Υπολογιστικά Μαθηματικά

Εργασία 2019-2020

Ομάδα 11:
Γεωργούλας Δημοσθένης 4039
Παπανικολάου Νικόλαος 4145
Στεργίου Βασίλειος 4300

Πρόβλημα 1

α)(Euler)

Για την ψ ο τύπος του Euler είναι:

$$\psi_{n+1}=\psi_n+h\psi_n'$$

Με ψ':

$$\psi_{n+1}'=\psi_n'+h\psi_n''$$

Για την εξίσωση (3) έχουμε:

$$\psi''=\frac{n_z-D_\psi|\psi'|\psi'}{m_z}(1)$$

Άρα από την σχέση (1) τύπος γίνεται:

$$\psi_{n+1}'=\psi_n'+h\frac{n_z-D_\psi|\psi_n'|\psi_n'}{m_z}$$

Για την y ο τύπος του Euler είναι:

$$y_{n+1}=y_n+hy_n'$$

Με y':

$$y_{n+1}'=y_n'+hy_n''$$

Για την εξίσωση (2) έχουμε:

$$y''=\frac{\frac{f_y-D_y|y'|y'}{m+3m_a}+\cos(\psi)\psi'x'+\sin(\psi)\psi'y'}{\cos(\psi)}(2)$$

Άρα από την σχέση (2) τύπος γίνεται:

$$y_{n+1}'=y_n'+h\frac{\frac{f_y-D_y|y_n'|y_n'}{m+3m_a}+\cos(\psi_n)\psi_n'x_n'+\sin(\psi_n)\psi_n'y_n'}{\cos(\psi_n)}$$

Για την x ο τύπος του Euler είναι:

$$x_{n+1}=x_n+hx_n'$$

Με x':

$$x_{n+1}'=x_n'+hx_n''$$

Για την εξίσωση (1) έχουμε:

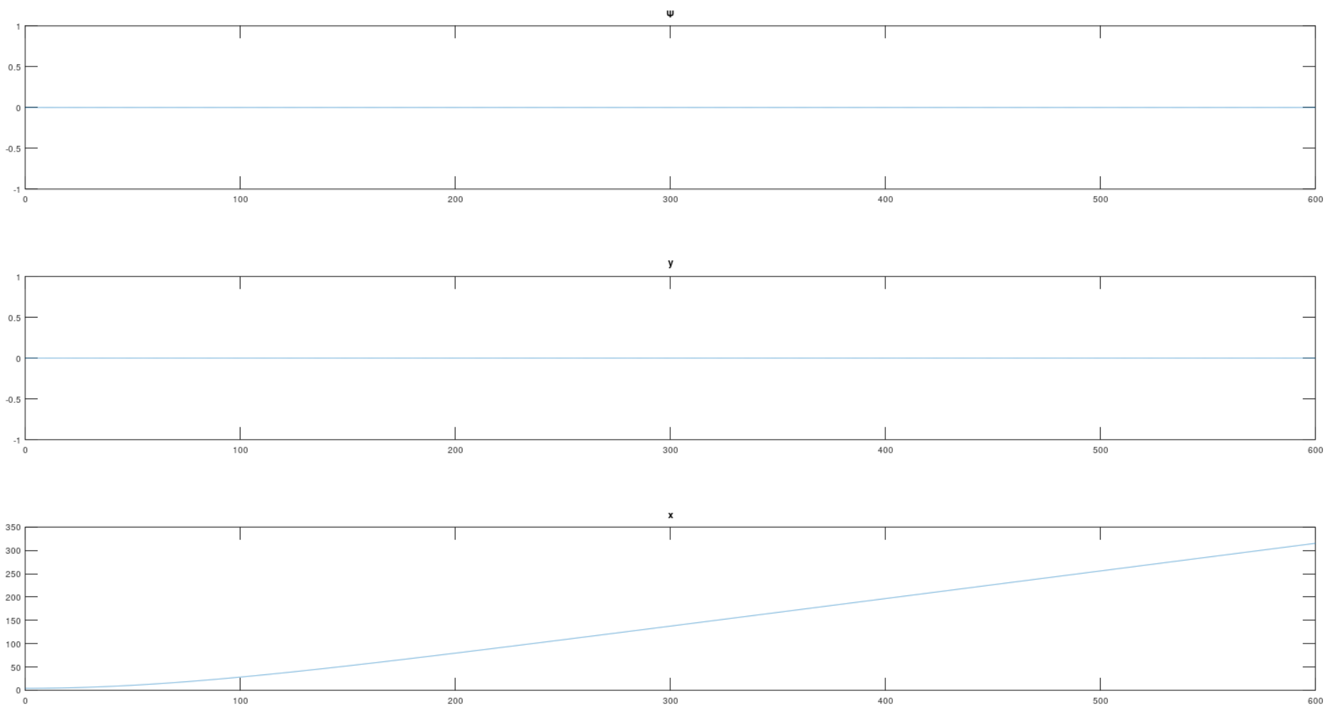
$$x''=\frac{\frac{f_x-D_x|x'|x'}{m+3m_a}+\sin(\psi)\psi'x'-\cos(\psi)\psi'y'}{\cos(\psi)}\quad(3)$$

Άρα από την σχέση (3) τύπος γίνεται:

$$x_{n+1}'=x_n'+h\frac{\frac{f_x-D_x|x_n'|x_n'}{m+3m_a}+\sin(\psi_n)\psi_n'x_n'-\cos(\psi_n)\psi_n'y_n'}{\cos(\psi_n)}$$

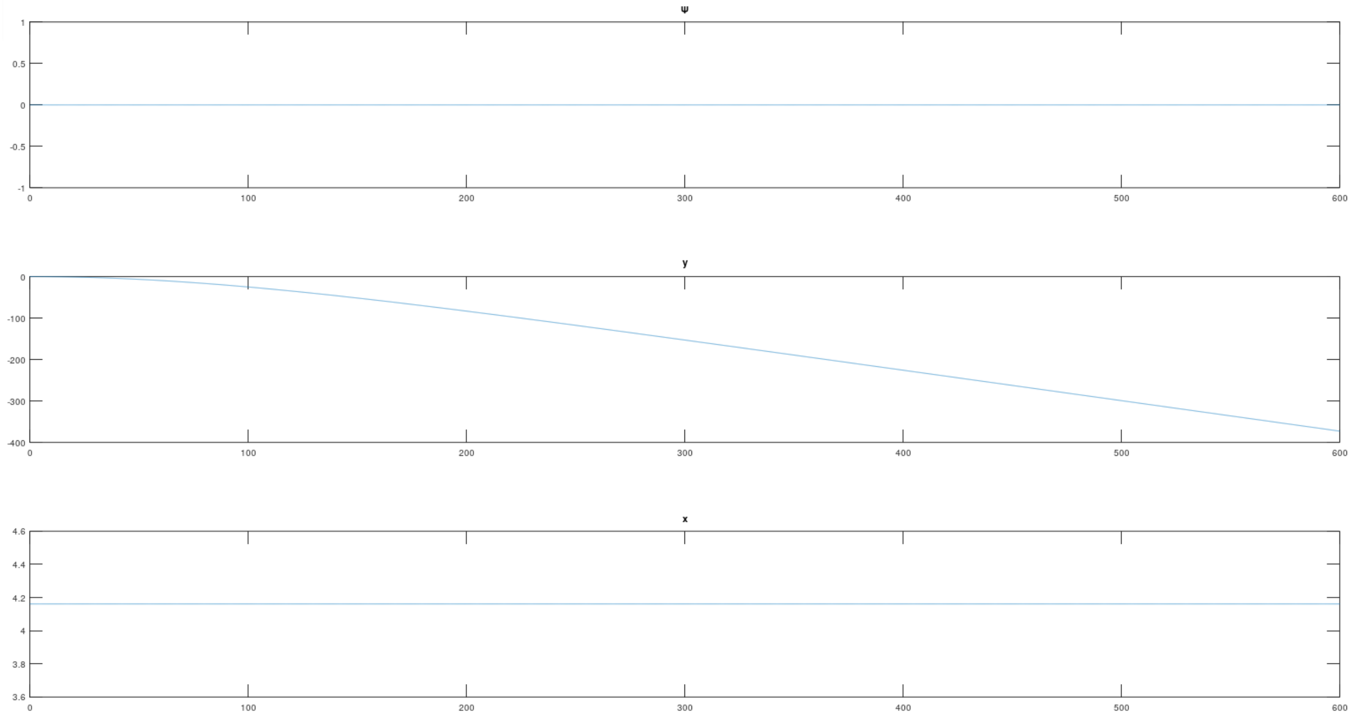
Για Αρχικές Συνθήκες $[f_x,f_y,n_z]^T=[AM,0,0]^T$ έχουμε:

