

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ  
ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΕ  
ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

|                                |                 |
|--------------------------------|-----------------|
| Όνοματεπώνυμο:                 | Βασιλική Στάμου |
| Αριθμός Μητρώου:               | 1059543         |
| Μεταπτυχιακό:                  | ΣΜΗΝ            |
| Έτος φοίτησης:                 | 1ο              |
| Ακ. έτος διεξαγωγής μαθήματος: | 2023-2024       |

## Περιεχόμενα

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1   | Πρόβλημα χωρίς περιορισμούς – Gradient Descent .....                  | 1  |
| 1.1 | Μεταβαλλόμενο Βήμα .....  | 1  |
| 1.2 | Επίδραση του Step Size στον Αριθμό Επαναλήψεων .....                  | 2  |
| 1.3 | Backtracking Line Search .....  | 2  |
| 1.4 | Exact Line Search .....   | 4  |
| 1.5 | Σύγκριση Μεθόδων Backtracking Line Search και Exact Line Search ..... | 5  |
| 2   | Παρεμβολή Δεδομένων – Αποκατάσταση Εικόνας .....                      | 6  |
| 3   | Πρόβλημα με Περιορισμούς – Αποκατάσταση Χρώματος Εικόνας .....        | 7  |
| 4   | Κατανεμημένο πρόβλημα βελτιστοποίησης .....                           | 10 |
| 4.1 | Λύση κεντρικοποιημένου προβλήματος.....                               | 10 |
| 4.2 | Περιορισμοί Συναίνεσης .....  | 11 |
| 4.3 | Αποσυνδεδεμένο Πρόβλημα – Primal Relaxation .....                     | 13 |
| 4.4 | Distributed Gradient Descent .....                                    | 14 |
| 4.5 | Αποσυνδεδεμένο Πρόβλημα – Dual Constraint Relaxation.....             | 17 |
| 4.6 | Distributed Dual Ascent.....  | 17 |
| 5   | Πρόβλημα Φωτισμού.....  | 20 |
| 5.1 | Επίλυση με χρήση κοινής ισχύος .....                                  | 20 |
| 5.2 | Επίλυση με ελάχιστα τετράγωνα .....                                   | 21 |
| 5.3 | Επίλυση με ελάχιστα τετράγωνα και βάρη.....                           | 22 |
| 5.4 | Επίλυση ως προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.....                 | 22 |
| 5.5 | Επίλυση ως κυρτού προβλήματος .....                                   | 23 |

# 1 Πρόβλημα χωρίς περιορισμούς – Gradient Descent

## 1.1 Μεταβαλλόμενο Βήμα

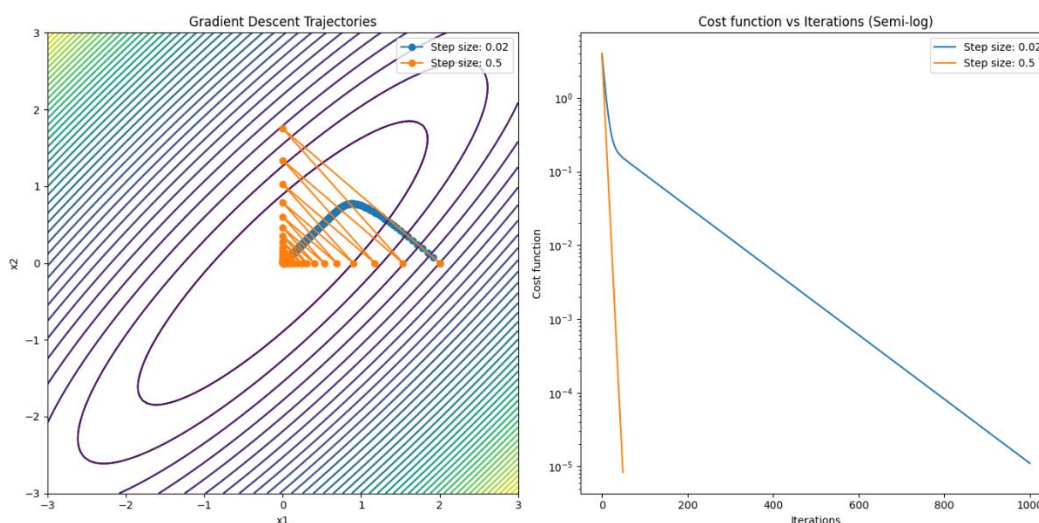
Στο παρών ερώτημα, διερευνήθηκε η συμπεριφορά του αλγορίθμου Gradient Descent (GD) ως προς τη σύγκλιση για διαφορετικές τιμές του βήματος (step size) για  $\gamma = 1/8$  σε ένα γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Στόχος ήταν να βρεθεί το διάστημα τιμών για το οποίο ο αλγόριθμος συγκλίνει και να επιβεβαιωθεί αν αυτό συνάδει με τις θεωρητικές προσδοκίες. Επίσης, έγινε σύγκριση της τροχιάς του αλγορίθμου για δύο διαφορετικές τιμές του βήματος, εντός του διαστήματος σύγκλισης.

Για να προσδιοριστεί το διάστημα των τιμών του βήματος  $t$  για το οποίο ο αλγόριθμος GD συγκλίνει, πραγματοποιήθηκαν πειράματα με διάφορες τιμές του βήματος. Συγκεκριμένα, δοκιμάστηκαν τιμές του  $t$  και δεκτές κρίθηκαν οι τιμές στο εύρος  $[0.02, 0.5]$ .

Θεωρητικά, η τιμή του βήματος  $t$  που εξασφαλίζει σύγκλιση στον αλγόριθμο GD εξαρτάται από τις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ . Για τον πίνακα  $A$  που εξετάζουμε, το βήμα πρέπει να είναι μικρότερο από τον αντίστροφο του μέγιστου ιδιοδιαστήματος του πίνακα. Πειραματικά, επαληθεύτηκε ότι για τιμές του  $t$  μεγαλύτερες από περίπου 0.5 και μικρότερες από 0.02, ο αλγόριθμος παρουσιάζει απόκλιση, όπως αναμενόταν.

Για δύο τιμές του βήματος  $t$  εντός του διαστήματος σύγκλισης, συγκεκριμένα  $t=0.5$  και  $t=0.02$ , σχεδιάστηκε η τροχιά που ακολουθεί η ακολουθία των λύσεων του αλγορίθμου. Στην Εικόνα 1, παρουσιάζονται οι ισοϋψείς καμπύλες της συνάρτησης κόστους, μαζί με τις διαδρομές που ακολουθούν τα διαδοχικά σημεία  $x_k$ . Παρατηρείται ότι για το μεγαλύτερο βήμα  $t=0.5$ , η σύγκλιση είναι πιο αργή και η τροχιά διαγράφει μεγαλύτερα άλματα. Αντίθετα, για το μικρότερο βήμα  $t=0.02$ , η τροχιά είναι πιο "ομαλή" και η σύγκλιση είναι πιο σταθερή.

Η συμπεριφορά της συνάρτησης κόστους με βάση τις επαναλήψεις απεικονίστηκε σε ημι-λογαριθμική κλίμακα στην Εικόνα 1. Και για τις δύο τιμές του  $t$ , η συνάρτηση κόστους μειώνεται εκθετικά σε σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων. Ωστόσο, για τη μεγαλύτερη τιμή του  $t$ , η μείωση της συνάρτησης κόστους είναι πιο απότομη κατά τις πρώτες επαναλήψεις, αλλά η σύγκλιση σταθεροποιείται πιο αργά.



Εικόνα 1. Τροχιά Διαδοχικών Λύσεων του Αλγορίθμου και Σύγκλιση της Συνάρτησης Κόστους.

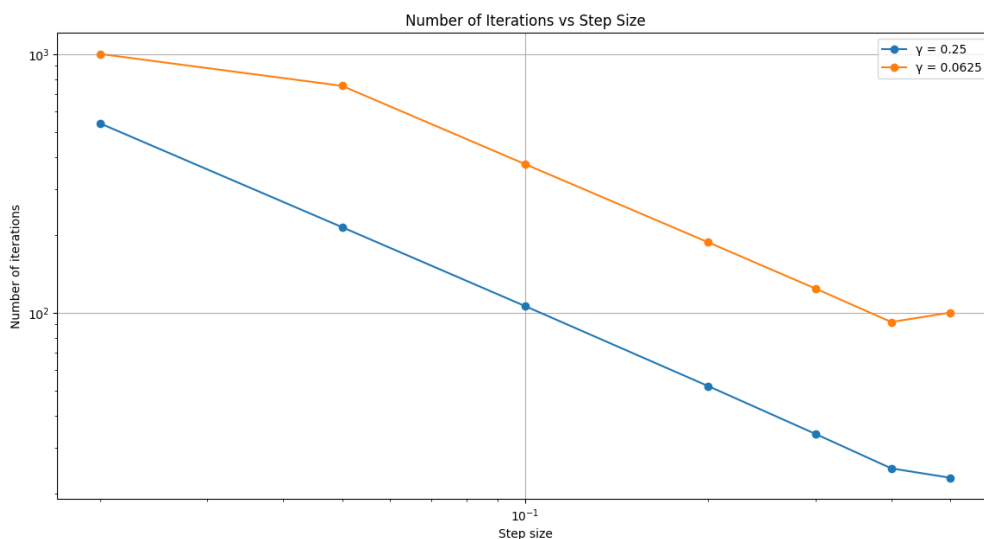
## 1.2 Επίδραση του Step Size στον Αριθμό Επαναλήψεων

Στο δεύτερο ερώτημα της άσκησης εξετάζεται η επίδραση του βήματος  $t$  (step size) στον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται για να ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού στον αλγόριθμο Gradient Descent. Συγκεκριμένα, διερευνάται πώς μεταβάλλεται ο αριθμός των επαναλήψεων σε σχέση με το βήμα  $t$  για δύο τιμές της παραμέτρου  $\gamma$ :  $\gamma = 1/4$  και  $\gamma = 1/16$ .

Το κριτήριο τερματισμού είναι η σύγκλιση της συνάρτησης κόστους σε τιμή μικρότερη από  $10^{-5}$ , και η μελέτη αποσκοπεί στο να καταγράψει τον αριθμό επαναλήψεων που απαιτούνται για διάφορες τιμές του  $t$ , καθώς και να εντοπίσει τυχόν τάσεις ή συσχετίσεις μεταξύ της τιμής του  $t$  και της απόδοσης του αλγορίθμου.

Το βήμα  $t$  εξετάστηκε για τις τιμές:  $t \in \{0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05, 0.02\}$ . Για κάθε τιμή του  $t$ , εκτελέστηκε ο αλγόριθμος Gradient Descent και καταγράφηκε ο αριθμός των επαναλήψεων μέχρι να επιτευχθεί το κριτήριο σύγκλισης.

Στην Εικόνα 2 παρουσιάζει το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται για σύγκλιση ως προς την τιμή του  $t$ . Παρατηρήθηκε ότι όσο το βήμα  $t$  αυξάνεται, ο αριθμός των επαναλήψεων μειώνεται, καθώς τα μεγαλύτερα βήματα επιτρέπουν στον αλγόριθμο να προσεγγίσει γρηγορότερα τη βέλτιστη λύση. Η συμπεριφορά για τις δύο τιμές της παραμέτρου  $\gamma$  είναι παρόμοια, ωστόσο παρατηρήθηκε ότι για  $\gamma = 1/16$  ο αλγόριθμος απαιτεί περισσότερες επαναλήψεις για την ίδια τιμή του  $t$  και ότι για μεγάλα βήματα ο αλγόριθμος παρουσιάζει αποσταθεροποίηση και ο αριθμός επαναλήψεων αυξάνεται. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  αλλάζουν με την μείωση της τιμής της  $\gamma$ .



