Обобщение задачи

Исходная задача

Ранее была рассмотрена задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{0.1}$$

В полуполосе $D = \{(x, y) | 0 < x < \pi, 0 < y\}$
В классе функций $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$
с граничными условиями

$$u(0, y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0 \tag{0.2}$$

$$\lim_{y \to 0+0} \int\limits_0^\pi \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x) \right]^2 dx = 0,\ \varphi(x) \in L_2[0, \pi] \tag{0.3}$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, y \to \infty \tag{0.4}$$

И была доказана теорема:

Теорема 1. *Решение задачи (0.1 - 0.4) существует и единственно, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right) y} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right], \tag{0.5}$$

где коэффициенты $A_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ *находятся из разложения*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right) x + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{2}} \tag{0.6}$$

Модифицированная задача

Рассмотри теперь задачу с некоторым параметром $k \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ в граничном условии (3). Итого получим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

В полуполосе $D = \{(x, y)|0 < x < \pi, 0 < y\}$
В классе функций $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(\overline{D} \cap \{y > 0\}) \cap C^2(D)$
с граничными условиями

$$u(0, y) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0$$

$$\lim_{y \to 0+0} \int_0^\pi \frac{1}{k} \left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(x) \right]^2 dx = 0,\ \varphi(x) \in L_2[0, \pi] \tag{0.7}$$

$$u(x, y) \rightrightarrows 0, y \to \infty$$

Получим похожую теорему, но с небольшими отличиями.

Теорема 2. *Решение задачи (0.1 - 0.4) существует и единственно, причём его можно представить в виде ряда*

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right],$$

где коэффициенты A_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ находятся из разложения

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{k}\right] = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\varphi(x) \tag{0.8}$$

Доказательство. Докозательство единственности решения задачи проводится аналогично докозательству исходной задачи.
Перейдём к докозательству существования решения.
Система $\{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{k}\right]\}_{n=0}^{\infty}$ образует в $L_2(0, \pi)$ базис Рисса при $k \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, поэтому справедливо двухстороннее неравенство Бесселя:

$$C_1\|\varphi\|_{L_2(0,\pi)} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant C_2\|\varphi\|_{L_2(0,\pi)},\ 0 < C_1 < C_2,$$

Поэтому сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|A_n|$, поэтому равномерно сходится ряд (0.5). Очевидно, что функция (0.5) является решением задачи (0.1). Условие (0.4) выполняется т.к. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} = \frac{e^{-1/2}}{1-e^{-y}}$. Проверим выполнение условие (0.3). Подставим функцию (0.8) в условие (0.7), тогда

$$I(y) = \int_0^\pi \frac{1}{k}\left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{k}\right]\right]^2 dx =$$

$$= \int_0^\pi \left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\left\{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y}\left[-\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right] + \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{k}\right]\right\}\right)\right] dx$$

Рассмотрим подробнее выражение в фигурных скобках

$$\left\{-e^{\cdots}\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - e^{\cdots}\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{k}\right]\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}e^{\cdots}\left\{-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right\} + \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{k}\right] =$$

Заметим, что $\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}} = \sin\left(\arctan 1/k\right)$ и $\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}} = \cos\left(\arctan 1/k\right)$, тогда получаем

$$= \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} e^{\cdots} \left\{ -\sin\left(\arctan 1/k\right) \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(\arctan 1/k\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x \right\} + \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{k}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} e^{\cdots} \left\{ -\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \arctan 1/k\right] \right\} + \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x + \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{k}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} e^{\cdots} \left\{ -\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \arctan 1/k\right] \right\} + \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \arctan\frac{1}{k}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \arctan\frac{1}{k}\right]\left(1 - e^{\cdots}\right)$$

В итоге получаем

$$I(y) = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k} \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right) \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \arctan\frac{1}{k}\right] \left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1 \right) \right]^2 dx$$

Оценим $I(y)$

$$I(y) \leqslant I_1(y) + I_2(y) = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k} \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=0}^{m} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right) \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \arctan\frac{1}{k}\right] \left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1 \right) \right]^2 dx +$$

$$+ \frac{2\sqrt{1+k^2}}{k} \int_0^{\pi} \left[\sum_{n=m+1}^{\infty} A_n \left(n+\frac{1}{2}\right) \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \arctan\frac{1}{k}\right] \left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1 \right) \right]^2 dx$$

Первое слагаемое в соответствии с неравенством Бесселя

$$I_1(y) \leqslant C \sum_{n=0}^{m} A_n^2 \left(n+\frac{1}{2}\right) \left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1 \right) < C \sum_{n=0}^{m} A_n^2 \left(n+\frac{1}{2}\right) < \varepsilon/2$$

Это верно при $0 < y < \delta$. m зафиксировано в зависимости от N.
Второе слагаемое также оценим через неравенство Бесселя.

$$I_2(y) \leqslant C \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left(n+\frac{1}{2}\right) \left(e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - 1 \right) < C \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \left(n+\frac{1}{2}\right) < \varepsilon/2$$

Условие (0.7) выполнено. Теорема доказана. $\square$