Εργασία στα Τηλεπικοινωνιακά

Βασίλειος Κουκινογένης it2021042

Μέρος 1ο

Αρχικά, γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $Q(x)$ για $x=\sqrt{\frac{6SNRb\log_2 M}{M^2-1}}>0$ έχει διάφορες προσεγγίσεις που έχουν προταθεί κατά καιρούς στην βιβλιογραφία. Μια από αυτές είναι η $Q_1(x)=\exp(-x^2/2)$. Η συγκεκριμένη προσέγγιση είναι εύκολα αντιστρέψιμη με απλές μαθηματικές πράξεις. Έχουμε:

$$y=f(x) \Rightarrow y=Q_1(x) \Rightarrow y=e^{(-x^2/2)} \xRightarrow{\ln} \ln y=\ln e^{(-x^2/2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y=-x^2/2 \Rightarrow -2\ln y=x^2 \Rightarrow \sqrt{-2\ln y}=\sqrt{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x|=\sqrt{-2\ln y} \Rightarrow$$

Θεωρούμε ότι το $x>0$ καθώς έχουμε $x=\sqrt{\frac{6SNRb\log_2 M}{M^2-1}}$ από την εκφώνηση.

$$\Rightarrow x=\sqrt{-2\ln y} \Rightarrow f^{-1}(y)=\sqrt{-2\ln y} \Rightarrow Q_1^{-1}(y)=\sqrt{-2\ln y} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\text{θέτοντας } y=x} Q_1^{-1}(x)=\sqrt{-2\ln x}$$

Στη συνέχεια έχουμε:

$$P_b=2\frac{M-1}{M\log_2 M}\,Q\left(\sqrt{\frac{6SNRb\log_2 M}{M^2-1}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_b \cdot M \log_2 M}{2(M-1)} = Q\left(\sqrt{\frac{6 SNR_b \log_2 M}{M^2-1}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = Q(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q^{-1}(y) = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q^{-1}\left(\frac{P_b \cdot M \log_2 M}{2(M-1)}\right) = \sqrt{\frac{6 SNR_b \log_2 M}{M^2-1}} \quad (1)$$

Με $Q^{-1}(x) = \sqrt{-2\ln x}$, άρα

$$Q^{-1}\left(\frac{P_b \cdot M \log_2 M}{2(M-1)}\right) = \sqrt{-2\ln\left(\frac{P_b \cdot M \log_2 M}{2(M-1)}\right)} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \sqrt{-2\ln\left(\frac{P_b \cdot M \log_2 M}{2(M-1)}\right)} = \sqrt{\frac{6 SNR_b \log_2 M}{M^2-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\ln\left(\frac{P_b \cdot M \log_2 M}{2(M-1)}\right) = \frac{6 SNR_b \log_2 M}{M^2-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{P_b \cdot M \log_2 M}{2(M-1)}\right) = SNR_b \cdot \frac{\log_2 M}{M^2-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SNR_b = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(M^2-1)}{\log_2 M} \cdot \ln\left(\frac{P_b \cdot M \log_2 M}{2(M-1)}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow SNR_b = f(M)$, αν θεωρήσουμε ότι το P_b είναι σταθερό

Μέρος 2°

Έστω ότι έχουμε ένα γράμμα "V", το οποίο βάσει του κώδικα ASCII μετατρέπεται στην εξής σειρά από 8bits: 01010110.

Για τα διάφορα M έχουμε:

M=2 Gray Code Bits: [0,1,0,1,0,1,1,0]
PPM Symbols: [0,1,0,1,0,1,1,0]

M=4 Gray Code Bits: [01,01,01,11]
PPM Symbols: [1,1,1,3]

M=8 Gray Code Bits: [011,111,110] ← Προσθέτουμε ένα 0 στο 10, οπότε γίνεται 100 το οποίο μετατρέπεται σε 110 με βάση τον κώδικα gray
PPM Symbols: [3,7,6]

M=16 Gray Code Bits: [0111,0101]
PPM Symbols: [7,5]

Επίσης έχουμε $T_s = \frac{\log_2 M}{R_b} = \log_2 M \cdot 10^{-9}$

Έστω M=2

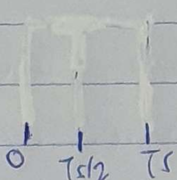
$T_s = \log 2M \cdot 10^{-9} \Rightarrow T_s = 10^{-9}$

Γνωρίζουμε ότι για $M=2$ και $T_s = 10^{-9}$ στη διάρκεια του πρώτου συμβόλου ($i=0$) ο παλμός που αντιστοιχεί στο k-οστό σύμβολο, $0 \le k \le 1$ καθορίζεται από την σχέση
$p(t)=1$ εάν $kT_s/M \le t < (k+1)T_s/M$ ενώ $p(t)=0$ διαφορετικά.