Εικόνα 2. Πλήθος επαναλήψεων για σύγκλιση ως προς  $t$  για  $\gamma = 1/4$  και  $\gamma = 1/16$ .

## 1.3 Backtracking Line Search

Στο τρίτο ερώτημα της άσκησης ζητείται η υλοποίηση της μεθόδου backtracking line search για την επιλογή του βέλτιστου μεγέθους βήματος (step size) σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου Gradient Descent. Στόχος είναι να παρατηρήσουμε πώς εξελίσσεται η τροχιά των διαδοχικών λύσεων του

αλγόριθμου, καθώς και η συμπεριφορά της συνάρτησης κόστους κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων για δύο συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου  $\gamma$ :  $\gamma=1/4$  και  $\gamma=1/16$ .

Για τη μέθοδο backtracking χρησιμοποιούνται οι εξής παράμετροι:  $\alpha=1/4$  και  $\beta=9/10$

Η μέθοδος backtracking line search χρησιμοποιείται για να καθορίσει δυναμικά το κατάλληλο μέγεθος βήματος  $t$  σε κάθε επανάληψη του Gradient Descent. Η βασική ιδέα είναι να ξεκινά με αρχική τιμή  $t=1$  και στη συνέχεια να μειώνει το βήμα, πολλαπλασιάζοντάς το με τη σταθερά  $\beta$ , μέχρι να ικανοποιηθεί η συνθήκη Armijo, δηλαδή

$$f(x-t\nabla f(x)) \leq f(x) - \alpha t \|\nabla f(x)\|^2$$

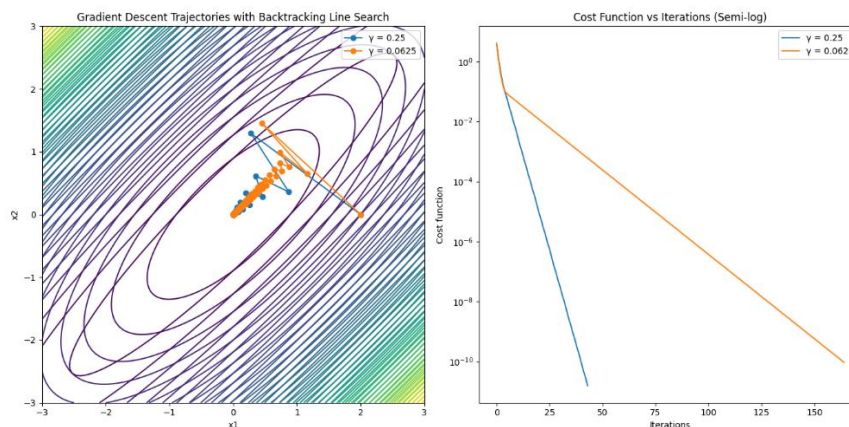
Αν η συνθήκη αυτή ισχύει, τότε το  $t$  θεωρείται επαρκές και χρησιμοποιείται για την ενημέρωση της θέσης του  $x$ .

Για κάθε μία από τις τιμές της  $\gamma$ , σχεδιάστηκαν οι τροχιές των διαδοχικών λύσεων του αλγορίθμου Gradient Descent με τη μέθοδο backtracking, πάνω σε ισοϋψείς καμπύλες της συνάρτησης κόστους. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 3, η μέθοδος καθοδηγεί την ακολουθία λύσεων να κινείται πιο αποδοτικά προς την περιοχή του ελάχιστου.

Στην περίπτωση με  $\gamma=1/4$ , η σύγκλιση είναι γρήγορη και η ακολουθία των λύσεων πλησιάζει με σταθερά βήματα το ελάχιστο της συνάρτησης κόστους. Όταν η τιμή της  $\gamma$  μειώνεται σε  $\gamma=1/16$ , παρατηρείται ότι η σύγκλιση γίνεται πιο αργή, καθώς η γεωμετρία του προβλήματος αλλάζει λόγω των διαφορών στις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ .

Στην Εικόνα 3 παρουσιάζεται επίσης η συμπεριφορά της συνάρτησης κόστους κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων του αλγορίθμου, σε ημι-λογαριθμική κλίμακα (log scale). Και στις δύο περιπτώσεις η συνάρτηση κόστους μειώνεται εκθετικά κατά τη διάρκεια των πρώτων επαναλήψεων, ενώ καθώς ο αλγόριθμος πλησιάζει το ελάχιστο, η μείωση γίνεται πιο αργή, όπως αναμένεται σε προβλήματα βελτιστοποίησης.

Για μεγαλύτερες τιμές της  $\gamma$ , ο αλγόριθμος συγκλίνει πιο γρήγορα σε σχέση με μικρότερες τιμές της  $\gamma$ . Αυτό οφείλεται στη γεωμετρία του προβλήματος, όπου οι μικρές τιμές της  $\gamma$  δυσχεραίνουν την ταχεία σύγκλιση λόγω της μεγαλύτερης διαφοράς στις ιδιοτιμές του πίνακα  $A$ , κάνοντας την επιφάνεια της συνάρτησης κόστους πιο επιμηκυμένη.



**Εικόνα 3.** Τροχιές διαδοχικών λύσεων και Συνάρτηση κόστους για  $\gamma=1/4$  και  $\gamma=1/16$ .

Η υλοποίηση του αλγορίθμου Gradient Descent με τη μέθοδο backtracking line search επέδειξε την ικανότητά του να προσαρμόζει δυναμικά το μέγεθος του βήματος, βελτιστοποιώντας την απόδοση σε κάθε επανάληψη. Η χρήση της μεθόδου backtracking προσφέρει σημαντική βελτίωση σε σχέση με σταθερά βήματα, καθώς προσαρμόζει το βήμα ανάλογα με τη φύση του προβλήματος και τη μορφή της επιφάνειας κόστους, διασφαλίζοντας γρήγορη και σταθερή σύγκλιση.

## 1.4 Exact Line Search

Στο τέταρτο ερώτημα της άσκησης ζητείται η υλοποίηση της μεθόδου exact line search για τον υπολογισμό του βέλτιστου μεγέθους βήματος (step size) σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου Gradient Descent. Στόχος είναι να παρατηρηθεί η τροχιά των διαδοχικών λύσεων του αλγορίθμου και η συμπεριφορά της συνάρτησης κόστους κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων για δύο συγκεκριμένες τιμές της παραμέτρου  $\gamma$ :  $\gamma=1/4$  και  $\gamma=1/16$ .

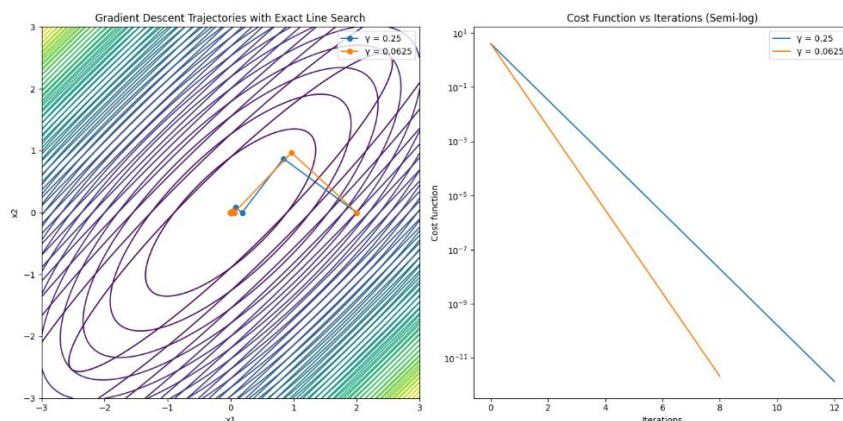
Η μέθοδος exact line search υπολογίζει το βέλτιστο βήμα  $t$  που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους  $f(x)$  σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$t = ( \nabla f(x)^T \nabla f(x) ) / ( 2 \nabla f(x)^T A \nabla f(x) )$$

όπου  $A$  είναι ο πίνακας του δεύτερου παράγωγου της συνάρτησης κόστους. Ο υπολογισμός του βήματος γίνεται σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου, διασφαλίζοντας ότι η μετακίνηση προς την κατεύθυνση του gradient είναι η πιο αποδοτική.

Για τις τιμές  $\gamma=1/4$  και  $\gamma=1/16$ , σχεδιάστηκαν οι τροχιές των διαδοχικών λύσεων του αλγορίθμου Gradient Descent με την exact line search πάνω σε ισοϋψείς καμπύλες της συνάρτησης κόστους  $f(x)$ . Όπως φαίνεται στην Εικόνα 4, η μέθοδος καθοδηγεί την ακολουθία λύσεων να κινείται αποτελεσματικά προς την περιοχή του ελάχιστου. Στην περίπτωση με  $\gamma=1/16$ , η σύγκλιση είναι γρήγορη και η ακολουθία των λύσεων πλησιάζει με σταθερά βήματα το ελάχιστο της συνάρτησης κόστους. Αντίθετα, με  $\gamma=1/4$ , η σύγκλιση είναι πιο αργή.

Στην Εικόνα 4, παρουσιάζεται επίσης η συμπεριφορά της συνάρτησης κόστους κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων του αλγορίθμου σε ημι-λογαριθμική κλίμακα. Και στις δύο περιπτώσεις η συνάρτηση κόστους μειώνεται εκθετικά κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων.



**Εικόνα 4.** Τροχιές διαδοχικών λύσεων και Συνάρτηση κόστους για  $\gamma=1/4$  και  $\gamma=1/16$ .

Η υλοποίηση του αλγορίθμου Gradient Descent με τη μέθοδο exact line search έδειξε την ικανότητά της να προσδιορίζει δυναμικά το μέγεθος του βήματος, βελτιώνοντας την απόδοση σε κάθε επανάληψη, παρουσιάζοντας λιγότερες επαναλήψεις για σύγκλιση από ότι η μέθοδος backtracking line search.

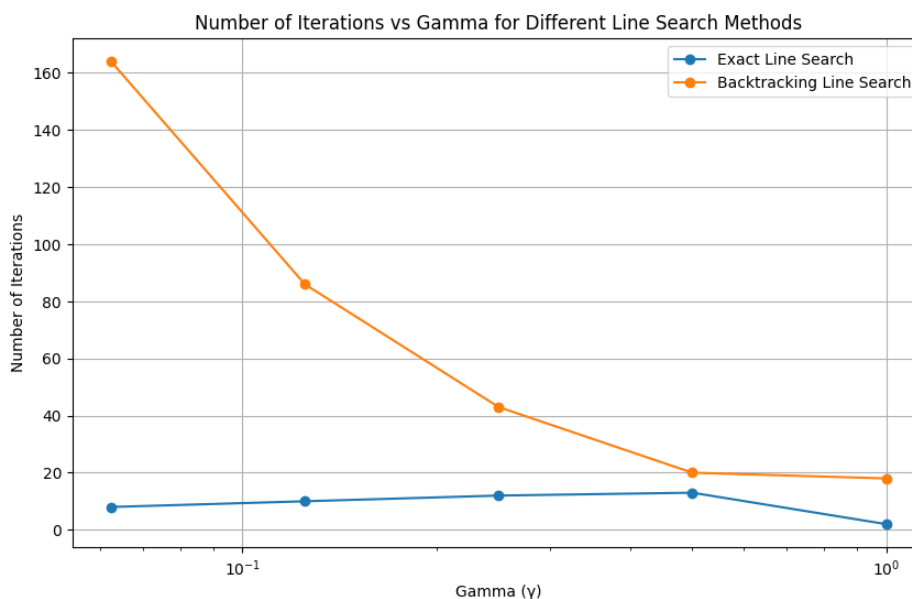
## 1.5 Σύγκριση Μεθόδων Backtracking Line Search και Exact Line Search

Στο πέμπτο ερώτημα της άσκησης ζητείται η σύγκριση των μεθόδων backtracking line search και exact line search ως προς το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται για να ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού. Στόχος είναι να αναλυθεί η απόδοση των δύο μεθόδων για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\gamma$ , συγκεκριμένα για  $\gamma \in \{1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16\}$ .

