Об одной задаче для уравнения Лапласа со смешанными граничными условиями

Капустин Н.Ю., Васильченко Д.Д.

25 апреля 2024 г.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

В полуполосе $D = \{(x,y)|0 < x < \pi, 0 < y\}$
В классе функций $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$
с граничными условиями

$$u(0,y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0 \tag{2}$$

$$\lim_{y \to 0+0} \int\limits_0^\pi \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x)\right]^2 dx = 0,\ \varphi(x) \in L_2[0,\pi] \tag{3}$$

$$u(x,y) \rightrightarrows 0, y \to \infty \tag{4}$$

Аналогичная задача рассматривалась как вспомогательная с граничными условиями второго рода на боковых сторонах полуполосы и коэффициентом $\dfrac{1}{k}$ при $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ в работе [1].

Теорема 1. *Решение задачи (1 - 4) существует, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right], \tag{5}$$

где коэффициенты $A_n,\ n = 0,1,2,\dots$ *находятся из разложения*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}} \tag{6}$$

Доказательство. Докажем существование решения задачи (1) – (4). В силу основного результата работы [2] система $\{\sin\left[(n+\beta/2)\,x + \gamma/2\right]\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространствен $L_2(0,\pi)$, если $-\dfrac{1}{2} < \gamma/\pi < \dfrac{3}{2}$ и $-\dfrac{3}{2} < \gamma/\pi + \beta < \dfrac{1}{2}$. В нашем случае $\{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{4}\right]\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,\pi)$ т.к. $\gamma = \pi/2$, $\beta = -1$. Поэтому коэффициенты разложения в формуле (6) удовлетворяют неравенствам Бесселя

$$C_1 \|\varphi\|_{L_2(0,\pi)} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant C_2 \|\varphi\|_{L_2(0,\pi)}, 0 < C_1 < C_2,$$

а значит сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |A_n|$ и сходится равномерно ряд (5). То, что функция (5) при $y > 0$ - решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) - это очевидно. В силу равенства $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} = \dfrac{e^{-y/2}}{1-e^{-y}}$,

также очевидно, что выполнено условие (4). Проверим выполнение условия (3).
Выразим функцию $\varphi(x)$ из представления (6) и подставим в условие (3)

$$I(y)=2\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx$$

Докажем, что $I(y)\to 0$ при $y\to 0+0$.

$$I(y)\leqslant 4\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{m}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx+$$

$$+4\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx$$

В силу левой части неравенства Бесселя имеем оценку

$$\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx\leqslant$$

$$\leqslant C_3\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)^2\leqslant C_3\sum_{n=m+1}^{\infty}A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{\varepsilon}{2}$$

Это верно $\forall\varepsilon>0$, если $m\geqslant N=N(\varepsilon)$
Во втором слагаемом мы имеем дело с конечным числом элементов, поэтому:

$$\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{n=0}^{m}A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\frac{\pi}{4}\right]\right]^2dx\leqslant$$

$$\leqslant C_4\sum_{n=0}^{m}A_n^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}-1\right)^2<\frac{\varepsilon}{2}$$

Это верно, если $0<y<\delta$ (m зафиксировано в зависимости от N). Условие (3) выполнено. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Решение задачи (1- 4) единственно*

Доказательство. Докажем единственность решения этой задачи. Пусть $u(x,y)$ - разность двух решений - решение задачи с $\varphi(x)\equiv 0$. Необходимо получить выражение, где слева будет входить модуль или чётная степень функции u, а справа будет 0.
Введём обозначения $A_\varepsilon=(0,\varepsilon), A_R=(0,R), B_R=(\pi,R), B_\varepsilon=(\pi,\varepsilon)$. $D_{R\varepsilon}$ - прямоугольник $A_\varepsilon A_R B_R B_\varepsilon$.
Справедливы следующие соотношения:

$$0=\iint\limits_{D_{R\varepsilon}}(R-y)(u_{xx}+u_{yy})dxdy=I$$

Заметим, что $(R-y)(u_{xx}+u_{yy})u=\left((R-y)\,u_xu\right)_x+\left((R-y)\,u_yu\right)_y-(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)+u_yu==$ $(R-y)\left(u_{xx}u+u_x^2\right)+\left(-u_y+(R-y)\,u_{yy}u+(R-y)\,u_y^2\right)-(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)+u_yu$

Подставим это выражение в интеграл

$$I=\iint\limits_{D_{R\varepsilon}}\left((R-y)\,u_x u\right)_x dxdy+\iint\limits_{D_{R\varepsilon}}\left((R-y)\,u_y u\right)_y dxdy-\iint\limits_{D_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)+\iint\limits_{D_{R\varepsilon}}u_y u dxdy=$$

