Определение. *Оператор A действующий из преднормированного пространства E в преднормированное пространство F называется ограничным, если $\exists C > 0 : \ \forall x \in E \Rightarrow \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E$*

Определение. *Оператор A действующий из преднормированного пространства E в преднормированное пространство F называется непрерывным в точке $x_0 \in E$, если $\forall$ последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$, сходящейся к некоторому x_0 следует, что $Ax_n \to Ax_0$ при $n \to \infty$ по норме.*

Теорема. *Следующие свойства оператора $T : E \to F$ между преднормированными пространствами эквиваленты:*

1. *оператор T ограничен;*
2. *оператор T непрерывен в нуле;*
3. *оператор T непрерывен;*
4. *оператор T равномерно непрерывен;*

Доказательство.

Докажем, что из $1 \Rightarrow 4$. $\forall \varepsilon > 0$ выберем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$, где C - норма оператора. Тогда $\forall x, y \in E$ из неравенства $d(x, y) = \|x - y\| < \delta$ следует, что $d(T(x), T(y)) = \|T(x) - T(y)\| < \varepsilon$.

$4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ очевидно.

$2 \Rightarrow 1$. Отображение Т предметрических пространств непрерывно в $0 \in E$ и $T(0) = 0 \in F$, зафиксируем $\varepsilon = 1$, и выберем δ такое, что из неравенства $\|x'\| < \delta$ будет следовать $\|T(x')\| < \varepsilon$. Если $\|x\| > 0$, то положим $x' = \dfrac{\delta x}{2\|x\|}$, тогда $\|x'\| < \delta$, откуда следует, что $\|T(x)\| < \dfrac{2}{\delta}\|x\|$. Если же $\|x\| = 0$, то $\forall t > 0$ выполнено неравнество $\|tx\| < \delta$, следовательно $t\|T(x)\| = \|T(tx)\| < 1$, а значит, $\|T(x)\| = 0$. Таким образом $\forall x \in E$ выполнено $\|T(x)\| < A\|x\|$, где $A = \dfrac{2}{\delta}$, следовательно оператор ограничен. Теорема доказана.