Обобщённые функции

Ломов И.С.

Элементарная теория обобщённых функций

Основные функции в $\mathbb{R}^1$

Определение. *Под основной функцией понимают любую вещественную функцию, финитную на $\mathbb{R}$ и определенную на $\mathbb{R}$ и непрерывную вместе с любой производной конечного порядка на $\mathbb{R}$.*

Если $\varphi = 0$ вне $[a, b]$, то говорят, что φ сосредоточена на $[a, b]$. В этом случае $[a, b]$ - носитель $\varphi(x)$. $\operatorname{supp}\varphi(x) = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}$. Пространство финитных функций является линейным, проверяется тривиально.

Предельный переход в K

Пусть φ_n - последовательность основных функций.

Определение. *$\varphi_n(x) \to 0$ в K, если все $\varphi_n(x)$ сосредоточены на одном отрезке, последовательность $\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$ на этом отрезке и $\forall k \in \mathbb{N}$ $\varphi_n^{(k)} \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$*

Очевидно, что $\varphi_n \to \varphi$ в K, если $\varphi \in K$ и $\varphi_n - \varphi \to 0$ в K.

Пример. *"Шапочка"*

$$\varphi(x; a) = \begin{cases} e^{-\dfrac{a^2}{a^2 - x^2}}, \ |x| \leqslant a \\ 0, \ |x| > a \end{cases}$$

Пусть $\varphi_n = \dfrac{1}{n}\varphi(x; a) \to 0$ в K, но если возьмем $\varphi_n = \dfrac{1}{n}\varphi(\dfrac{x}{n}, a)$, то сходимости не будет т.к. функции сосредоточены на разных отрезках.

Пример. *"Срезка"*

$$1_R(x) = \begin{cases} 1, \ |x| \leqslant R \\ 0, \ |x| > 3R \\ \textit{монотонно убывает}, x \in [-3R, -R] \\ \textit{Монотонно возрастает}, x \in [R, 3R] \end{cases}$$

Пусть $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow g(x)1_R(x) \in K$. В этом случае на $x \in [-R, R] \Rightarrow g(x)1_R(x) = g(x)$.
Более общая срезка:

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, \ |x| \leqslant \varepsilon \\ 0, \ |x| > \varepsilon \end{cases}$$

C_ε выбираем из условия $\int \omega_\varepsilon(x)dx = 1$.

Лемма. *$\exists \eta(x) \in K$, такая, что $\forall x : \ 0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$; $x \in G_\varepsilon = (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$; $G = (a, b)$ и $\eta(x) = \begin{cases} 1, \ x \in G_\varepsilon \\ 0, \ x \notin G_\varepsilon \end{cases}$*

Доказательство. Пусть $\chi(x)$ - характеристическая функция множества $G_{2\varepsilon}$, то есть индикатор. Пусть $\eta(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi(x)\omega_\varepsilon(x-y)dy$. Покажем, что эта функция принадлежит класса C^∞. $\eta(x) = \int\limits_{G_{2\varepsilon}} \omega_\varepsilon(x-y)dy = \int\limits_{a-2\varepsilon}^{b+2\varepsilon} \omega_\varepsilon(x-y)dy = \int\limits_{x-(b+2\varepsilon)}^{x-(a-2\varepsilon)} \omega_\varepsilon(t)dt = \{\omega_\varepsilon \in C^\infty\}$. Поэтому $\eta(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.
Проверим условие $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$. Функция ω_ε неотрицательная, поэтому левая оценка выполнена, а правая оценка выполняется благодаря выбору константы C_ε так как $\int\limits_{x-(b+2\varepsilon)}^{x-(a-2\varepsilon)} \omega_\varepsilon(t)dt \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(t)dt = 1$. В итоге $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$.

