Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с полуполосой в эллиптической части

Капустин Н.Ю., Васильченко Д.Д.

Постановка задачи

Рассматривается задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе

$$\mathrm{sgn} y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \tag{1}$$

в области $D = D^+ \cup D^-$, где $D^+ = \{(x,y)|0 < x < \pi, y > 0\}$, $D^- = \{(x,y)| - y < x < y + \pi, -\pi/2 < y < 0\}$ в классе функций $u(x,y) \in C^2(D^+) \cap C^2(D^-) \cap C(\overline{D^+ \cap D^-})$ с граничными условиями

$$u(0,y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0,\ y > 0 \tag{2}$$

$$u(x,-x) = f(x),\ 0 \le x \le \pi/2,\ f(0) = 0 \tag{3}$$

$$u(x,y) \rightrightarrows 0,\ y \to 0 \tag{4}$$

и условием склеивания Франкля

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,-0),\ 0 < x < \pi, \tag{5}$$

где $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Основные результаты

Теорема 1. *Решение задачи (1)-(5) единственно.*

Доказательство. Пусть $u_1(x,y), u_2(x,y)$ - решения задачи (1)-(5), тогда $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ - решение однородной задачи. В гиперболической части решение имеет вид

$$u(x,y) = F(x+y) + f(\frac{x-y}{2}) - F(0), \tag{6}$$

в нашем случае $f \equiv 0$, продифференцируем это равенство и получим, что равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ выполняется в D^-. Используя условие (5), получим

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}|_{y=0+0} = 0. \tag{7}$$

Таким обазом, получили задачу о нахождении гармонической функции в области D^+ с граничными условиями (2), (4), (7).

В силу принципа Зарембы-Жиро и равенства (7) экстремум не может достигаться на интервале $\{(x,y)|0 < x < \pi, y = 0\}$, на замкнутых боковых границах и на бесконечности экстремум не может достикаться в силу (2), (4). Теорема доказана.

Продифференцируем формулу для общего вида решения уравнения (6) в D^-, получим

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)|_{y=0+0} = -f'(\frac{x}{2}),\ 0 < x < \pi.$$

Учитывая условие (5), получим

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0+0) = -f'(\frac{x}{2}),\ 0 < x < \pi.$$

Получаем в D^+ вспомогательную задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{8}$$

$$u(0,y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0,\ y > 0 \tag{9}$$

$$\lim_{y\to 0+0}\int\limits_0^\pi \left[\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + f'(\frac{x}{2})\right]^2 = 0 \tag{10}$$

$$u(x,y) \rightrightarrows 0,\ y \to \infty \tag{11}$$

Теорема 2.*Пусть $k \in (-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$, $f(x) \in C[0,\pi/2]\cap C^2(0,\pi/2)$ и $f'(x) \in L_2(0,\pi/2)$. Тогда решение задачи (8)-(11) существует и представимо в виде ряда*

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[n+\frac{1}{2}\right]x, \tag{12}$$

коэффициенты A_n определяются из равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \mathrm{arctg}\frac{1}{k}\right] = -\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}f'(\frac{x}{2}). \tag{13}$$

Доказательство. В силу основного результата работы [2] система $\left\{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \mathrm{arctg}\frac{1}{k}\right]\right\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса в протранстве $L_2(0,\pi/2)$ при $k \in (-\infty,-1)\cup(0,\infty)$. Поэтому справедливо двустороннее неравенство Бесселя

$$C_1\|f'\|^2_{L_2(0,\pi/2)} \le \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \le C_2\|f'\|^2_{L_2(0,\pi/2)},$$

где C_1, C_2 не зависят от f'. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|A_n|$ сходится и сходится равномерно (12). Ряд (12) удовлетворяет граничным условиям (9), (11) по посторению. Проверим выполнение условия (10).

Подставим выражение для $f'(\frac{x}{2})$ в условие (10), тогда получим

$$I = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\int\limits_0^\pi\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \mathrm{arctg}\frac{1}{k}\right]\left(1-e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\right)\right\}^2 dx.$$

Запишем $I \le I_1 + I_2$,где

$$I_1 = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k}\int\limits_0^\pi\left\{\sum_{n=0}^{m} A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \mathrm{arctg}\frac{1}{k}\right]\left(1-e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\right)\right\}^2 dx,$$

$$I_2 = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k}\int\limits_0^{\pi}\left\{\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\operatorname{arctg}\frac{1}{k}\right]\left(1-e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\right)\right\}^2 dx.$$

