Πανεπιστήμιο Πατρών - Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών ΣΜΗΝ

Αλγοριθμικές Μέθοδοι Βελτιστοποίησης με Έμφαση σε Κατανεμημένα Προβλήματα

Εργαστηριακή Άσκηση 2023 - 24

Ερώτημα 1: Στο ερώτημα αυτό θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά διαφόρων αλγορίθμων βελτιστοποίησης, σε ένα πρόβλημα χωρίς περιορισμούς με τετραγωνική συνάρτηση κόστους. Πιο συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρει η συνάρτηση κόστους

$$f_0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \ ,$$

όπου ο πίνακας $\boldsymbol{A}$ θα δίνεται από την έκφραση

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}(\theta)\boldsymbol{D}(\gamma)\boldsymbol{L}^{-1}(\theta)$$

και οι πίνακες $\boldsymbol{L}$ και $\boldsymbol{D}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\boldsymbol{L}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{D}(\gamma) = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 2-\gamma \end{bmatrix}$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις, θεωρούμε τα πέντε προβλήματα βελτιστοποίησης που δημιουργούνται κρατώντας την παράμετρο $\theta = \pi/4$, και εξετάζοντας τις ακόλουθες τιμές για την παράμετρο

$$\gamma \in \{1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16\} \ .$$

Για τα προβλήματα αυτά θα πρέπει να υλοποιήσετε τον αλγόριθμο Gradient Descent, ο οποίος θα τερματίζει όταν η τιμή της συνάρτησης κόστους αποκτά τιμή μικρότερη από 10^{-5}. Επίσης, το σημείο από το οποίο θα ξεκινά ο αλγόριθμος θα πρέπει πάντα να είναι το σημείο

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Καλείστε να απαντήσετε στα ακόλουθα:

1. Θεωρήστε αρχικά ένα step size t το οποίο είναι σταθερό. Στο ερώτημα αυτό θα πρέπει να επιβεβαιώσουμε πειραματικά για ποιες τιμές του step size ο αλγόριθμος συγκλίνει στη λύση του προβλήματος. Για το λόγο αυτό, καλείστε να επικεντρώσετε στο πρόβλημα με $\gamma = 1/8$, όπου θα πρέπει να βρείτε το διάστημα τιμών του step size για τις οποίες ο αλγόριθμος συγκλίνει. Θα πρέπει να δείτε αν αυτό συμφωνεί με τη θεωρία. Επίσης, για δύο τιμές του t εντός του διαστήματος αυτού, θα πρέπει να σχεδιάσετε (α) την τροχιά που ακολουθεί η ακολουθία διαδοχικών λύσεων του αλγορίθμου, σε ένα διάγραμμα το οποίο θα εμφανίζει και τις ισοϋψείς καμπύλες της συνάρτησης κόστους και (β) την τιμή της συνάρτησης κόστους ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων, σε ημι-λογαριθμική κλίμακα.

2. Εξετάστε πως μεταβάλλεται το πλήθος των επαναλήψεων του αλγορίθμου μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού, για τις διάφορες επιτρεπτές τιμές του step size. Δώστε τα διαγράμματα με το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται για τερματισμό ως προς την τιμή του t για τα προβλήματα με $\gamma = 1/4$ και $\gamma = 1/16$. Τι παρατηρείτε;

3. Υλοποιήστε τη μέθοδο backtracking line search για τον προσδιορισμό του step size σε κάθε επανάληψη. Για τα προβλήματα με $\gamma = 1/4$ και $\gamma = 1/16$ θα πρέπει να σχεδιάσετε (α) την τροχιά που ακολουθεί η ακολουθία διαδοχικών λύσεων του αλγορίθμου, σε ένα διάγραμμα το οποίο θα εμφανίζει και τις ισοϋψείς καμπύλες της συνάρτησης κόστους και (β) την τιμή της συνάρτησης κόστους ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων, σε ημι-λογαριθμική κλίμακα. Για τη μέθοδο backtracking, χρησιμοποιήστε τις τιμές των παραμέτρων $\alpha = 1/4$ και $\beta = 9/10$.

4. Υλοποιήστε τη μέθοδο exact line search για τον προσδιορισμό του step size σε κάθε επανάληψη. Για τα προβλήματα με $\gamma = 1/4$ και $\gamma = 1/16$ θα πρέπει να σχεδιάσετε (α) την τροχιά που ακολουθεί η ακολουθία διαδοχικών λύσεων του αλγορίθμου, σε ένα διάγραμμα το οποίο θα εμφανίζει και τις ισοϋψείς καμπύλες της συνάρτησης κόστους και (β) την τιμή της συνάρτησης κόστους ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων, σε ημι-λογαριθμική κλίμακα. Στο ερώτημα αυτό, θα πρέπει να συμπεριλάβετε τις μαθηματικές εκφράσεις και τον αναλυτικό τρόπο με τον οποίο εξάχθηκαν αυτές οι εκφράσεις για την υλοποίηση της μεθόδου exact line search.