Η σύγκριση πραγματοποιείται με την εκτέλεση του αλγορίθμου Gradient Descent και για τις δύο μεθόδους βελτιστοποίησης του μεγέθους βήματος. Το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται για την επίτευξη σύγκλισης καταγράφεται και συγκρίνεται σε διάγραμμα. Η γεωμετρία του προβλήματος ορίζεται από τον πίνακα  $A$ , ο οποίος κατασκευάζεται με βάση την γωνία  $\theta$  και την τιμή της παραμέτρου  $\gamma$ .

Η διαδικασία εκτελείται για κάθε τιμή της  $\gamma$ , καταγράφοντας τον αριθμό επαναλήψεων που απαιτούνται για κάθε μέθοδο. Τα αποτελέσματα απεικονίζονται στην Εικόνα 5, το οποίο παρουσιάζει τις καμπύλες για τις μεθόδους exact line search και backtracking line search.

Η μέθοδος exact line search απαιτεί λιγότερες επαναλήψεις για όλες τις τιμές της  $\gamma$  σε σύγκριση με τη μέθοδο backtracking line search. Αυτό οφείλεται στο ότι η exact line search βρίσκει το βέλτιστο βήμα σε κάθε επανάληψη, ενώ η backtracking line search προσαρμόζει το βήμα με βάση τη συνθήκη Armijo, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει σε περισσότερες επαναλήψεις.



**Εικόνα 5.** Πλήθος επαναλήψεων Exact Line Search και Backtracking Line Search για  $\gamma \in \{1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16\}$ .

## 2 Παρεμβολή Δεδομένων – Αποκατάσταση Εικόνας

Στόχος της άσκησης είναι η αποκατάσταση μιας εικόνας αποχρώσεων του γκρι, από την οποία λείπουν δεδομένα σε τυχαίες θέσεις. Η εικόνα αυτή αναπαρίσταται από έναν πίνακα  $I \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , ο οποίος περιέχει τις τιμές της έντασης των εικονοστοιχείων. Για ένα υποσύνολο των εικονοστοιχείων, οι εντάσεις είναι γνωστές, ενώ για τα υπόλοιπα, οι εντάσεις πρέπει να εκτιμηθούν μέσω μεθόδων αποκατάστασης. Η εκτίμηση αυτή βασίζεται στην ελαχιστοποίηση της τραχύτητας της εικόνας με δύο μετρικές:

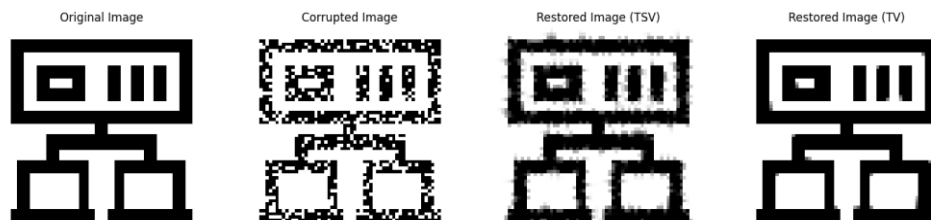
- Την **συνολική τετραγωνική μεταβολή** (Total Squared Variation, TSV): Το κριτήριο ελαχιστοποίησης εδώ βασίζεται στη συνολική τετραγωνική διαφορά μεταξύ γειτονικών εικονοστοιχείων.
- Την **συνολική απόλυτη μεταβολή** (Total Variation, TV): Στην περίπτωση της TV, η μετρική είναι η συνολική απόλυτη διαφορά μεταξύ γειτονικών εικονοστοιχείων.

Οι παραπάνω μετρικές ευνοούν "ομαλές" εικόνες, όπου γειτονικά εικονοστοιχεία έχουν παρόμοιες τιμές. Η διαδικασία αποκατάστασης γίνεται υπό τους περιορισμούς ότι η εικόνα πρέπει να παραμείνει αμετάβλητη στα γνωστά εικονοστοιχεία.

Για την υλοποίηση της αποκατάστασης χρησιμοποιήθηκε η βιβλιοθήκη CVX (Convex Optimization) μέσω της Python. Τα βήματα της διαδικασίας είναι τα εξής:

1. Φόρτωση και διαμόρφωση της εικόνας: Η εικόνα εισόδου φορτώνεται και γίνεται προσομοίωση έλλειψης δεδομένων με την τυχαία διαγραφή του 30% εικονοστοιχείων.
2. Ορισμός των προβλημάτων βελτιστοποίησης: Δημιουργήθηκαν δύο προβλήματα βελτιστοποίησης, ένα για τη μετρική TSV και ένα για τη μετρική TV, τα οποία περιλαμβάνουν τους περιορισμούς ότι τα γνωστά εικονοστοιχεία παραμένουν σταθερά.
3. Επίλυση των προβλημάτων: Τα προβλήματα επιλύονται χρησιμοποιώντας τις δυνατότητες convex optimization του cvxpy, και προκύπτει η ανακατασκευασμένη εικόνα σε κάθε περίπτωση.
4. Οπτικοποίηση αποτελεσμάτων: Τέλος, η αρχική εικόνα, η εικόνα με τα ελλιπή δεδομένα και οι ανακατασκευασμένες εικόνες εμφανίζονται για σύγκριση.

Στην Εικόνα 6 παρατηρείται ότι η TV μετρική προσφέρει πιο ομαλή ανακατασκευή σε σύγκριση με την TSV, καθώς η απόλυτη διαφορά τείνει να διατηρεί καλύτερα τα όρια και τις λεπτομέρειες της εικόνας, ενώ η τετραγωνική διαφορά τείνει να παράγει πιο ομαλές διαβαθμίσεις στις τιμές των γειτονικών εικονοστοιχείων.



Εικόνα 6. Αποκατάσταση εικόνας με παρεμβολή δεδομένων.



Η άσκηση αυτή ανέδειξε τη χρησιμότητα της βελτιστοποίησης σε προβλήματα αποκατάστασης εικόνας. Η σύγκριση μεταξύ των μετρικών TSV και TV έδειξε ότι η συνολική απόλυτη μεταβολή (TV) είναι πιο αποτελεσματική στην αποκατάσταση εικόνων που περιέχουν απότομες αλλαγές στη φωτεινότητα, καθώς είναι λιγότερο ευαίσθητη σε έντονες αλλαγές τιμών στα γειτονικά εικονοστοιχεία. Αντίθετα, η συνολική τετραγωνική μεταβολή (TSV) τείνει να εξομαλύνει τις αλλαγές στην εικόνα, κάτι που είναι κατάλληλο για εικόνες χωρίς έντονες διαφοροποιήσεις.

### 3 Πρόβλημα με Περιορισμούς – Αποκατάσταση Χρώματος Εικόνας

Η παρούσα άσκηση έχει ως στόχο την αποκατάσταση του χρώματος μιας έγχρωμης εικόνας, ξεκινώντας από την εικόνα αποχρώσεων του γκρι (grayscale) και έχοντας πληροφορίες για τα χρώματα ενός υποσυνόλου των εικονοστοιχείων. Σκοπός είναι η εκτίμηση των χρωματικών συνιστωσών για όλα τα εικονοστοιχεία μέσω της ελαχιστοποίησης της συνολικής διακύμανσης των χρωματικών συνιστωσών (total variation minimization), λαμβάνοντας υπόψη τον περιορισμό της μετατροπής από έγχρωμη σε εικόνα αποχρώσεων του γκριζου.

Δίνεται μία έγχρωμη εικόνα μεγέθους  $m \times n$ , η οποία περιγράφεται από τρεις πίνακες R, G, και B, που αναπαριστούν τις εντάσεις του κόκκινου, πράσινου, και μπλε καναλιού αντίστοιχα για κάθε εικονοστοιχείο. Μία κοινή μέθοδος μετατροπής της έγχρωμης εικόνας σε εικόνα αποχρώσεων του γκριζου είναι η παρακάτω εξίσωση:

$$M = 0.299R + 0.587G + 0.114B$$

Όπου οι συντελεστές 0.299, 0.587, και 0.114 έχουν υπολογιστεί βάσει της αντίληψης της φωτεινότητας κάθε χρώματος.

Η πρόκληση της αποκατάστασης έγκειται στην εκτίμηση των τριών καναλιών R, G, και B χρησιμοποιώντας την εικόνα αποχρώσεων του γκριζου M και έχοντας στη διάθεσή μας τα χρώματα μόνο για ένα υποσύνολο εικονοστοιχείων. Ο στόχος μας είναι να βρούμε τις τιμές των καναλιών που ικανοποιούν την εξίσωση μετατροπής και ταυτόχρονα ελαχιστοποιούν τη συνολική διακύμανση, εξασφαλίζοντας ομαλές χρωματικές μεταβάσεις.

#### Μέθοδος

##### Βήμα 1: Φόρτωση και Επεξεργασία Εικόνας

Αρχικά, φορτώνουμε την έγχρωμη εικόνα και μετατρέπουμε την εικόνα σε αποχρώσεις του γκριζου χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση. Επιπλέον, δημιουργούμε ένα υποσύνολο εικονοστοιχείων με γνωστά χρώματα, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί ως περιορισμός κατά την αποκατάσταση της εικόνας. Η μέθοδος χρησιμοποιεί διαφορετικά υποσύνολα γνωστών χρωμάτων με πληθάριθμο 750, 1000, 1500, 2000, και 2250 εικονοστοιχεία για να εξεταστεί η ποιότητα της αποκατάστασης σε κάθε περίπτωση.

