Системы уравнений "реакция-диффузия" в ограниченной области

В.В. Нефедов, В.В. Тихомиров

Рассматриваются задача динамики и предельного поведения репликаторных систем. Основной целью исследования является изучение влияния фактора пространства на поведение распределённых систем. Рассмотрим общую постановку.

Пусть в ограниченной области задана система вида

где ,

- симметрическая матрица, имеющая положительные собственные значения.

В начальный момент времени заданы начальные условия

и на границе области Ω заданы однородные условия Неймана

здесь - внешняя нормаль к границе $\Gamma$.

Системы (1)-(3) являются замкнутыми, когда потоки реагирующих компонент через границу области равны нулю. Эти системы получили название систем "реакция-диффузия". Вектор-функция определяет реакцию компонентов, которая описывается динамической системой

Матрица описывает диффузионные потоки, возникающие в пространстве области Ω. В классическом случае рассматриваются диагональные матрицы . В этом случае не учитываются так называемые кросс-диффузионные потоки, когда диффузионный поток одной из компонент системы оказывает влияние на динамику другой компоненты.

В этой работе будем рассматривать слабые решения [1] задачи (1) - (3), которые являются элементами (при фиксированном ) пространства Соболева с нормой

и при любых представляют гладкую функцию переменной .

Класс таких функций, удовлетворяющих перечисленным выше требованиям, будем обозначать через . В нашей работе мы не обсуждаем вопрос о существовании слабых решений.

Введём следующее понятие.

Определение: *Вектор-функция такая, что*

*называется стационарным положением равновесия системы (1) - (3).*

Если положение равновесия, то его называют пространственно неоднородными. Задача об обтекании пространственно неоднородных равновесий сложна. Будем предполагать, что пространственно однородное положение равновесия, то есть есть решение задачи

Исследование таких положений равновесия дают информацию о предельном положении системы при . Как и в случае динамических систем введем аналог понятия устойчивости по Ляпунову стационарных положений равновесия.

Определение: Положение равновесия системы (1)-(3) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого существует такое, что для любых решений системы (1)-(3) c начальными данными , такими, что выполняется для всех .

Если, кроме того, выполняется условие в пространстве при , то положение равновесия называется асимптотически устойчивым.

Пусть далее - пространственно-однородное положение равновесия системы (1)-(3).

Рассмотрим матрицу Якоби вектор-функции : .

Исследование устойчивости положения равновесия можно осуществить с помощью аналога теоремы Ляпунова-Пуанкаре об устойчивости по первому приближению, и оно сводится к исследованию спектра следующей задачи на собственные значения:

Здесь - символ Кронекера.

Соответствующие собственные значения образуют неубывающую последовательность

Если для всех собственных значений задачи (5) выполняется условие то положение равновесия является асимптотически устойчивым. Точную формулировку этой теоремы можно найти в [2]. Рассмотрим линейное преобразование

где C - матрица такая, что . - транспонированная.

С учётом преобразования система (5) принимает вид

где . Решение задачи (6) будем искать в виде

здесь - некоторый вектор из , а - собственные функции следующей краевой задачи на собственные значения:

Известно [3], что задача (7) имеет биортогональную систему собственных функций , которые образуют систему в причём

где - символ Кронекера.

Соответствующие собственные значения образуют неубывающую последовательность

С учётом представления (7) исходная задача принимает вид

Если умножить это равенство скалярно в пространстве на функции и воспользоваться соотношением (9), то получим матричные равенства для векторов в форме задач на собственные значения:

Таким образом, задача об отыскании собственных значений континуальной системы (0.5) сводится к алгебраической задаче о собственных значений счетной последовательности матриц вида

Если для всех собственных значений задачи (10) выполняется условие то пространственно-однородное положение равновесия системы (1)-(3) является устойчивым.

Если же хотя бы для одного значения это условие не выполняется, то положение равновесия неустойчиво.

Рассмотрим несколько примеров применения сформулированных результатов к конкретным задачам.

Пример:

Запишем уравнение Фишера-Колмогорова на интервале с однородными краевыми условиями Неймана

Это уравнение имеет два пространственно-однородных положения равновесия и . Второе положение равновесия определяется собственными функциями и собственными значениями задачи (8):

Равенство (11) принимает вид

Следовательно, положение равновесия является асимптотически устойчивым.

В случае из равенства (11) получим, что

Положение равновесия неустойчиво .

Рассмотрим ещё один пример системы типа реакция-диффузия.

Пример:

Исследуем влияние диффузии на поведение замкнутой системы "реакция-диффузия" общего вида при . Остановимся на случае . Рассмотрим систему вида

- коэффициенты диффузии.

Функции и удовлетворяют условиям Неймана (случай замкнутой системы)

На границе ограниченной замкнутой области с начальными условиями

Ради определённости будем предполагать, что область является квадратом: .

Вектор-функция определяет реакцию компонента системы (13)-(14), которая описывается динамической системой

Матрица описывает диффузионные потоки, возникающие в области . Решения системы (12)-(14) будем рассматривать в пространстве Соболева .

Для исследования поведения решений системы (12)-(14) при воспользуемся энергетическими (вариационными) методами [3]-[5]. Для этого введем в рассмотрение (вариационную) функцию времени

которая играет роль энергии системы.

Вычислим производную функции (15) с учётом (12)-(14), в результате получим

Формулу (16) можно представить в виде

где

Введём обозначения

Теорема:

Если , то и поэтому все частные производные стремятся к нулю при , а само решение выходит на константу.

Доказательство:

Рассмотрим интеграл (17). После интегрирования по частям, с учётом краевых условий, запишем (17) в виде

тогда в силу обозначений (19) и неравенства Коши-Буняковского имеем

так как , то для первого из интегралов в правой части последнего неравенства справедливо неравенство Фридрихса, а потому справедливы неравенства

Используя (20) и (21), получим оценку

Из последнего неравенства заключаем, что, если . Поскольку , то , и поэтому и при .

Применяя аналогичные рассуждения в отношении интеграла (18), получаем соотношении , а следовательно, и соотношение . Поэтому очевидно, что все частные производные стремятся к нулю при , а само решение выходит на константу. Теорема доказана.

Замечание:

Ясно, что полученный результат распространяется на случай системы (1)-(3), однако, этот результат не всегда удается использовать в конкретных случаях, так как вычисление постоянной зависит от априорных знаний о решении системы (12)-(14) (или системы (1) - (3)) и его производных.

Результат:

Предложенный метод [3-4] позволяет сохранить устойчивость при достаточно больших коэффициентах диффузии. Такого вида устойчивости принято называть пространственно-диффузионной устойчивостью, даже в случае неустойчивой системы (при ).