$$\psi_{n+1}=\psi_{n+1}'=y_{n+1}=y_{n+1}'=0$$
$$x_{n+1}'=x_n'+h\frac{f_x-D_x|x_n'|x_n'}{m+3m_a}$$
$$x_{n+1}=x_n+hx_n'$$



Για Αρχικές Συνθήκες $[f_x, f_y, n_z]^T = [0, -AM, 0]^T$ έχουμε:

$$\psi_{n+1} = \psi_{n+1}' = x_{n+1}' = 0$$
$$y_{n+1}' = y_n' + h\frac{f_y - D_y|y_n'|y_n'}{m+3m_a}$$
$$y_{n+1} = y_n + hy_n'$$
$$x_{n+1} = x_0 = AM/1000$$

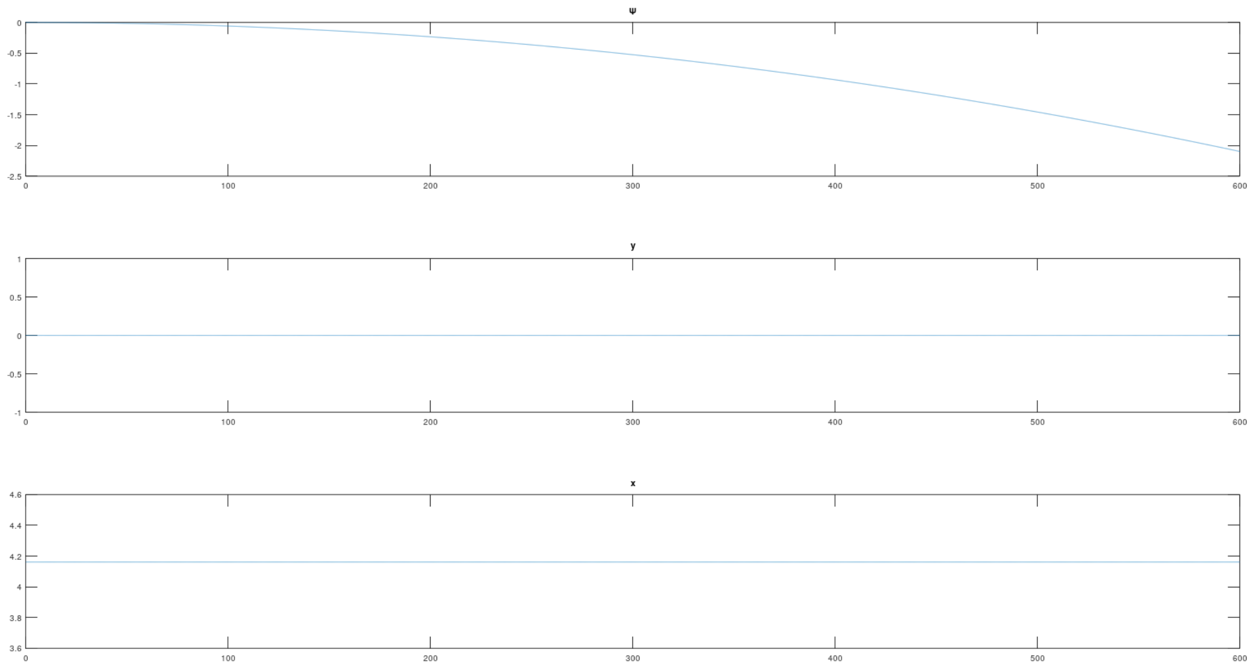


Για Αρχικές Συνθήκες $[f_x, f_y, n_z]^T = [0, 0, -AM]^T$ έχουμε:

$$\psi_{n+1}' = \psi_n' + h\frac{n_z - D_\psi|\psi_n'|\psi_n'}{m_z}$$
$$\psi_{n+1} = \psi_n + h\psi_n'$$

$$y_{n+1}' = y_n' + h\frac{\frac{f_y - D_y|y_n'|y_n'}{m+3m_a} + \cos(\psi_n)\psi_n' x_n' + \sin(\psi_n)\psi_n' y_n'}{\cos(\psi_n)}$$
$$y_{n+1} = y_n + hy_n'$$

$$x_{n+1}' = x_n' + h\frac{\frac{f_x - D_x|x_n'|x_n'}{m+3m_a} + \sin(\psi_n)\psi_n' x_n' - \cos(\psi_n)\psi_n' y_n'}{\cos(\psi_n)}$$
$$x_{n+1} = x_n + hx_n'$$



α)(Τροποποιημένη Euler)

Για την ψ ο τροποποιημένος τύπος του Euler είναι:

$$\psi_{n+1}=\psi_n+hf\left(t_n+\frac{h}{2},\psi_n+\frac{h}{2}\psi_n'\right)$$

Με ψ':

$$\psi_{n+1}'=\psi_n'+hf\left(t_n+\frac{h}{2},\psi_n'+\frac{h}{2}\psi_n''\right)$$

Για την εξίσωση (3) έχουμε:

$$\psi''=\frac{n_z-D_\psi|\psi'|\psi'}{m_z}\,(1)$$

Άρα από την σχέση (1) τύπος γίνεται:

$$\psi_{n+1}'=\psi_n'+hf\left(t_n+\frac{h}{2},\psi_n'+\frac{h}{2}\frac{n_z-D_\psi|\psi_n'|\psi_n'}{m_z}\right)$$

$$\psi_{n+1}'=\psi_n'+h\frac{n_z-D_\psi\left|\psi_n'+\frac{h(n_z-D_\psi|\psi_n'|\psi_n')}{2m_z}\right|\left(\psi_n'+\frac{h(n_z-D_\psi|\psi_n'|\psi_n')}{2m_z}\right)}{m_z}$$