##### Βήμα 2: Ορισμός του Προβλήματος Βελτιστοποίησης

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης διατυπώνεται ως εξής:

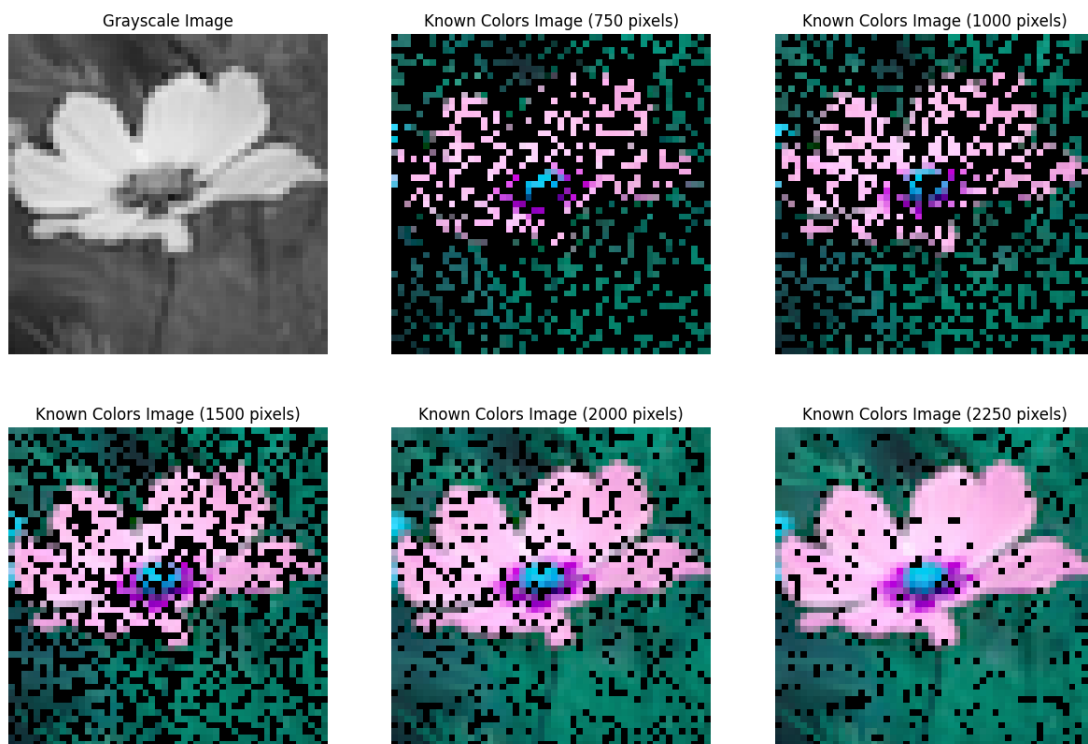
- Αντικειμενική συνάρτηση: Ελαχιστοποίηση της συνολικής διακύμανσης των τριών καναλιών R, G, και B. Η συνολική διακύμανση (TV) τιμωρεί τις μεγάλες διαφορές ανάμεσα σε γειτονικά εικονοστοιχεία και προωθεί ομαλές χρωματικές μεταβάσεις.
- Περιορισμοί:
  - Περιορισμός αποχρώσεων του γκριζου: Η ανακατασκευασμένη εικόνα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση  $M = 0.299R + 0.587G + 0.114B$ , εντός ενός μικρού περιθωρίου σφάλματος.
  - Περιορισμός γνωστών χρωμάτων: Τα γνωστά εικονοστοιχεία πρέπει να διατηρήσουν τις τιμές τους κατά την ανακατασκευή.
  - Περιορισμός εύρους: Οι τιμές των καναλιών R, G, και B πρέπει να παραμένουν εντός του διαστήματος  $[0,1]$ .

### Βήμα 3: Επίλυση του Προβλήματος

Χρησιμοποιούμε τη βιβλιοθήκη CVXPY για να λύσουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης και να ανακτήσουμε τις τιμές των τριών καναλιών. Η διαδικασία περιλαμβάνει την επίλυση του προβλήματος για κάθε ένα από τα διαφορετικά μεγέθη υποσυνόλων γνωστών χρωμάτων.

### Βήμα 4: Απεικόνιση και Αποθήκευση Αποτελεσμάτων

Αφού επιλυθεί το πρόβλημα, τα αποτελέσματα αποθηκεύονται και απεικονίζονται. Η έγχρωμη εικόνα που ανακατασκευάζεται συγκρίνεται με την αρχική εικόνα για να αξιολογηθεί η ποιότητα της αποκατάστασης.



**Εικόνα 7.** Δημιουργία εικόνων με διαφορετικά υποσύνολα γνωστών χρωμάτων με πληθάριθμο 750, 1000, 1500, 2000, και 2250.

Η μέθοδος εφαρμόστηκε σε μια έγχρωμη εικόνα και εξετάστηκαν διαφορετικά μεγέθη υποσυνόλων γνωστών χρωμάτων. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η ποιότητα της ανακατασκευής βελτιώνεται όσο αυξάνεται το μέγεθος του υποσυνόλου των γνωστών εικονοστοιχείων. Για μικρότερα υποσύνολα, η εικόνα περιέχει κάποιες περιοχές με σφάλματα αποκατάστασης, αλλά με την αύξηση των γνωστών εικονοστοιχείων, η εικόνα προσεγγίζει την πραγματική έγχρωμη εικόνα.

Για κάθε υποσύνολο, υπολογίστηκε το κόστος της βελτιστοποίησης, το οποίο είναι ενδεικτικό της προσπάθειας της μεθόδου να ελαχιστοποιήσει τη συνολική διακύμανση.



**Εικόνα 8.** Αποκατάσταση εικόνας πληθάριμο γνωστών εικονοστοιχείων 750.



**Εικόνα 9.** Αποκατάσταση εικόνας πληθάριμο γνωστών εικονοστοιχείων 1000.



**Εικόνα 10.** Αποκατάσταση εικόνας πληθάριμο γνωστών εικονοστοιχείων 1500.



**Εικόνα 11.** Αποκατάσταση εικόνας πληθάριθμο γνωστών εικονοστοιχείων 2000.



**Εικόνα 12.** Αποκατάσταση εικόνας πληθάριθμο γνωστών εικονοστοιχείων 2250.

Η μέθοδος αποκατάστασης χρώματος με βάση τη συνολική διακύμανση αποδείχθηκε αποτελεσματική στη βελτίωση της ποιότητας της εικόνας, ιδιαίτερα όταν αυξάνεται το μέγεθος των γνωστών εικονοστοιχείων. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι ακόμα και με περιορισμένες πληροφορίες για τα χρώματα, η μέθοδος μπορεί να ανακατασκευάσει μια σχετικά ομαλή και φυσική έγχρωμη εικόνα.

Παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των γνωστών εικονοστοιχείων, τόσο αυξάνεται και το κόστος της βελτιστοποίησης. Αυτό συμβαίνει επειδή το σύστημα προσπαθεί να εξισορροπήσει τη διατήρηση της συνολικής διακύμανσης με την ακρίβεια στους γνωστούς περιορισμούς για τα εικονοστοιχεία με χρώμα.

## 4 Κατανεμημένο πρόβλημα βελτιστοποίησης

### 4.1 Λύση κεντρικοποιημένου προβλήματος

Το παρόν ερώτημα αφορά την επίλυση ενός κατανεμημένου προβλήματος βελτιστοποίησης σε ένα δίκτυο τεσσάρων κόμβων. Κάθε κόμβος  $i$  έχει μια τοπική συνάρτηση κόστους  $f_i(x)$ , που εξαρτάται από μία μεταβλητή  $x \in \mathbb{R}^2$ . Στόχος μας είναι να βρούμε τη βέλτιστη λύση  $x^*$ , που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος, το οποίο είναι το άθροισμα των τοπικών συναρτήσεων κόστους όλων των κόμβων. Η επίλυση

γίνεται με κεντρικοποιημένη προσέγγιση, δηλαδή όλες οι τοπικές συναρτήσεις κόστους είναι γνωστές σε έναν κεντρικό κόμβο.

$$x^* = \underset{x \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

ή

$$x^* = \underset{x \in \mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^4 x^T A_i x + b_i^T x$$

### Μέθοδος Λύσης

Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιήσαμε την ακόλουθη προσέγγιση:

1. **Υπολογισμός των παραμέτρων κάθε κόμβου:** Οι πίνακες  $A_i$  και τα διανύσματα  $b_i$  υπολογίζονται με βάση την εκφώνηση, χρησιμοποιώντας τον πίνακα περιστροφής  $L(\theta_i)$  και τον διαγώνιο πίνακα  $D(\gamma_i)$  για κάθε κόμβο  $i$ .
2. **Ορισμός της συνολικής συνάρτησης κόστους:** Η συνολική συνάρτηση κόστους που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε είναι το άθροισμα των επιμέρους τοπικών συναρτήσεων κόστους των κόμβων.
3. **Επίλυση με χρήση αριθμητικής βελτιστοποίησης:** Για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση `minimize` της βιβλιοθήκης `SciPy`, η οποία βασίζεται σε μεθόδους αριθμητικής βελτιστοποίησης.

Με την εκτέλεση του κώδικα, βρέθηκε η βέλτιστη λύση για το πρόβλημα:

```
Optimal solution x*: [-0.17997322  0.0125382 ]
```

**Εικόνα 13.** Βέλτιστη λύση κεντρικοποιημένου προβλήματος.

Αυτό σημαίνει ότι η τιμή  $x^*$  που ελαχιστοποιεί τη συνολική συνάρτηση κόστους για το συγκεκριμένο δίκτυο είναι περίπου  $x^* = [-0.18 \ 0.0125]$ .

Η παραπάνω προσέγγιση αποδεικνύει τη δυνατότητα επίλυσης ενός κατανεμημένου προβλήματος βελτιστοποίησης χρησιμοποιώντας κεντρικοποιημένη μεθοδολογία. Ο συνδυασμός μαθηματικών εργαλείων για τον υπολογισμό των τοπικών παραμέτρων κάθε κόμβου, μαζί με την αριθμητική βελτιστοποίηση, οδήγησε σε μια ακριβή και αποτελεσματική λύση για το συνολικό πρόβλημα βελτιστοποίησης.

## 4.2 Περιορισμοί Συναίνεσης

Το ερώτημα αυτό ασχολείται με την κατασκευή του πίνακα βαρών  $W$ , του βεβαρημένου πίνακα διασύνδεσης ακμών-κορυφών  $B$ , καθώς και του Laplacian πίνακα  $L$ , για ένα απλό κατανεμημένο δίκτυο τεσσάρων κόμβων. Ο πίνακας βαρών  $W$  υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη ότι οι ακμές έχουν ίσα θετικά βάρη με άθροισμα μονάδα, ενώ οι πίνακες  $B$  και  $L$  προκύπτουν από τη δομή του γράφου.

### Μέθοδος Λύσης

1. **Υπολογισμός του Πίνακα Βαρών W:** Ο πίνακας βαρών  $W$  είναι ένας πίνακας  $n \times n$  (όπου  $n=4$ ) που αποθηκεύει τα βάρη των ακμών του γράφου. Τα βάρη υπολογίζονται με βάση τον αριθμό των γειτόνων κάθε κόμβου. Για κάθε κόμβο, το βάρος κάθε ακμής είναι το αντίστροφο του αριθμού των γειτονικών κόμβων του.
2. **Κατασκευή του Πίνακα Διασύνδεσης Ακμών-Κορυφών B:** Ο πίνακας  $B$  είναι ένας πίνακας  $m \times n$ , όπου  $m$  είναι ο αριθμός των ακμών του γράφου και  $n$  είναι ο αριθμός των κορυφών. Κάθε γραμμή του  $B$  αντιπροσωπεύει μια ακμή και οι στήλες αντιπροσωπεύουν τις κορυφές. Για κάθε ακμή, η τιμή στο  $B[i,j]$  είναι η τετραγωνική ρίζα του αντίστοιχου βάρους, ενώ το αντίστοιχο στοιχείο για την άλλη κορυφή είναι το αρνητικό της ίδιας τιμής.
3. **Υπολογισμός του Laplacian Πίνακα Λ:** Ο πίνακας Laplacian  $L$  υπολογίζεται από τον πίνακα  $B$  με τη σχέση:

$$L = B^T B$$

Αυτός ο πίνακας χαρακτηρίζει τη ροή πληροφορίας στο δίκτυο και χρησιμοποιείται ευρέως σε προβλήματα κατανεμημένων συστημάτων.

