



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра общей математики

Васильченко Дмитрий Дмитриевич

**Об интегральном представлении  
производных решения задачи для уравнения  
Лапласа с интегральным граничным  
условием**

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**Научный руководитель:**

д.ф.-м.н., профессор

Н. Ю. Капустин

Москва, 2025

# Содержание

1	Введение	3
2	Актуальность	4
3	Постановка задачи	5
4	Теорема о единственности решения	5
5	Постановка вспомогательной задачи	6
6	Существование и единственность решения вспомогательной задачи	7
7	Интегральное представление первых частных производных решения вспомогательной задачи	11
8	Заключение	16

# 1 Введение

В работе рассматривается классическая задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с полуполосой в эллиптической части и условием непрерывности градиента на линии изменения типа. Доказаны теоремы единственности решения задачи Трикоми теоремы существования и единственности решения вспомогательной задачи для уравнения Лапласа и получены интегральные представления для первых частных производных решения.

На задачу Трикоми с эллиптической частью в виде полуполосы обратил внимание А.В. Бицадзе в связи с математическим моделированием плоскопараллельных установившихся движений газа. В данном случае построение решения элементарным конформным отображением приводится к краевой задаче для определения аналитической функции в верхней полуплоскости [1, стр. 327]. На основании известной формулы Шварца [1, стр.315] А.В. Бицадзе было выписано в квадратурах решение этой задачи.

В работе [2] спектральным методом на основе результатов, полученных в статье [3], получено интегральное представление решения задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в аналогичной области с полуполосой и условием Франкля на линии изменения типа. В статье [4] изучалась вспомогательная задача Лапласа связи с задачей Трикоми-Неймана, когда на левой стороне полуполосы в эллиптической части условие первого рода, а на правой - условие второго рода. В отличие от работы [2] в статье [4] рассмотрен случай, соответствующий непрерывному градиенту на линии изменения типа. Построены интегральные представления для первых частных производных решения и доказана теорема единственности решения вспомогательной задачи. В работе [5] выписано интегральное представление регулярного решения задачи для уравнения Лапласа в полукруге с краевым условием первого рода на полуокружности и двумя различными краевыми условиями типа наклонной производной на двух прямолинейных участках границы.

## 2 Актуальность

Исследования уравнений смешанного типа имеют глубокие исторические корни, восходящие к 1920-м годам, когда Франческо Трикоми впервые рассмотрел краевую задачу для эллипτικο-гиперболического уравнения, получившую впоследствии его имя. Дальнейшее развитие этой теории связано с работами С. Геллерстедта, который обобщил подход Трикоми на более широкий класс уравнений. Значительный вклад в развитие теории внесли такие выдающиеся математики, как М.А. Лаврентьев, Ф.И. Франкль, И.Н. Векуа и другие, показавшие важность этих уравнений для трансзвуковой газовой динамики, магнитогидродинамики и теории деформации поверхностей. Особый интерес представляют параболо-гиперболические уравнения, описывающие процессы, сочетающие волновые и диффузионные свойства, что делает их незаменимыми при моделировании сложных физических явлений.

В прикладном аспекте уравнения смешанного типа находят применение в самых разных областях. Например, при изучении движения газа в каналах с пористыми стенками давление в канале описывается волновым уравнением, тогда как в самой пористой среде - уравнением диффузии. Аналогичные ситуации возникают в электродинамике при анализе неоднородных сред, содержащих как диэлектрические, так и проводящие компоненты. В механике эти уравнения используются для моделирования колебаний струн и стержней с сосредоточенными массами, что имеет прямое отношение к задачам аэроупругости и вибрации конструкций. Тепловые процессы в средах с различными временами релаксации также естественным образом приводят к уравнениям смешанного типа.

