УДК 517.956

Об одной задаче для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями

Капустин Н.Ю., Васильченко Д. Д.

Рассмотрим краевую задачу для ура внения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

в полуполосе $D = \{(x, y) : \ 0 < x < \pi, y > 0\}$ в классе функций $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$
с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0, \ y > 0, \tag{2}$$

$$\lim_{y \to 0+0} \int\limits_0^\pi \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \varphi(x) \right]^2 dx = 0, \ \varphi(x) \in L_2(0, \pi), \tag{3}$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, y \to +\infty. \tag{4}$$

В работе будут доказаны теоремы существования и единственности решения этой задачи, а также получены интегральные представления для частных производных решения первого порядка.

Аналогичная задача изучалась как вспомогательная при изучении задачи Трикоми-Неймана для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с граничными условиями второго рода на боковых сторонах полуполосы и коэффициентом $\frac{1}{k}$ при $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y), |k| > 1$ в статье [1]. На линии изменения типа ставилось условие склеивания нормальных производных по Франклю. Случай $k = 1$ (классическая задача с непрерывным градиентом) не рассматривалась и теорема единственности для вспомогательной задачи не доказывалась.

На задачу Трикоми с эллиптической частью в виде полуполосы обратил внимание А.В. Бицадзе в связи с математическим моделированием плоскопараллельных движений газа. В данном случае построение решения конформным отображением приводится к краевой задаче для определения аналитической функции в верхней полуплоскости [2, стр. 327]. На основании известной формулы Шварца [2, стр. 315] А.В. Бицадзе было выписано в квадратурах решение этой краевой задачи.

В работе [3] получено интегральное представление регулярного решения задачи для уравнения Лапласа в полукруге с краевым условием первого рода на полуокружности и двумя различными краевыми условиями типа наклонной производной на двух прямолинейных участках границы.

Теорема 1. *Решение задачи (1 - 4) существует, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right) y} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right], \tag{5}$$

где коэффициенты $A_n, \ n = 0, 1, 2, \ldots$ *определяются из разложения*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(n + \frac{1}{2} \right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}}, \ A_n = \frac{B_n}{n + \frac{1}{2}} \tag{6}$$

Доказательство. Докажем существование решения задачи (1) – (4). В силу основного результата работы [2] система $\left\{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,\pi)$. Разложим $\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}}$ по этой системе, коэффициенты разложения в формуле (6) удовлетворяют неравенствам Бесселя

$$C_1\|\varphi\|_{L_2(0,\pi)} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant C_2\|\varphi\|_{L_2(0,\pi)}, 0<C_1<C_2,$$

где C_1, C_2 не зависят от φ. Следовательно сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|A_n|$ и сходится равномерно ряд (5). Дифференцировать ряд (5) по x в D можно так как каждая из функций $A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$ имеет в области D производную, сам ряд (5) сходится равномерно и ряд производных

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

сходится равномерно в D. Аналогично можно показать, что (5) можно дважды дифференцировать по x и y. То, что функция (5) при $y>0$ - решение (1), удовлетворяющее условиям (2) проверятся подстановкой. Условие (4) выполняется так как $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}=\frac{e^{-y/2}}{1-e^{-y}}$. Проверим выполнение условия (3).

Согласно разложению (6), условие (3) принимает вид

$$I(y)=2\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2 dx$$

Докажем, что $I(y)\to 0$ при $y\to 0+0$.

$$I(y)\leqslant I_1(y)+I_2(y)$$

Зафиксируем $\forall\varepsilon>0$. В силу левой части неравенства Бесселя имеем оценку

$$I_2(y)=\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant C_3\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)^2 \leqslant C_3\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{\varepsilon}{2},$$

если m достаточно велико.

Во втором слагаемом мы имеем дело с конечным числом элементов, поэтому:

$$I_1(y)=\int_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{m} A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant C_4\sum_{n=0}^{m} A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)^2<\frac{\varepsilon}{2}$$

при $0 < y < \delta$, если δ достаточно мало. Условие (3) выполнено. Теорема доказана.

Теорема 2. *Решение задачи (1- 4) единственно*

Доказательство. Докажем единственность решения этой задачи. Пусть $u(x,y)$ - решение однородной задачи. Введём обозначения $C_\varepsilon = (0,\varepsilon), C_R = (0,R), D_R = (\pi,R), D_\varepsilon = (\pi,\varepsilon)$. $\prod_{R\varepsilon}$ - прямоугольник $C_\varepsilon C_R D_R D_\varepsilon$. Справедливы следующие соотношения:

$$0 = \iint\limits_{\prod_{R\varepsilon}} (R-y)(u_{xx}+u_{yy})dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\prod_{R\varepsilon}} \left((R-y)\,u_x u\right)_x dxdy + \iint\limits_{\prod_{R\varepsilon}} \left((R-y)\,u_y u\right)_y dxdy - \iint\limits_{\prod_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) dxdy + \iint\limits_{\prod_{R\varepsilon}} u_y u dxdy =$$