Με την εκτέλεση του κώδικα, προκύπτουν οι παρακάτω πίνακες:

```
Weight Matrix W:
[[0.  0.5 0.5 0. ]
 [0.5 0.  0.  0.5]
 [0.5 0.  0.  0.5]
 [0.  0.5 0.5 0. ]]

Incidence Matrix B:
[[ 0.70710678 -0.70710678  0.      0.      ]
 [ 0.      0.70710678  0.     -0.70710678]
 [ 0.      0.      -0.70710678  0.70710678]
 [-0.70710678  0.      0.70710678  0.      ]]

Laplacian Matrix L:
[[ 1.  -0.5 -0.5  0. ]
 [-0.5  1.   0.  -0.5]
 [-0.5  0.   1.  -0.5]
 [ 0.  -0.5 -0.5  1.  ]]
```

**Εικόνα 14.** Πίνακες  $W, B$  και  $L$ .

Εύκολα διαπιστώνουμε πως:

- Ο πίνακας  $W$  είναι συμμετρικός και οι στήλες του έχουν άθροισμα 1 (doubly stochastic).
- Ο πίνακας  $B$  είναι αραιός, κάθε γραμμή του έχει μόνο δύο μη-μηδενικά στοιχεία. Επί της ουσίας, για κάθε ακμή, υπάρχει ένα θετικό βάρος στη στήλη-κόμβο αφετηρία, και ένα αρνητικό βάρος στη στήλη-κόμβο προορισμό.
- Ο πίνακας  $L$  είναι συμμετρικός, τα διαγώνια στοιχεία του είναι ίσα με  $L_{ij} = 1$ , ενώ τα μη-διαγώνια στοιχεία είναι  $L_{ij} = -w_{ij}$  όταν  $(i,j) \in E$  ενώ  $L_{ij} = 0$  όταν  $(i,j) \notin E$ .

### 4.3 Αποσυνδεδεμένο Πρόβλημα – Primal Relaxation

Εκφράζουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης ως

$$\mathbf{x}^* \in \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times p}} F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \text{ subject to } \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

ή

$$\mathbf{x}^* \in \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}} F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 x_i^T A_i x + b_i^T x_i \text{ subject to } \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

όπου,  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}$  και  $\mathbf{x} = [x_1^T \ x_2^T \ x_3^T \ x_4^T]^T \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  ένα διάνυσμα με όλα τα αντίγραφα των μεταβλητών, σε όλους τους κόμβους του δικτύου ενώ με  $x_i \in \mathbb{R}^2$  συμβολίζουμε τα τοπικά αντίγραφα.

Η δυσκολία στη βελτιστοποίηση του προβλήματος αυτού έγκειται στην ύπαρξη των περιορισμών.

Μια επιλογή είναι να χαλαρώσουμε τους περιορισμούς συναίνεσης αλλά να προσπαθήσουμε να τιμωρήσουμε μεγάλες αποκλίσεις από τους περιορισμούς αυτούς. Κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει θεωρώντας το ακόλουθο πρόβλημα χωρίς περιορισμούς:

$$\mathbf{x}^*_\alpha = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times p}} (\alpha F(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\mathbf{x}\|^2)$$

όπου  $\alpha$  είναι ο συντελεστής ποινής και ο όρος  $\|\mathbf{B}\mathbf{x}\|^2$  είναι ο όρος ποινής που εξασφαλίζει ότι οι λύσεις των κόμβων θα συγκλίνουν. Η προσθήκη της ποινής εξασφαλίζει ότι η λύση θα τηρεί την κατανομημένη φύση του προβλήματος και θα συνάδει με τη δομή του δικτύου.

Επομένως η νέα συνάρτηση κόστους με τον όρο ποινής διαμορφώνεται ως εξής:

$$f_\alpha(\mathbf{x}) = (\alpha F(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\mathbf{x}\|^2)$$

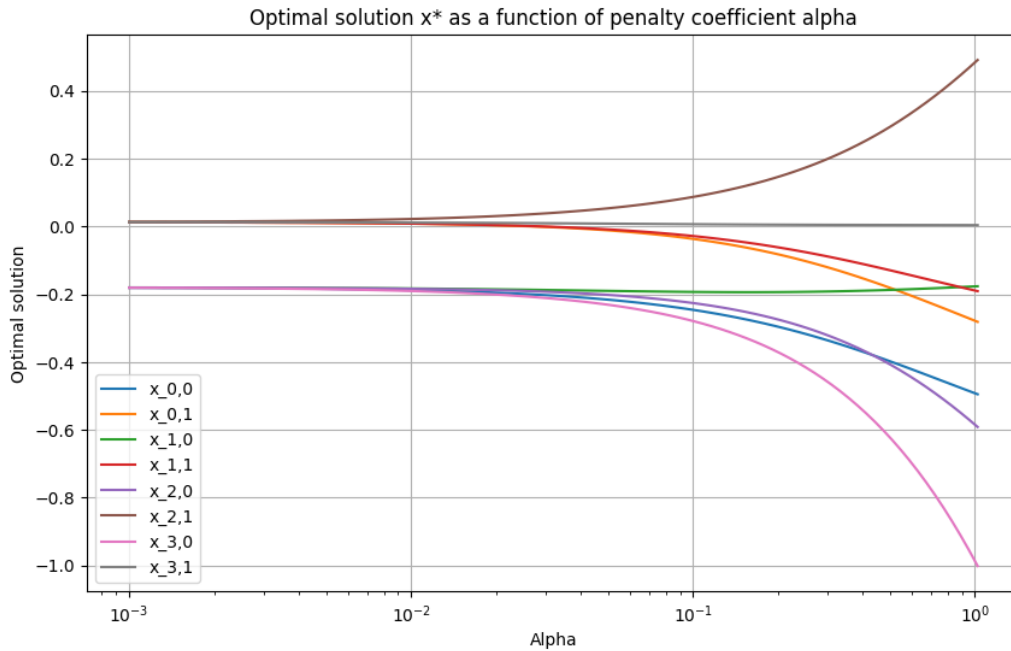
Τα δύο προβλήματα δεν είναι ισοδύναμα, ωστόσο θα μπορούσαν να είναι κοντά για μικρό  $\alpha$ , το οποίο ελέγχει τη σχετική σημαντικότητα που δίνουμε στο κόστος και την ικανοποίηση των περιορισμών.

Η παραπάνω μέθοδος αντιμετώπισης των περιορισμών συναίνεσης αποκαλείται χαλάρωση στον πρωτεύοντα χώρο (primal relaxation) και οδηγεί στον κατανομημένο αλγόριθμο κλίσεων (distributed gradient descend).

#### Προαιρετική Μέθοδος Λύσης

Η λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης επιτυγχάνεται μέσω της μεθόδου BFGS, η οποία είναι μια δημοφιλής μέθοδος για προβλήματα χωρίς περιορισμούς. Η διαδικασία περιλαμβάνει την παρακάτω στρατηγική:

1. **Υπολογισμός της Συνάρτησης Κόστους:** Η συνάρτηση κόστους υπολογίζεται τόσο με βάση τις τοπικές συναρτήσεις κόστους  $f_i(x_i)$  όσο και τον όρο ποινής που εξαρτάται από τον πίνακα  $\mathbf{V}$ .
2. **Παραμετροποίηση της Ποινής:** Εξετάζουμε πολλές τιμές της παραμέτρου ποινής  $\alpha$ , η οποία καθορίζει πόσο αυστηρά εφαρμόζεται η ποινή. Οι τιμές  $\alpha$  κυμαίνονται σε λογαριθμική κλίμακα από  $10^{-3}$  έως περίπου 1.
3. **Βελτιστοποίηση για Διάφορες Τιμές  $\alpha$ :** Για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\alpha$ , χρησιμοποιείται η μέθοδος BFGS για την εύρεση της βέλτιστης λύσης.



**Εικόνα 15.** Βέλτιστες λύσεις συναρτήσεϊ του συντελεστή ποινής  $\alpha$ .

Για μεγάλες τιμές του  $\alpha$ : Οι λύσεις  $x^*$  επηρεάζονται κυρίως από τις τοπικές συναρτήσεις κόστους  $f_i(x)$ , και επομένως θα υπάρχει μεγαλύτερη διαφοροποίηση στις λύσεις μεταξύ των κόμβων.

Για μικρές τιμές του  $\alpha$ : Οι λύσεις  $x^*$  επηρεάζονται κυρίως από τον όρο ποινής, οδηγώντας σε μεγαλύτερη σύγκλιση των τιμών των κόμβων και πιο ομοιόμορφες λύσεις.

Παρατηρούμε πως για  $\alpha = 0.001$  οι βέλτιστες λύσεις του αποσυνδεδεμένου προβλήματος με χρήση χαλάρωσης στον πρωτεύοντα χώρο ταυτίζονται με τις αντίστοιχες του κεντρικοποιημένου προβλήματος της Εικόνας 13.

#### 4.4 Distributed Gradient Descend

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο ερώτημα:

$$x^*_\alpha = \operatorname{argmin}_{x \in R^{n \times p}} f_\alpha(x)$$

όπου

$$\text{Συνάρτηση Κόστους: } f_\alpha(x) = (\alpha F(x) + \frac{1}{2} \|Bx\|^2)$$

Διάνυσμα το οποίο διατηρεί ο αλγόριθμος την επανάληψη  $k$ :  $x_k$

$$\text{Διάνυσμα Κλίσεων: } g_k = \alpha \nabla F(x_k) + B^T B x_k = \alpha \nabla F(x_k) + \Lambda x_k$$

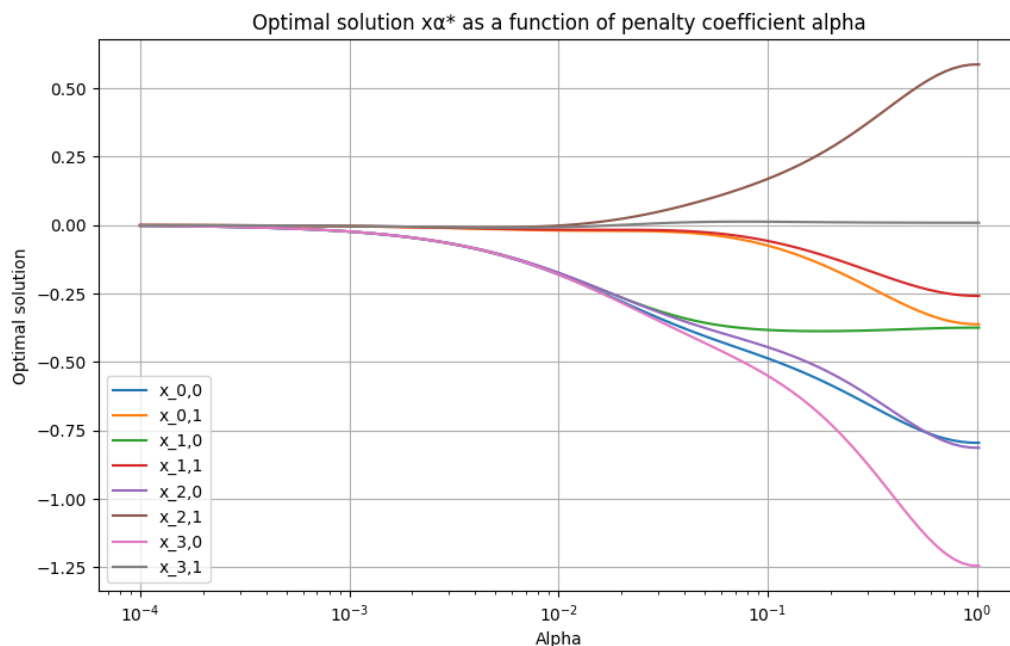
$$\text{Εξισώσεις ανανέωσης των εκτιμήσεων της παραμέτρου } x: x_{k+1} = x_k - \varepsilon_k g_k$$



Ο αλγόριθμος υλοποιήθηκε χρησιμοποιώντας τη μέθοδο κλίσεων με σταθερό βήμα ( $\varepsilon_k = \varepsilon = 0.01$ ) για την ενημέρωση των τιμών  $x$  σε κάθε κόμβο. Σε κάθε επανάληψη, κάθε κόμβος υπολογίζει τον τοπικό του βαθμό κλίσης και ανταλλάσσει τις εκτιμήσεις του με τους γείτονές του.