Остаётся проверить последнее условие: Пусть $|y-x| \leqslant \varepsilon \Rightarrow x-\varepsilon \leqslant y \leqslant x+\varepsilon$, тогда $\eta(x) = \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \chi(y)\omega_\varepsilon(x-y)dy =$ $\begin{cases} \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \omega_\varepsilon(x-y)dy = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega_\varepsilon dy = 1, \ x \in G_\varepsilon \subset G_{2\varepsilon} \\ 0, \ x \notin G_\varepsilon, \text{потому что индикатор обращатеся в ноль} \end{cases}$ Если $a = b = 0, \varepsilon = R \Rightarrow \eta(x) = 1_R(x)$. □

Теорема. *(неметризуемость пространства K)*
$\nexists \rho$ такой, что если $\varphi_n \to \varphi$ в K, то $\rho(\varphi_n, \varphi) \to 0$.

Доказательство. Известна теорема о метрических пространствах: если есть в метрическом пространстве счётное число последовательностей
$$\begin{matrix} \varphi_1^{(1)} & \varphi_2^{(1)} & \dots & \varphi_n^{(1)} & \to & \varphi^{(1)} \\ \varphi_1^{(2)} & \varphi_2^{(2)} & \dots & \varphi_n^{(2)} & \to & \varphi^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(m)} & \varphi_2^{(m)} & \dots & \varphi_n^{(m)} & \to & \varphi^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$
таких, что $\varphi^{(m)} \to \varphi$ при $m \to \infty$, то $\exists \{\varphi_{n_m}^{(m)}\}$ - сходящаяся к φ при $n \to \infty$. Рассмотрим контрпример: $\varphi_n^{(m)}(x) = \frac{1}{n}\varphi(\frac{x}{m}; a)$. Для любого фиксированного m $\varphi_n^{(m)}(x) \to 0$ в K.Но если взять последовательность $\varphi_{n_m}^{(m)}(x) \to \frac{1}{n_m}\varphi(\frac{1}{m}; a)$, то не будет общего носителя. □

Обобщённые функции в $\mathbb{R}^1$

Определение. *E - множество обычных вещественных функций, определенных на $\mathbb{R}$, локально интегрируемых.*

Пусть $f(x) \in E$, ставим в соответствие функционал на множестве K: $(f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$ (1).

Функционал (1) очевидно является линейным, его непрерывность следует из $\{\varphi_n(x)\} \subset K$, $\varphi_n(x) \to 0$ в $K \Rightarrow (f, \varphi_n) \to 0$.

Лемма. *Существуют линейные непрерывные функционалы на K, которые не представимы в виде (1).*

Доказательство. $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака: $\delta(x) : \varphi(x) \to \varphi(0)$. Покажем, что этот функционал не представим в виде (1). Пусть $\exists f(x) \in E : \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \forall \varphi \in K$. Пусть $\varphi(x) = \varphi(x; a)$, тогда $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx =$ $\int\limits_{-a}^{a} f(x)e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}dx \leqslant \int\limits_{-a}^{a} |f(x)|dx \to 0$ при $a \to 0$. Но $\varphi(0; a) = \frac{1}{e}$.Поэтому данный функционал в виде (1) не представим. □

Определение. *Обобщённой функцией (распределением) назовем любой линейный непрерывный функционал на множестве K. Если функционал представим в виде (1), то он регулярный, иначе сингулярный.*

K' - множество всех обобщённых функций над K.
Любой обычной функции $f(x)$ отвечает обобщённая функция, определяемая по формуле (1) $f(x) = \text{const} :\ (c, \varphi) = c\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx$. $f(x) : \forall x \to f(x)$ почти всюду. $f : \forall \varphi \to (f, \varphi)$. Не можем говорить про равенство в точке, но можем говорить об эквивалентности на (a, b).