Семидесятые-восемидесятые годы XX века ознаменовались бурным развитием спектральной теории для уравнений смешанного типа, чему способствовали работы Е.И. Моисеева, С.М. Пономарева и Т.Ш. Кальменова. Особое внимание уделялось задачам со спектральным параметром в граничных условиях, которые часто оказываются несамосопряженными. Фундаментальные результаты в этом направлении были получены В.А. Ильиным, разработавшим строгую теорию для несамосопряженных операторов и установившим критерии базисности собственных функций. А.А. Шкаликов построил общую теорию спектральных задач с параметром в граничных условиях, доказав важные теоремы о полноте и базисности решений. Е.И. Моисеев предложил эффективный метод представления решений в виде биортогональных рядов, что потребовало глубокого анализа специальных тригонометрических систем.

Современные исследования в этой области охватывают широкий круг проблем, включая нелокальные граничные задачи, где условия связывают значения решения в различных точках, и обратные задачи, направленные на восстановление параметров уравнений по дополнительным данным. Особую практическую значимость имеют численные методы, разработанные, в частности, А.М. Ахтямовым для диагностики механических систем. Развитие вычислительных алгоритмов открывает новые возможности для применения теории уравнений смешанного типа в инженерных расчетах и компьютерном моделировании. Таким образом, эта область математики продолжает оставаться актуальной как с теоретической, так и с прикладной точек зрения, предлагая богатый инструментарий для решения сложных задач современной физики и техники.

### 3 Постановка задачи

Рассматривается задача Трикоми для уравнения Лавертьева-Бицадзе

$$\operatorname{sgn}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (1)$$

в области  $D = D^+ \cup D^-$ , где  $D^+ = \{(x, y) : 0 < x < \pi, 0 < y < +\infty\}$ ,  $D^- = \{(x, y) : -y < x < y + \pi, -\pi/2 < y < 0\}$  в классе функций  $u(x, y) \in C^2(D^+) \cap C^2(D^-) \cap C(\overline{D^+ \cup D^-})$  с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, -x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi/2, \quad f(0) = 0, \quad (3)$$

$$u(x, y) \Rightarrow 0, \quad y \rightarrow +\infty \quad (4)$$

и условием непрерывности градиента

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, +0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, -0), \quad 0 < x < \pi. \quad (5)$$

### 4 Теорема о единственности решения

**Теорема 1.** *Решение задачи (1) - (5) единственно.*

**Доказательство.** Пусть существуют два решения  $u_1(x, y), u_2(x, y)$  задачи (1)-(5). Тогда  $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$  есть решение задачи (1)-(5) с функцией  $f(x) \equiv 0$ . В этом случае  $u(x, y) = F(x + y) - F(0)$ .

Отсюда следует, что равенство  $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  выполняется для всех точек  $x$  и  $y$  из области гиперболичности. Используя условие склеивания (5) будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}|_{y=0+0} = 0. \quad (6)$$

В результате получаем задачу для нахождения гармонической функции  $u(x, y)$  в области  $D^+$  с граничными условиями (2), (4), (6).

В силу принципа Зарембы-Жиро и равенства (6) экстремум не может достигаться на интервале  $\{(x, y) : 0 < x < \pi, y = 0\}$ . На замкнутых боковых сторонах и на бесконечности экстремум не может достигаться в силу условий (2) и (4). Теорема доказана.

Известно, что общее решение в  $D^-$  уравнения (1) имеет вид

$$u(x, y) = F(x + y) + f\left(\frac{x - y}{2}\right) - F(0). \quad (7)$$

Продифференцируем равенство (7):

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)|_{y=0+0} = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 < x < \pi.$$

Используя условие склеивания (5), приходим к равенству

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0 + 0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0 + 0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0 < x < \pi.$$

## 5 Постановка вспомогательной задачи

Получим в области  $D^+$  вспомогательную задачу для оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (8)$$

с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < +\infty, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0 + 0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0 + 0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \quad (10)$$

$$u(x, y) \Rightarrow 0, \quad y \rightarrow +\infty \quad (11)$$

Упростим постановку вспомогательной задачи. Обозначим  $\varphi(x) = f'(x/2)$  и положим  $\varphi(x) \in L_2(0, \pi)$ , тогда условие на линии  $y = 0$  понимается в интегральном смысле, и получим следующую постановку.