5. Στο ερώτημα αυτό θα πρέπει να συγκρίνουμε τις μεθόδους backtracking line search και exact line search ως προς το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται προκειμένου να ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού. Για το λόγο αυτό, θα πρέπει να δημιουργήσετε ένα διάγραμμα στο οποίο θα απεικονίζεται το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται, ως προς την παράμετρο γ. Θα πρέπει να εξετάσετε όλες τις τιμές $\gamma \in \{1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16\}$ και να δώσετε στο ίδιο διάγραμμα τις καμπύλες για τις δυο μεθόδους προσδιορισμού του step size.

Ερώτημα 2:[1] Στο ερώτημα αυτό θα ασχοληθούμε με μια μέθοδο παρεμβολής για τη συμπλήρωση δεδομένων που λείπουν από μια εικόνα. Μια εικόνα αποχρώσεων του γκρίζου μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν $m \times n$ πίνακα $\boldsymbol{I}$ ο οποίος σε κάθε στοιχείο του περιέχει την ένταση του αντίστοιχου εικονοστοιχείου. Υποθέτουμε πως γνωρίζουμε τις τιμές των εντάσεων για ένα υποσύνολο των εικονοστοιχείων. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε πως γνωρίζουμε τις τιμές $\boldsymbol{I}_{ij}$ για $(i,j) \in \mathcal{K} \subset \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}$. Σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε κάποια μέθοδο εκτίμησης των εντάσεων για τα εικονοστοιχεία που λείπουν.

Θεωρούμε πως η ανακατασκευασμένη εικόνα, που περιέχει και τις εκτιμήσεις των εντάσεων για τα στοιχεία που λείπουν, μπορεί να αναπαρασταθεί από τον πίνακα $\hat{\boldsymbol{I}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Η ανακατασκευασμένη εικόνα θα πρέπει να είναι ακριβώς ίση με την αρχική εικόνα για όλα τα εικονοστοιχεία για τα οποία γνωρίζουμε την έντασή τους, δηλαδή, θα πρέπει $\hat{\boldsymbol{I}}_{ij} = \boldsymbol{I}_{ij},\ \forall\, (i,j)\ \in \mathcal{K}$. Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε σε αυτές τις συνθήκες ως περιορισμούς παρεμβολής.

Η ανακατασκευή θα επιτευχθεί ελαχιστοποιώντας μια “μετρική τραχύτητας”, η οποία έχει μικρές τιμές για “ομαλές” εικόνες, δηλαδή εικόνες στις οποίες γειτονικά εικονοστοιχεία έχουν παρόμοιες τιμές. Η ελαχιστοποίηση αυτή θα γίνει υπό τους περιορισμούς παρεμβολής. Ως μετρική τραχύτητας, θα εξετάσουμε τη συνολική τετραγωνική μεταβολή

$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\hat{\boldsymbol{I}}_{ij} - \hat{\boldsymbol{I}}_{i-1,j}\right)^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=2}^{n}\left(\hat{\boldsymbol{I}}_{ij} - \hat{\boldsymbol{I}}_{i,j-1}\right)^2$$

και τη συνολική απόλυτη μεταβολή (total variation)

$$\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|\hat{\boldsymbol{I}}_{ij} - \hat{\boldsymbol{I}}_{i-1,j}\right| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=2}^{n}\left|\hat{\boldsymbol{I}}_{ij} - \hat{\boldsymbol{I}}_{i,j-1}\right|$$

Τα προβλήματα της ελαχιστοποίησης αυτών των μετρικών τραχύτητας υπό τους περιορισμούς παρεμβολής, είναι κυρτά προβλήματα.

