

# Об одной задаче для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями

Капустин Н.Ю., Васильченко Д. Д.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (1)$$

в полуполосе  $D = \{(x, y) : 0 < x < \pi, y > 0\}$

в классе функций  $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$

с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0, \quad y > 0, \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} \int_0^\pi \left[ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \varphi(x) \right]^2 dx = 0, \quad \varphi(x) \in L_2(0, \pi), \quad (3)$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, \quad y \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Аналогичная задача изучалась как вспомогательная с граничными условиями второго рода на боковых сторонах полуполосы и коэффициентом  $\frac{1}{k}$  при  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$ ,  $|k| > 1$  в работе [1].

**Теорема 1.** *Решение задачи (1 - 4) существует, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin \left[ \left(n+\frac{1}{2}\right)x \right], \quad (5)$$

где коэффициенты  $A_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  находятся из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right) \sin \left[ \left(n+\frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

Доказательство. Докажем существование решения задачи (1) – (4). В силу основного результата работы [2] система  $\left\{ \sin \left[ \left(n+\frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{4} \right] \right\}_{n=0}^{\infty}$  образует базис Рисса в пространстве  $L_2(0, \pi)$ . Поэтому коэффициенты разложения в формуле (6) удовлетворяют неравенствам Бесселя

$$C_1 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \leq C_2 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)}, \quad 0 < C_1 < C_2,$$

а значит сходится ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|$  и сходится равномерно ряд (5). То, что функция (5) при  $y > 0$  - решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) - это очевидно. В силу равенства  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})y} = \frac{e^{-y/2}}{1 - e^{-y}}$ , также очевидно, что выполнено условие (4). Проверим выполнение условия (3).

Выразим функцию  $\varphi(x)$  из представления (6) и подставим в условие (3)

$$I(y) = 2 \int_0^\pi \left[ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right) \left( e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1 \right) \sin \left[ \left(n+\frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx$$

Докажем, что  $I(y) \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow 0+0$ .

$$I(y) \leq 4 \int_0^\pi \left[ \sum_{n=0}^m A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx +$$

$$+ 4 \int_0^\pi \left[ \sum_{n=m+1}^\infty A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx$$

В силу левой части неравенства Бесселя имеем оценку

$$\int_0^\pi \left[ \sum_{n=m+1}^\infty A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx \leq$$

$$\leq C_3 \sum_{n=m+1}^\infty A_n^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right)^2 \leq C_3 \sum_{n=m+1}^\infty A_n^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Это верно  $\forall \varepsilon > 0$ , если  $m \geq N = N(\varepsilon)$

Во втором слагаемом мы имеем дело с конечным числом элементов, поэтому:

$$\int_0^\pi \left[ \sum_{n=0}^m A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx \leq$$

$$\leq C_4 \sum_{n=0}^m A_n^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

Это верно, если  $0 < y < \delta$  (м зафиксировано в зависимости от  $N$ ). Условие (3) выполнено. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Решение задачи (1-4) единственно*

Доказательство. Докажем единственность решения этой задачи. Пусть  $u(x, y)$  - разность двух решений - решение задачи с  $\varphi(x) \equiv 0$ . Введём обозначения  $A_\varepsilon = (0, \varepsilon)$ ,  $A_R = (0, R)$ ,  $B_R = (\pi, R)$ ,  $B_\varepsilon = (\pi, \varepsilon)$ .  $D_{R\varepsilon}$  - прямоугольник  $A_\varepsilon A_R B_R B_\varepsilon$ . Справедливы следующие соотношения:

$$0 = \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y)(u_{xx} + u_{yy}) dx dy =$$

$$= \iint_{D_{R\varepsilon}} ((R - y) u_x)_x dx dy + \iint_{D_{R\varepsilon}} ((R - y) u_y)_y dx dy - \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \iint_{D_{R\varepsilon}} u_y u dx dy =$$

$$= - \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R - \varepsilon) u_y u dx - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \int_{A_R B_R} \frac{u^2}{2} dx =$$

$$= - \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R - \varepsilon) (u_y - u_x) u dx - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R - \varepsilon) u_x u dx - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx +$$

$$+ \int_{A_R B_R} \frac{u^2}{2} dx$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}
& \iint_{D_{R\varepsilon}} (R-y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{2} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx + \frac{R-\varepsilon}{2} u^2(\pi, \varepsilon) = \\
& = \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon) (u_x - u_y) u dx + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx \leq \\
& \leq (R-\varepsilon) \left[ \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx \leq \\
& \leq (R-\varepsilon)^2 \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx + \frac{1}{4} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx, \\
& \iint_{D_{R\varepsilon}} (R-y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx + \frac{R-\varepsilon}{2} u^2(\pi, \varepsilon) \leq \\
& \leq (R-\varepsilon)^2 \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx
\end{aligned}$$

Устремим  $\varepsilon \rightarrow 0+0$ , тогда в силу (3)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx = 0$$

и получим соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \iint_{D_{R\varepsilon}} (R-y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_0^\pi u^2(x, 0) dx + \frac{R}{2} u^2(\pi, 0) \leq \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx$$

Устремим теперь  $R \rightarrow \infty$ , тогда  $\int_{A_R B_R} u^2 dx \rightarrow 0$ , тем самым, это возможно только в случае  $u(x, y) \equiv 0$  в  $\overline{D}$ . Теорема доказана.

