Методы оптимизации

1 Теорема Вейерштрасса (метрический вариант).

Задача: Минимизировать функционал $J(u)$ по множеству $U \subset X$, X – метрическое.
$J_* = \inf\limits_{u \in U} J(u)$, $J(u_*) = J_*$, $U_* = \{u \in U | J(u) = J_*\}$

Определение. *Функционал $J(u)$ на U называется полунепревным снизу (сверху), если* $\forall u_n \subset U: \ \rho(u_n, u_0) \to 0 \Rightarrow J(u_0) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} J(u_n) \ \left(J(u_0) \geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} J(u_n)\right)$

Определение. *Последовательность $\{u_n\} \subset U$ называется минимизирующей, если $\exists J(u_n) \to J_*$*

Определение. *Последовательность $\{u_n\} \subset U$ сходится к множеству $K \subset U$, если $\inf\limits_{u \in K} \rho(u_n, u) \to 0$*

Теорема. *(Теорема Вейерштрасса метрический вариант)*
Пусть U - компкатное множество, $J(u)$ - полунепрерывный снизу, тогда

1. *$J_* > -\infty$*
2. *U_* - непустое компактное множество*
3. *Любая минимизирующая последовательность $\{u_n\}$ сходится к U_**

2 Слабый вариант теоремы Вейерштрасса. Применение к задаче минимазции квадратичного функционала.

H - гильбертово пространство.

Определение. *Функционал $J(u)$ на U называется слабо полунепревным снизу (сверху), если* $\forall u_n \subset U: \ u_n \rightharpoonup u_0 \Rightarrow J(u_0) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} J(u_n) \ \left(J(u_0) \geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} J(u_n)\right)$

Замечание. *Из слабой полунепрервыности следует сильная полунепрерывность*

Определение. *Последовательность $\{u_n\} \subset H$ слабо сходится к множеству $K \subset H$, если любая слабая предельная точка $\{u_n\}$ принадлежит K.*

Определение. *Множество $U \in H$ называется выпуклым, если $\forall u, v \in U, \ \forall \alpha \in [0, 1] : \alpha u + (1 - \alpha)v \in U$.*

Определение. *Функционал $J(u)$ называется выпуклым на выпуклом U, если $\forall u, v \in U, \ \forall \alpha \in [0, 1]: \ J(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v)$.*

Лемма. *Пусть U - выпуклое замкнутое ограниченное множество, тогда U - слабокомпактное множество.*

Лемма. *Пусть $J(U)$ полунепрерывный снизу и выпуклый на U, тогда он слабо полунепрерывный снизу.*

Теорема. *(Слабый вариант теоремы Вейерштрасса)*
Пусть $U \subset X$ - замкнутое ограниченное выпуклое множество, $J(u)$ - выпуклый и полунепрерывный на U, тогда

1. *$J_* > -\infty$*
2. *U_* - непустое замкнутое ограниченное выпуклое множество*
3. *Любая минимизирующая последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится к U_**

Квадратичный функционал

Функионал $J(u) = \|Au - f\|_F^2$, $A: H \to F$ - линейный ограниченный оператор, $f \in F$. Исследуем его свойства:

1. $J(u)$ непрерывный в силу непрерывности A и непрерывности нормы.
2. Проверим выпуклость $J(u)$: $J(\alpha u + (1-\alpha)v) = \|A(\alpha u + (1-\alpha)v) - f\|^2 = \|\alpha(Au - f) + (1-\alpha)(Av - f)\|^2 \leqslant$ $\leqslant (\|\alpha(Au - f)\| + \|(1-\alpha)(Av - f)\|)^2 \leqslant \{x^2 \text{выпукла}\} \leqslant |\alpha| \|(Au - f)\|^2 + |1 - \alpha| \|Av - f\|^2$
3. Полунепрерывный снизу
4. В общем случае не является слабо полунепрерывным т.к. если $A = I, f = 0$, то на последовательности ортонормированных векторов слабой сходимости не будет.
5. Слабо полунепрерывен снизу, т.к. полунепрерывен снизу и выпуклый.

