Доказательство единственности решения задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий I-I и II-II.

Васильченко Д.Д.

1 Задача I-I

Рассмотрим в области $D^+ = \{(x, y) : x \in (0, \pi), y > 0\}$ следующую задачу.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$u(0, y) = 0,\ u(\pi, y) = 0,\ 0 < y < +\infty, \tag{2}$$

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0+0) = \varphi(x),\ \varphi(x) \in L_2(0, \pi), \tag{3}$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0,\ y \to +\infty \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть функция $u(x, y)$ является гармонической в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $P \in \Omega$ и $R > 0$ такие, что шар $\overline{B(P, R)} \subset \Omega$. Тогда справедлива следующая оценка*

$$|\nabla u(P)| \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi R} \max_{z \in \partial B(P,R)} |u(z)|.$$

Доказательство. Производная гармонической функцией сама является гармонической и для гармонических функций справедливо свойство среднего. Применим его к производной функции $u_x(x, y)$ в точке P, для просты положим $P = (0, 0)$.

$$u_x(0, 0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{B(0,R)} u_x(x, y)\,dxdy.$$

Применим теорему Гаусса-Отстроградского для векторного поля $\vec{F} = (u, 0)$, тогда $\nabla \vec{F} = u_x$:

$$\iint\limits_{B(0,R)} u_x dxdy = \oint\limits_{\partial B(0,R)} u \cdot \eta_x ds.$$

Тогда

$$u_x(0, 0) = \frac{1}{\pi R^2} \oint\limits_{\partial B(0,R)} u \cdot \eta_x ds.$$

Теперь оценим интеграл

$$|u_x(0, 0)| \leq \frac{1}{\pi R^2} \oint\limits_{\partial B(0,R)} |u(s)| \cdot |\eta_x(s)| ds \leq \frac{1}{\pi R^2} \oint\limits_{\partial B(0,R)} \max_{z \in \partial B(P,R)} |u(z)| \cdot |\eta_x(s)| ds.$$

Вектор нормали имеет вид $\vec{n} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, элемент длины дуги $ds = R\,d\alpha$.

$$|u_x(0,0)| \le \frac{1}{\pi R^2} \max_{z\in\partial B(P,R)} |u(z)| \int\limits_0^{2\pi} |\cos\alpha| R d\alpha = \frac{4}{\pi R^2} \max_{z\in\partial B(P,R)} |u(z)|.$$

Аналогичную оценку можем получить и для $u_y(0,0)$, тогда оценка для градиента выглядит следующим образом:

$$|\nabla u(0,0)| \le \frac{4\sqrt{2}}{\pi R^2} \max_{z\in\partial B(P,R)} |u(z)|.$$

Теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть $u(x,y)$ - решение задачи (1)-(4), тогда $u_y(x,y) \rightrightarrows 0$ при $y \to \infty$.*
Доказательство. По условию (4)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists y^* > 0 \colon \forall x_0 \in (0,\pi), y_0 > y^* \quad |u(x_0,y_0)| < \varepsilon.$$

Используем теорему 1, сперва выберем шар с центром в точке $P = (x_0, y_0)$ и радиусом $R = \min\{x_0, R - x_0\}$, то есть $B(P,R)$. По теореме 1 $u_y(P) \le \frac{4\sqrt{2}}{\pi R^2} \max_{z\in\partial B(P,R)} |u(z)| < \frac{4\sqrt{2}}{\pi R^2}\varepsilon$. Получаем следующее:

$$\forall \varepsilon^* > 0 \ \exists y^* > 0 \colon \forall x_0 \in (0,\pi) y_0 > y^* \ |u'_y(x_0,y_0)| < \varepsilon^* = \frac{4\sqrt{2}}{\pi R^2}\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Решение задачи (1)-(4) единственно для $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.*

Доказательство. Используем энергетический метод. Пусть $u(x,y)$ - решение однородной задачи (1)-(4) ($\varphi(x) \equiv 0$). Рассмотрим прямоугольник $D_{\varepsilon R} = (0,\pi)\times(\varepsilon, R) \subset D^+$. Справедливо следующее равенство.