Сингулярные функции

1. $\delta(x)$.
2. $\delta(x-a), \forall a \in \mathbb{R}$.
3. $\delta'(x)$
4. $f(x) = \frac{1}{x} \notin E$

Пусть $f_1, f_2 \in K'$ равны, если $(f_1, \varphi) = (f_2, \varphi), \forall \varphi \in K$, не являются равными, если $\exists \varphi \in K : (f_1, \varphi) \neq (f_2, \varphi)$. Класс K достаточно широк, чтобы различать непрерывные функции:

Лемма. *Пусть $f_1(x), f_2(x) \in E$ - различные непрерывные функции, тогда f_1, f_2 -различные обобщённые функции.*

Доказательство. Нужно показать, что $\exists \varphi_0 : (f_1, \varphi_0) \neq (f_2, \varphi_0)$. Рассмотрим $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, тогда $\exists x_0 : f(x_0) \neq 0$ и $\exists [\alpha, \beta] : \ x_0 \in [\alpha, \beta]$ на этом отрезке функция $f(x)$ сохраняет знак. Рассмотрим $\varphi_0(x) = \begin{cases} e^{-\dfrac{1}{(\beta - x)(x - \alpha)}}, \ x \in [\alpha, \beta] \\ 0, \ x \in \mathbb{R} \backslash [\alpha, \beta] \end{cases}$.

Заметим, что $\varphi_0 \in K$. $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_0(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x) e^{-\dfrac{1}{(\beta - x)(x - \alpha)}} dx > 0$ т.к. $f(x)$ - сохраняет знак, а экспонента строго положительна, поэтому $f_1 \neq f_2$. □

Пусть $p \geqslant 0$, целое число

Определение. *Обобщённая функция f имеет порядок сингулярности $\leqslant p$, если её можно представить в следующем виде:*

$$(f, \varphi) = \sum_{k=0}^{p} \int\limits_{\mathbb{R}} f_k(x)\varphi^{(k)}(x)dx = \sum_{k=0}^{p} (f_k(x), \varphi^{(k)}(x)), \forall \varphi \in K, \qquad (1)$$

где $f_1(x), \ldots, f_p(x) \in E$

Пример. *$f(x) \in E$, тогда регулярная $\Rightarrow p = 0$.*

Пример. *$\delta(x)$. Рассмотрим функцию Хевисайда $\theta(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \in E$. $(\theta(x), \varphi(x)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x)dx$*

$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0) = -\int\limits_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} -\theta(x)\varphi'(x)dx$. Поэтому порядок сингурлярности $\delta(x)$ равен 1, а для $\delta'(x)$ $p \leqslant 2$.

Действие с обобщёнными функциями

Сложение

Сложение и умножение на вещественное число: $\forall f_1, f_2 \in K', \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \ (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi) = \alpha_1(f_1, \varphi) + \alpha_2(f_2, \varphi) \Rightarrow \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in k'$

Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию

$\forall f \in k', \ \forall \alpha(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$.

1. $f = f(x) \in E \Rightarrow (\alpha(x)f(x), \varphi(x)) = \int\limits_{\mathbb{R}} \alpha(x)f(x)\varphi(x)dx = (f(x), \alpha(x)\varphi(x))$ т.к. $\alpha(x)\varphi(x) \in K$.
2. $f \in K'$ $(\alpha(x)f, \varphi) = (f, \alpha(x)\varphi) \Rightarrow \alpha(x)f \in K'$ т.к. функционал линейный и непрерывный.

Дифференциорвание

$\forall f \in K' : \ f' : (f', \varphi) = -(f, \varphi'), \forall \varphi \in K$. Пусть $\varphi_n \to 0$ в K, тогда $\varphi_n' \to 0$ в $K \Rightarrow (f, \varphi_n') \to 0$ т.к. f-непрерывный функционал $\Rightarrow (f', \varphi_n) \to 0$, то есть f' - линейный непрерывный функционал $f' \in K$.