Για το ερώτημα αυτό θα πρέπει να υλοποιηθούν οι μέθοδοι αποκατάστασης εικόνας για τις δύο αυτές μετρικές, χρησιμοποιώντας τη βιβλιοθήκη CVX. Ως εικόνα εισόδου θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε την εικόνα *server64.png* που θα βρείτε στο e-class του μαθήματος. Θα πρέπει να εξετάσετε τις περιπτώσεις όπου ο πληθάριθμος των γνωστών εικονοστοιχείων είναι $|\mathcal{K}| \in \{3840, 3584, 3072, 2048\}$. Οι θέσεις των γνωστών εικονοστοιχείων θα πρέπει να επιλέγονται τυχαία στην έκταση της εικόνας. Σε κάθε περίπτωση, θα πρέπει να απεικονίζεται την αρχική εικόνα (με όλα τα εικονοστοιχεία), η εικόνα από την οποία θα λείπουν τα εικονοστοιχεία, η ανακατασκευασμένη εικόνα που αντιστοιχεί στη μετρική συνολικής τετραγωνικής μεταβολής και η εικόνα που αντιστοιχεί στη μετρική συνολικής απόλυτης μεταβολής.

[1] Το ερώτημα αυτό δίνεται ως πρόσθετη άσκηση από τους Καθηγητές Stephen Boyd και Lieven Vandenberghe, στο έγγραφο `https://www.ece.tufts.edu/ee/194CO/bv_cvxbook_extra_exercises.pdf`

Ερώτημα 3: [2] Στο ερώτημα αυτό θα ασχοληθούμε με μια μέθοδο αποκατάστασης του χρώματος μιας εικόνας, ξεκινώντας από μια εικόνα αποχρώσεων του γκρίζου και με γνώση του χρώματος για ένα υποσύνολο εικονοστοιχείων. Πιο αναλυτικά, θεωρούμε μια έγχρωμη εικόνα $m \times n$ εικονοστοιχείων η οποία αναπαρίσταται από τρεις πίνακες $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, με στοιχεία στο διάστημα τιμών $[0, 1]$, οι οποίοι περιγράφουν τις εντάσεις για το κόκκινο, το πράσινο και το μπλε χρώμα, αντίστοιχα, για κάθε εικονστοιχείο της έγχρωμης εικόνας. Ένας συνηθισμένος τρόπος να μετατρέψουμε μια έγχρωμη εικόνα σε εικόνα αποχρώσεων του γκρίζου $\boldsymbol{M}$ είναι μέσω της σχέσης

$$\boldsymbol{M} = 0.299\boldsymbol{R} + 0.587\boldsymbol{G} + 0.114\boldsymbol{B} \ ,$$

όπου οι τιμές των συντελεστών έχουν υπολογιστεί με βάση μετρήσεις αντίληψης της φωτεινότητας για κάθε χρώμα.

Σε μια διαδικασία αποκατάστασης του χρώματος, έχουμε στη διάθεσή μας την εικόνα αποχρώσεων του γκρίζου $\boldsymbol{M}$ καθώς και τα χρώματα για ένα υποσύνολο εικονοστοιχείων, ενώ ο σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε τα χρώματα όλων των εικονοστοιχείων της εικόνας, δηλαδή να εκτιμήσουμε τους πίνακες $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{G}$ και $\boldsymbol{B}$. Ένας τρόπος να λύσουμε το πρόβλημα αυτό είναι μέσω της ελαχιστοποίησης της συνολικής διακύμανσης (total variation) των χρωματικών συνιστωσών, η οποία ορίζεται από την έκφραση

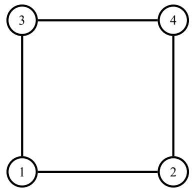
$$tv(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left\| \begin{bmatrix} R_{ij} - R_{i,j+1} \\ G_{ij} - G_{i,j+1} \\ B_{ij} - B_{i,j+1} \\ R_{ij} - R_{i+1,j} \\ G_{ij} - G_{i+1,j} \\ B_{ij} - B_{i+1,j} \end{bmatrix} \right\|_2 \ ,$$

υπό τους περιορισμούς (α) της σχέσης που δίνει την εικόνα αποχρώσεων του γκρίζου από τις έγχρωμες συνιστώσες, (β) τους περιορισμούς πως οι τιμές των στοιχείων ανήκουν στο διάστημα $[0, 1]$, και (γ) τη γνώση μας για το χρώμα ενός υποσυνόλου εικονοστοιχείων.

Για το ερώτημα αυτό θα πρέπει να υλοποιηθεί η παραπάνω μέθοδος αποκατάστασης του χρώματος χρησιμοποιώντας τη βιβλιοθήκη CVX, και η εφαρμογή της στην εικόνα *flower.png* την οποία θα βρείτε στο e-class του μαθήματος. Θα πρέπει χρησιμοποιώντας την έγχρωμη αυτή εικόνα να δημιουργήσετε την εικόνα αποχρώσεων του γκρίζου, και να επιλέξετε ένα υποσύνολο εικονοστοιχείων με γνωστό χρώμα τα οποία θα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στην έκταση της εικόνας. Θα πρέπει να εξεταστούν οι περιπτώσεις όπου το πλήθος των γνωστών εικονοστοιχείων είναι ίσο με 1875 και 3750, και θα πρέπει να υπολογιστεί η τελική εικόνα σε κάθε περίπτωση καθώς και το τελικό κόστος του προβλήματος βελτιστοποίησης.