$$= -\iint\limits_{\prod_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) dxdy - \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)\left(u_y-u_x\right) u dx - \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)\, u_x u dx - \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx +$$

$$+ \int\limits_{C_R D_R} \frac{u^2}{2} dx$$

Отсюда следует

$$\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} (R-\varepsilon)\left(u_x-u_y\right) u dx + \frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant (R-\varepsilon)\left[\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \left(u_y-u_x\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant (R-\varepsilon)^2 \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \left(u_y-u_x\right)^2 dx + \frac{1}{4}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx,$$

$$\iint\limits_{\prod_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) dxdy + \frac{1}{4}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} u^2 dx + \frac{R-\varepsilon}{2} u^2(\pi,\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant (R-\varepsilon)^2 \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \left(u_y-u_x\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx$$

Устремим $\varepsilon \to 0+0$, тогда в силу (3)

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} \left(u_y-u_x\right)^2 dx = 0$$

и получим соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \iint\limits_{\prod_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right) dxdy + \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi u^2(x,0)dx + \frac{R}{2}u^2(\pi,0) \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx$$

Устремим теперь $R \to \infty$, тогда $\int\limits_{C_R D_R} u^2 dx \to 0$, тем самым, это возможно только в случае $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $u(x,y)$ - решение задачи $(1)-(4)$, тогда u_x, u_y представимы в виде*

$$u_y(x,y) = -Im\,\frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{iz}{2}} \int\limits_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t)dt, \qquad (7)$$

$$u_x(x,y) = Re\,\frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{\dfrac{iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}\varphi(t)dt. \qquad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим равенство (6). Система синусов $\left\{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис в $L_2(0,\pi)$. Поэтому для коэффициентов $A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)$ справедливо следующее представление [2]:

$$A_n\left(n+\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{\pi} h_{n+1}(t)\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}dt,$$

где

$$h_n(t) = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{n}\sin kt B_{n-k},\ B_l = \sum_{m=0}^{l} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-l}^{m}(-1)^{l-m},\ C_l^n = \frac{l(l-1)\dots(l-n+1)}{n!}.$$

Пусть $u(x,y)$ - решение задачи (1)-(4), тогда

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

и соотвественно

$$u_y(x,y) = -\sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

Здесь как раз возникает нужный нам коэффициент $A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)$, поэтому

$$u_y(x,y) = -\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]dt$$

Учитывая равенство $\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] = Im\ e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}$, запишем формулу

$$u_y(x,y) = -Im\ \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)y}e^{i\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}dt$$

Обозначим $z = x+iy$

$$u_y(x,y) = -Im\ \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{i\left(n+\dfrac{1}{2}\right)z}dt = |m=n+1| =$$

$$= -Im\ \sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_m(t)e^{i\left(m-\dfrac{1}{2}\right)z}dt =$$

$$= -Im\ e^{-\dfrac{iz}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_m(t)e^{imz}dt.$$

Поменяем местами знаки интергирования и суммирования

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{-\dfrac{iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz} dt$$

Введём новое обозначение:

$$I(t,z) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz}$$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin kt B_{n-k} e^{inz} = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{n=k}^{\infty} e^{inz} B_{n-k}$$

и новый индекс $m = n - k$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} B_m = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} B_m$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt = \frac{e^{iz} \sin t}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} B_l = \sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} \sum_{m=0}^{l} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{l-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} e^{ilz} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{l-m} =$$

Введём новый индекс суммирования $k = l - m$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} C_{\gamma/\pi}^{k} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{k} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} C_{\gamma/\pi}^{k} (-1)^k e^{ikz} = (1+e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta} (1-e^{iz})^{\gamma/\pi} =$$

$$= (1+e^{iz})^{1/2} (1-e^{iz})^{1/2} = \sqrt{1-e^{i2z}},$$

так как в нашем случае $\beta = -1,\ \gamma = \pi/2$. Окончательно получаем формулу

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} I(t,z) dt =$$

$$= -Im\ e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{e^{iz}\sin t}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)} \sqrt{1-e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt =$$

$$= -Im\ \frac{2}{\pi} e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2\cos t/2 \sqrt{\tan t/2}} \frac{e^{iz}\sin t}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)} \sqrt{1-e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt,$$

т.е. представление:

$$u_y(x,y) = -Im\ \frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{\dfrac{iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t) dt.$$

Рассуждая аналогично, получим представление

$$u_x(x,y) = Re\ \frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{\dfrac{iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t) dt.$$

Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Моисеев Е.И. Моисеев Т.Е. Вафадорова Г.О.* Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения, **2015** Т. 51. №8. С.1070-1075

[2] *Моисеев Е.И.* О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения, **1987** Т. 23. №1. С.177-189

[3] *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. // М., Наука,**1981**, 448 стр.

[4] *Моисеев Т. Е.* Об интегральном представлении решения уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения, **2011**, т. 47, №10, с.1446-1451.