Άρα για την ψ έχουμε: $\psi_{n+1}=\psi_n+h\psi_n'$

Για την y ο τροποποιημένος τύπος του Euler είναι:

$$y_{n+1}=y_n+hf\left(t_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}y_n'\right)$$

Με y':

$$y_{n+1}'=y_n'+hf\left(t_n+\frac{h}{2},y_n'+\frac{h}{2}y_n''\right)$$

Για την εξίσωση (2) έχουμε:

$$y''=\frac{\frac{f_y-D_y|y'|y'}{m+3m_a}+\cos(\psi)\psi'x'+\sin(\psi)\psi'y'}{\cos(\psi)}\quad(2)$$

Άρα από την σχέση (2) τύπος γίνεται:

$$y_{n+1}'=y_n'+hf\left(t_n+\frac{h}{2},y_n'+h\frac{\frac{f_y-D_y|y_n'|y_n'}{m+3m_a}+\cos(\psi_n)\psi_n'x_n'+\sin(\psi_n)\psi_n'y_n'}{2\cos(\psi_n)}\right)$$

$$\textit{Όπου } y_n' \textit{ αντικαθιστούμε } y_{new}=y_n'+h\frac{\frac{f_y-D_y|y_n'|y_n'}{m+3m_a}+\cos(\psi_n)\psi_n'x_n'+\sin(\psi_n)\psi_n'y_n'}{2\cos(\psi_n)}$$

$$y_{n+1}'=y_n'+h\left(\frac{f_y-D_y|y_{new}|y_{new}}{2(m+3m_a)\cos(\psi_n)}+\frac{\psi_n'x_n'}{2}+\frac{\sin(\psi_n)\psi_n'y_{new}}{2\cos(\psi_n)}\right)$$

Για την x ο τροποποιημένος τύπος του Euler είναι:

$$x_{n+1}=x_n+hf\left(t_n+\frac{h}{2},x_n+\frac{h}{2}x_n'\right)$$

Με x':

$$x_{n+1}'=x_n'+hf\left(t_n+\frac{h}{2},x_n'+\frac{h}{2}x_n''\right)$$

Για την εξίσωση (1) έχουμε:

$$x''=\frac{\frac{f_x-D_x|x'|x'}{m+3m_a}+\sin(\psi)\psi'x'-\cos(\psi)\psi'y'}{\cos(\psi)}\quad(3)$$

Άρα από την σχέση (3) τύπος γίνεται:

$$x_{n+1}'=x_n'+hf\left(t_n+\frac{h}{2},x_n'+\frac{h}{2}\frac{\frac{f_x-D_x|x_n'|x_n'}{m+3m_a}+\sin(\psi_n)\psi_n'x_n'-\cos(\psi_n)\psi_n'y_n'}{\cos(\psi_n)}\right)$$

$$\text{όπου } x_{new} \text{ αντικαθιστούμε } x_{new}=x_n'+\frac{h}{2}\left(\frac{\frac{f_x-D_x|x_n'|x_n'}{m+3m_a}+\sin(\psi_n)\psi_n'x_n'-\cos(\psi_n)\psi_n'y_n'}{\cos(\psi_n)}\right)$$

$$x_{n+1}'=x_n'+h\left(\frac{\frac{f_x-D_x|x_{new}|x_{new}}{m+3m_a}+\sin(\psi_n)\psi_n'x_{new}-\cos(\psi_n)\psi_n'y_n'}{\cos(\psi_n)}\right)$$

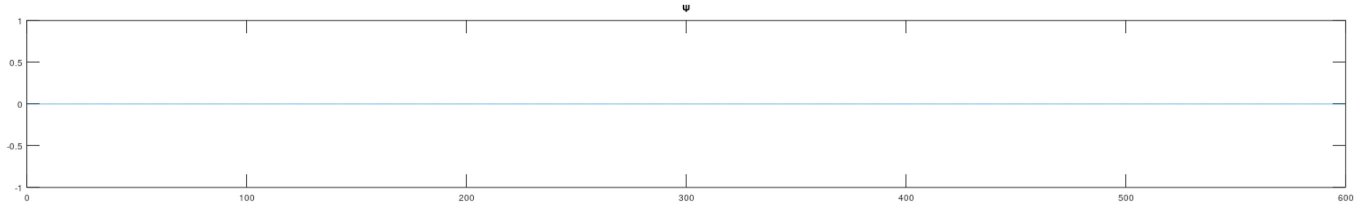
Για Αρχικές Συνθήκες $[f_x,f_y,n_z]^T=[AM,0,0]^T$ έχουμε:

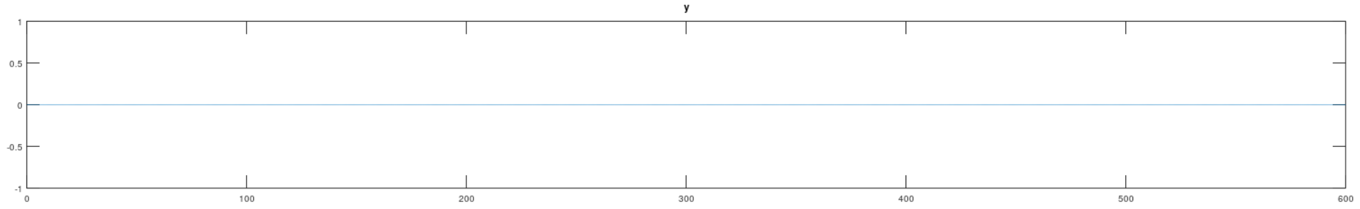
$$\psi_{n+1}=\psi_{n+1}'=y_{n+1}=y_{n+1}'=0$$

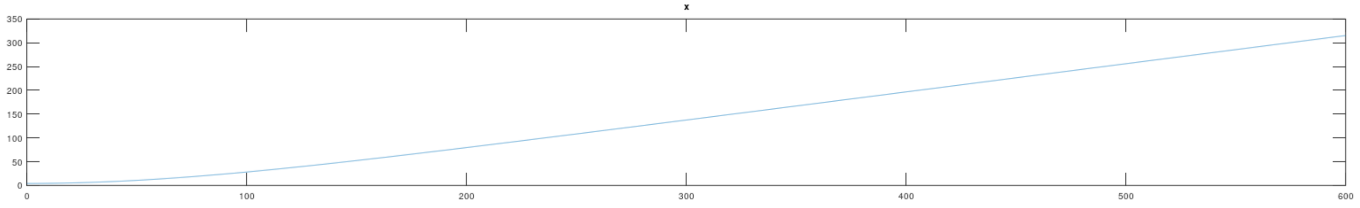
$$x_{new}=x_n'+\frac{h}{2}\frac{f_x-D_x|x_n'|x_n'}{m+3m_a}$$

$$x_{n+1}'=x_n'+h\frac{f_x-D_x\left|x_n'+\frac{h}{2}\frac{f_x-D_x|x_n'|x_n'}{m+3m_a}\right|\left(x_n'+\frac{h}{2}\frac{f_x-D_x|x_n'|x_n'}{m+3m_a}\right)}{m+3m_a}$$