Свойства производной:

1. $(f'', \varphi) = (f, \varphi'')$, $(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)})$
2. $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall f_1, f_2 \in K'$ $((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)', \varphi) = -(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi') = -\alpha_1(f_1, \varphi') - \alpha_2(f_2, \varphi') = \alpha_1(f_1', \varphi) + \alpha_2(f_2', \varphi)$. То есть $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)' = \alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2'$
3. $\alpha(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}), f \in K'$ $((\alpha(x)f)', \varphi) = -(\alpha(x)f, \varphi') = -(f, \alpha(x)\varphi') = -(f, \alpha(x)\varphi' + \alpha'(x)\varphi - \alpha'(x)\varphi) = -(f, (\alpha\varphi)') + (f, \alpha'\varphi) = (f', \alpha\varphi) + (\alpha' f, \varphi) = (\alpha f' + \alpha' f, \varphi), \forall \varphi \in K$. То есть $((\alpha(x)f)', \varphi) = (\alpha' f + \alpha f', \varphi)$

Пример. *$\theta(x)$: $(\theta'(x), \varphi) = -(\theta(x), \varphi'(x)) = -\int\limits_{0}^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) \Rightarrow \theta'(x) = \delta(x)$.*

Пример. *$\delta(x)$: $(\delta'(x), \varphi(x)) = -(\delta(x), \varphi'(x)) = -\int\limits_{\mathbb{R}} \delta(x)\varphi'(x) = -\varphi'(0)$. Получается, что $\delta' : \varphi(x) \to -\varphi'(0)$.*

Пример. *Пусть $f(x)$ - кусочно абсолютно непрерывная функция, $x_1, \ldots, x_n$ - точки разрыва. $h_1, \ldots, h_n$ - скачки в точках разрыва $f(x_i + 0) - f(x_i - 0) = h_i$. Чему равна производная такой функции?*

Введём $f_1(x) = f(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} h_k\theta(x - x_k)$ - убрали скачки и сделали непрерывной. $f_1(x)$ -абсолютно непрерывная функция и $\exists f_1'(x)$ п.в. совпадает с $f'(x)$. $f'(x) = f_1'(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} h_k\delta(x - x_k)$ в K.

Пример. *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n} = f(x) = \begin{cases}\dfrac{\pi - x}{2},\ x\in(0,\pi]\\ 0,\ x=0\\ -\dfrac{\pi+x}{2},\ x\in[-\pi,0)\end{cases}$ *Это* 2π *-периодическая функция. По полученной ранее формуле получаем, что* $f' = -\dfrac{1}{2} + \pi\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2\pi k)$

Пример. *Сходимость ряда.*
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin nx}{n}\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$ *- расходится в прострнастве* E. *Посмотрим в пространстве* K': $\left(\left(\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{\sin nx}{N}\right)', \varphi\right) = \left(\sum\limits_{n=1}^{N}\cos nx, \varphi\right) = -(\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{\sin nx}{n}, \varphi') = -\int\limits_{\mathbb{R}}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{\sin nx}{n}\varphi' dx \to -\int\limits_{\mathbb{R}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}\varphi' dx = -(f(x),\varphi'(x)) = (f'(x),\varphi)$. *В пространстве* K' *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx = -\dfrac{1}{2} + \pi\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(x-2\pi k)$

Пример. $y = \ln|x| \in E$, *но* $y' \notin E$, *а что в* K'*?*

$$((\ln|x|)',\varphi) = -(\ln|x|,\varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln|x|\varphi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\ln|x|\varphi' dx + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\ln|x|\varphi' dx\right) =$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln|x|\varphi(x)|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\varphi dx + \ln|x|\varphi|_{\varepsilon}^{\infty} - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{x}\varphi dx\right) = -\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln\varepsilon\varphi(-\varepsilon) - \ln\varepsilon\varphi(\varepsilon) - \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right) =$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln\varepsilon\varphi'(x)\,(-2\varepsilon) - \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx = (\frac{1}{x},\varphi).$$
Поэтому $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$ *в* K'.