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad (12)$$

в области  $D^+ = \{(x, y) : 0 < x < \pi, 0 < y < +\infty\}$  в классе функций  $u(x, y) \in C^2(D^+) \cap C^1(\overline{D^+} \cap \{y > 0\}) \cap C(\overline{D^+})$  с граничными условиями

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0, \quad 0 < y < +\infty, \quad (13)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} \int_0^\pi \left[ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \varphi(x) \right]^2 dx = 0, \quad \varphi(x) \in L_2(0, \pi) \quad (14)$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, \quad y \rightarrow +\infty \quad (15)$$

## 6 Существование и единственность решения вспомогательной задачи

**Теорема 2.** *Решение задачи (12) - (15) существует, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right], \quad (16)$$

где коэффициенты  $A_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  определяются из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

**Доказательство.**

Докажем существование решения задачи (12)–(15). Сперва необходимо убедиться в том, что система  $\left\{ \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right\}_{n=0}^{\infty}$  образует базис Рисса в пространстве  $L_2(0, \pi)$ . Согласно результатам работы [3] система вида  $\{ \sin [(n + \beta/2)x + \gamma/2] \}_{n=1}^{\infty}$  образует базис Рисса в пространстве  $L_2(0, \pi)$ , тогда и только тогда, когда  $-\frac{1}{2} < \gamma/\pi < \frac{3}{2}$  и  $-\frac{3}{2} < \gamma/\pi + \beta < \frac{1}{2}$ . В нашем случае  $\gamma = \pi/2$ ,  $\beta = -1$ .

$$-\frac{3}{2} < \gamma/\pi + \beta < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < \frac{1}{2} - 1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2} < \gamma/\pi < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \frac{3}{2}.$$

Неравенства выполнены, а значит система  $\left\{ \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right\}_{n=0}^{\infty}$  образует базис Рисса в  $L_2(0, \pi)$ . Поэтому коэффициенты разложения в формуле (17) удовлетворяют двустороннему неравенству Бесселя

$$C_1 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)}^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \leq C_2 \|\varphi\|_{L_2(0, \pi)}^2, 0 < C_1 < C_2,$$

где константы  $C_1, C_2$  не зависят от  $\varphi$ , а значит сходится ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|$  и сходится равномерно ряд (16). То, что функция (16) при  $y > 0$  - решение уравнения (12), удовлетворяющее условиям (13) - это очевидно. В силу равенства  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+\frac{1}{2})y} = \frac{e^{-y/2}}{1 - e^{-y}}$ , также очевидно, что выполнено условие (15). Проверим выполнение условия (14). Выразим функцию  $\varphi(x)$  из представления (17) и подставим в условие (14). Сперва рассмотрим подробнее подынтегральное выражение в (14).

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right)} \left( -\sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] - \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] \right) \right] + \varphi(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sqrt{2} A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right)} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] \right) \right] + \varphi(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sqrt{2} A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right)} \left( -\sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right) \right] + \varphi(x) = \\ &= \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( 1 - e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right)} \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]. \end{aligned}$$

Таким образом получаем следующее выражение

$$I(y) = 2 \int_0^{\pi} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right)y} - 1 \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx$$

Докажем, что  $I(y) \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow 0 + 0$ .

$$I(y) \leq 4 \int_0^{\pi} \left[ \sum_{n=0}^m A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right)y} - 1 \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx +$$



$$+4 \int_0^\pi \left[ \sum_{n=m+1}^\infty A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx$$

В силу левой части неравенства Бесселя имеем оценку

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \left[ \sum_{n=m+1}^\infty A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx \leq \\ & \leq C_3 \sum_{n=m+1}^\infty A_n^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right)^2 \leq C_3 \sum_{n=m+1}^\infty A_n^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Это верно  $\forall \varepsilon > 0$ , если  $m \geq N = N(\varepsilon)$