$$x_{n+1}=x_n+hf\left(t_n+\frac{h}{2},x_n+\frac{h}{2}x_n'\right)=x_n+hx_n'$$







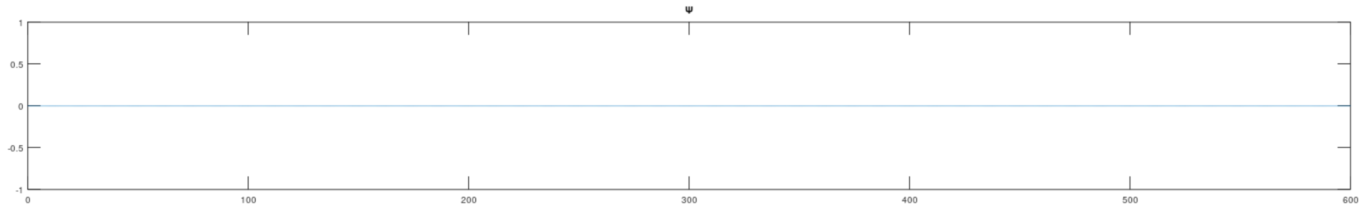
Για Αρχικές Συνθήκες $[f_x, f_y, n_z]^T = [0, -AM, 0]^T$ έχουμε:

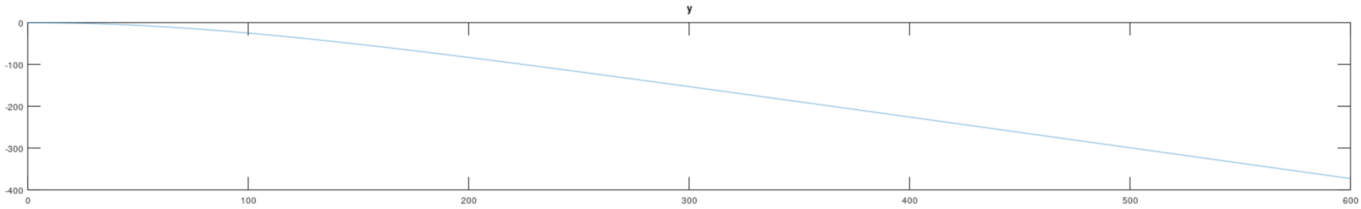
$$\psi_{n+1} = \psi_{n+1}{}' = x_{n+1}{}' = 0$$

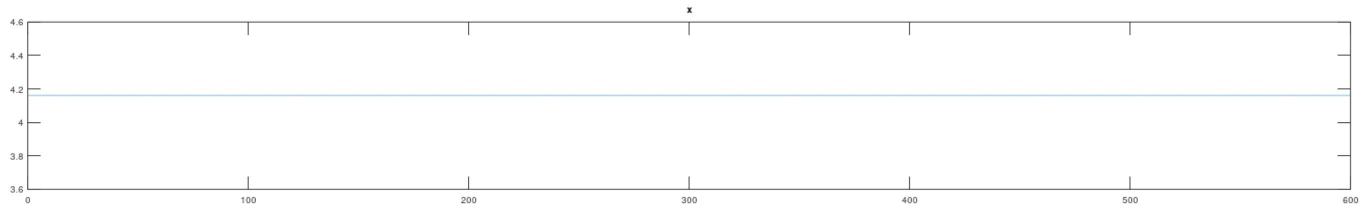
$$y_{n+1}{}' = y_n{}' + h\frac{f_y - D_y|y_n{}'|y_n{}'}{m+3m_a}$$

$$y_{n+1} = y_n + h y_n{}'$$

$$x_{n+1} = x_0 = AM/1000$$







Για Αρχικές Συνθήκες $[f_x, f_y, n_z]^T = [0, 0, -AM]^T$ έχουμε:

$$\psi_{n+1}{}' = \psi_n{}' + h\frac{n_z - D_\psi|\psi_n{}'|\psi_n{}'}{m_z}$$

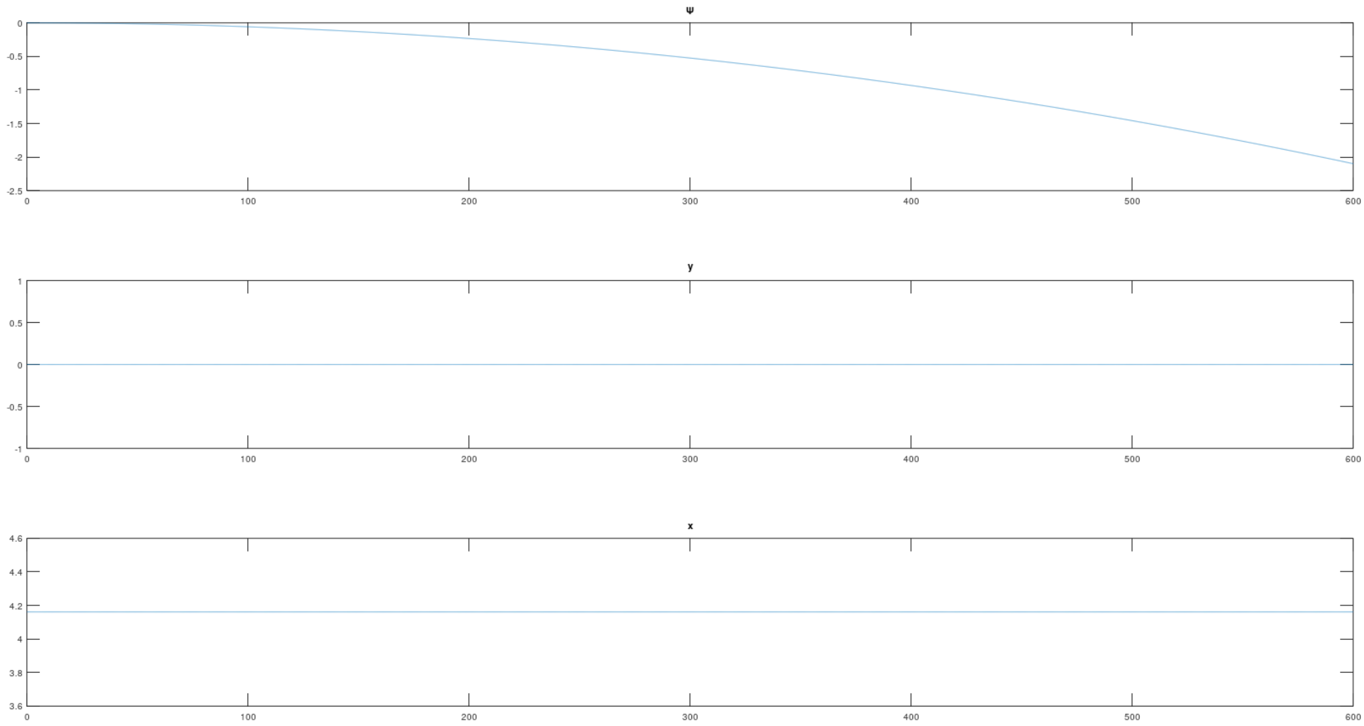
$$\psi_{n+1} = \psi_n + h\psi_n{}'$$

$$y_{n+1}{}' = y_n{}' + h\frac{\dfrac{f_y - D_y|y_n{}'|y_n{}'}{m+3m_a} + \cos(\psi_n)\psi_n{}' x_n{}' + \sin(\psi_n)\psi_n{}' y_n{}'}{\cos(\psi_n)}$$

$$y_{n+1} = y_n + h y_n{}'$$

$$x_{n+1}{}' = x_n{}' + h\frac{\dfrac{f_x - D_x|x_n{}'|x_n{}'}{m+3m_a} + \sin(\psi_n)\psi_n{}' x_n{}' - \cos(\psi_n)\psi_n{}' y_n{}'}{\cos(\psi_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n + h x_n{}'$$