Упростим теперь эти интегралы:
$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}}\left((R-y)\,u_x u\right)_x dxdy=\int\limits_{[\varepsilon,R]}\left[(R-y)u_x u\right]|_0^\pi dy=$
$\int\limits_{[\varepsilon,R]}\left[(R-y)u_x(\pi,y)u(\pi,y)-(R-y)u_x(0,y)u(0,y)\right]dy=0$ т.к. оба подынтегральных выражения равны нулю в силу условия (2), поэтому
$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}}\left((R-y)\,u_y u\right)_y dxdy=\int\limits_{[0,\pi]}\left[(R-y)\,u_y u\right]|_\varepsilon^R dx=\int\limits_{[0,\pi]}\left[0-(R-\varepsilon)\,u_y(x,\varepsilon)u(x,\varepsilon)\right]dx=$
$=-\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}(R-\varepsilon)\,u_y u dx$
$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}}u_y u dxdy=\iint\limits_{D_{R\varepsilon}}\left(\frac{u^2}{2}\right)_y' dxdy=\int\limits_{[0,\pi]}\left[\frac{u^2(x,R)}{2}-\frac{u^2(x,\varepsilon)}{2}\right]dx$
В итоге получим

$$=-\iint\limits_{D_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy-\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}(R-\varepsilon)\,u_y u dx-\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}\frac{u^2}{2}dx+\int\limits_{A_R B_R}\frac{u^2}{2}dx=$$

Добавим и вычтем $\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}(R-\varepsilon)\,u_x u dx$, тогда

$$=-\iint\limits_{D_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy-\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}(R-\varepsilon)\left(u_y-u_x\right)u dx-\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}(R-\varepsilon)\,u_x u dx-\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}\frac{u^2}{2}dx+$$

$$+\int\limits_{A_R B_R}\frac{u^2}{2}dx$$

Отсюда следует

$$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\frac{1}{2}\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}u^2dx+\frac{R-\varepsilon}{2}u^2(\pi,\varepsilon)=$$

$$=\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}(R-\varepsilon)\left(u_x-u_y\right)u dx+\frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R}u^2dx\leqslant\{\text{Неравенство Коши-Буняковского}\}$$

$$\leqslant(R-\varepsilon)\left[\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}\left(u_y-u_x\right)^2dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}u^2dx\right]^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R}u^2dx=I$$

Рассмотрим следующее неравенство: $(2ar-b)^2\geqslant 0\Rightarrow 4a^2r^2-4abr+b^2\geqslant 0\Rightarrow ab\leqslant ra^2+\frac{b}{4r}$
Возьмём $a=\left[(R-\varepsilon)\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}\left(u_y-u_x\right)^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$, $b=\left[(R-\varepsilon)\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}u^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$, $r=R-\varepsilon$, тогда

$$I\leqslant(R-\varepsilon)^2\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}\left(u_y-u_x\right)^2dx+\frac{1}{4}\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}u^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R}u^2dx,$$

$$\iint\limits_{D_{R\varepsilon}}(R-y)\left(u_x^2+u_y^2\right)dxdy+\frac{1}{4}\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}u^2dx+\frac{R-\varepsilon}{2}u^2(\pi,\varepsilon)\leqslant$$

$$\leqslant(R-\varepsilon)^2\int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon}\left(u_y-u_x\right)^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R}u^2dx$$

Устремим $\varepsilon \to 0+0$, тогда в силу условия (3)

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \int\limits_{A_\varepsilon B_\varepsilon} (u_y - u_x)^2 \, dx = 0$$

и получим соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \iint\limits_{D_{R\varepsilon}} (R-y)\left(u_x^2 + u_y^2\right) dxdy + \frac{1}{4}\int\limits_0^\pi u^2(x,0)dx + \frac{R}{2}u^2(\pi,0) \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{A_R B_R} u^2 dx$$

Устремим теперь $R \to \infty$, тогда в силу условия (4) $\int\limits_{A_R B_R} u^2 dx \to 0$, тем самым, это возможно только в случае $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$. □

Теорема 3. *Пусть* $u(x,y)$ *- решение задачи* $(1)-(4)$*, тогда* u_x, u_y *представимы в виде*

$$u_y(x,y) = -Im\,\frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi}e^{\frac{+iz}{2}}\int\limits_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}\varphi(t)dt \tag{7}$$

$$u_x(x,y) = Re\,\frac{\sqrt{1-e^{i2z}}}{\pi}e^{\frac{+iz}{2}}\int\limits_0^\pi \frac{\sqrt{\sin t}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}\varphi(t)dt \tag{8}$$