**Теорема 3.** Пусть  $u(x, y)$  - решение задачи (1) – (4), тогда  $u_x, u_y$  представимы в виде

$$u_y(x, y) = -Im \frac{\sqrt{1 - e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt, \quad (7)$$

$$u_x(x, y) = Re \frac{\sqrt{1 - e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt. \quad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим равенство (6). Система синусов  $\left\{ \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right\}_{n=0}^\infty$  образует базис в  $L_2(0, \pi)$ . Поэтому для коэффициентов  $A_n \left( n + \frac{1}{2} \right)$  справедливо следующее представление [2]:

$$A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) = \int_0^\pi h_{n+1}(t) \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt,$$

где

$$h_n(t) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^n \sin kt B_{n-k}, \quad B_l = \sum_{m=0}^l C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-l}^m (-1)^{l-m}, \quad C_l^n = \frac{l(l-1) \dots (l-n+1)}{n!}.$$

Пусть  $u(x, y)$  - решение задачи (1)-(4), тогда

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) x \right]$$

и соответственно

$$u_y(x, y) = - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) x \right]$$

Здесь как раз возникает нужный нам коэффициент  $A_n \left(n + \frac{1}{2}\right)$ , поэтому

$$u_y(x, y) = - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) x \right] dt$$

Учитывая равенство  $\sin \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) x \right] = \operatorname{Im} e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}$ , запишем формулу

$$u_y(x, y) = -\operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} dt$$

Обозначим  $z = x + iy$

$$u_y(x, y) = -\operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z} dt$$

Для дальнейших выкладок нам было бы удобно, чтобы суммирование начиналось от 1, а не 0, поэтому сделаем замену  $m = n + 1$

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &= -\operatorname{Im} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z} dt = \\ &= -\operatorname{Im} e^{-\frac{iz}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{imz} dt. \end{aligned}$$

Поменяем местами знаки интегрирования и суммирования

$$u_y(x, y) = -\operatorname{Im} e^{-\frac{iz}{2}} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz} dt$$

Введём новое обозначение:

$$I(t, z) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz}$$

$$I(t, z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sin kt B_{n-k} e^{inz} = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{n=k}^{\infty} e^{inz} B_{n-k}$$

и новый индекс  $m = n - k$

$$I(t, z) = \frac{2 (2 \cos t/2)^\beta}{\pi (\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} B_m = \frac{2 (2 \cos t/2)^\beta}{\pi (\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} B_m$$

Первый ряд можем вычислить по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \frac{1}{2i} (e^{ikt} - e^{-ikt}) = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{1 - e^{i(z+t)}} - \frac{1}{1 - e^{i(z-t)}} \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \frac{e^{i(z+t)} - e^{i(z-t)}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} = \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \end{aligned}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} B_l = \sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} \sum_{m=0}^l C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^{l-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} e^{ilz} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^{l-m} =$$

Введём новый индекс суммирования  $k = l - m$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} C_{\gamma/\pi}^k C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^k &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m \sum_{k=0}^{\infty} C_{\gamma/\pi}^k (-1)^k e^{ikz} = (1 + e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta} (1 - e^{iz})^{\gamma/\pi} = \\ &= (1 + e^{iz})^{1/2} (1 - e^{iz})^{1/2} = \sqrt{1 - e^{i2z}}, \end{aligned}$$

так как в нашем случае  $\beta = -1$ ,  $\gamma = \pi/2$ . Окончательно получаем формулу

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &= -Im e^{\frac{-iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} I(t, z) dt = \\ &= -Im e^{\frac{-iz}{2}} \int_0^\pi \frac{2 (2 \cos t/2)^\beta}{\pi (\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt = \\ &= -Im \frac{2}{\pi} e^{\frac{-iz}{2}} \int_0^\pi \frac{1}{2 \cos t/2 \sqrt{\tan t/2}} \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt, \end{aligned}$$

т.е. представление:

$$u_y(x, y) = -Im \frac{\sqrt{1 - e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt.$$

Рассуждая аналогично, получим представление

$$u_x(x, y) = Re \frac{\sqrt{1 - e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt. \quad (9)$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Моисеев Е.И. Моисеев Т.Е. Вафадорова Г.О.* Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения, **2015** Т. 51. №8. С.1070-1075
- [2] *Моисеев Е.И.* О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения, **1987** Т. 23. №1. С.177-189