Πρόβλημα 1

α)(Euler)

Για την ψ ο τύπος του Euler είναι:

$$\psi_{n+1}=\psi_n+h\psi_n'$$

Με ψ':

$$\psi_{n+1}'=\psi_n'+h\psi_n''$$

Για την εξίσωση (3) έχουμε:

$$\psi''=\frac{n_z-D_\psi|\psi'|\psi'}{m_z}(1)$$

Άρα από την σχέση (1) τύπος γίνεται:

$$\psi_{n+1}'=\psi_n'+h\frac{K_{p\psi}(\psi_{des}-\psi)-K_{d\psi}\psi'-D_\psi|\psi'|\psi'}{m_z}$$

Για την y ο τύπος του Euler είναι:

$$y_{n+1}=y_n+hy_n'$$

Με y':

$$y_{n+1}'=y_n'+hy_n''$$

Για την εξίσωση (2) έχουμε:

$$y''=\frac{\frac{K_{py}(y_{des}-y)-K_{dy}y'-D_y|y'|y'}{m+3m_a}+\cos(\psi)\psi'x'+\sin(\psi)\psi'y'}{\cos(\psi)}\quad(2)$$

Άρα από την σχέση (2) τύπος γίνεται:

$$y_{n+1}'=y_n'+h\frac{\frac{K_{py}(y_{des}-y_n)-K_{dy}y_n'-D_y|y_n'|y_n'}{m+3m_a}+\cos(\psi_n)\psi_n'x_n'+\sin(\psi_n)\psi_n'y_n'}{\cos(\psi_n)}\quad(2)$$

Για την x ο τύπος του Euler είναι:

$$x_{n+1}=x_n+hx_n'$$

Με x':

$$x_{n+1}'=x_n'+hx_n''$$

Για την εξίσωση (1) έχουμε:

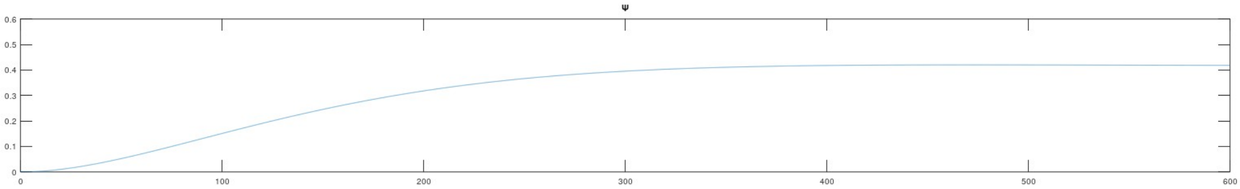
$$x''=\frac{\frac{K_{px}(x_{des}-x)-K_{dx}x'-D_x|x'|x'}{m+3m_a}+\sin(\psi)\psi'x'-\cos(\psi)\psi'y'}{\cos(\psi)}\quad(3)$$

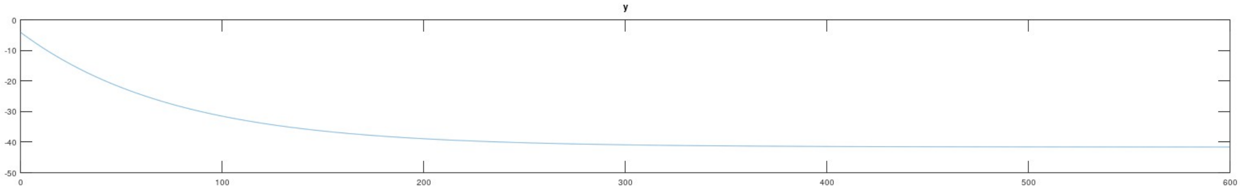
Άρα από την σχέση (3) τύπος γίνεται:

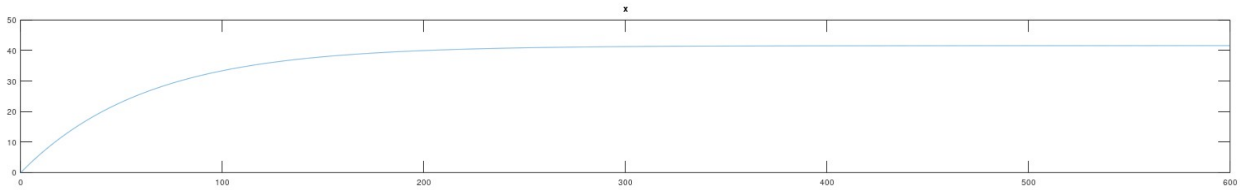
$$x_{n+1}'=x_n'+h\frac{\frac{K_{px}(x_{des}-x)-K_{dx}x'-D_x|x_n'|x_n'}{m+3m_a}+\sin(\psi_n)\psi_n'x_n'-\cos(\psi_n)\psi_n'y_n'}{\cos(\psi_n)}$$

Για τις Αρχικές Συνθήκες έχουμε:

$$\psi_{n+1}=\psi_n+h\psi_n'$$
$$y_{n+1}=y_n+hy_n'$$
$$x_{n+1}=x_n+hx_n'$$







β)(Τροποποιημένη Euler)

Για την ψ ο τροποποιημένος τύπος του Euler είναι:

$$\psi_{n+1}=\psi_n+hf\left(t_n+\frac{h}{2},\psi_n+\frac{h}{2}\psi_n{}'\right)$$

Με ψ':

$$\psi_{n+1}{}'=\psi_n{}'+hf\left(t_n+\frac{h}{2},\psi_n{}'+\frac{h}{2}\psi_n{}''\right)$$

Για την εξίσωση (3) έχουμε:

$$\psi''=\frac{K_{p\psi}(\psi_{des}-\psi)-K_{d\psi}\psi'-D_{\psi}|\psi'|\psi'}{m_z} \quad (1)$$

Άρα από την σχέση (1) τύπος γίνεται:

$$\psi_{n+1}{}'=\psi_n{}'+hf\left(t_n+\frac{h}{2},\psi_n{}'+\frac{h}{2}\frac{K_{p\psi}(\psi_{des}-\psi)-K_{d\psi}\psi'-D_{\psi}|\psi'|\psi'}{m_z}\right)$$

$$\psi_{new}=\psi_n{}'+\frac{h}{2}\frac{K_{p\psi}(\psi_{des}-\psi_n)-K_{d\psi}\psi_n{}'-D_{\psi}|\psi_n{}'|\psi_n{}'}{m_z}$$

$$\psi_{n+1}{}'=\psi_n{}'+h\frac{K_{p\psi}(\psi_{des}-\psi_n)-K_{d\psi}(\psi_{new})-D_{\psi}|\psi_{new}|\psi_{new}}{m_z}$$

$$\psi_{n+1}=\psi_n+hf(t_n+\frac{h}{2},\psi_n+\frac{h}{2}\psi_n')$$

Άρα για την ψ έχουμε:

$$\psi_{n+1}=\psi_n+h(\psi_n'+h\frac{K_{p\psi}(\psi_{des}-\psi_n-\frac{h}{2}\psi_n')-K_{d\psi}(\psi_{new})-D_\psi|\psi_{new}|\psi_{new}}{m_z})$$