3 Существование решения задач минимизации терминального и интегрального квадратичных функционалов на решениях линейной системы ОДУ

Рассматриваем задачу

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t) + y(t), \ t \in (0,T) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$u(t)$ - функция управления
Размерности: $x(t) : n \times 1,\ D(t) : n \times n,\ B(t) : n \times r,\ u(t) : r \times 1,\ y(t) : n \times 1$
Базово предполагаем, что $D(t), B(t) \in L_\infty(0,T);\ u \in L_2(0,T);\ x_0 \in \mathbb{R}^n$
Надо найти пару $x(t) \in AC[0,T], u(t) \in L_2(0,T)$. AC - абослютная непревность: 1) п.в. на $[0,T]$ существует производная; 2) верна формула Ньютона-Лейбница

Определение. *Решением Задачи Коши по Каратеодори называется функция $x(t) \in AC[0,1]$ такая, что уравнение выполняется п.в., а граничное условие выполняется в классическом смысле.*

Определение. *Альтернативным решением называется функция $x(t) \in AC[0,1]$ такая, что выполняется интегральное соотношение: $x(t) = x_0 + \int\limits_0^t [D(t)x(t) + B(t)u(t) + y(t)]\, dt,\ \forall t \in [0,T]$*

Теорема. *Пусть $D(t), B(t) \in L_\infty(0,T),\ u, y(t) \in L_2(0,T)$ тогда существует и единственно решение Задачи Коши.*

Теорема. *(о существовании решения задачи ОУ линейной системы)*
Пусть $D(t), B(t) \in L_\infty(0,T),\ U$ - слабый компакт, тогда

1. $J_* > -\infty$
2. $U_* \neq \varnothing$
3. *Любая минимизирующая последовательность $\{u_n\}$ слабо в $L_2(0,T)$ сходится к U_**

4 Существование реения задачи об оптимальном нагреве стержня

Рассматривается задача:

$$\begin{cases} y_t = y_{xx}, x \in (0,l), t \in (0,t) \\ y_x|_{x=0} = 0 \\ y_x + y|_{x=l} = u(t) \\ y|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Решение: $y = y(t;x)$. Рассмотрим функционал $J(u) = \int\limits_0^l (y(T,x,u) - f(x))^2\, dx$. Значение именно в $t = T$, то есть в конце процессса. Минимизируем этот функционал. По сути $y(T,x,u) = Au$, тогда $J(u) = \|Au - f\|^2_{L_2(0,l)}$.
Пусть $y(t,x)$ - дважды гладкая функция, а U - замкнутое ограниченное выпуклое множество.

Теорема. *(о существовании решения обратной задачи)*
Пусть U - слабый компакт в $L_2(0,T)$, тогда

1. $J_* > \infty$
2. $U_* \neq \varnothing$
3. *Любая минимизирующая последовательность слабо сходится к U_* в $L_2(0,T)$.*

5 Дифференцирование по Фреше. Применение к квадратичному функционалу

Пусть $F : X \to Y,\ X, Y$ - банаховы.

Определение. *Оператор $A : X \to Y$ называется производной по Фреше оператора F в т. $x \in X$, если $F(x+h) - F(x) = Ah + \overline{o}(\|h\|_X)$ при $\|h\|_X \to 0$*

Лемма. *Производная по Фреше определяется единственным образом*

Определение. *Оператор F'' называется второй производной по Фреше от оператора F в т. $x \in X$, если $F'(x+h) - F'(x) = F''h + \overline{o}(\|h\|_X)$ при $\|h\|_x \to 0$.*

Определение. *Оператор F дифференицируем на множестве $U \subset X$, если он определён на множестве $M : U \subset M$ и $\exists F'(u), \forall u \in U$.*

Градиент и Гессиан

Рассматриваем Гильбертово пространство H

Определение. *Функционал F' называется градиентом функционала F, в т. $x \in H$, если $F(x+h) - F(x) = (F'(x), h) + \overline{o}(\|x\|_H)$*

Определение. *Функционал $F''(x)$ называется гессианом функционала F, в т. $x \in H$, если $F'(x+h) - F'(x) = F''(x)h + \overline{o}(\|x\|_H)$*

Найдем градиент и гессиан функционала $J(u) = \|Au - f\|_F^2$:
$J(u+h) - J(u) = \|A(u+h) - f\|^2 - \|Au - f\|^2 = \|(Au - f) + Ah\|^2 - \|Au - f\|^2 = \|Au - f\|^2 + \|Ah\|^2 + 2(Au - f, Ah) - \|Au - f\|^2 = (Au - f, Ah) + \|Ah\|^2$. Покажем, что $\|Ah\|^2 \leqslant \|A\|^2\|h\|^2 = \underline{O}(\|h\|^2) = \overline{o}(\|h\|)$.
В итоге $J'(u) = 2A^*(Au - f)$.
$J'(u+h) - J'(u) = 2A^*Ah \Rightarrow J''(u) = 2A^*A$.