При $0<y<\delta$ справедливо

$$I_1 \le C_3\sum_{n=0}^{m} A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left(1-e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу сходимости ряда $\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ такое, что при $m\ge N$ справедливо

$$I_2 \le C_4\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left(1-e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\right)^2 \le C_4\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Показали, что $\forall\varepsilon>0 \Rightarrow I<\varepsilon$ при $y\to 0+0$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $k>0$, тогда решение задачи (8) - (11) единственно*

Доказательство. Докажем единственность решения этой задачи. Пусть $u(x,y)$ - решение однородной задачи. Введём обозначения $C_\varepsilon=(0,\varepsilon), C_R=(0,R), D_R=(\pi,R), D_\varepsilon=(\pi,\varepsilon)$. $\prod_{R\varepsilon}$ - прямоугольник $C_\varepsilon C_R D_R D_\varepsilon$. Справедливы следующие соотношения:

$$0=\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)(u_{xx}+u_{yy})dxdy.$$

Заметим, что

$$(R-y)(u_{xx}+u_{yy})u = ((R-y)\,u_xu)_x + ((R-y)\,u_yu)_y - (R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)+u_yu =$$

$$= (R-y)\left(u_{xx}u+u_x^2\right)+\left(-u_y+(R-y)\,u_{yy}u+(R-y)\,u_y^2\right)-(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)+u_yu$$

Подставим это выражение в интеграл:

$$I=\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}((R-y)\,u_xu)_x\,dxdy+\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}((R-y)\,u_yu)_y\,dxdy-\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)+\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}u_yudxdy.$$

Упростим эти интегралы:

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}((R-y)\,u_xu)_x\,dxdy=\int\limits_{[\varepsilon,R]}\left[(R-y)u_xu\right]|_0^\pi dy=\int\limits_{[\varepsilon,R]}\left[(R-y)u_x(\pi,y)u(\pi,y)-(R-y)u_x(0,y)u(0,y)\right]dy=0$$

т.к. оба подынтегральных выражения равны нулю в силу условия (2)

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}((R-y)\,u_yu)_y\,dxdy=\int\limits_{[0,\pi]}\left[(R-y)\,u_yu\right]|_\varepsilon^R dx=\int\limits_{[0,\pi]}\left[0-(R-\varepsilon)\,u_y(x,\varepsilon)u(x,\varepsilon)\right]dx=-\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(R-\varepsilon)\,u_yudx$$

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}u_yudxdy=\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}\left(\frac{u^2}{2}\right)'_y dxdy=\int\limits_{[0,\pi]}\left[\frac{u^2(x,R)}{2}-\frac{u^2(x,\varepsilon)}{2}\right]dx$$

В итоге получим

$$I=-\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy-\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(R-\varepsilon)\,u_yudx-\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}\frac{u^2}{2}dx+\int\limits_{C_RD_R}\frac{u^2}{2}dx$$

Добавим и вычтем $\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon} k\,(R-\varepsilon)\,u_x u dx$, тогда

$$I=-\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy-\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(R-\varepsilon)\left(u_y-ku_x\right)udx-\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(R-\varepsilon)\,ku_x udx-\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}\frac{u^2}{2}dx+\int\limits_{C_R D_R}\frac{u^2}{2}dx.$$

Отсюда следует

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\frac{1}{2}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}u^2dx+k\frac{R-\varepsilon}{2}u^2(\pi,\varepsilon)=\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}(R-\varepsilon)\left(u_y-ku_x\right)udx+\frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R}u^2dx\le$$

$$\le\{\text{Неравенство Коши-Буняковского}\}\le(R-\varepsilon)\left[\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}\left(u_y-ku_x\right)^2dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}u^2dx\right]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R}u^2dx=M$$

Рассмотрим следующее неравенство: $(2ar-b)^2\ge 0\Rightarrow ra^2r^2-4abr+b^2\ge 0\Rightarrow ab\le ra^2+b/(4r)$. Возьмем $a=\left[(R-\varepsilon)\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}\left(u_y-ku_x\right)^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$, $b=\left[(R-\varepsilon)\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}u^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$, $r=R-\varepsilon$, тогда

$$M\le(R-\varepsilon)^2\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}\left(u_y-ku_x\right)^2dx+\frac{1}{4}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}u^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R}u^2dx.$$

Перегруппируем

$$\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\frac{1}{4}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}u^2dx+k\frac{R-\varepsilon}{2}u^2(\pi,\varepsilon)\le(R-\varepsilon)^2\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}\left(u_y-ku_x\right)^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R}u^2dx.$$