[2] Το ερώτημα αυτό δίνεται ως πρόσθετη άσκηση από τους Καθηγητές Stephen Boyd και Lieven Vandenberghe, στο έγγραφο `https://www.ece.tufts.edu/ee/194CO/bv_cvxbook_extra_exercises.pdf`

Ερώτημα 4: Στο ερώτημα αυτό θα ασχοληθούμε με ένα κατανεμημένο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Θεωρήστε το ακόλουθο δίκτυο κόμβων:



Επίσης, θεωρήστε πως ο κόμβος i έχει την τοπική συνάρτηση κόστους

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$$

όπου

$$\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{L}(\theta_i) \boldsymbol{D}(\gamma_i) \boldsymbol{L}^{-1}(\theta_i)$$

με

$$\theta_i = i \cdot \frac{\pi}{4}, \quad \gamma_i = \frac{1}{2^i} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{L}^i(\pi/8) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad i = 1, 2, 3, 4 \; .$$

Οι κόμβοι του δικτύου πρέπει να συνεργαστούν προκειμένου να λύσουν το πρόβλημα

$$\boldsymbol{x}^* = \arg \min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2} \left(\sum_{i=1}^{4} f_i(\boldsymbol{x}) \right)$$

Για το πιο πάνω σενάριο, ζητούνται τα ακόλουθα:

1. Υπολογίστε τη βέλτιστη λύση στο πιο πάνω πρόβλημα, υποθέτοντας πως όλες οι συναρτήσεις κόστους είναι γνωστές σε έναν κεντρικό κόμβο.

2. Θεωρώντας πως όλες οι ακμές που είναι προσκείμενες σε έναν κόμβο i έχουν ίσα, θετικά βάρη με άθροισμα μονάδα, δηλαδή

$$\boldsymbol{W}_{ij} = \frac{1}{|n(i)|}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad j \in n(i) \; ,$$

όπου $n(i)$ το σύνολο των γειτονικών κόμβων του κόμβου i, να υπολογίσετε τον πίνακα βαρών $\boldsymbol{W}$, το βεβαρημένο πίνακα διασύνδεσης ακμών - κορυφών $\boldsymbol{B}$ και τον Laplacian πίνακα $\boldsymbol{\Lambda}$.

3. Με βάση τα παραπάνω, να γράψετε τη συνάρτηση κόστους που αντιστοιχεί στο προηγούμενο πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο χαλάρωσης στον πρωτεύοντα χώρο (primal relaxation / penalty function method).

4. Να γράψετε τις εξισώσεις ανανέωσης των εκτιμήσεων της παραμέτρου $\boldsymbol{x}$, σύμφωνα με τον κατανεμημένο αλγόριθμο κλίσεων (distributed gradient descent), σε όλους τους κόμβους του δικτύου. Να υλοποιήσετε έτσι τον κατανεμημένο αλγόριθμο κλίσεων, και να δώσετε ενδεικτικά διαγράμματα του σφάλματος ως προς το πλήθος των επαναλήψεων του αλγορίθμου, σε όλους τους κόμβους του δικτύου. Να εξετάσετε το διάστημα τιμών της παραμέτρου α για το οποίο πετυχαίνεται ικανοποιητική συμφωνία των κόμβων.

5. Με βάση τα παραπάνω, να γράψετε τη Lagrangian συνάρτηση που αντιστοιχεί στο προηγούμενο πρόβλημα.

6. Για το πρόβλημα που μελετάμε, να δώσετε τη μορφή του κατανεμημένου αλγορίθμου δυικής ανόδου, όπου το υπό - πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της Lagrangian συνάρτησης (σε κάθε κόμβο) να λύνεται με τον αλγόριθμο gradient descent, και κάποιο κριτήριο τερματισμού (Μπορούμε να κάνουμε κάτι καλύτερο στην περίπτωση του προβλήματος που μελετάμε;). Να υλοποιήσετε τον αλγόριθμο αυτό και να δώσετε ενδεικτικά διαγράμματα του σφάλματος ως προς το πλήθος των επαναλήψεων του αλγορίθμου, σε όλους τους κόμβους του δικτύου.