Интегральное представление решения уравнения Лапласа

Ранее была рассмотрена задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{0.1}$$

В полуполосе $D = \{(x, y)|0 < x < \pi, 0 < y\}$
В классе функций $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$
с граничными условиями

$$u(0, y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0 \tag{0.2}$$

$$\lim_{y \to 0+0} \int\limits_0^\pi \left[\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x)\right]^2 dx = 0,\ \varphi(x) \in L_2[0, \pi] \tag{0.3}$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, y \to \infty \tag{0.4}$$

И была доказана теорема:

Теорема 1. *Решение задачи (2.1 - 2.4) существует и единственно, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right], \tag{0.5}$$

где коэффициенты $A_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ *находятся из разложения*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{2} - \arctan 1/k\right] = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\varphi(x) \tag{0.6}$$

Рассмотрим теперь интегральное представление решения этой задачи:

Теорема 2. *Решение задачи (0.1)-(0.4) представимо в следующем виде:*

$$u(x,y) = Im\ \frac{2e^{iz/2}}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{(\sin t/2)^{1-\gamma/\pi} (\cos t/2)^{\gamma/\pi}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \frac{(1-e^{iz})^{\gamma/\pi}}{(1+e^{iz})^{\gamma/\pi+\beta}} \Psi(t)dt \quad (0.7)$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right) \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{2} - \arctan 1/k\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right) \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \arctan 1/k\right] = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\varphi(x)$$

Проинтегрируем это равенство от 0 до x по x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \arctan 1/k\right] = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \int\limits_0^x \varphi(\tau)d\tau = \Psi(x)$$

Система $\left\{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \arctan 1/k\right]\right\}_{n=0}^{\infty}$ обзарует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$ при $k \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Поэтому для коэффициентов A_n справедливо разложение

$$A_n = \int\limits_0^\pi h_{n+1}(t)\Psi(t)dt$$

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^\pi e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right] h_{n+1}(t)\Psi(t)dt$$

Обозначим $z = x + iy$

$$u(x,y) = Im\ \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^\pi e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z} h_{n+1}(t)\Psi(t)dt$$

Заменим индекс $m = n + 1$

$$u(x,y) = Im\ e^{-iz/2} \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_0^\pi e^{imz} h_m(t)\Psi(t)dt$$

$$u(x,y) = Im\ e^{-iz/2}\int\limits_0^{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} e^{imz}h_m(t)\Psi(t)dt$$

Введём новое обозначение:

$$I(t,z) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m(t)e^{imz}$$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin kt B_{n-k}e^{inz} = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\sin kt\sum_{n=k}^{\infty}e^{inz}B_{n-k}$$

Введём новый индекс $m = n - k$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\sin kt\sum_{m=0}^{\infty}e^{i(m+k)z}B_m = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}e^{ikz}\sin kt\sum_{m=0}^{\infty}e^{imz}B_m$$

Первый ряд можем вычислить по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{\infty}e^{ikz}\sin kt = \sum_{k=1}^{\infty}e^{ikz}\frac{1}{2i}\left(e^{ikt} - e^{-ikt}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-e^{i(z+t)}} - \frac{1}{1-e^{i(z-t)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{e^{i(z+t)} - e^{i(z-t)}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} = \frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^{\infty}e^{ilz}B_l = \sum_{l=0}^{\infty}e^{ilz}\sum_{m=0}^{l}C^{l-m}_{\gamma/\pi}C^{m}_{-\gamma/\pi-\beta}(-1)^{l-m} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}e^{ilz}C^{l-m}_{\gamma/\pi}C^{m}_{-\gamma/\pi-\beta}(-1)^{l-m} =$$

Введём новый индекс суммирования $k = l - m$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}e^{i(m+k)z}C^{k}_{\gamma/\pi}C^{m}_{-\gamma/\pi-\beta}(-1)^{k} = \sum_{m=0}^{\infty}e^{imz}C^{m}_{-\gamma/\pi-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}C^{k}_{\gamma/\pi}(-1)^{k}e^{ikz} = (1+e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta}(1-e^{iz})^{\gamma/\pi}$$

Собираем все решение:

$$u(x,y) = Im\ e^{\frac{-iz}{2}}\int\limits_0^{\pi}I(t,z)\Psi(t)dt$$

$$u(x,y) = Im\, e^{\frac{-iz}{2}}\int\limits_0^{\pi}\frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}(1+e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta}(1-e^{iz})^{\gamma/\pi}\Psi(t)dt$$

В нашем случае $\beta = -1,\ \gamma = -2\arctan 1/k$. Оценим сходимость данного ряда:
Сперва рассмотрим следующий множитель

$$\frac{(2\cos t/2)^{\beta}\sin t}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} = \frac{(\cos t/2)^{\gamma/\pi}\sin t}{2\cos t/2 * (\sin t/2)^{\gamma/\pi}} = \frac{(\cos t/2)^{\gamma/\pi}\sin t/2\cos t/2}{\cos t/2 * (\sin t/2)^{\gamma/\pi}} =$$

$$= (\sin t/2)^{1-\gamma/\pi}\,(\cos t/2)^{\gamma/\pi}$$

Рассмотрим показатели этих выражений: $\gamma = -2\arctan 1/k$ $\square$