6 Необходимое условие локального минимума

Теорема. *Пусть U - выпуклое множество в H, $u_* \in U$ -локальный минимум $J(u)$ на U и существует $J'(u_*)$ $\Rightarrow (J'(u_*), u - u_*) \geqslant 0,\ \forall u \in U$.*

Теорема. *Пусть U - выпуклое множество в H, $u_* \in intU_*$ и существует $J'(u_*) \Rightarrow (J'(u_*), u - u_*) = 0,\ \forall u \in U$.*

Пример. $J(u) = u$, $u \in [1,2] \subset \mathbb{R}$. *Понятно, что* $u_* = 1$, $J_* = 1$, $J'(u) = I, \Rightarrow (J'(u_*), u - u_*) = (1, u-1) \geqslant 0$ *т.к.* $u \in [1,2]$.

Пример. *Сложный и непонятный*

7 Градиент терминального граничного функционала

Рассматриваем задачу

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t),\ t \in (0,T) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Рассматриваем оператор $Au(t) = x(t)$ - сопоставляет решение функции управления. Функционал $J(u) = \|Au - f\|^2$, $J'(u) = 2A^*(Au - f)$. Необходимо найти A^*, т.е. $(Au, v) = (u, A^*v)$
Домножим уравнение скалярно на $\psi(t)$ и проинтегрируем от 0 до T

$$\int_0^T (\psi(t), \dot{x}(t))dt = \int_0^T (\psi(t), D(t)x(t) + B(t)u(t))dt$$

$$(\psi(t), x(t))|_0^T - \int_0^T (\dot{\psi}(t), x(t))dt = \int_0^T (\psi(t), Au(t))dt$$

$$(\psi(T), x(T)) - \int_0^T (\dot{\psi}(t), x(t))dt = \int_0^T (\psi(t), Au(t))dt, \text{ Потребуем } v(t) = \psi(t)$$

$$(v, Au) = \int_0^T (\dot{\psi}(t), x(t))dt + \int_0^T (\psi(t), D(t)x(t) + B(t)u(t))dt$$

$$(v, Au) = \int_0^T (\dot{\psi}(t), x(t))dt + \int_0^T \left[(D^T\psi(t), x(t)) + (B^T\psi(t), u(t))\right] dt$$

$$(v, Au) = \int_0^T (\dot{\psi}(t) + D^T\psi(t), x(t))dt + \int_0^T (B^T(t)\psi(t), u(t))dt, \text{ Потребуем } \dot{\psi}(t) + D^T\psi(t) = 0$$

Тогда $(v, Au) = \int_0^T (B^T(t)\psi(t), u(t))dt \Rightarrow (A^*v)(t) = B^T(t)\psi(t)$. $\psi(t)$ определяется из двойственной задачи.

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -D^T(t)\psi(t) \\ \psi(t) = v(t) \end{cases}$$

8 Градиент интегрального квадратичного функционала

Рассматриваем задачу

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t),\ t \in (0,T) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$J_I(u) = \int_0^T |x(t;u) - f(x)|^2 dt$, $Au = x(t;u)$, $J_I(u) = \|Au - f\|_{L_2}^2$, $J_I' = 2A^*(Au - f)$. Надо искать A^*
Нам подойдёт $A^*v = B^T\psi(t;v)$, где

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -D^T(t)\psi(t) - v(t),\ t \in (0,T) \\ \psi(T) = 0 \end{cases}$$

Проверим это: $(Au, c)_{L_2} = \int\limits_0^T x(t;u)v(t)dt = \int\limits_0^T x(t;u)\left[-\dot{\psi}(t) - D^T(t)\psi(t)\right]dt = -\int\limits_0^T x(t;u)\dot{\psi}(t)dt - \int\limits_0^T x(t;u)D^T(t)\psi(t)dt =$
$- x(t;u)\psi(t)|_{t=0}^{t=T} + \int\limits_0^T \dot{x}(t;u)\psi(t)dt - \int\limits_0^T x(t;u)D^T(t)\psi(t)dt = \int\limits_0^T [D(t)x(t) + B(t)u(t)]\psi(t)dt - \int\limits_0^T x(t;u)D^T(t)\psi(t)dt =$
$= \int\limits_0^T B(t)\psi(t)u(t)dt = (u(t), B^T\psi)_{L_2}$