Во втором слагаемом мы имеем дело с конечным числом элементов, поэтому:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \left[ \sum_{n=0}^m A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right) \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right]^2 dx \leq \\ & \leq C_4 \sum_{n=0}^m A_n^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \left( e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} - 1 \right)^2 < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Это верно, если  $0 < y < \delta$  ( $m$  зафиксировано в зависимости от  $N$ ). Условие (14) выполнено. Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Решение задачи (12) - (15) единственно.*

**Доказательство.** Докажем единственность решения этой задачи. Пусть  $u(x, y)$  - разность двух решений - решение задачи с  $\varphi(x) \equiv 0$ . Необходимо получить выражение, где слева будет входить модуль или чётная степень функции  $u$ , а справа будет 0.

Введём обозначения  $A_\varepsilon = (0, \varepsilon)$ ,  $A_R = (0, R)$ ,  $B_R = (\pi, R)$ ,  $B_\varepsilon = (\pi, \varepsilon)$ .  $D_{R\varepsilon}$  - прямоугольник  $A_\varepsilon A_R B_R B_\varepsilon$ . Справедливы следующие соотношения:

$$0 = \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y)(u_{xx} + u_{yy}) dx dy = I$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & (R - y)(u_{xx} + u_{yy})u = ((R - y) u_x u)_x + ((R - y) u_y u)_y - (R - y) (u_x^2 + u_y^2) + u_y u = \\ & = (R - y) (u_{xx} u + u_x^2) + (-u_y + (R - y) u_{yy} u + (R - y) u_y^2) - (R - y) (u_x^2 + u_y^2) + u_y u \end{aligned}$$

Подставим это выражение в интеграл

$$I = \iint_{D_{R\varepsilon}} ((R-y) u_x u)_x dx dy + \iint_{D_{R\varepsilon}} ((R-y) u_y u)_y dx dy - \iint_{D_{R\varepsilon}} (R-y) (u_x^2 + u_y^2) + \iint_{D_{R\varepsilon}} u_y u dx dy$$

Упростим теперь эти интегралы:

$$\begin{aligned} \iint_{D_{R\varepsilon}} ((R-y) u_x u)_x dx dy &= \int_{[\varepsilon, R]} [(R-y) u_x u] \Big|_0^\pi dy = \\ &= \int_{[\varepsilon, R]} [(R-y) u_x(\pi, y) u(\pi, y) - (R-y) u_x(0, y) u(0, y)] dy = 0 \end{aligned}$$

т.к. оба подынтегральных выражения равны нулю в силу условия (13).

$$\begin{aligned} \iint_{D_{R\varepsilon}} ((R-y) u_y u)_y dx dy &= \int_{[0, \pi]} [(R-y) u_y u] \Big|_\varepsilon^R dx = \int_{[0, \pi]} [0 - (R-\varepsilon) u_y(x, \varepsilon) u(x, \varepsilon)] dx = \\ &= - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon) u_y u dx, \\ \iint_{D_{R\varepsilon}} u_y u dx dy &= \iint_{D_{R\varepsilon}} \left( \frac{u^2}{2} \right)'_y dx dy = \int_{[0, \pi]} \left[ \frac{u^2(x, R)}{2} - \frac{u^2(x, \varepsilon)}{2} \right] dx \end{aligned}$$

В итоге получим

$$I = - \iint_{D_{R\varepsilon}} (R-y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon) u_y u dx - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \int_{A_R B_R} \frac{u^2}{2} dx$$

Добавим и вычтем  $\int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon) u_x u dx$ , тогда

$$\begin{aligned} I &= - \iint_{D_{R\varepsilon}} (R-y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon) (u_y - u_x) u dx - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon) u_x u dx - \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} \frac{u^2}{2} dx + \\ &\quad + \int_{A_R B_R} \frac{u^2}{2} dx \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} &\iint_{D_{R\varepsilon}} (R-y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{2} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx + \frac{R-\varepsilon}{2} u^2(\pi, \varepsilon) = \\ &= \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (R-\varepsilon) (u_x - u_y) u dx + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx \leq \{\text{Неравенство Коши-Буняковского}\} \end{aligned}$$

$$\leq (R - \varepsilon) \left[ \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx = I$$

