1 Гильбертовы пространства

1.1 Определение и простейшие свойства гильбертова пространства

Определение 1.1. *Полное евклидово (унитарное) бесконечномерное пространство называется Гильбертовым (обычно обозначается H)*

Теорема 1. *Норма согласованная со скалярным произведением существует* $\Leftrightarrow$ *выполнено равенство* $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\| + \|y\|\right)^2$

1.2 Теорема об элементе с наименьшей нормой. Разложение гильбертова пространства в прямую ортогональную сумму подпространств

Определение 1.2. *Множество называется выпуклым, если вместе с любой парой своих точек оно содержит и соединяющий их отрезок*

Теорема 2. *(об элементе с наименьшей нормой)*
Пусть M - замкнутое выпуклое подмножество H, тогда в M существует элемент с наименьшей нормой и он единственен.

Определение 1.3. *Множество всех элементов H ортогональных подмножеству L называется ортогональным дополнением к L (обозначается $L^{\perp}$)*

Теорема 3. *(о разложении Гильбертова пространства в сумму)*
Пусть L - замкнутое линейное подмножество H, тогда справедливо $H = L \bigoplus L^{\perp}$, т.е. $\forall x \in H\ \exists!\ x_1 \in L, x_2 \in L^{\perp}:\ x = x_1 + x_2$

1.3 Теорема Рисса о представлении линейного ограниченного функционала

Лемма 1.1. *Пусть $f(x)$ - линейный ограниченный функционал над H и $f \not\equiv 0$, тогда* $\dim\left(\ker f\right)^{\perp} = 1$

Теорема 4. *(Рисса о представлении линейного ограниченного функционала)*
$\forall\ f(x) \in H^*\ \exists!\ h \in H:\ f(x) = (x, h),\ \|f\| = \|h\|$

1.4 Слабая сходимость

Свойства слабо сходящихся последовательностей:

1. $x_n \rightharpoonup x_0,\ \|x_n\| \to \|x_0\| \Rightarrow x_n \to x_0$
2. $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \geqslant \|x\|$
3. (Лемма Кадеца) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow \exists\{n_k\}:\ \dfrac{x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}}{k} \to x$

1.5 Полные, замкнутые, ортонормированные системы

Определение 1.4. *Система называется замкнутой в H, если любой элемент из H можно приблизить конечной линейной комбинацией из элементов системы с наперёд заданной точностью.*

Определение 1.5. *Система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется полной, если из $(x, x_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ следует $x = 0$.*

Теорема 5. *В H понятие замкнутости и полноты эквивалентны.*

Теорема 6. *(Рисса-Фишера)*
Пусть $\{e_n\}$ - полная система и пусть задана $\{c_k\} \subset \mathbb{C}:\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty \Rightarrow \exists!\ x \in H:\ (x, e_k) = c_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$

1.6 Процесс ортогонализации

Теорема 7. *В сепарабельном H существует полная ортонормированная система.*

Теорема 8. *Все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны с изоментией между собой.*

2 Пространства Соболева. Обобщённые решения краевых задач

Определение 2.1. *Пространство Соболева: Рассмотрим пространсво $C^1[0,1]$ со скалярным произведением $(u, v)_w = \int\limits_0^1 uv dt + \int\limits_0^1 u'v' dt$ пополним это пространство по норме, тогда получим пространство Соболева $W_2^1(0,1)$.*

Определение 2.2. *Рассмотрим $\|u_n - u_m\|_{W_2^1(0,1)}$ - фундаментальная, тогда Обобщённой производной функции и называется $\lim\limits_{n\to\infty} u_n' = v$*

Лемма 2.1. *Пусть* $u(x) \in C^1[0,1]$*, тогда* $\|u\|_C \leqslant \sqrt{2}\|u\|_{W_2^1(0,1)}$

Теорема 9. *(Вложения)*
Пространство $W_2^1(0,1) \subset C(0,1)$*, причем ограничено (*$\exists M > 0: \ \|u\|_C \leqslant M\|u\|_{W_2^1(0,1)}$*)*

Теорема 10. *Вложение* $W_2^1(0,1) \subset C(0,1)$ *компактно.*

Следствие 2.1. *Из последовательности, ограниченной в* $W_2^1(0,1) \subset C(0,1)$ *можно выбрать подпоследовательность, сходяющуюся в* $L_2[0,1]$*.*

2.1 Обобщённые решения краевых задач

Пространство $\dot{W}_2^1(0,1)$ - пространство Соболева, но функции дополнительно обращаются в 0 на концах отрезка.
1-ая краевая задача

$$\begin{cases} \left(a(t)u'(t)\right)' - c(t)u(t) = -f(t), \\ u(0) = u(1) = 0, \\ 0 < a_0 \leqslant a(t) \leqslant a1 < \infty, \\ 0 \leqslant c_0 \leqslant c(t) \leqslant c1 < \infty, \\ f(t) \in L_2(0,1), \\ a(t), b(t) - \text{Ограниченные и измеримые на [0,1]} \end{cases} \tag{2.1}$$

Определение 2.3. *Обобщённым решением первой краевой задачи (2.1) называется функция* $u \in \dot{W}_2^1(0,1)$*, удовлетворяющая тождеству* $\forall v \in \dot{W}_2^1(0,1)$

$$\int_0^1 \left(a(t)u'(t)v'(t) + c(t)u(t)v(t)\right) dt = \int\limits_0^1 f(t)v(t)dt$$

Теорема 11. *Обобщённое решение задачи (2.1) существует и единственно*

Лемма 2.2. *(Неравенство Пуанкаре)*
Пусть $u \in \dot{W}_2^1(0,1)$*, тогда* $\int\limits_0^1 u^2 dt \leqslant \int (u')^2 dt$

2-ая краевая задача

$$\begin{cases} \left(a(t)u'(t)\right)' - c(t)u(t) = -f(t), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \\ 0 < a_0 \leqslant a(t) \leqslant a1 < \infty, \\ 0 < c_0 \leqslant c(t) \leqslant c1 < \infty, \\ f(t) \in L_2(0,1), \\ a(t), b(t) - \text{Ограниченные и измеримые на [0,1]} \end{cases} \tag{2.2}$$

Определение 2.4. *Обобщённым решением второй краевой задачи (2.2) называется функция* $u \in \dot{W}_2^1(0,1)$*, удовлетворяющая тождеству* $\forall v \in \dot{W}_2^1(0,1)$

$$\int_0^1 \left(a(t)u'(t)v'(t) + c(t)u(t)v(t)\right) dt = \int\limits_0^1 f(t)v(t)dt$$

Теорема 12. *Обобщённое решение задачи (2.2) существует и единственно*