Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с полуполосой в эллиптической части

Капустин Н.Ю., Васильченко Д.Д.

Рассматривается задача Трикоми для уравнения Лавертьева-Бицадзе

$$(sgn(y))\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0 \tag{1}$$

в области $D = D^+ \cup D^-$, где $D^+ = \{(x,y):\ 0<x<\pi,\ 0<y<+\infty\}$, $D^- = \{(x,y):\ -y<x<y+\pi,\ -\pi/2<y<0\}$ в классе функций $u(x,y)\in C^2(D^+)\cap C^2(D^-)\cap C(\overline{D^+\cup D^-})$ с граничными условиями

$$u(0,y)=0,\ u(\pi,y)=0,\ 0<y<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,-x)=f(x),\ 0\le x\le \pi/2,\ f(0)=0, \tag{3}$$

$$u(x,y)\rightrightarrows 0,\ y\to+\infty \tag{4}$$

и условием склеивания Франкля

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,-0),\ 0<x<\pi, \tag{5}$$

где $k\in(-\infty,+\infty), k\neq 0$.

Теорема 1. *Решение задачи (1) - (5) единственно.*

Доказательство. Пусть существуют два решения $u_1(x,y), u_2(x,y)$ задачи (1)-(5). Тогда $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ есть решение задачи (1)-(5) с функцией $f(x)\equiv 0$. В этом случае $u(x,y)=F(x+y)-F(0)$.

Отсюда следует, что равенство $\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}=0$ выполняется для всех точек x и y из области гиперболичности. Используя условие склеивания (5) будем иметь

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=0+0}=0. \tag{6}$$

В результате получаем задачу для нахождения гармонической функции $u(x, y)$ в области D^+ с граничными условиями (2),(4),(6).

В силу принципа Зарембы-Жиро и равенства (6) экстремум не может достигаться на интервале $\{(x, y) : \ 0 < x < \pi, \ y = 0\}$. На замкнутых боковых сторонах и на бесконечности экстремум не может достигаться в силу условий (2) и (4). Теорема доказана.

Известно, что общее решение в D^- уравнения (1) имеет вид

$$u(x, y) = F(x + y) + f(\frac{x - y}{2}) - F(0). \tag{7}$$

Продифференцируем равенство (7):

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)|_{y=0+0} = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \ 0 < x < \pi.$$

Используя условие склеивания (5), приходим к равенству

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \ 0 < x < \pi.$$

Тогда получим в области D^+ вспомогательную задачу для оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \tag{8}$$

с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \ u(\pi, y) = 0, \ 0 < y < +\infty, \tag{9}$$

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \tag{10}$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, \ y \to +\infty \tag{11}$$

Теорема 2. *Пусть* $|k| < 1, \ k \neq 0$, $f(x) \in C[0, \pi/2] \cap C^2(0, \pi/2)$, $f'(x) \in L_2(0, \pi/2)$. *Тогда решение задачи (8)-(11) существует и представимо в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-ny} \sin nx, \tag{12}$$

причем условие (10) понимается в интегральном смысле

$$\int\limits_0^{\pi} \left[\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + f'\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 dx \to 0, \ y \to 0+0,$$

а коэффициенты A_n определяется из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin\left[nx + \operatorname{arctg} k\right] = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} f'\left(\frac{x}{2}\right) \tag{13}$$

Теорема 3. *Пусть $k > 0$, тогда решение задачи (8) - (11) единственно*

Теорема 4. *Пусть $|k| < 1$, $k \neq 0$ и $u(x, y)$ - решение задачи (8) - (11), тогда u_x, u_y представимы в виде*

$$u_y(x,y) = -\frac{2k}{\pi\sqrt{1+k^2}} \operatorname{Im} \left(\frac{1-e^{iz}}{1+e^{iz}}\right)^{\gamma/\pi} e^{iz} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} f'(\frac{t}{2})dt,$$

$$u_x(x,y) = \frac{2k}{\pi\sqrt{1+k^2}} \operatorname{Re} \left(\frac{1-e^{iz}}{1+e^{iz}}\right)^{\gamma/\pi} e^{iz} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{(\operatorname{tg} t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} f'(\frac{t}{2})dt,$$

где $\gamma = 2 \operatorname{arctg} k$, $z = x + iy$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеев, Е.И. Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе/ Моисеев, Е.И., Моисеев Т.Е., Вафадорова Г.О. // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8 —. С. 1070–1075.

2. Моисеев, Е.И. О базисности одной системы синусов / Е.И. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 1987. —Т. 23, № 1 — С. 177–189.