Рассмотрим следующее неравенство:  $(2ar - b)^2 \geq 0 \Rightarrow 4a^2r^2 - 4abr + b^2 \geq 0 \Rightarrow ab \leq ra^2 + \frac{b}{4r}$

Возьмём  $a = \left[ (R - \varepsilon) \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$ ,  $b = \left[ (R - \varepsilon) \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$ ,  $r = R - \varepsilon$ , тогда

$$\begin{aligned} I &\leq (R - \varepsilon)^2 \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx + \frac{1}{4} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx, \\ \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} u^2 dx + \frac{R - \varepsilon}{2} u^2(\pi, \varepsilon) &\leq \\ &\leq (R - \varepsilon)^2 \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx \end{aligned}$$

Устремим  $\varepsilon \rightarrow 0 + 0$ , тогда в силу условия (14)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 dx = 0$$

и получим соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \iint_{D_{R\varepsilon}} (R - y) (u_x^2 + u_y^2) dx dy + \frac{1}{4} \int_0^\pi u^2(x, 0) dx + \frac{R}{2} u^2(\pi, 0) \leq \frac{1}{2} \int_{A_R B_R} u^2 dx$$

Устремим теперь  $R \rightarrow \infty$ , тогда в силу условия (15)  $\int_{A_R B_R} u^2 dx \rightarrow 0$ , тем самым, это возможно только в случае  $u(x, y) \equiv 0$  в  $\overline{D}$ .

## 7 Интегральное представление первых частных производных решения вспомогательной задачи

**Теорема 4.** Пусть  $u(x, y)$  - решение задачи (12)–(15), тогда  $u_x, u_y$  представимы в виде

$$u_y(x, y) = -Im \frac{\sqrt{1 - e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt \quad (18)$$

$$u_x(x, y) = Re \frac{\sqrt{1 - e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt \quad (19)$$

**Доказательство.**

Рассмотрим уравнение (17). Система синусов  $\left\{ \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x + \frac{\pi}{4} \right] \right\}_{n=0}^\infty$  образует

базис в  $L_2(0, \pi)$ . Поэтому для коэффициентов  $A_n \left( n + \frac{1}{2} \right)$  справедливо следующее представление:

$$A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) = \int_0^\pi h_{n+1}(t) \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt,$$

где

$$h_n(t) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^n \sin kt B_{n-k}.$$

Пусть  $u(x, y)$  - решение задачи (12)-(15), тогда

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right]$$

и соответственно

$$u_y(x, y) = - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right]$$

Здесь как раз возникает нужный нам коэффициент  $A_n \left( n + \frac{1}{2} \right)$ , поэтому

$$u_y(x, y) = - \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] dt$$

$$\sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] = \operatorname{Im} e^{i \left( n + \frac{1}{2} \right) x}, \text{ поэтому}$$

$$u_y(x, y) = - \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} e^{i \left( n + \frac{1}{2} \right) x} dt$$

Обозначим  $z = x + iy$

$$u_y(x, y) = - \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{i \left( n + \frac{1}{2} \right) z} dt$$

Для дальнейших операций нам было бы удобно, чтобы суммирование начиналось от 1, а не 0, поэтому сделаем замену  $m = n + 1$

$$u_y(x, y) = - \operatorname{Im} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{i \left( m - \frac{1}{2} \right) z} dt$$

$$u_y(x, y) = - \operatorname{Im} e^{-\frac{iz}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{imz} dt$$

Поменяем местами знаки интегрирования и суммирования

$$u_y(x, y) = -Im \, e^{-\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^\infty h_m(t) e^{imz} dt$$

Введём новое обозначение:

$$I(t, z) = \sum_{m=1}^\infty h_m(t) e^{imz}$$

$$I(t, z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^n \sin kt B_{n-k} e^{inz} = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^\infty \sin kt \sum_{n=k}^\infty e^{inz} B_{n-k}$$