Доказательство. :
Рассмотрим уравнение (6). Система синусов $\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{4}\right]$ образует базис в $L_2(0,\pi)$. Поэтому для коэффициентов $A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)$ справедливо следующее представление:

$$A_n\left(n+\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^\pi h_{n+1}(t)\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}dt,$$

где

$$h_n(t) = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^\beta}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^n \sin kt B_{n-k}$$

Пусть $u(x,y)$ - решение задачи (1)-(4), тогда

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^\infty A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

и соотвественно

$$u_y(x,y) = -\sum_{n=0}^\infty A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

Здесь как раз возникает нужный нам коэффициент $A_n\left(n+\frac{1}{2}\right)$, поэтому

$$u_y(x,y) = -\sum_{n=0}^\infty \int\limits_0^\pi \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]dt$$

$\sin\left[\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\right] = Im\ e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}$, поэтому

$$u_y(x,y) = -Im\ \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}dt$$

Обозначим $z = x + iy$

$$u_y(x,y) = -Im\ \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_{n+1}(t)e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)z}dt$$

Для дальнейших операций нам было бы удобно, чтобы суммирование начинолось от 1, а не 0, поэтому сделаем замену $m = n + 1$

$$u_y(x,y) = -Im\ \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_m(t)e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}dt$$

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{-\dfrac{iz}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}h_m(t)e^{imz}dt$$

Поменяем местами знаки интергирования и суммирования

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{-\dfrac{iz}{2}}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}}\sum_{m=1}^{\infty}h_m(t)e^{imz}dt$$

Введём новое обозначение:

$$I(t,z) = \sum_{m=1}^{\infty}h_m(t)e^{imz}$$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin kt B_{n-k}e^{inz} = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\sin kt\sum_{n=k}^{\infty}e^{inz}B_{n-k}$$

Введём новый индекс $m = n - k$

$$I(t,z) = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\sin kt\sum_{m=0}^{\infty}e^{i(m+k)z}B_m = \frac{2}{\pi}\frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}e^{ikz}\sin kt\sum_{m=0}^{\infty}e^{imz}B_m$$

Первый ряд можем вычислить по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\sum_{k=1}^{\infty}e^{ikz}\sin kt = \sum_{k=1}^{\infty}e^{ikz}\frac{1}{2i}\left(e^{ikt} - e^{-ikt}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-e^{i(z+t)}} - \frac{1}{1-e^{i(z-t)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\frac{e^{i(z+t)} - e^{i(z-t)}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} = \frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)}$$

Рассмотрим второй ряд:

$$\sum_{l=0}^{\infty}e^{ilz}B_l = \sum_{l=0}^{\infty}e^{ilz}\sum_{m=0}^{l}C_{\gamma/\pi}^{l-m}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}(-1)^{l-m} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}e^{ilz}C_{\gamma/\pi}^{l-m}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}(-1)^{l-m} =$$

Введём новый индекс суммирования $k = l - m$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}e^{i(m+k)z}C_{\gamma/\pi}^{k}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}(-1)^{k} = \sum_{m=0}^{\infty}e^{imz}C_{-\gamma/\pi-\beta}^{m}\sum_{k=0}^{\infty}C_{\gamma/\pi}^{k}(-1)^{k}e^{ikz} = (1+e^{iz})^{-\gamma/\pi-\beta}(1-e^{iz})^{\gamma/\pi}$$

В нашем случае $\beta = -1, \gamma = \pi/2$, поэтому

$$= (1+e^{iz})^{1/2}(1-e^{iz})^{1/2} = \sqrt{1-e^{i2z}}$$

Собираем все решение:

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} I(t,z) dt$$

$$u_y(x,y) = -Im\ e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{2}{\pi} \frac{(2\cos t/2)^{\beta}}{(\tan t/2)^{\gamma/\pi}} \frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \sqrt{1-e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

Подставляя β и γ получим

$$u_y(x,y) = -Im\ \frac{2}{\pi} e^{\dfrac{-iz}{2}} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2\cos t/2\sqrt{\tan t/2}} \frac{e^{iz}\sin t}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \sqrt{1-e^{i2z}} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{2}} dt$$

$$u_y(x,y) = -Im\ \frac{e^{\dfrac{+iz}{2}}}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin t}\sqrt{1-e^{i2z}}}{\left(1-e^{i(z+t)}\right)\left(1-e^{i(z-t)}\right)} \varphi(t) dt$$

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Моисеев Т.Е. Вафадорова Г.О.* Об интегральном представлении задачи Неймана-Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения, **2015** Т. 51. №8. С.1070-1075

[2] *Моисеев Е.И.* О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения, **1987** Т. 23. №1. С.177-189