В силу (3) имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{C_\varepsilon D_\varepsilon}\left(u_y-ku_x\right)^2dx=0,$$

откуда вытекает соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\iint\limits_{\Pi_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\frac{1}{4}\int\limits_0^\pi u^2(x,0)dx+k\frac{R}{2}u^2(\pi,0)\le\frac{1}{2}\int\limits_{C_R D_R}u^2dx.$$

Устремим теперь $R\to\infty$, тогда $\int\limits_{C_R D_R}u^2dx\to 0$, а в левой части все слагаемы неотрицательны,п отсюда $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D}$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $u(x,y)$ - решение задачи $(1)-(4)$, тогда u_x,u_y представимы в виде*

$$u_y(x,y)=-Im\,\frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi}e^{\frac{+iz}{2}}\int\limits_0^\pi\frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}\varphi(t)dt\qquad(1)$$

$$u_x(x,y)=Re\,\frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi}e^{\frac{+iz}{2}}\int\limits_0^\pi\frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}\varphi(t)dt.\qquad(2)$$

Доказательство.

Рассмотрим уравнение (6). Система синусов $\sin\left[\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x+\dfrac{\pi}{4}\right]$ образует базис в $L_2(0,\pi)$.

Поэтому для коэффициентов $A_n\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$ справедливо следующее представление:

$$A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)=\int\limits_0^\pi h_{n+1}(t)\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}dt,$$

где

$$h_n(t)=\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^n \sin ktB_{n-k}$$

Пусть $u(x,y)$ - решение задачи (1)-(4), тогда

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^\infty A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

и соотвественно

$$u_y(x,y)=-\sum_{n=0}^\infty A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

Здесь как раз возникает нужный нам коэффициент $A_n\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$, поэтому

$$u_y(x,y)=-\sum_{n=0}^\infty\int\limits_0^\pi\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]dt$$

$\sin\left[\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\right]=Im\ e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}$, поэтому

$$u_y(x,y)=-Im\ \sum_{n=0}^\infty\int\limits_0^\pi\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}dt$$

Обозначим $z=x+iy$

$$u_y(x,y)=-Im\ \sum_{n=0}^\infty\int\limits_0^\pi\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z}dt$$

Для дальнейших операций нам было бы удобно, чтобы суммирование начинолось от 1, а не 0, поэтому сделаем замену $m=n+1$

$$u_y(x,y)=-Im\ \sum_{m=1}^\infty\int\limits_0^\pi\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_m(t)e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}dt$$

$$u_y(x,y)=-Im\ e^{-\frac{iz}{2}}\ \sum_{m=1}^\infty\int\limits_0^\pi\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_m(t)e^{imz}dt$$

Поменяем местами знаки интергирования и суммирования

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{-\dfrac{iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz} dt$$

Введём новое обозначение:

$$I(t,z) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz}$$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin kt B_{n-k} e^{inz} = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{n=k}^{\infty} e^{inz} B_{n-k}$$

Введём новый индекс $m = n - k$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} B_m = \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} B_m$$

Первый ряд можем вычислить по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt = \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \frac{1}{2i} \left(e^{ikt} - e^{-ikt}\right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - e^{i(z+t)}} - \frac{1}{1 - e^{i(z-t)}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{e^{i(z+t)} - e^{i(z-t)}}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)} = \frac{e^{iz} \sin t}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} B_l = \sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} \sum_{m=0}^{l} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{l-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} e^{ilz} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{l-m} =$$

Введём новый индекс суммирования $k = l - m$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} C_{\gamma/\pi}^{k} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} (-1)^{k} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} C_{\gamma/\pi}^{k} (-1)^k e^{ikz} = (1+e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta} (1-e^{iz})^{\gamma/\pi}$$

В нашем случае $\beta = -1, \gamma = \pi/2$, поэтому

$$= (1 + e^{iz})^{1/2} (1 - e^{iz})^{1/2} = \sqrt{1 - e^{i2z}}$$

Собираем все решение:

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} I(t,z) dt$$

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{e^{iz} \sin t}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

Подставляя β и γ получим

$$u_y(x,y) = -Im\ \frac{2}{\pi} e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2\cos t/2 \sqrt{\tan t/2}} \frac{e^{iz} \sin t}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

$$u_y(x,y) = -Im\ \frac{e^{\dfrac{+iz}{2}}}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin t} \sqrt{1 - e^{i2z}}}{\left(1 - e^{i(z+t)}\right)\left(1 - e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t) dt$$

Теорема доказана.