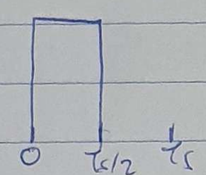
Δηλαδή για $k=0$ έχουμε
$p(t)=1$ εάν $0 \le t < T_s/2$ ενώ $p(t)=0$ εάν $T_s/2 \le t < T_s$

Ενώ για $k=1$ έχουμε
$p(t)=1$ εάν $T_s/2 \le t < 2T_s/2$ ενώ $p(t)=0$ εάν $0 \le t < T_s/2$
δηλαδή $T_s/2 \le t < T_s$

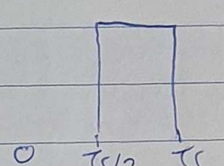
Π.χ. Αν είχαμε ένα σύμβολο σχηματισμού θα είχαμε:



Αν k=0 θα είχαμε τον εξής παλμό

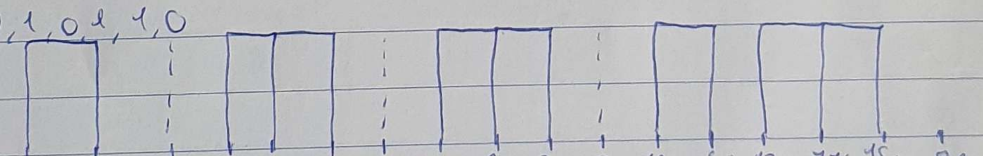


Αν k=1 θα είχαμε τον εξής παλμό



Επίσης γνωρίζουμε ότι για τα επόμενα σύμβολα οι παλμοί μετατοπίζονται κατά Ts, συνεπώς στην περίπτωσή μας θα έχουμε:

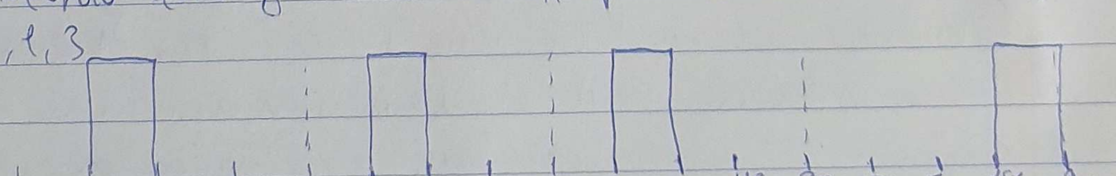
0,1,0,1,0,1,1,0



όπου $T_s = 10^{-9}$

Με παρόμοιο τρόπο για $M=4$ θα έχουμε: (Χωρίζουμε το Ts σε 4 κομμάτια)

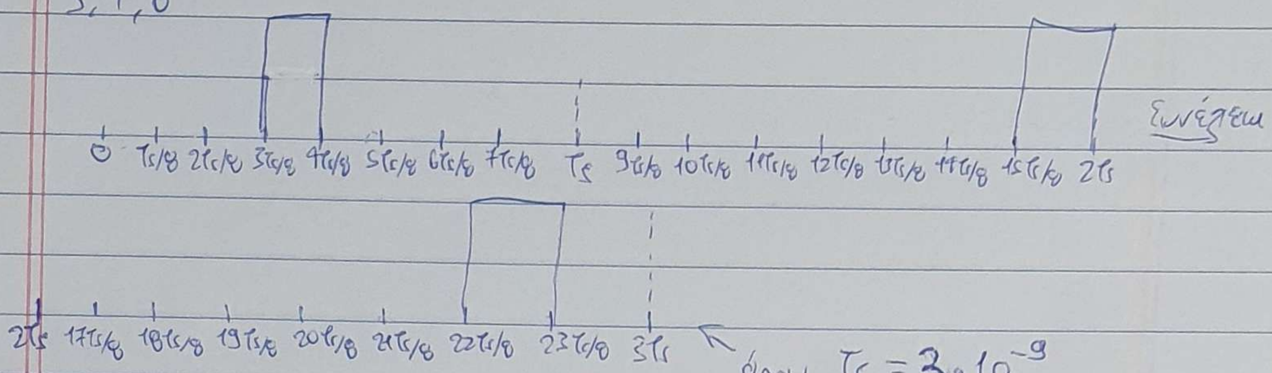
1,1,1,3



όπου $T_s = 2 \cdot 10^{-9}$

Με παρόμοιο τρόπο για $M=8$ θα έχουμε: (Χωρίζουμε το T_s σε 8 κομμάτια)

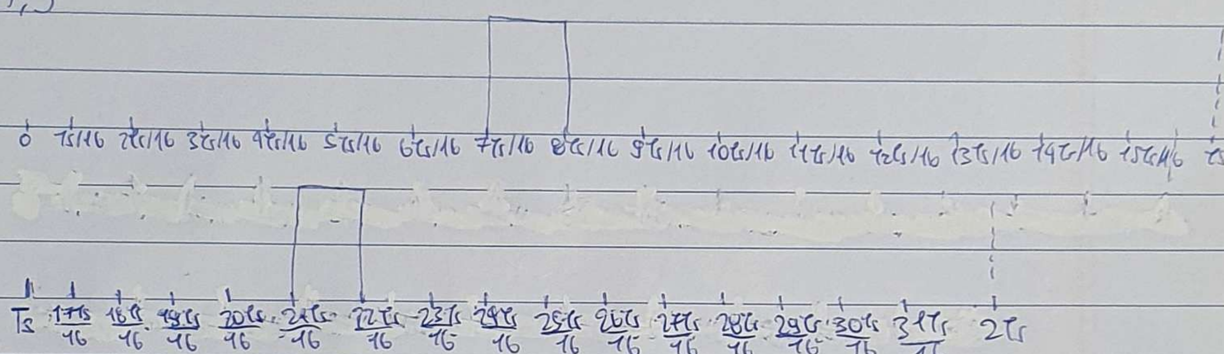
3, 7, 6



όπου $T_s = 3 \cdot 10^{-9}$

Τέλος, για $M=16$ θα έχουμε: (Χωρίζουμε το T_s σε 16 κομμάτια)

7, 5



όπου $T_s = 4 \cdot 10^{-9}$