$$u\Delta u = \nabla(u\nabla u) - |\nabla u|^2.$$

Воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского для выражения

$$\iint\limits_{D_{\varepsilon R}} u\Delta u dxdy = \iint\limits_{D_{\varepsilon R}} \nabla(u\nabla u) dxdy - \iint\limits_{D_{\varepsilon R}} |\nabla u|^2 dxdy.$$

Получим

$$\iint\limits_{D_{\varepsilon R}} u\Delta u dxdy = \iint\limits_{\partial D_{\varepsilon R}} u\frac{\partial u}{\partial \eta} ds - \iint\limits_{D_{\varepsilon R}} |\nabla u|^2 dxdy.$$

В силу условия (1) получаем

$$\iint\limits_{\partial D_{\varepsilon R}} u\frac{\partial u}{\partial \eta} ds = \iint\limits_{D_{\varepsilon R}} |\nabla u|^2 dxdy.$$

Интеграл по границе вычисляется следующим образом

$$\iint\limits_{\partial D_{\varepsilon R}} u\frac{\partial u}{\partial \eta} ds = -\int\limits_{\varepsilon}^{R} u(0,y)u'_x(0,y)dy + \int\limits_{\varepsilon}^{R} u(\pi,y)u'_x(\pi,y)dy + \int\limits_0^{\pi} u(x,R)u_y(x,R)dx - \int\limits_0^{\pi} u(x,\varepsilon)u'_y(x,\varepsilon)dx.$$

В силу граничных условий (2) первый и второй интеграл обращается в 0. В силу выше доказанной леммы и условия (4) третий интеграл также обращается в 0 при стремлении R к $+\infty$. Рассмотрим последний интеграл

$$\int_0^\pi u(x,\varepsilon)u'_y(x,\varepsilon)dx = \int_0^\pi u(x,\varepsilon)\left[u'_y(x,\varepsilon) - ku'_x(x,\varepsilon)\right]dx + \int_0^\pi ku(x,\varepsilon)u'_x(x,\varepsilon)dx$$

$$= \int_0^\pi u(x,\varepsilon)\left[u'_y(x,\varepsilon) - ku'_x(x,\varepsilon)\right]dx + \frac{k}{2}\int_0^\pi \left(u^2(x,\varepsilon)\right)'_x dx =$$

$$= \int_0^\pi u(x,\varepsilon)\left[u'_y(x,\varepsilon) - ku'_x(x,\varepsilon)\right]dx + \frac{k}{2}\left[u^2(\pi,\varepsilon) - u^2(0,\varepsilon)\right].$$

Устремим $\varepsilon \to 0+0$, тогда интграл обращается в 0 в силу условия (3) и получаем итоговое выражение

$$\iint_{D^+} |\nabla u|^2 dxdy = \frac{k}{2}\left[u^2(\pi,\varepsilon) - u^2(0,\varepsilon)\right],$$

в силу граничных условий (2) получаем

$$\iint_{D^+} |\nabla u|^2 dxdy = 0.$$

Значит

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, (x,y) \in D^+,$$

т.к. $u(0,y) = 0, \forall y > 0$ получаем, что $u(x,y) \equiv 0$ в D^+. Теорема доказана.

2 Задача II-II

Рассмотрим в области $D^+ = \{(x,y) : x \in (0,\pi), y > 0\}$ следующую задачу.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \tag{5}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0,\ 0 < y < +\infty, \tag{6}$$

$$\frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial y}(x,0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0+0) = \varphi(x),\ \varphi(x) \in L_2(0,\pi), \tag{7}$$

$$u(x,y) \rightrightarrows 0,\ y \to +\infty \tag{8}$$

Лемма 2. *Пусть $u(x,y)$ - решение однородной задачи (1)-(4), тогда* $u(0,0) = u(\pi,0)$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского для векторного поля $\vec{F} = \nabla u$. Тогда $\mathrm{div}\vec{F} = \Delta u$. Рассмотрим прямоугольник $D_R = (0,\pi)\times(0,R) \subset D^+$.

$$\iint_{D_R} \Delta u dx dy = \iint\limits_{\partial D_R} \nabla u \cdot \vec{n} ds = \oint\limits_{\partial D_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Следовательно в силу (5)

$$\oint\limits_{\partial D_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

Рассмотрим этот интеграл подробнее

$$\oint\limits_{\partial D_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds = -\int\limits_0^\pi \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)dx + \int\limits_0^\pi \frac{\partial u}{\partial y}(x,R)dx + \int\limits_0^R \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y)dy - \int\limits_0^R \frac{\partial u}{\partial x}(0,y)dy$$

