Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра общей математики

Васильченко Дмитрий Дмитриевич

# О задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с условием Франкля на линии склеивания типа.

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Капустин Н. Ю.

Москва, 2025

# Постановка задачи

Рассматривается задача Трикоми для уравнения Лавертьева-Бицадзе

$$(sgn(y))\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0 \tag{1}$$

в области $D = D^+ \cup D^-$, где
$D^+ = \{(x,y):\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < +\infty\}$,
$D^- = \{(x,y):\ -y < x < y+\pi,\ -\pi/2 < y < 0\}$ в классе функций $u(x,y) \in C^2(D^+) \cap C^2(D^-) \cap C(\overline{D^+ \cup D^-})$ с граничными условиями

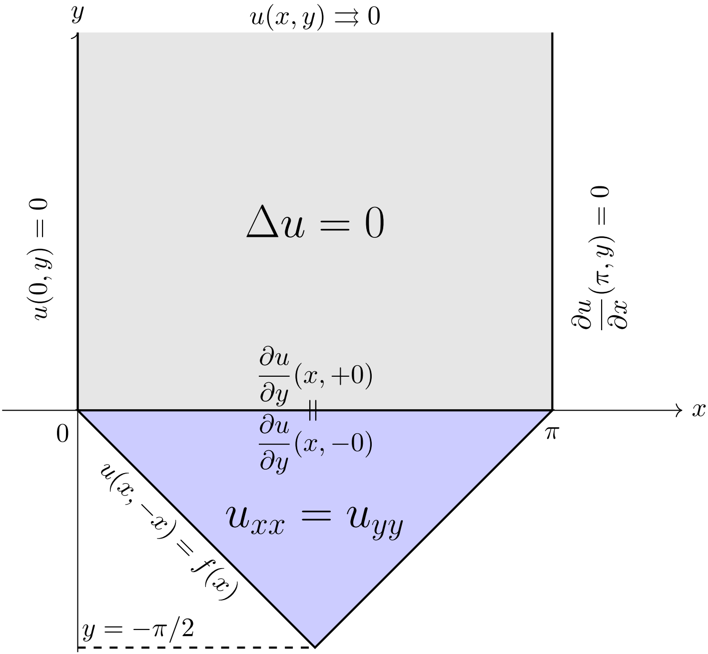
$$u(0,y)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y)=0,\ 0<y<+\infty, \tag{2}$$

$$u(x,-x)=f(x),\ 0\le x\le \pi/2,\ f(0)=0, \tag{3}$$

$$u(x,y)\rightrightarrows 0,\ y\to+\infty \tag{4}$$

и условием склеивания Франкля

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,-0),\ 0<x<\pi. \tag{5}$$


$y$
$u(x,y) \rightrightarrows 0$
$u(0,y) = 0$
$\Delta u = 0$
$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0$
$\frac{\partial u}{\partial y}(x,+0)$
$\parallel$
$\frac{\partial u}{\partial y}(x,-0)$
$x$
$0$
$\pi$
$u(x,-x) = f(x)$
$u_{xx} = u_{yy}$
$y = -\pi/2$

# Основные результаты

Теорема 1. Решение задачи (1) - (5) единственно.

Используя известную формулу общего решения задачи (1) - (5) в области $D^-$

$$u(x,y) = F(x+y) + f(\frac{x-y}{2}) - F(0).$$

Продифференцируем это равенство и получим следующее соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right),\ 0 < x < \pi.$$

# Постановка вспомогательной задачи в $D^+$

Получим в области $D^+$ вспомогательную задачу для оператора Лапласа

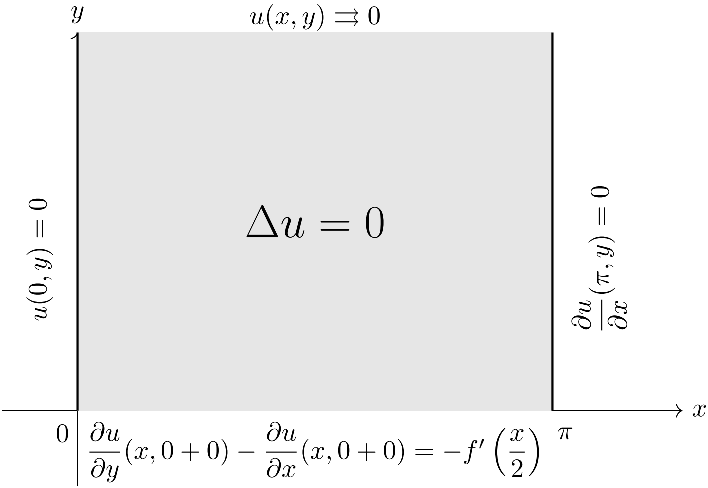
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \tag{6}$$

с граничными условиями

$$u(0,y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0,\ 0 < y < +\infty, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right), \tag{8}$$

$$u(x,y) \rightrightarrows 0,\ y \to +\infty \tag{9}$$


$y$
$u(x,y) \rightrightarrows 0$
$u(0,y)=0$
$\Delta u = 0$
$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0$
$x$
$0$
$\pi$
$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0+0) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,0+0) = -f'\left(\frac{x}{2}\right)$

Получим в области $D^+$ вспомогательную задачу для оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \tag{10}$$

с граничными условиями

$$u(0,y) = 0,\ \ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y) = 0,\ \ 0 < y < +\infty, \tag{11}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_0^\pi \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x)\right]^2 dx = 0,\ \ \varphi(x) \in L_2[0,\pi] \tag{12}$$

$$u(x,y) \rightrightarrows 0,\ \ y \to +\infty \tag{13}$$

# Существование и единственность решения вспомогательной задачи

Теорема 2. Решение задачи (10) - (13) существует, причём его можно представить в виде ряда

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right], \tag{14}$$

где коэффициенты $A_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ находятся из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right) \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}} \tag{15}$$

Теорема 3. Решение задачи (10) - (13) единственно.

# Интегральное представление производных решения

Теорема 4. Пусть $u(x, y)$ - решение задачи (10) – (13), тогда $u_x, u_y$ представимы в виде

$$u_y(x,y) = -Im\ \frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{+iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t)dt \tag{16}$$

$$u_x(x,y) = Re\ \frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi} e^{\frac{+iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t)dt, \tag{17}$$

где $z = x + iy$.

# Список литературы

1. Моисеев, Е.И. Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе/ Моисеев, Е.И., Моисеев Т.Е., Вафадорова Г.О. // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8 —. С. 1070–1075.
2. Моисеев, Е.И. О базисности одной системы синусов / Е.И. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 1987. —Т. 23, № 1 — С. 177–189.
3. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. — М. : Наука, 1981. — 448 с.
4 Моисеев, Т. Е. Об интегральном представлении решения уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями / Т.Е. Моисеев // Дифференц. уравнения. — 2011. —Т. 47, № 10, С. 1446–1451.