9 Градиент функционала в задаче о нагреве стержня

Рассматриваем задачу

$$\begin{cases} y_t = y_{xx}, x \in (0,l), t \in (0,t) \\ y_x|_{x=0} = 0 \\ y_x + y|_{x=l} = u(t) \\ y|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим Функционал $J(u) = \int\limits_0^l |y(T,x;u) - f(x)|^2 dx$, $Au = y(T,x;u)$ тогда $J(u) = \|Au - f\|_{L_2}^2$, $J'(u) = 2A^*(Au - f)$. Нужно найти $A*$.
Умножим уравнение на $\psi(t,x)$ и проинтегрируем по $Q = (0,T) \times (0,l)$.
$\iint\limits_Q [y_{xx} - y_t]\psi dtdx = \int\limits_0^T \left[\int\limits_0^l y_{xx}\psi dx\right]dt - \int\limits_0^l \left[\int\limits_0^T y_t\psi dt\right]dx = \{\text{По частям}\} = \int\limits_0^T \left[y_x\psi|_{x=0}^{x=l} - y\psi_x|_{x=0}^{x=l} + \int\limits_0^l y\psi_{xx}dx\right]dt - \int\limits_0^l \left[y\psi|_{t=0}^{t=T} - \int\limits_0^T y\psi_t dt\right]dx = \int\limits_0^T y_x\psi|_{x=0}^{x=l}dt - \int\limits_0^T y\psi_x|_{x=0}^{x=l}dt - \int\limits_0^l y\psi|_{t=0}^{t=T}dx + \iint\limits_Q y(\psi_{xx} + \psi_t)dtdx =$
$= \{$Требуем $\psi_{xx} + \psi_t = 0$ в Q и $\psi_x|_{x=0} = 0$, много что обнуляется из-за граничных условий$\} =$
$= \int\limits_0^T [y_x(t,l)\psi(t,l)]dt - \int\limits_0^T y(t,l)\psi_x(t,l)dt - \int\limits_0^l [y(T,x)\psi(T,x)]dx = \int\limits_0^T [u(t) - y(t,l)]\psi(t,l)dt - \int\limits_0^T y(t,l)\psi_x(t,l)dt - (Au,v)_{L_2} =$
$= (u, \psi|_{x=l})_{L_2} - \int\limits_0^T [\psi(t,l) + \psi_x(t,l)]y(t,l)dt - (Au,v)_{L_2} = \{$Потребовали, чтобы $\psi(T,x) = v(x)$ и $(\psi_x + \psi)|_{x=l} = 0\} =$
$= (u, \psi|_{x=l})_{L_2} - (Au,v)_{L_2} = 0$
Получили, что $A^*v = \psi|_{x=l}$, где

$$\begin{cases} \psi_t = -\psi_{xx}, x \in (0,l), t \in (0,t) \\ \psi_x|_{x=0} = 0 \\ \psi_x + \psi|_{x=l} = 0 \\ \psi|_{t=T} = v \end{cases}$$

10 Выпуклые функции и функционалы. Теоремы о локальном минимимуме, о множестве Лебега, о касательной плоскости. Критерий оптимальности. Примеры

Определение. *Множество $U \in H$ называется выпуклым, если $\forall u,v \in U,\ \forall\alpha \in [0,1] : \alpha u + (1-\alpha)v \in U$.*

Определение. *Функционал $J(u)$ называется строго выпуклым на выпуклом U, если $\forall u,v \in U,\ \forall\alpha \in [0,1]$: $J(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v)$.*

Определение. *Функционал $J(u)$ называется сильно выпуклым на выпуклом U с константой $æ > 0$, если $\forall u,v \in U,\ \forall\alpha \in [0,1]:\ J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) - \frac{æ}{2}\alpha(1-\alpha)\|u-v\|^2$.*

Пример. *Функционал $J(u) = \|Au - f\|$ является выпуклым.*

Свойства строгой выпуклости:

1. $J_1(u), J_2(u)$ - строго выпуклы на U и $\alpha_1, \alpha_2 > 0 \Rightarrow \alpha_1 J_1(u) + \alpha_2 J_2(u)$ строго выпулый на U.
2. $J_1(u)$ - строго выпуклый, $J_2(u)$ - выпуклый на $U \Rightarrow J_1(u) + J_2(u)$ - строго выпуклый на U.

Теорема. *(о локальном минимуме)*
$J(u)$ - выпуклый на $U \Rightarrow$ точка локального минимума - точка глобального минимума.

Теорема. *(о множестве Лебега)*
$J(u)$ - выпуклый на $U \Rightarrow$ множество $L_c = \{u \in U | J(u) \leqslant c\}$ - замкнуто $\forall c \in \mathbb{R}$.

Обратное неверно т.к. $J(u) = u^3,\ u \in \mathbb{R},\ L_c = (-\infty, \sqrt[3]{c}]$

Лемма. *Пусть U - выпуклое, $J(u)$ - выпуклый на U, тогда U_* - замкнуто.*

Лемма. *Пусть U - выпуклое, $J(u)$ - строго выпуклый на U, тогда U_* содержит одну точку или $U_* = \varnothing$.*

Пример. *$U_* = \varnothing$:*

1. $J(u) = u,\ u \in \mathbb{R} \Rightarrow J_* = -\infty, U_* = \varnothing$.