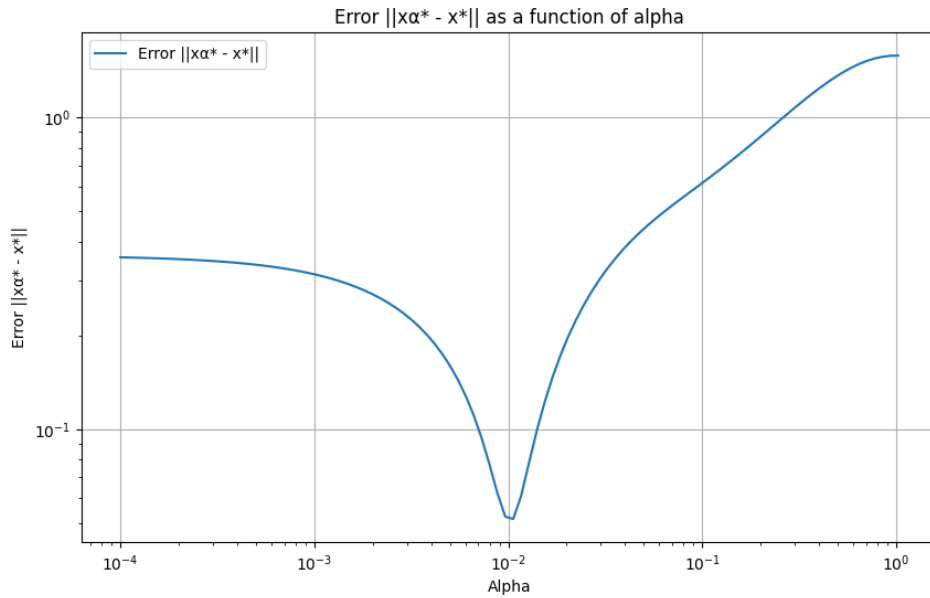
Η υλοποίηση περιλάμβανε δύο βασικά στάδια:

1. **Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\alpha$ :** Ο αλγόριθμος εκτελέστηκε για ένα σύνολο τιμών  $\alpha$ , προκειμένου να προσδιοριστεί η βέλτιστη τιμή  $\alpha$ , για την οποία πετυχαίνετε η καλύτερη δυνατή σύγκλιση των κόμβων.
2. **Ανάλυση σφάλματος σε σχέση με τον αριθμό των επαναλήψεων:** Καταγράφηκε η εξέλιξη του σφάλματος των εκτιμήσεων ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων, προκειμένου να αξιολογηθεί η ταχύτητα σύγκλισης.



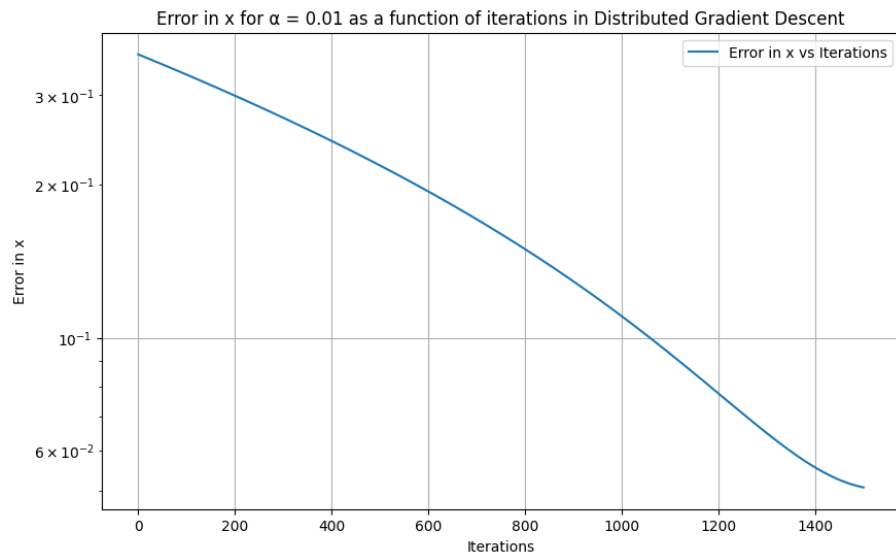
**Εικόνα 16.** Βέλτιστες λύσεις συναρτήσεων του συντελεστή ποινής  $\alpha$ .

Παρατηρείται πως όσο μικρότερη είναι η τιμή του  $\alpha$  οι κόμβοι συγκλίνουν σε μια κοινή λύση. Για  $\alpha = 10^{-2}$  οι βέλτιστες λύσεις  $x^*_\alpha$



**Εικόνα 17.** Σφάλμα  $\|x_{\alpha}^* - x^*\|$  συναρτήσει του συντελεστή ποινής  $\alpha$ .

Το διάγραμμα του σφάλματος ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων δείχνει ότι για την κατάλληλη τιμή της παραμέτρου  $\alpha$ , ο αλγόριθμος παρουσιάζει καλή σύγκλιση.



**Εικόνα 18.** Σφάλμα  $\|x_{\alpha}^* - x^*\|$  για  $\alpha=0.01$  συναρτήσει του πλήθους των επαναλήψεων του Distributed Gradient Descent.

Με τον κατάλληλο καθορισμό του  $\alpha$  και των παραμέτρων του αλγορίθμου, είναι δυνατή η επίτευξη ικανοποιητικής συμφωνίας μεταξύ των κόμβων του δικτύου, διατηρώντας παράλληλα την κατανομημένη φύση του αλγορίθμου και την τοπικότητα της πληροφορίας σε κάθε κόμβο.

## 4.5 Αποσυνδεδεμένο Πρόβλημα – Dual Constraint Relaxation

Εκφράζουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης ως

$$\mathbf{x}^* \in \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times p}} F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \text{ subject to } \mathbf{B}\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

ή

$$\mathbf{x}^* \in \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}} F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 x_i^T A_i \mathbf{x} + b_i^T x_i \text{ subject to } \mathbf{B}\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

όπου,  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{I}$  και  $\mathbf{x} = [x_1^T \ x_2^T \ x_3^T \ x_4^T]^T \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  ένα διάνυσμα με όλα τα αντίγραφα των μεταβλητών, σε όλους τους κόμβους του δικτύου ενώ με  $x_i \in \mathbb{R}^2$  συμβολίζουμε τα τοπικά αντίγραφα.

Η δυσκολία στη βελτιστοποίηση του προβλήματος αυτού έγκειται στην ύπαρξη των περιορισμών.

Μία επιλογή είναι η εισαγωγή χαλάρωσης στο λεγόμενο δυικό χώρο. Για να το κάνουμε αυτό, ορίζουμε ένα διάνυσμα από μη-αρνητικούς πολλαπλασιαστές Lagrange, το οποίο συμβολίζουμε με  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$  και το οποίο αντιστοιχίζεται με την εξίσωση περιορισμών  $\mathbf{B}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ .

Έτσι, θεωρούμε την Lagrangian συνάρτηση για το πρόβλημα που μελετάμε:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^T \mathbf{B}\mathbf{x}$$

Οι βέλτιστες τιμές του  $\mathbf{x}$  για δοσμένες τιμές του  $\mathbf{v}$  δίνονται από τη σχέση:

$$\mathbf{x}(\mathbf{v}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}} L(\mathbf{x}, \mathbf{v})$$

Και οι αντίστοιχες τιμές της Lagrangian δίνονται ως:

$$g(\mathbf{v}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}} L(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{x}(\mathbf{v}), \mathbf{v}) = F(\mathbf{x}(\mathbf{v})) + \mathbf{v}^T \mathbf{B}\mathbf{x}(\mathbf{v})$$

Το πρόβλημα λύνεται από τη μεγιστοποίηση της δυικής συνάρτησης. Οι βέλτιστες τιμές για τους πολλαπλασιαστές Lagrange είναι το όρισμα που μεγιστοποιεί τη δυική συνάρτηση:

$$\mathbf{v}^* = \operatorname{argmax}_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}} g(\mathbf{v})$$

Σε αντιδιαστολή με τη μέθοδο χαλάρωσης στον πρωτεύοντα χώρο (primal relaxation), η οποία εισάγει μια τετραγωνική ποινή για τον περιορισμό, εδώ έχουμε μια γραμμική ποινή για τον περιορισμό.

Το αρχικό πρόβλημα, στο οποίο εμπλεκόταν το διάνυσμα μεταβλητών  $\mathbf{x}$ , έχει μετασχηματιστεί σε ένα άλλο πρόβλημα στο οποίο εμπλέκονται μόνο οι πολλαπλασιαστές στο διάνυσμα  $\mathbf{v}$ .

## 4.6 Distributed Dual Ascent

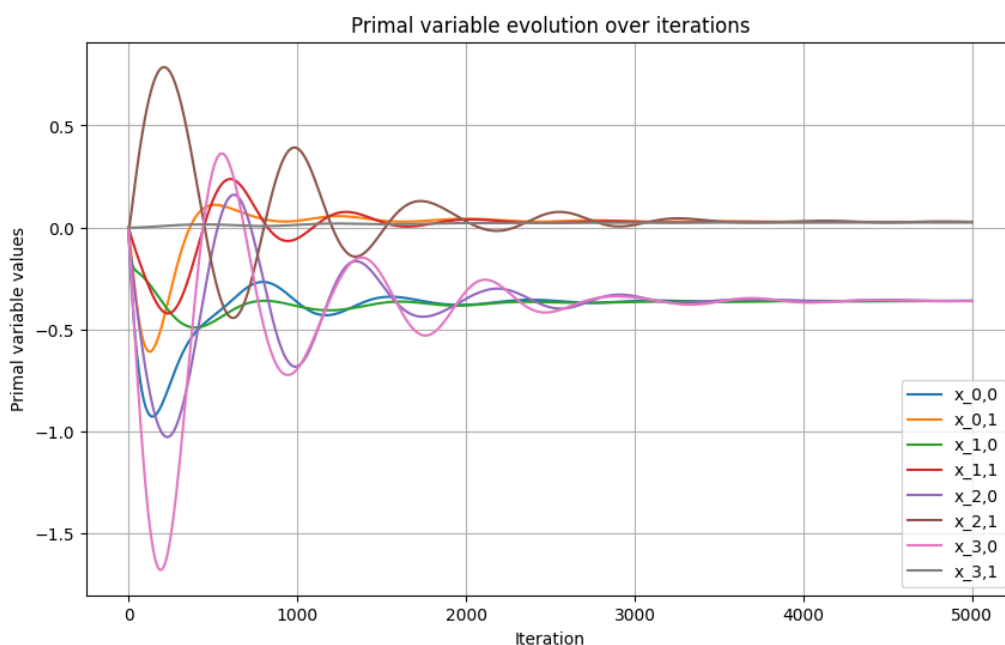
Ο στόχος ερωτήματος είναι να αναλύσουμε την απόδοση ενός κατανεμημένου αλγορίθμου δυικής ανόδου που εφαρμόζεται σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης που περιλαμβάνει πολλούς κόμβους. Ο αλγόριθμος επικεντρώνεται στη ελαχιστοποίηση της συνάρτησης Lagrangian που σχετίζεται με το πρόβλημα βελτιστοποίησης. Το βασικό χαρακτηριστικό αυτής της μεθόδου είναι ότι κάθε κόμβος

επιλύει το τοπικό υποπρόβλημά του χρησιμοποιώντας την τεχνική της καταγωγής (gradient descent) ενώ επικοινωνεί με τους γειτονικούς κόμβους για να διασφαλίσει τη σύγκλιση σε μία παγκόσμια λύση.