Για την y ο τροποποιημένος τύπος του Euler είναι:

$$y_{n+1}=y_n+hf(t_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}y_n')$$

Με y':

$$y_{n+1}'=y_n'+hf(t_n+\frac{h}{2},y_n'+\frac{h}{2}y_n'')$$

Για την εξίσωση (2) έχουμε:

$$y''=\frac{\frac{K_{py}(y_{des}-y)-K_{dy}y'-D_y|y'|y'}{m+3m_a}+\cos(\psi)\psi'x'+\sin(\psi)\psi'y'}{\cos(\psi)}(2)$$

Άρα από την σχέση (2) τύπος γίνεται:

$$y_{n+1}'=y_n'+hf(t_n+\frac{h}{2},y_n'+h\frac{\frac{K_{py}(y_{des}-y)-K_{dy}y'-D_y|y_n'|y_n'}{m+3m_a}+\cos(\psi_n)\psi_n'x_n'+\sin(\psi_n)\psi_n'y_n'}{2\cos(\psi_n)})$$

$$Όπου\ y_n'\ αντικαθιστούμε\ y_{new}=y_n'+h\frac{\frac{K_{py}(y_{des}-y_n)-K_{dy}y_n'-D_y|y_n'|y_n'}{m+3m_a}+\cos(\psi_n)\psi_n'x_n'+\sin(\psi_n)\psi_n'y_n'}{2\cos(\psi_n)}$$

$$y_{n+1}'=y_n'+h(\frac{K_{py}(y_{des}-y)-K_{dy}y_{new}'-D_y|y_{new}|y_{new}}{2(m+3m_a)\cos(\psi_n)}+\frac{\psi_n'x_n'}{2}+\frac{\sin(\psi_n)\psi_n'y_{new}}{2\cos(\psi_n)})$$

Άρα για την y έχουμε:

$$y_{n+1}=y_n+hf(t_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}y_n')$$

$$y_{n+1}=y_n+h(y_n'+h(\frac{K_{py}(y_{des}-y_n-\frac{h}{2}y_n')-K_{dy}y_{new}'-D_y|y_{new}|y_{new}}{2(m+3m_a)\cos(\psi_n)}+\frac{\psi_n'x_n'}{2}+\frac{\sin(\psi_n)\psi_n'y_{new}}{2\cos(\psi_n)}))$$

Για την x ο τροποποιημένος τύπος του Euler είναι:

$$x_{n+1}=x_n+hf(t_n+\frac{h}{2},x_n+\frac{h}{2}x_n')$$

Με x':

$$x_{n+1}'=x_n'+hf(t_n+\frac{h}{2},x_n'+\frac{h}{2}x_n'')$$

Για την εξίσωση (1) έχουμε:

$$x''=\frac{\frac{K_{px}(x_{des}-x)-K_{dx}x'-D_x|x'|x'}{m+3m_a}+\sin(\psi)\psi'x'-\cos(\psi)\psi'y'}{\cos(\psi)}(3)$$

Άρα από την σχέση (3) τύπος γίνεται:

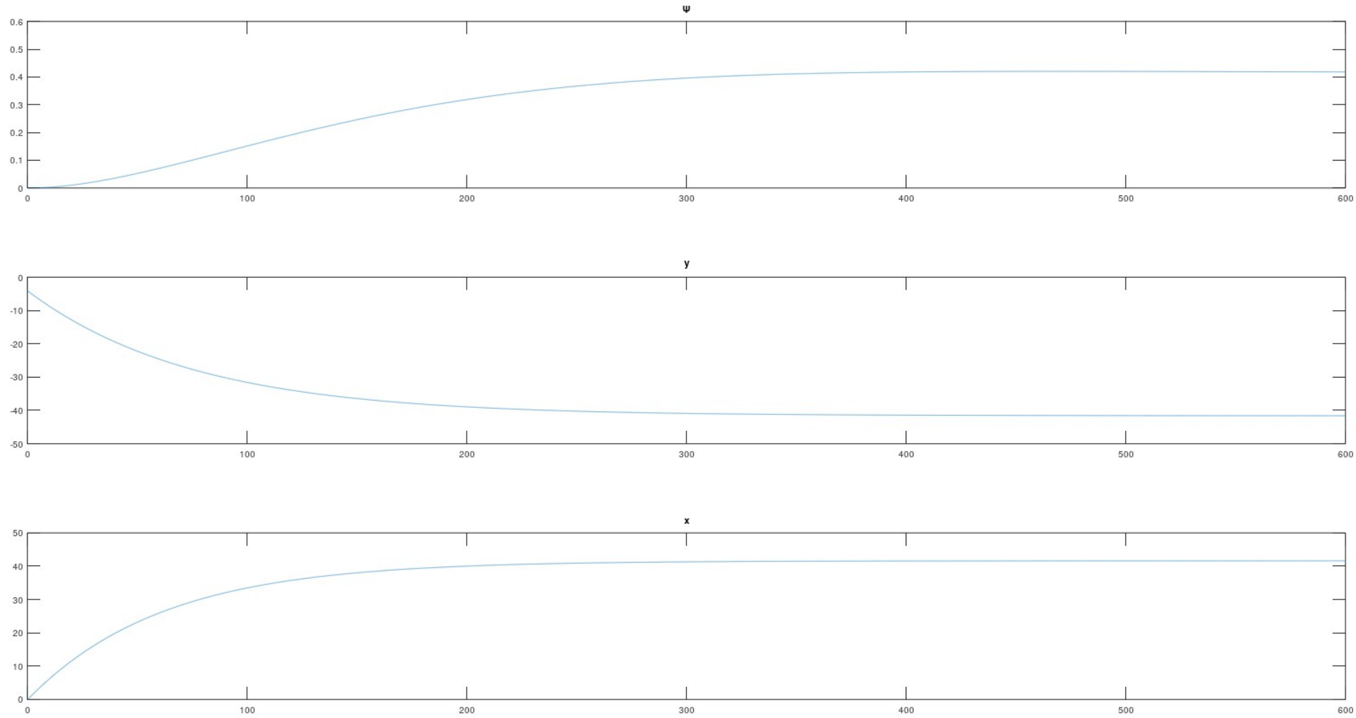
$$x_{n+1}'=x_n'+hf(t_n+\frac{h}{2},x_n'+\frac{h}{2}\frac{\frac{K_{px}(x_{des}-x)-K_{dx}x'-D_x|x_n'|x_n'}{m+3m_a}+\sin(\psi_n)\psi_n'x_n'-\cos(\psi_n)\psi_n'y_n'}{\cos(\psi_n)})$$

