Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра общей математики

Ковч Николай Сергеевич

Корректная реализация алгоритма регуляризующего разложения для рациональных матриц на языке MATLAB

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Икрамов Х. Д.

Москва, 2024

Конгруэнтные преобразования

Рассматриваются квадратные матрицы порядка n над полями $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Q}(i) = \{z \mid z = p + i \cdot q, \text{ где } p, q \in \mathbb{Q}\}$ (поле рациональных гауссовых чисел).
Существует два типа конгруэнтных преобразований:

1. Т-конгруэнции (для матриц над полем $\mathbb{Q}$)

$$A \mapsto S^T AS,$$

2. *-конгруэнции (для матриц над полем $\mathbb{Q}(i)$)

$$A \mapsto S^* AS.$$

В этих формулах S – произвольная невырожденная матрица данного порядка n.

Конгруэнтные матрицы

Две произвольные квадратные матрицы A и B порядка n называются конгруэнтными , если существует невырожденная матрица S порядка n, такая что

$$A = S^T BS, \; (A = S^* BS).$$

Как проверить две матрицы на конгруэнтность?

Невырожденный случай

Матрицы A и B невырожденные и их элементы суть рациональные числа.

Проверка конгруэнтности матриц A и B сводится к проверке подобия коквадратов данных матриц C_A и C_B:

$$C_A = A^{-T}A, \quad C_B = B^{-T}B.$$

Регуляризующее разложение

Пусть P и Q – квадратные матрицы. Введем следующие обозначения:

$$P \oplus Q := \left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right],$$

$$P^{[k]} := P \oplus \cdots \oplus P \ (k \text{ раз}).$$

Статья «A regularization algorithm for matrices of bilinear and sesquilinear forms» Р. Хорн и В. Сергейчук (далее [1]):

$$A_R \oplus M, \quad M = J_1^{[m_1 - m_2]} \oplus J_2^{[m_2 - m_3]} \oplus \cdots \oplus J_{q-1}^{[m_{q-1} - m_q]} \oplus J_q^{[m_q]}.$$

Здесь A_R – невырожденная матрица, целые числа $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_q > 0$.

Вырожденный случай

Матрицы A и B вырожденные и их элементы суть рациональные числа.

1. Построить регуляризующие разложения для матриц A и B:

$$A_R \oplus M, \quad B_R \oplus N.$$

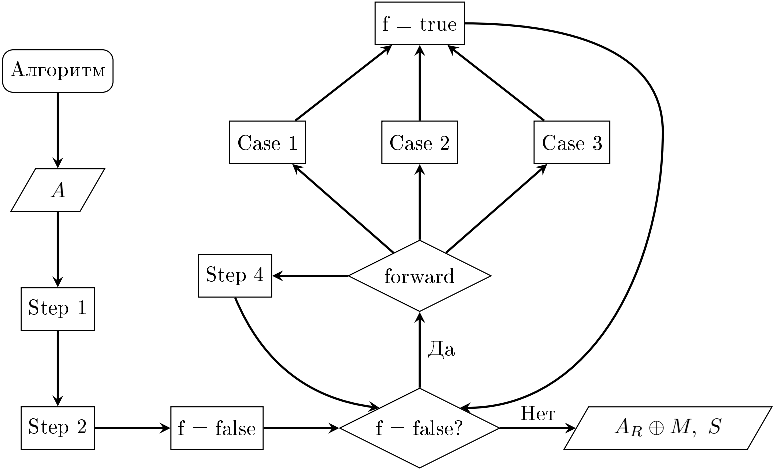
2. Если $M \neq N$, то A и B не конгруэнтны.
3. Если $M = N$, то для конгруэнтности матриц A и B необходимо и достаточно подобия коквадратов A_R и B_R.

Постановка задачи

Требовалось:

1. Изучить статью [1].
2. Проверить предложенный авторами алгоритм на корректность.
3. Реализовать данный алгоритм на языке MATLAB.
4. Привести численные результаты работы алгоритма

Алгоритм



$$A \mapsto S^T A S = A_R \oplus M$$

Недочеты в статье [1]

$$\begin{bmatrix} A_{(3)} & B'' & 0 & 0 & 0 & SP_1 & 0 \\ 0 & 0_{m_6} & [I_{m_6}\ 0] & 0 & 0 & SP_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{m_5} & B_3' & 0 & SP_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_{m_4} & [I_{m_4}\ 0] & SP_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{m_3} & [I_{m_3}\ 0] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{m_2} & [I_{m_2}\ 0] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{m_1} \end{bmatrix}$$

Появление блоков SP_k не предусмотрено авторами статьи [1].

Полученные результаты

1. Найдены и устранены недочеты, допущенные авторами при описании алгоритма.
2. Реализован корректный алгоритм на языке MATLAB.

Пример для $\mathbb{Q}$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus J_2 \oplus J_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 8 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 8 & -9 & 2 & -4 \\ -7 & 0 & -8 & 7 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -4 & 3 & -1 \\ -6 & -1 & -5 & 6 & -1 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 32 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Пример для $\mathbb{Q}(i)$

$$X = \begin{bmatrix} 2+i & 3 \\ -i & 2 \end{bmatrix} \oplus J_4$$

$$A = \begin{bmatrix} 4-i & 3-4i & 5+3i & 3 & 4i & -5-3i \\ 1-2i & 2-i & 6i & -1+2i & -5-5i & 3+3i \\ -2 & -3+i & 5+7i & -3+7i & -10+6i & 5-5i \\ -4-i & 2-2i & 7+4i & 2+5i & -9+2i & 3-2i \\ -6+6i & -2-5i & 9-8i & 6-3i & 5+6i & -7+3i \\ 4 & 2i & -8 & -4-3i & 1-5i & 3 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{cc|cccc} 11+21i/2 & -23-i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20+5i & 15+20i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$