Ο καταναεμημένος αλγόριθμος δυικής ανόδου υλοποιήθηκε με τα παρακάτω βήματα:

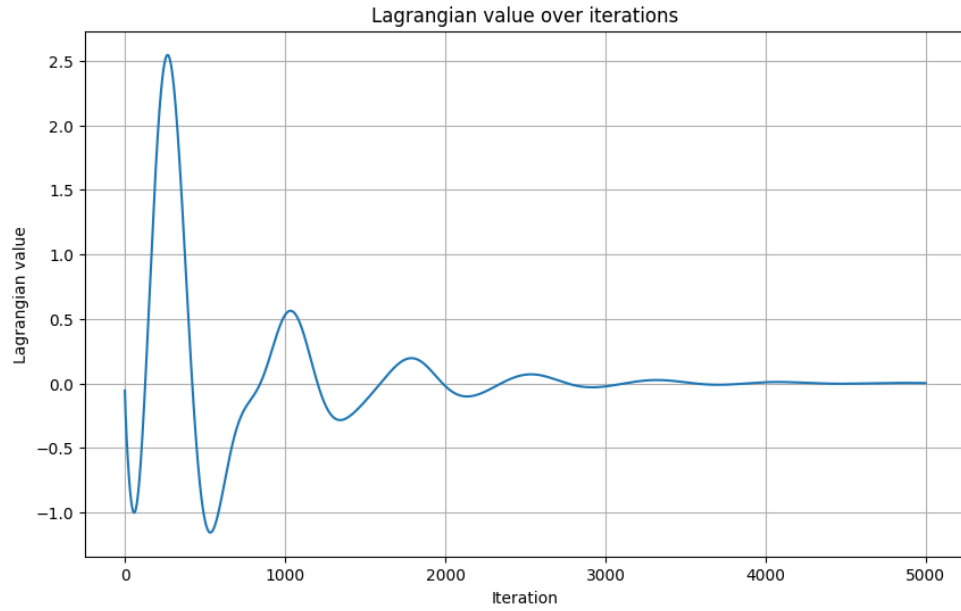
1. **Αρχικοποίηση:** Οι πρωταρχικές μεταβλητές  $x$  για κάθε κόμβο αρχικοποιούνται στο μηδέν.
2. **Επαναληπτική Ενημέρωση:** Σε κάθε επανάληψη, οι πρωταρχικές μεταβλητές ενημερώνονται χρησιμοποιώντας την τεχνική της καταγωγής (gradient descent) στην Lagrangian συνάρτηση. Οι διπλές μεταβλητές ενημερώνονται με βάση τις τρέχουσες τιμές των πρωταρχικών μεταβλητών.
3. **Κριτήριο Τερματισμού:** Η διαδικασία τερματίζεται όταν η διαφορά των πρωταρχικών μεταβλητών είναι μικρότερη από μια καθορισμένη ανοχή.

Στην Εικόνα 19 παρουσιάζεται η εξέλιξη των πρωταρχικών μεταβλητών συναρτήσει των επαναλήψεων. Παρατηρούμε πως οι λύσεις του αλγορίθμου συγκλίνουν στις βέλτιστες λύσεις  $x^*$ .



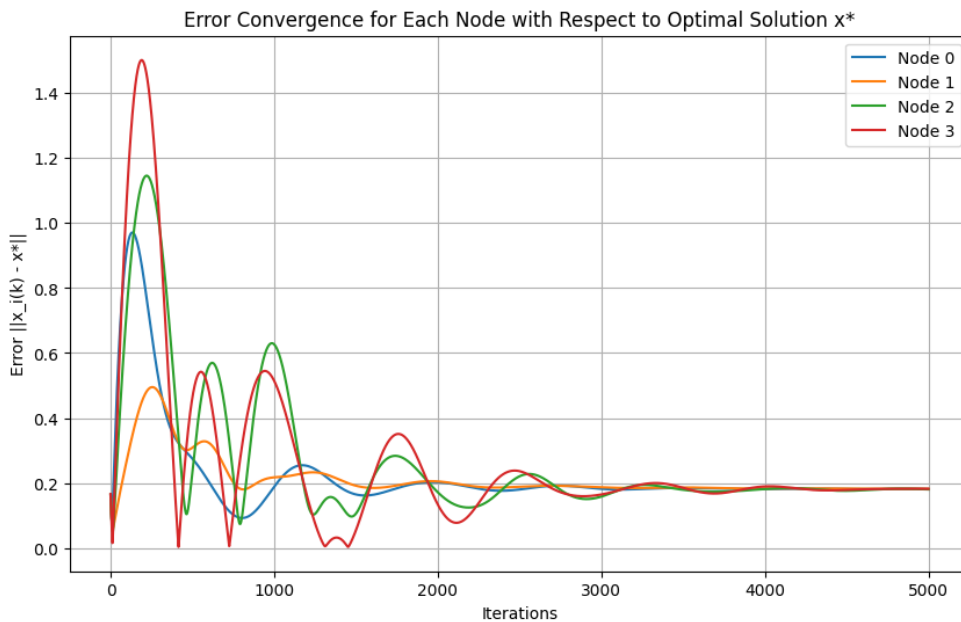
**Εικόνα 19.** Εξέλιξη πρωταρχικών μεταβλητών.

Στην Εικόνα 20 παρακολουθούμε την εξέλιξη της τιμής της Lagrangian συνάρτησης καθώς προχωρούν οι επαναλήψεις του αλγορίθμου. Παρατηρούμε μια μείωση στην τιμή της Lagrangian συνάρτησης καθώς οι επαναλήψεις προχωρούν. Αυτό υποδεικνύει ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει προς μια καλύτερη λύση για το πρόβλημα βελτιστοποίησης. Υπάρχουν μεγάλες διακυμάνσεις στη Lagrangian τιμή κατά τις αρχικές επαναλήψεις, αυτό δείχνει ότι ο αλγόριθμος προσαρμόζεται και εξερευνά τον χώρο των λύσεων. Με το πέρασμα του χρόνου, οι διακυμάνσεις να ελαχιστοποιούνται.



**Εικόνα 20.** Τιμή Lagrangian συνάρτησης συναρτήσει του πλήθους των επαναλήψεων του Distributed Dual Ascent.

Στην Εικόνα 21 βλέπουμε το σφάλμα έναντι της βέλτιστης λύσης  $x^*$  είναι εμφανής η σύγκλιση των μεταβλητών προς την βέλτιστη λύση καθώς προχωρούν οι επαναλήψεις.



**Εικόνα 21.** Σφάλμα  $\|x_i^k - x^*\|$  συναρτήσει του πλήθους των επαναλήψεων του Distributed Dual Ascent.

## 5 Πρόβλημα Φωτισμού

Το παρόν ερώτημα αφορά την ανάλυση ενός προβλήματος φωτισμού, όπου έχουμε  $m=5$  λαμπτήρες τοποθετημένους σε σταθερές θέσεις και  $n=5$  επιφάνειες που φωτίζονται από αυτούς τους λαμπτήρες. Η ένταση του φωτός  $I_k$  σε κάθε επιφάνεια  $k$  δίνεται από τη σχέση

$$I_k = \sum_{j=1}^m a_{ik} p_j$$

όπου  $p_j$  είναι η ισχύς του λαμπτήρα  $j$ , και  $a_{kj}$  οι συντελεστές εξασθένισης του φωτός από τον λαμπτήρα  $j$  στην επιφάνεια  $k$ , οι οποίοι εξαρτώνται από την απόσταση  $r_{kj}$  και την γωνία  $\theta_k$ . Στόχος είναι να βρούμε τις ισχύς των λαμπτήρων έτσι ώστε να πετύχουμε το επιθυμητό επίπεδο φωτισμού  $I_{des} = 50$  σε όλες τις επιφάνειες, υπό τον περιορισμό ότι η ισχύς κάθε λαμπτήρα δεν υπερβαίνει το μέγιστο όριο  $p_{max} = 100$ .

Αρχικοποίηση Παραμέτρων :  $\theta_k \in [-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}]$  και  $r_{kj} \in [0.9, 1.1]$

Υπολογισμός Συντελεστών Εξασθένισης:  $a_{kj} = \frac{1}{r_{kj}^2} \max\{\cos(\theta_k), 0\}$

Ορισμός Συνάρτησης Κόστους:  $\min_p \max_k |\log(I_k) - \log(I_{des})|$

### 5.1 Επίλυση με χρήση κοινής ισχύος

Στο πρώτο ερώτημα, απλοποιούμε το πρόβλημα υποθέτοντας ότι όλοι οι λαμπτήρες έχουν την ίδια ισχύ, δηλαδή  $p_j = p$  για όλους τους λαμπτήρες  $j$ , και αναζητούμε τη βέλτιστη τιμή της ισχύος  $p$ . Η ένταση του φωτός  $I_k$  στην επιφάνεια  $k$  δίνεται από:

$$I_k = \sum_{j=1}^m a_{ik} p$$

Χρησιμοποιείται η μέθοδος `scipy.optimize.minimize` για την ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης. Η διαδικασία περιλαμβάνει τα εξής:

1. Εφαρμόζεται περιορισμός στις τιμές του  $p$ , ορίζοντας ότι  $p \in [0, p_{max}]$ .
2. Η αρχική τιμή του  $p$  δίνεται ως  $p = \frac{p_{max}}{2}$ .
3. Αντικειμενική συνάρτηση:  $\max_k |\log(I_k) - \log(I_{des})|$

Η βέλτιστη τιμή της ισχύος  $p$  που υπολογίστηκε είναι 10.108, δηλαδή αυτή είναι η τιμή της ισχύος που πρέπει να έχουν όλοι οι λαμπτήρες ώστε να επιτύχουμε τον στόχο φωτισμού με τη μικρότερη δυνατή απόκλιση από την επιθυμητή τιμή φωτεινότητας ( $I_{des} = 50$ ).

Το ελάχιστο κόστος είναι 0.065. Αυτό σημαίνει ότι ο αλγόριθμος κατάφερε να βρει μια λύση όπου η απόκλιση από την επιθυμητή τιμή είναι σχετικά μικρή, υποδεικνύοντας ότι η ισχύς  $p = 10.108$  προσφέρει μια καλή προσέγγιση για τον φωτισμό των επιφανειών.

Οι τιμές της έντασης φωτός  $I_k$  στις διαφορετικές επιφάνειες δείχνουν ότι η ένταση κυμαίνεται γύρω από την επιθυμητή τιμή  $I_{des}=50$ , με μικρές αποκλίσεις. Η μεγαλύτερη ένταση είναι 53.36 και η μικρότερη 46.85, αλλά γενικά οι τιμές είναι κοντά στον στόχο, κάτι που επιβεβαιώνει την καλή λύση του προβλήματος.

```
Optimal power p: 10.108241457539853
Minimum cost: 0.06504160437078088
Intensity values Ik: [53.36017114 50.41699713 49.96880001 51.51014657 46.8514239 ]
```

**Εικόνα 22.** Βέλτιστες λύσεις προβλήματος φωτισμού με χρήση κοινή ισχύος.

## 5.2 Επίλυση με ελάχιστα τετράγωνα

Για την επίλυση του προβλήματος μέσω της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, αρχικά υπολογίστηκε η βέλτιστη κατανομή της ισχύος των λαμπτήρων, χωρίς να ληφθούν υπόψη περιορισμοί. Ο στόχος ήταν να ελαχιστοποιηθεί το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων της έντασης φωτός  $I_k$  από την επιθυμητή ένταση  $I_{des}$ .