В силу условий (6) третий и четвертый интегралы обнуляются, при стремлении $R \to +\infty$ в силу леммы 1 второй интеграл стремится к 0. Получаем (аналогично теореме 2)

$$0 = \oint\limits_{\partial D_R} \frac{\partial u}{\partial n} ds = -\int\limits_0^\pi \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)dx = -k\int\limits_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x}(x,0)dx = u(0,0) - u(\pi,0).$$

Лемма доказана.

Теорема 3. *Решение задачи (5)-(8) единственно для* $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2. Используем энергетический метод. Пусть $u(x,y)$ - решение однородной задачи (5)-(8) ($\varphi(x) \equiv 0$). Рассмотрим прямоугольник $D_{\varepsilon R} = (0,\pi)\times(\varepsilon,R) \subset D^+$. Справедливо следующее равенство.

$$u\Delta u = \nabla(u\nabla u) - |\nabla u|^2.$$

Воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского для выражения

$$\iint\limits_{D_{\varepsilon R}} u\Delta u dx dy = \iint\limits_{D_{\varepsilon R}} \nabla(u\nabla u) dx dy - \iint\limits_{D_{\varepsilon R}} |\nabla u|^2 dx dy.$$

Получим

$$\iint\limits_{D_{\varepsilon R}} u\Delta u dx dy = \iint\limits_{\partial D_{\varepsilon R}} u\frac{\partial u}{\partial \eta} ds - \iint\limits_{D_{\varepsilon R}} |\nabla u|^2 dx dy.$$

В силу условия (1) получаем

$$\iint\limits_{\partial D_{\varepsilon R}} u\frac{\partial u}{\partial \eta} ds = \iint\limits_{D_{\varepsilon R}} |\nabla u|^2 dx dy.$$

Интеграл по границе вычисляется следующим образом

$$\iint\limits_{\partial D_{\varepsilon R}} u\frac{\partial u}{\partial \eta} ds = -\int\limits_\varepsilon^R u(0,y)u'_x(0,y)dy + \int\limits_\varepsilon^R u(\pi,y)u'_x(\pi,y)dy + \int\limits_0^\pi u(x,R)u_y(x,R)dx - \int\limits_0^\pi u(x,\varepsilon)u'_y(x,\varepsilon)dx.$$

В силу граничных условий (6) первый и второй интеграл обращается в 0. В силу леммы 1 и условия (8) третий интеграл также обращается в 0 при стремлении R к $+\infty$. Рассмотрим последний интеграл

$$\int_0^\pi u(x,\varepsilon)u'_y(x,\varepsilon)dx = \int_0^\pi u(x,\varepsilon)\left[u'_y(x,\varepsilon) - ku'_x(x,\varepsilon)\right]dx + \int_0^\pi ku(x,\varepsilon)u'_x(x,\varepsilon)dx$$

$$= \int_0^\pi u(x,\varepsilon)\left[u'_y(x,\varepsilon) - ku'_x(x,\varepsilon)\right]dx + \frac{k}{2}\int_0^\pi \left(u^2(x,\varepsilon)\right)'_x dx =$$

$$= \int_0^\pi u(x,\varepsilon)\left[u'_y(x,\varepsilon) - ku'_x(x,\varepsilon)\right]dx + \frac{k}{2}\left[u^2(\pi,\varepsilon) - u^2(0,\varepsilon)\right].$$

Устремим $\varepsilon \to 0+0$, тогда интграл обращается в 0 в силу условия (3) и получаем итоговое выражение

$$\iint\limits_{D^+} |\nabla u|^2 dxdy = \frac{k}{2}\left[u^2(\pi, 0+0) - u^2(0, 0+0)\right],$$

в силу леммы 2 получаем

$$\iint\limits_{D^+} |\nabla u|^2 dxdy = 0.$$

Значит

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, (x,y) \in D^+,$$

т.к. $u(x,y) \rightrightarrows 0$ при $y \to +\infty$ получаем, что $u(x,y) \equiv 0$ в D^+. Теорема доказана.