$$\acute{o}\pi o \upsilon\, x_{new}\, \alpha\nu\tau\iota\kappa\alpha\theta\iota\sigma\tau o\acute{\upsilon}\mu\varepsilon\, x_{new}=x_n'+\frac{h}{2}(\frac{\frac{K_{px}(x_{des}-x_n)-K_{dx}x_n'-D_x|x_n'|x_n'}{m+3m_a}+\sin(\psi_n)\psi_n'x_n'-\cos(\psi_n)\psi_n'y_n'}{\cos(\psi_n)})$$

$$x_{n+1}'=x_n'+h(\frac{\frac{K_{px}(x_{des}-x)-K_{dx}x_n'-D_x|x_{new}|x_{new}}{m+3m_a}+\sin(\psi_n)\psi_n'x_{new}-\cos(\psi_n)\psi_n'y_n'}{\cos(\psi_n)})$$

$$x_{n+1}=x_n+hf(t_n+\frac{h}{2},x_n+\frac{h}{2}x_n')$$

$$x_{n+1}=x_n+h(x_n'+h(x_n'+h\frac{\frac{K_{px}(x_{des}-x_n-\frac{h}{2}x_n')-K_{dx}x_n'-D_x|x_{new}|x_{new}}{m+3m_a}+\sin(\psi_n)\psi_n'x_{new}-\cos(\psi_n)\psi_n'y_n'}{\cos(\psi_n)}))$$



Πρόβλημα 2

Η διαφορική που έχουμε είναι η:

$$m_z \psi'' + (K_{d\psi} + D_{\psi})\psi' + K_{p\psi}\psi = K_{p\psi}\psi_{des} \quad (1)$$

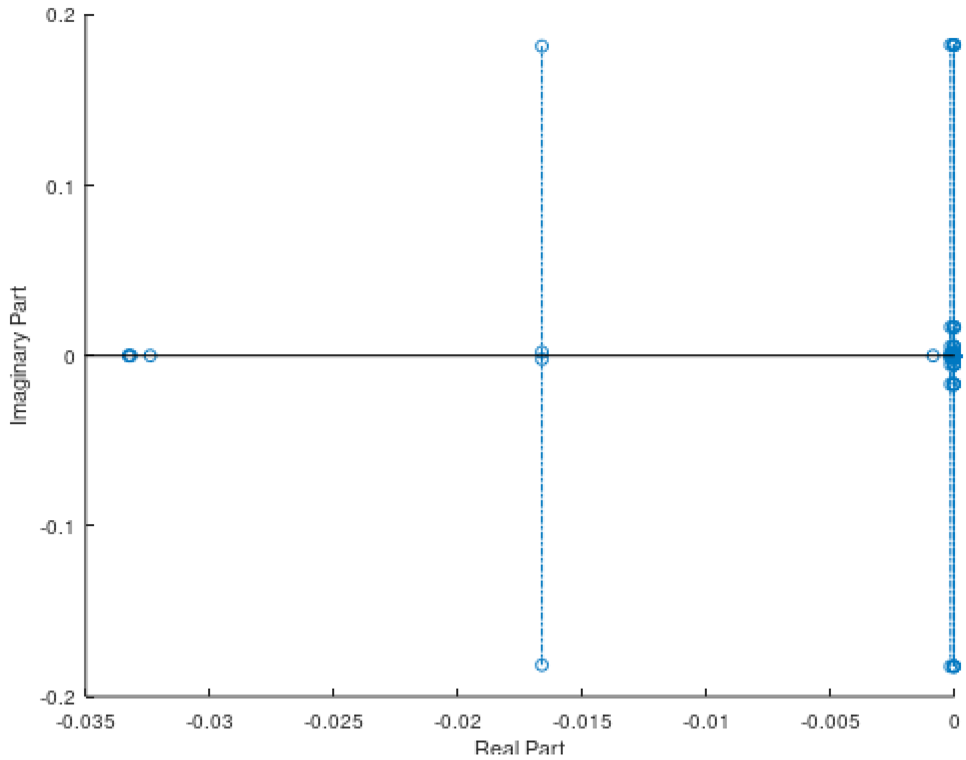
Η συνάρτηση μεταφοράς της είναι η:

$$H(s) = \frac{K_{p\psi}\psi_{des}}{s(m_z s^2 + (K_{d\psi} + D_{\psi})s + K_{p\psi})}$$

η οποία δεν έχει μηδενικά
έχει πόλο το s=0
και λύνοντας την $(m_z s^2 + (K_{d\psi} + D_{\psi})s + K_{p\psi})$ έχουμε ότι, $\Delta = (K_{d\psi} + D_{\psi})^2 - 4 m_z K_{p\psi} \approx -2.2 * 10^{13} < 0$
άρα έχει και 2 διπλές μιγαδικές ρίζες τις

$$s = \frac{-(K_{d\psi} + D_{\psi}) \pm \sqrt{\Delta}}{2 m_z} = -0.00982049719888 \pm 0.00660407882871 i$$

B) (ευστάθεια)
Δοκιμάζοντας διάφορες τιμές για τα $K_{d\psi}\, \kappa\alpha\iota\, K_{p\psi}$ το πραγματικό μέρος των ριζών φαίνεται να απομακρύνεται από το 0 και να πηγαίνει προς το $-\infty$ πράγμα που σημαίνει ότι τα αποτελέσματα της διαφορικής τείνουν πάντα στο 0 και ότι το σύστημα είναι ευσταθές για κάθε τιμή των $K_{d\psi}\, \kappa\alpha\iota\, K_{p\psi}$.



γ)Η γενική λύση της (1) προκύπτει από την λύση της $m_z \psi '' + (K_{d\psi} + D_\psi)\psi ' + K_{p\psi}\psi = 0$ η οποία έχει ρίζες τις $-0.00982049719888 \pm 0.00660407882871 i$.

Η γενική λύση είναι της μορφής

$\psi(t) = c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t}\sin(\mu t)$ ή

$\psi(t) = c_1 e^{-0.00982049719888 t}\cos(0.00660407882871\, t) + c_2 e^{-0.00982049719888 t}\sin(0.00660407882871\, t)$

Η ειδική λύση είναι η: $m_z \psi '' + (K_{d\psi} + D_\psi)\psi ' + K_{p\psi}\psi = K_{p\psi}\psi_{des}$

Θεωρώ ψ(t)=C όπου C μια σταθερά. Άρα ψ΄΄=ψ΄= 0 οπότε η σχέση μετασχηματίζεται ως εξής:

$K_{p\psi} C = K_{p\psi}\psi_{des}$ άρα $\psi_{des} = C = \psi(t)$

Επομένως η ολική λύση είναι (Γενική+Ειδική) $\psi(t) = c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t}\sin(\mu t) + \psi_{des}$