Введём новый индекс  $m = n - k$

$$I(t, z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^\infty \sin kt \sum_{m=0}^\infty e^{i(m+k)z} B_m = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^\infty e^{ikz} \sin kt \sum_{m=0}^\infty e^{imz} B_m$$

Первый ряд можем вычислить по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty e^{ikz} \sin kt &= \sum_{k=1}^\infty e^{ikz} \frac{1}{2i} (e^{ikt} - e^{-ikt}) = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{1 - e^{i(z+t)}} - \frac{1}{1 - e^{i(z-t)}} \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \frac{e^{i(z+t)} - e^{i(z-t)}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} = \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \end{aligned}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^\infty e^{ilz} B_l = \sum_{l=0}^\infty e^{ilz} \sum_{m=0}^l C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^{l-m} = \sum_{m=0}^\infty \sum_{l=m}^\infty e^{ilz} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^{l-m} =$$

Введём новый индекс суммирования  $k = l - m$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^\infty \sum_{k=0}^\infty e^{i(m+k)z} C_{\gamma/\pi}^k C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^k &= \sum_{m=0}^\infty e^{imz} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m \sum_{k=0}^\infty C_{\gamma/\pi}^k (-1)^k e^{ikz} = \\ &= (1 + e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta} (1 - e^{iz})^{\gamma/\pi} \end{aligned}$$

В нашем случае  $\beta = -1, \gamma = \pi/2$ , поэтому

$$(1 + e^{iz})^{1/2} (1 - e^{iz})^{1/2} = \sqrt{1 - e^{i2z}}$$

Собираем все решение:

$$u_y(x, y) = -Im \, e^{-\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} I(t, z) dt$$

$$u_y(x, y) = -Im \, e^{-\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

Подставляя  $\beta$  и  $\gamma$  получим

$$u_y(x, y) = -Im \frac{2}{\pi} e^{\frac{-iz}{2}} \int_0^\pi \frac{1}{2 \cos t / 2 \sqrt{\tan t / 2}} \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)}) (1 - e^{i(z-t)})} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

$$u_y(x, y) = -Im \frac{e^{\frac{+iz}{2}}}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t} \sqrt{1 - e^{i2z}}}{(1 - e^{i(z+t)}) (1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt$$

Аналогично докажем соотношение для частной производной по  $x$ .

$$u_x(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left( n + \frac{1}{2} \right) e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right]$$

Здесь как раз возникает нужный нам коэффициент  $A_n \left( n + \frac{1}{2} \right)$ , поэтому

$$u_x(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} \cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] dt$$

$$\cos \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] = \operatorname{Re} e^{i \left( n + \frac{1}{2} \right) x}, \text{ поэтому}$$

$$u_x(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{-\left( n + \frac{1}{2} \right) y} e^{i \left( n + \frac{1}{2} \right) x} dt$$

Обозначим  $z = x + iy$

$$u_x(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_{n+1}(t) e^{i \left( n + \frac{1}{2} \right) z} dt$$

Для дальнейших операций нам было бы удобно, чтобы суммирование начиналось от 1, а не 0, поэтому сделаем замену  $m = n + 1$

$$u_x(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{i \left( m - \frac{1}{2} \right) z} dt$$

$$u_x(x, y) = \operatorname{Re} e^{-\frac{iz}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} h_m(t) e^{imz} dt$$

Поменяем местами знаки интегрирования и суммирования

$$u_x(x, y) = \operatorname{Re} e^{-\frac{iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz} dt$$

Введём новое обозначение:

$$I(t, z) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t) e^{imz}$$

$$I(t, z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \sin kt B_{n-k} e^{inz} = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{n=k}^{\infty} e^{inz} B_{n-k}$$

Введём новый индекс  $m = n - k$

$$I(t, z) = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} B_m = \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} B_m$$