Пример. *Пусть* $y = x_+^{\lambda}, \lambda\in(-1,0)$, $x_+^{\lambda} = \begin{cases}x^{\lambda},\ x>0\\ 0, x\leqslant 0\end{cases} \in E$. *Что проихсодит в* K'*?*

$$((x_+^{\lambda})',\varphi) = -(x_+^{\lambda},\varphi') = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_+^{\lambda}\varphi'(x)dx = -\int\limits_{0}^{\infty}x^{\lambda}\varphi'(x)dx = -\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}x^{\lambda}\varphi'(x)dx = -\varepsilon^{\lambda}\varphi(\varepsilon) - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)dx = -\varepsilon^{\lambda}\varphi(\varepsilon) -$$
$$\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\lambda x^{\lambda-1}(\varphi(x)-\varphi(0))dx - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\lambda x^{\lambda-1}\varphi(0)dx = \varepsilon^{\lambda}(\varphi(0)-\varphi(\varepsilon)) - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\lambda x^{\lambda-1}(\varphi(x)-\varphi(0))dx \to -\int\limits_{0}^{\infty}\lambda x^{\lambda-1}(\varphi(x)-\varphi(0))dx$$
В итоге $(x_+^{\lambda})' : \varphi(x) \to \int\limits_{0}^{\infty}\lambda x^{\lambda-1}(\varphi(x)-\varphi(0))dx$ *в* K'.

Предельный переход в K'

Рассмотрим $\{f_n\}, f_n\in K', f\in K'$

Определение. $f_n \to f$ *в* K', *если* $(f_n,\varphi)\to(f,\varphi), \forall\varphi\in K$

Пусть $f_n, f\in E, n\geqslant 1, f_n \rightrightarrows f$ в среднем на $[a,b]$ (f_n, f сосредоточены на $[a,b]$). $|(f_n - f,\varphi)| = |\int\limits_{-\infty}^{\infty}(f_n-f)\varphi dx| \leqslant \{\text{КБШ}\} \leqslant \left(\int\limits_{a}^{b}(f_n-f)^2dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_{a}^{b}\varphi^2dx\right)^{1/2} \to 0$. То есть следует сходимость в K'.

Лемма. *Пределом регулярных функций может быть сингулярная*

Доказательство. $f_n(x) = \begin{cases}\dfrac{n}{2},\ x\in[-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}]\\ 0,\ |x|>\dfrac{1}{n}\end{cases}$

$(f_n(x),\varphi(x)) = \dfrac{n}{2}\int\limits_{-1/n}^{1/n}\varphi(x)dx = \{\text{формула среднего}\} = \dfrac{n}{2}\varphi(\xi)\dfrac{2}{n} \to \varphi(0) = (f(x),\varphi(x)) \Rightarrow f_n(x)\to\delta(x)$ в K'. □

Масса материальной точки

Плоскость электрического диполя

Первообразная обобщённых функций

Рассмотрим уравнение $y' = 0$ в K' (1).

Лемма. *В пространстве K' уравнение (1) имеет решение* $y = \text{const}$.

Доказательство. $(y', \varphi) = -(y, \varphi') = 0(2)$. (2) определяет решение уравнения на пробных функциях, которые являются производными от других пробных функций $\psi(x) \in K$, $\psi(x) \geqslant 0$ - не может быть пробной так как пробные функции не являются монотонными. Обозначим пространство $K_0 = \{\varphi_0(x) \in K | \exists \varphi_1(x) - \text{пробная} : \varphi_0(x) = \varphi_1'(x)\}, K_0 \subset K$ □

Лемма. $\varphi_0(x) \in K_0 \Leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)dx = 0$

Доказательство. $\Leftarrow$: Пусть $\varphi_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_0(t)dt \Rightarrow \varphi_1(x) \in C^{\infty},\ \varphi_1'(x) = \varphi_0(x)$. Пусть φ_0 сосредоточена на $[a, b]$, тогда $\int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_0(t)dt = \varphi_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(t)dt = 0$ при $x > b$.
$\Rightarrow$: $\varphi_0 \in K_0,\ \exists \varphi_1 : \varphi_0 = \varphi_1'$ □