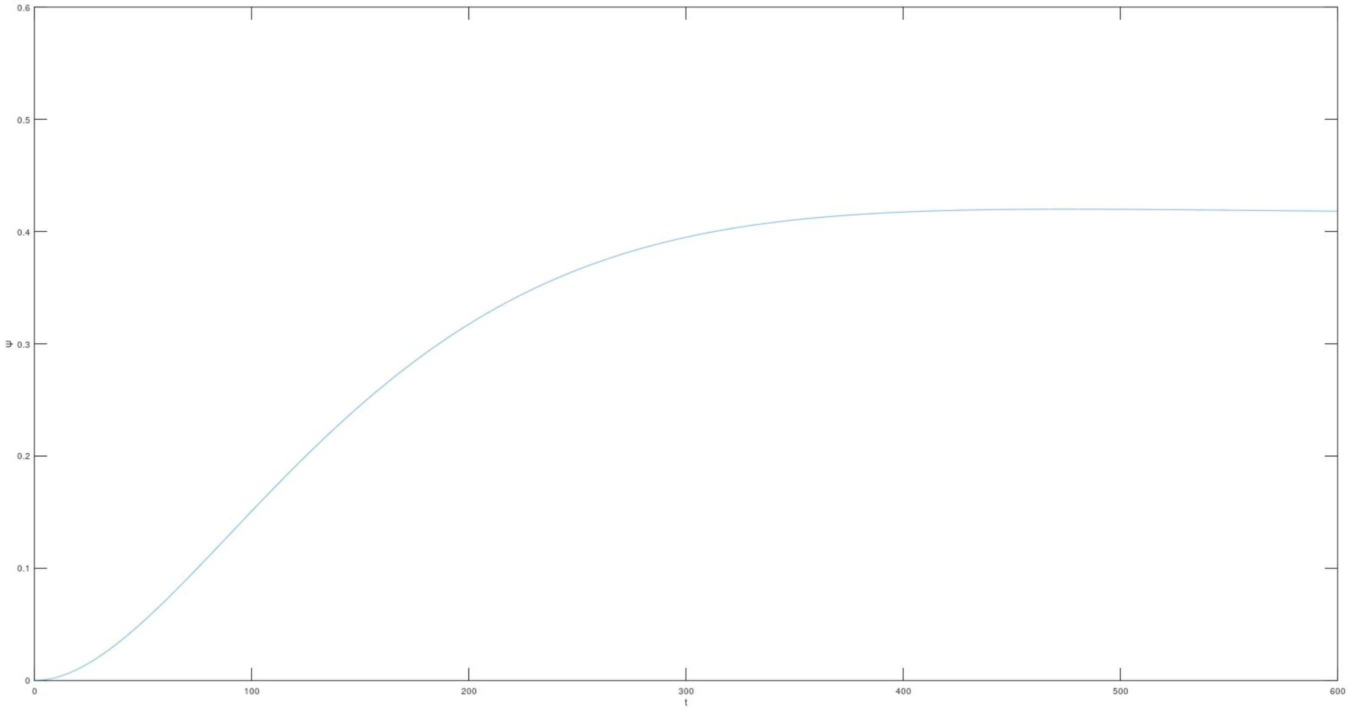
Υπολογίζουμε την παράγωγο της ψ(t): $\psi(t)' = e^{\lambda t}((\lambda c_1 + \mu c_2)\cos(\mu t) + (\lambda c_2 - \mu c_1)\sin(\mu t))$

Αφού ψ(0)=ψ΄(0)=0 τότε έχουμε:

$c_1 + \psi_{des} = 0 \Leftrightarrow c_1 = -\psi_{des}$

$\lambda c_1 + \mu c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = \frac{-\lambda c_1}{\mu} \Leftrightarrow c_2 = \frac{\lambda \psi_{des}}{\mu}$

Επομένως η ολική λύση είναι η: $\psi(t) = -\psi_{des} e^{\lambda t}\cos(\mu t) + \frac{\lambda \psi_{des}}{\mu} e^{\lambda t}\sin(\mu t) + \psi_{des}$



δ)

Ο τύπος του Euler για την ψ είναι:

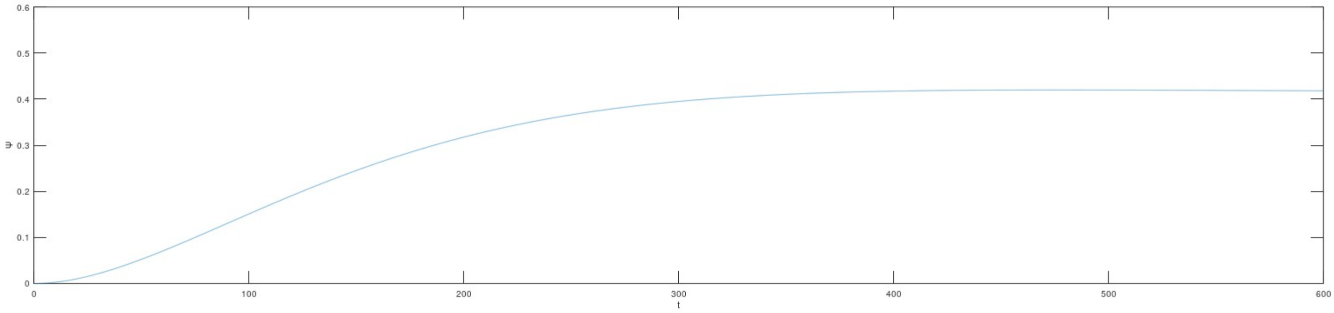
$$\psi_{n+1} = \psi_n + h\psi_n{}'$$

όπου ψ΄:

$$\psi_{n+1}{}' = \psi_n{}' + h\psi_n{}''$$

$$\psi'' = \frac{K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi) - K_{d\psi}\psi' - D_{\psi}\psi'}{m_z}$$

$$\text{Άρα} \quad \psi_{n+1} = \psi_n{}' + h\frac{K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi_n) - K_{d\psi}\psi_n{}' - D_{\psi}\psi_n{}'}{m_z}$$



Για την ψ ο τροποποιημένος τύπος του Euler είναι:

$$\psi_{n+1}=\psi_n+hf\left(t_n+\frac{h}{2},\psi_n+\frac{h}{2}\psi_n'\right)$$

Με ψ':

$$\psi_{n+1}'=\psi_n'+hf\left(t_n+\frac{h}{2},\psi_n'+\frac{h}{2}\psi_n''\right)$$

Για την εξίσωση (3) έχουμε:

$$\psi''=\frac{K_{p\psi}(\psi_{des}-\psi)-K_{d\psi}\psi'-D_\psi\psi'}{m_z} \quad (1)$$

Άρα από την σχέση (1) τύπος γίνεται:

$$\psi_{n+1}'=\psi_n'+hf\left(t_n+\frac{h}{2},\psi_n'+\frac{h}{2}\frac{K_{p\psi}(\psi_{des}-\psi_n)-K_{d\psi}\psi_n'-D_\psi\psi_n'}{m_z}\right)$$

$$\psi_{new}=\psi_n'+\frac{h}{2}\frac{K_{p\psi}(\psi_{des}-\psi_n)-K_{d\psi}\psi_n'-D_\psi\psi_n'}{m_z}$$

$$\psi_{n+1}'=\psi_n'+h\frac{K_{p\psi}(\psi_{des}-\psi_n)-K_{d\psi}(\psi_{new})-D_\psi\psi_{new}}{m_z}$$

$$\psi_{n+1}=\psi_n+hf\left(t_n+\frac{h}{2},\psi_n+\frac{h}{2}\psi_n'\right)$$

Άρα για την ψ έχουμε:

$$\psi_{n+1}=\psi_n+h\left(\psi_n'+h\frac{K_{p\psi}(\psi_{des}-\psi_n-\frac{h}{2}\psi_n')-K_{d\psi}(\psi_{new})-D_\psi\psi_{new}}{m_z}\right)$$