Первый ряд можем вычислить по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \sin kt &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikz} \frac{1}{2i} (e^{ikt} - e^{-ikt}) = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{1 - e^{i(z+t)}} - \frac{1}{1 - e^{i(z-t)}} \right) = \\ &= \frac{1}{2i} \frac{e^{i(z+t)} - e^{i(z-t)}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} = \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \end{aligned}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} B_l = \sum_{l=0}^{\infty} e^{ilz} \sum_{m=0}^l C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^{l-m} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} e^{ilz} C_{\gamma/\pi}^{l-m} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^{l-m} =$$

Введём новый индекс суммирования  $k = l - m$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{i(m+k)z} C_{\gamma/\pi}^k C_{-\gamma/\pi-\beta}^m (-1)^k &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{imz} C_{-\gamma/\pi-\beta}^m \sum_{k=0}^{\infty} C_{\gamma/\pi}^k (-1)^k e^{ikz} = \\ &= (1 + e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta} (1 - e^{iz})^{\gamma/\pi} \end{aligned}$$

В нашем случае  $\beta = -1, \gamma = \pi/2$ , поэтому

$$= (1 + e^{iz})^{1/2} (1 - e^{iz})^{1/2} = \sqrt{1 - e^{i2z}}$$

Собираем все решение:

$$u_x(x, y) = \operatorname{Re} e^{\frac{-iz}{2}} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} I(t, z) dt$$

$$u_x(x, y) = \operatorname{Re} e^{\frac{-iz}{2}} \int_0^\pi \frac{2}{\pi} \frac{(2 \cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

Подставляя  $\beta$  и  $\gamma$  получим

$$u_x(x, y) = \operatorname{Re} \frac{2}{\pi} e^{\frac{-iz}{2}} \int_0^\pi \frac{1}{2 \cos t/2 \sqrt{\tan t/2}} \frac{e^{iz} \sin t}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \sqrt{1 - e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

$$u_x(x, y) = \operatorname{Re} \frac{e^{\frac{iz}{2}}}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t} \sqrt{1 - e^{i2z}}}{(1 - e^{i(z+t)})(1 - e^{i(z-t)})} \varphi(t) dt$$

Теорема доказана.

## 8 Заключение

В данной работе исследована задача Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе в смешанной области, состоящей из эллиптической и гиперболической частей. Основные результаты работы можно сформулировать следующим образом:

1. Доказана теорема единственности решения поставленной задачи, основанная на принципе Зарембы-Жиро и анализе поведения решения на границах области.
2. Построена вспомогательная задача для оператора Лапласа в полуполосе, эквивалентная исходной задаче. Для этой вспомогательной задачи:
  - (а) Доказана теорема существования решения в виде равномерно сходящегося ряда
  - (б) Установлена единственность решения с использованием специального интегрального тождества
  - (с) Получены интегральные представления для частных производных решения

Основным результатом работы является теорема 4, дающая явные интегральные представления для первых производных решения через заданное начальное условие  $\varphi(x) \in L_2(0, \pi)$ . Эти представления имеют комплексный вид и выражаются через специальные интегральные операторы.

Полученные результаты развивают теорию краевых задач для уравнений смешанного типа и могут быть применены:

1. В теории дифференциальных уравнений с частными производными
2. При исследовании задач газовой динамики
3. В теории фильтрации и других прикладных задачах

Перспективными направлениями дальнейших исследований могут быть:

1. Обобщение результатов на случай нелинейных уравнений
2. Исследование задач с более сложными граничными условиями
3. Развитие численных методов решения на основе полученных аналитических представлений



## Список литературы

- [1] *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.:Наука, 1981. – 448 с.
- [2] *Моисеев Е.И., Моисеев Т.Е., Вафадорова Г.О.* Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51 №8. С. 1070-1075.
- [3] *Моисеев Е.И.* О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23 №1. С. 177-189.
- [4] *Капустин Н.Ю., Васильченко Д.Д.* Краевая задача для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями в полуполосе // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60 №12. С. 1713-1718.
- [5] *Моисеев Т.Е.* Об интегральном представлении решения уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47 №10. С. 1446-1451.