Αφού βρεθεί η λύση χωρίς περιορισμούς, εφαρμόστηκαν περιορισμοί στην ισχύ των λαμπτήρων, δηλαδή:

1. Αν η ισχύς  $p_j$  είναι μικρότερη από 0, τέθηκε ίση με 0.
2. Αν η ισχύς  $p_j$  είναι μεγαλύτερη από το μέγιστο επιτρεπόμενο όριο  $p_{max}$ , τέθηκε ίση με  $p_{max}$ .

Οι βέλτιστες τιμές ισχύος για τους λαμπτήρες είναι: [0.482, 0.0, 21.78, 5.72, 21.70]. Αυτό σημαίνει ότι ορισμένοι λαμπτήρες έχουν μηδενική ισχύ.

Το ελάχιστο κόστος (δηλαδή το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων από την επιθυμητή ένταση  $I_{des}$  είναι 0.3917. Αυτό υποδεικνύει ότι η απόκλιση των εντάσεων από τον στόχο ήταν πολύ μικρή.

Οι τελικές τιμές έντασης φωτός στις επιφάνειες  $I_k$  είναι: [50.29, 50.33, 50.28, 50.27, 50.22]. Αυτές οι τιμές είναι πολύ κοντά στην επιθυμητή τιμή  $I_{des}=50$ , γεγονός που δείχνει ότι η μέθοδος πέτυχε μια καλή λύση για τον φωτισμό.

Συνολικά, η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων χωρίς περιορισμούς, με την εφαρμογή των περιορισμών στις τελικές τιμές, οδήγησε σε μια βέλτιστη λύση όπου οι περισσότερες επιφάνειες φωτίζονται κοντά στο επιθυμητό επίπεδο.

```
Optimal power values: [ 0.48225084  0.          21.780321   5.72216085 21.69659602]
Minimum cost: 0.3916786339973056
Intensity values Ik: [50.28896898 50.32918087 50.27798274 50.26968271 50.22318681]
```

**Εικόνα 23.** Βέλτιστες λύσεις προβλήματος φωτισμού με ελάχιστα τετράγωνα.

### 5.3 Επίλυση με ελάχιστα τετράγωνα και βάρη

Για να επιλύσουμε το πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων με βάρη και επαναληπτική ενημέρωση των βαρών, μπορούμε να υλοποιήσουμε μια μέθοδο που προσαρμόζει τα βάρη κάθε φορά που παραβιάζονται οι περιορισμοί στην ισχύ των λαμπτήρων  $0 \leq p_j \leq p_{max}$ . Η βασική ιδέα είναι να προσθέσουμε στους περιορισμούς του προβλήματος ένα τετραγωνικό όρο που τιμωρεί τις αποκλίσεις από την επιτρεπόμενη τιμή  $p_{max}$ .

Η επαναληπτική διαδικασία έχει ως εξής:

1. Αρχικοποιούμε με βάρη ίσα με 1.
2. Λύνουμε το πρόβλημα με την τρέχουσα επιλογή βαρών.
3. Εάν οι ισχύς  $p_j$  παραβιάζουν τους περιορισμούς, αυξάνουμε τα βάρη  $w_j$  και επαναλαμβάνουμε μέχρι να ικανοποιηθούν οι περιορισμοί.

Οι τιμές της φωτεινότητας δείχνουν ότι οι λαμπτήρες παρέχουν ικανοποιητικά επίπεδα φωτισμού στις επιφάνειες, όχι τόσο καλά όπως η απλή μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων.

Ο αριθμός επαναλήψεων είναι 0, γεγονός που υποδεικνύει ότι οι αρχικές τιμές της ισχύος παρέμειναν εντός των καθορισμένων περιορισμών και δεν απαιτήθηκαν επιπλέον επαναλήψεις για προσαρμογές.

```
Optimal power values after weighted least squares: [11.61368171 11.36265794 9.60799311 12.12047736 13.14451568]
Intensity values Ik: [60.47373793 57.22161874 57.83769777 58.57942509 53.96497862]
Number of iterations: 0
```

**Εικόνα 24.** Βέλτιστες λύσεις προβλήματος φωτισμού με ελάχιστα τετράγωνα με βάρη.

### 5.4 Επίλυση ως προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού

Ο στόχος είναι να ελαχιστοποιήσουμε το μέγιστο της απόλυτης διαφοράς  $|I_k - I_{des}|$ , υπό τους περιορισμούς:

$$0 \leq p_j \leq p_{max}, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$

Μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το πρόβλημα ως γραμμικό πρόγραμμα, εισάγοντας μια νέα μεταβλητή  $t$  που να ισούται με το μέγιστο της απόλυτης διαφοράς:

$$\min t$$

$$\text{subject to } |I_k - I_{des}| \leq t \quad \forall k = 1, 2, 3, 4, 5$$

Μπορούμε να εκφράσουμε αυτή την ανισότητα ως δύο γραμμικούς περιορισμούς για κάθε  $k$ :

$$I_k - I_{des} \leq t$$

$$I_{des} - I_k \leq t$$

Το σύστημα λοιπόν γίνεται:

$$\bullet \quad \min t$$



- Για κάθε  $k$  έχουμε τους παρακάτω περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^5 a_{ik} p_j - I_{des} \leq t$$

$$I_{des} - \sum_{j=1}^5 a_{ik} p_j \leq t$$

- Με περιορισμούς:

$$0 \leq p_j \leq p_{max} \quad \forall j = 1, 2, 3, 4, 5$$

Η επίλυση του γραμμικού προγραμματισμού κατέδειξε ότι οι βέλτιστες τιμές ισχύος  $p$  είναι ικανοποιητικές, καθώς οι υπολογισμένες τιμές έντασης  $I_k$  διατηρούν μια μέγιστη απόκλιση μόλις 0.0224 από τις επιθυμητές τιμές  $I_{des}$ , χρίζοντας την μέθοδο επίλυσης αυτή την καλύτερη μέχρι στιγμής. Η προσέγγιση αυτή διασφαλίζει ότι οι περιορισμοί στη ρύθμιση της ισχύος τηρούνται, ενώ επιτυγχάνεται η ελαχιστοποίηση των αποκλίσεων.

```
Optimal power values (p): [ 0.70224821 0.          21.54492377  5.48070082 21.68897639]
Optimal maximum deviation (t): 0.02238160626097141
Intensity values Ik: [50.02238161 50.02238161 50.02238161 49.97761839 49.97761839]
```

**Εικόνα 25.** Βέλτιστες λύσεις προβλήματος φωτισμού με γραμμικό προγραμματισμό.

## 5.5 Επίλυση ως κυρτού προβλήματος

Στο ερώτημα αυτό αναζητούμε την επίλυση του κυρτού προβλήματος, με την συνάρτηση  $h(u) = \max(u, \frac{1}{u})$ , το οποίο έχει ως στόχο να ελαχιστοποιήσει τη μέγιστη τιμή της  $h(\frac{I_k}{I_{des}})$ .

Θέλουμε να επιλύσουμε το πρόβλημα:

$$\min_{p_j} \max_{k=1,2,3,4,5} h\left(\frac{I_k}{I_{des}}\right)$$

υπό τους περιορισμούς:

$$0 \leq p_j \leq p_{max} \quad \forall j = 1, 2, 3, 4, 5$$

όπου η συνάρτηση  $h(u)$  ορίζεται ως:

$$h(u) = \max(u, \frac{1}{u})$$

Για να κάνουμε αυτό το πρόβλημα πιο διαχειρίσιμο, μπορούμε να εισάγουμε μια νέα μεταβλητή  $t$ , ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το  $t$  που ικανοποιεί:

$$\max\left(\frac{I_k}{I_{des}}, \frac{I_{des}}{I_k}\right) \leq t \quad \forall k = 1, 2, 3, 4, 5$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\frac{I_k}{I_{des}} \leq t \quad \text{και} \quad \frac{I_{des}}{I_k} \leq t$$

Μπορούμε να διατυπώσουμε τις ανισότητες ως:

$$I_k \leq t I_{des} \quad \text{και} \quad I_k \geq \frac{I_{des}}{t}$$

που ισοδυναμεί με:

$$\sum_{j=1}^5 a_{ik} p_j \leq t I_{des} \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^5 a_{ik} p_j \geq \frac{I_{des}}{t}$$

Η επίλυση του κυρτού προβλήματος κατέδειξε την αποτελεσματικότητα της επιλεγμένης μεθόδου. Οι βέλτιστες τιμές ισχύος  $p_j$  επιτεύχθηκαν με ελάχιστη μέγιστη απόκλιση, διασφαλίζοντας ότι οι τιμές έντασης  $I_k$  παραμένουν κοντά στην επιθυμητή ένταση  $I_{des}$ . Η διαδικασία αυτή είναι κρίσιμη για την εξασφάλιση της αποδοτικής κατανομής ισχύος σε συστήματα που απαιτούν προσαρμογή στις ανάγκες τους.

```
Optimal power values (p): [15.13667617 20.01064388 15.77915926 20.38811373 25.81652136]
Optimal maximum deviation (t): 1.0000000000287557e-06
Intensity values Ik: [100.00008101 96.57569541 98.33764798 97.58583776 91.43685354]
```

**Εικόνα 26.** Βέλτιστες λύσεις προβλήματος φωτισμού με κυρτή βελτιστοποίηση.

Τα αποτελέσματα της επίλυσης με του προβλήματος με κυρτή βελτιστοποίηση είναι καλύτερα συγκριτικά με τις προηγούμενες προσεγγίσεις για δύο λόγους. Πρώτον, οι τρόποι επίλυσης 1 έως 4 είναι προσεγγιστικοί/ευρετικοί και άρα δίνουν υπό-βέλτιστες λύσεις. Δεύτερον, το αρχικό πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το κυρτό πρόβλημα καθώς οι συναρτήσεις προς βελτιστοποίηση μεγιστοποιούνται για το ίδιο όρισμα ( $\arg \max_{k=1,2,3,4,5} h\left(\frac{I_k}{I_{des}}\right) = \arg \max_{k=1,2,3,4,5} \log\left(\frac{I_k}{I_{des}}\right)$ ) και άρα έχουμε την ακριβή λύση στο αρχικό πρόβλημα.

### Ανάλυση της σχέσης μεταξύ των δύο προβλημάτων

Η συνάρτηση  $h(u)$  ορίζεται ως:  $h(u) = \max(u, \frac{1}{u})$ . Για  $u = \frac{I_k}{I_{des}}$ , όταν  $I_k$  είναι κοντά στο  $I_{des}$  η  $h(u)$  παίρνει τιμή κοντά στο 1. Σε περιπτώσεις όπου η  $I_k$  αποκλίνει από το  $I_{des}$ , η συνάρτηση  $h(u)$  θα παράγει την αντίστοιχη απόκλιση.

Στο αρχικό πρόβλημα, η μέγιστη απόκλιση ορίζεται ως  $|I_k - I_{des}|$ . Η μέγιστη απόκλιση για κάθε  $k$  υπολογίζεται ως:  $\max_{k=1,2,3,4,5} |I_k - I_{des}|$ . Αυτό δείχνει ότι η μέγιστη απόκλιση της έντασης  $I_k$  από την επιθυμητή ένταση  $I_{des}$  είναι η κύρια μέριμνα και στις δύο περιπτώσεις.

Και τα δύο προβλήματα επιβάλλουν τους ίδιους περιορισμούς  $0 \leq p_j \leq p_{max}$  κάτι που σημαίνει ότι οι περιορισμοί στην διανομή ισχύος παραμένουν οι ίδιοι.