$= (1 + e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta} (1 - e^{iz})^{\gamma/\pi}$$

В нашем случае $\beta = -1, \gamma = \pi/2$, поэтому

$$= (1 + e^{iz})^{1/2} (1 - e^{iz})^{1/2} = \sqrt{1 - e^{i2z}}$$

Собираем все решение:

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{\dfrac{-iz}{2}} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} I(t,z) dt$$

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{\frac{-iz}{2}} \int\limits_0^\pi \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \sqrt{1-e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

Подставляя β и γ получим

$$u_y(x,y) = -Im\ \frac{2}{\pi} e^{\frac{-iz}{2}} \int\limits_0^\pi \frac{1}{2\cos t/2\sqrt{\tan t/2}} \frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \sqrt{1-e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

$$u_y(x,y) = -Im\ \frac{e^{\frac{+iz}{2}}}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}\sqrt{1-e^{i2z}}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t) dt$$

Аналогично докажем соотношение для частной производной по x.

$$u_x(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

Здесь как раз возникает нужный нам коэффициент $A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)$, поэтому

$$u_x(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] dt$$

$\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] = \mathrm{Re}\ e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}$, поэтому

$$u_x(x,y) = \mathrm{Re}\ \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} dt$$

Обозначим $z = x + iy$

$$u_x(x,y) = \mathrm{Re}\ \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z} dt$$

Для дальнейших операций нам было бы удобно, чтобы суммирование начинолось от 1, а не 0, поэтому сделаем замену $m = n + 1$

$$u_x(x,y) = \mathrm{Re}\ \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z} dt$$

$$u_x(x,y) = \mathrm{Re}\ e^{-\frac{iz}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{imz} dt$$

Поменяем местами знаки интергирования и суммирования

$$u_x(x,y) = \mathrm{Re}\ e^{-\dfrac{iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz} dt$$

Введём новое обозначение:

$$I(t,z) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz}$$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin kt B_{n-k} e^{inz} = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{n=k}^{\infty} e^{inz} B_{n-k}$$

Введём новый индекс $m = n - k$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} B_m = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} B_m$$

Первый ряд можем вычислить по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt = \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \frac{1}{2i} \left(e^{ikt} - e^{-ikt}\right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - e^{i(z+t)}} - \frac{1}{1 - e^{i(z-t)}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{e^{i(z+t)} - e^{i(z-t)}}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)} = \frac{e^{iz} \sin t}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} B_l = \sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} \sum_{m=0}^{l} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{l-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} e^{ilz} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{l-m} =$$

Введём новый индекс суммирования $k = l - m$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} C_{\gamma/\pi}^{k} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{k} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} C_{\gamma/\pi}^{k} (-1)^{k} e^{ikz} =$$

$$= (1 + e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta} (1 - e^{iz})^{\gamma/\pi}$$

В нашем случае $\beta = -1, \gamma = \pi/2$, поэтому

$$= (1 + e^{iz})^{1/2} (1 - e^{iz})^{1/2} = \sqrt{1 - e^{i2z}}$$

Собираем все решение:

$$u_x(x,y) = \mathrm{Re}\ e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} I(t,z) dt$$

$$u_x(x,y) = \mathrm{Re}\ e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{e^{iz} \sin t}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

Подставляя β и γ получим

$$u_x(x,y) = \operatorname{Re} \frac{2}{\pi} e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2\cos t/2 \sqrt{\tan t/2}} \frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \sqrt{1-e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

$$u_x(x,y) = \operatorname{Re} \frac{e^{\dfrac{+iz}{2}}}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin t}\sqrt{1-e^{i2z}}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t) dt$$

Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Моисеев Е.И., Моисевв Т.Е., Вафадорова Г.О.* Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51 №8. С. 1070-1075.

[2] *Моисеев Е.И.* О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23 №1. С. 177-189.

[3] *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.:Наука, 1981. – 448 с.

[4] *Моисеев Т.Е.* Об интегральном представлении решения уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47 №10. С. 1446-1451.