2. $J(u) = e^{-u},\ u \in \mathbb{R} \Rightarrow J_* = 0, U_* = \varnothing$.

Теорема. *(о касательной плоскости)*
Пусть U - выпуклое, $J(u)$ сильно выпуклый на U с $\text{æ} > 0$ и в точке v $\exists J'(v) \Rightarrow J(u) \geqslant J(v) + (J'(v), u - v) + \frac{\text{æ}}{2}\|u - v\|^2, \forall u \in H$.

Теорема. *(критерий оптимальности)*
Пусть U - выпуклое, $J(u)$ выпуклый на U и $\exists J'(u_*) \Rightarrow u_* \in U_* \Leftrightarrow$ выполнено $(J'(u_*), u - u_*) \geqslant 0, \forall u \in U$.

Пример. *Решить уравнение $Au = f$, $A \in L(H \to H), A = A^*$. Эквивалентна задаче минизации функционала $J(u) = (Au, u) - 2(u, f) \to min$. $J'(u_*) = 0,\ (A + A^*)u_* = 2f \Rightarrow Au_* = f$*

11 Критерий выпуклости функций и функционалов. Выпуклость квадртичного функционала

Теорема. *(критерий выпуклости)*
Пусть U - выпуклое, $J(u) \in C^1(U)$, тогда следующие утверждения эквивалентны

1. *$J(u)$ выпуклый*

2. *$J(u) > J(v) + (J'(v), u - v), \forall u, v \in U$*

3. *$(J'(u) - J'(v), u - v) \geqslant 0, \forall u, v \in U$*

Выпуклость квадратичного доказана в первом билете.

12 Сильно выпуклые функции и функционалы, их свойства. Критерии сильной выпуклости функций и функционалов

Определение. *Функционал $J(u)$ называется сильно выпуклым на выпуклом U с константой $\text{æ} > 0$, если $\forall u, v \in U,\ \forall \alpha \in [0, 1]:\ J(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v) - \frac{\text{æ}}{2}\alpha(1 - \alpha)\|u - v\|^2$.*

Свойства сильно выпуклости:

1. $J_1(u), J_2(u)$ - сильно выпуклы на U и $\alpha_1, \alpha_2 > 0 \Rightarrow \alpha_1 J_1(u) + \alpha_2 J_2(u)$ сильно выпулый на U.

2. $J_1(u)$ - сильно выпуклый, $J_2(u)$ - выпуклый на $U \Rightarrow J_1(u) + J_2(u)$ - сильно выпуклый на U.

Теорема. *(критерий сильной выпуклости)*
Пусть U - выпукло, $J \in C^1(U)$, тогда $J(u)$ сильно выпуклый на U с константой $\text{æ} > 0 \Leftrightarrow (J'(u) - J'(v), u - v) \geqslant \text{æ}\|u - v\|^2, \forall u, v \in U$.

Теорема. *(второй критерий сильной выпуклости)*
Пусть U - выпукло, $J \in C^2(U)$, $intU \neq \varnothing$, тогда $J(u)$ сильно выпуклый на U с константой $\text{æ} > 0 \Leftrightarrow (J''(u)h, h) \geqslant \text{æ}\|h\|, \forall u \in U, h \in H$.

Пример. $J(u) = \|u\|^2$, $J'(u) = 2u$, $J''(u) = 2I$, $(J''(u)h, h) = 2\|h\|^2 \geqslant \text{æ}\|h\|^2 \Rightarrow \text{æ} = 2$

Пример. $J(u) = x^2 + 2xy + y^2 + z^2$, $u \in \mathbb{R}^3$.

$$J''(u) = \begin{pmatrix} 2, 2, 0 \\ 2, 2, 0 \\ 0, 0, 2 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$. По критерию положительно опредленных матриц, все с.з. неотрицательны, значит матрица положительна определена: $(J''(u)h, h) \geqslant 0$. Но $J(u)$ не является сильно выпуклым т.к. при λ_1 значение ровно 0.

13 Теорема Вейерштрасса для сильно выпуклых функционалов

Теорема. *Пусть U - выпуклое, замкнутое, $J(u)$ сильно выпуклый на U с $\text{æ} > 0$ и полунепрерывный снизу на U, тогда*

1. *$J_* > -\infty$*

2. *$U_* = \{u_*\} \neq \varnothing$*

3. *$\forall u \in U:\ \frac{\text{æ}}{2}\|u - u_*\|^2 \leqslant J(u) - J(u_*)$*