Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Μηχ. Η/Υ & Πληροφορικής

Στατιστική Επεξεργασία Σήματος και Μάθηση

Πρώτη Εργαστηριακή Άσκηση

Ακαδημαϊκό Έτος 2021/22

Βασιλική Στάμου

Α.Μ:1059543

Έτος 5ο

1ο Ερώτημα

Παρουσιάστε τις εξισώσεις Wiener-Hopf, το βέλτιστο φίλτρο $w(i)$ και το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης ξ_{min}.

Οι εξισώσεις Wiener-Hopf, σε αυτή την περίπτωση, γράφονται ως:

$R_y w = r_{dy}(k) \Leftrightarrow (Rx+\sigma_u^2 I)w = r_x(k+\tau)$

Το βέλτιστο φίλτρο w(i) για p=2 είναι:

$w_{opt} = (Rx+\sigma_u^2 I)^{-1}\, r_x(k+\tau)$, όπου $Rx = \begin{pmatrix} rx(0) & rx(1) \\ rx(1) & rx(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$

Απόδειξη ότι $r_{dy}(k) = r_x(k+\tau)$:

$r_{dy}(k) = E\{d(n)y(n-k)\} = E\{x(n+\tau)(x(n-k)+u(n-k))\} = E\{ x(n+\tau)x(n-k)\} + E\{ x(n+\tau)u(n-k)\}$

Αφού ο θόρυβος σχετίζεται μόνο με τον εαυτό του έχουμε:

$r_{dy}(k) = E\{ x(n+\tau)x(n-k) \} = r_x(k+\tau)$

Απόδειξη ότι $r_d(k) = r_x(k)$:

$r_d(k) = E\{d(n)d(n-k)\} = E\{x(n+\tau)x(n+\tau-k)\} = r_x(k)$

Το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι:

$\xi_{min} = r_d(0) - r_{dy}^t w_{opt} = r_x(0) - r_x^t(k+\tau)w_{opt} = 1 - r_x^t(k+\tau)w_{opt}$

Θεωρώντας τ=1 και σ_u^2=0, υπολογίστε το ελάχιστο σφάλμα για α=0,2, και α=0,8. Σε ποια περίπτωση έχουμε μικρότερο σφάλμα και γιατί; Επαναλάβετε το ερώτημα για σ_u^2=0,5 και σχολιάστε.

Για τ=1 :

$r_x(k+1) = [a \ \ a^2]^t$

Για σ_u^2=0 οι βέλτιστοι συντελεστές του φίλτρου Wiener γίνονται:

$w_{opt} = [a \ \ 0]^t$

Έτσι , $\xi_{min} = 1 - [a \ \ a^2][a \ \ 0]^t = 1 - a^2$

Για α=0,2 : ξ_{min} = 0,96

Για α=0,8 : ξ_{min} = 0,36

Για σ_u^2=0,5 έχουμε:

Για α=0,2 : $w_{opt} = [0{,}1326 \ \ 0{,}007]^t$, $r_{dy} = [0{,}2 \ \ 0{,}04]^t$

$\xi_{min} = 1 - r_x^t(k+1)w_{opt} = 0{,}9732$

Για α=0,8 : $w_{opt} = [0{,}4275 \ \ 0{,}1974]^t$, $r_{dy} = [0{,}8 \ \ 0{,}64]^t$

$\xi_{min} = 1 - r_x^t(k+1)w_{opt} = 0{,}5317$

τ	σ_u^2	α	ξ_{min}
1	0	0.2	0.96
1	0	0.8	0.36
1	0.5	0.2	0.97
1	0.5	0.8	0.53

Σχολιασμός αποτελεσμάτων:

Όταν τ=1 και σ_u^2=0 έχουμε : $\xi_{min} = 1 - \alpha^2$

Όσο αυξάνεται η παράμετρος α τόσο μειώνεται το ελάχιστο σφάλμα. Η παράμετρος αυτή καθορίζει την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του σήματος x ($r_x(k)=a^{|k|}$).

Όταν η διασπορά του θορύβου είναι μη μηδενική αλλάζουν οι συντελεστές του βέλτιστου φίλτρου Wiener, με αποτέλεσμα το ελάχιστο σφάλμα να είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο με μηδενική διασπορά θορύβου. Και σε αυτή την περίπτωση βέβαια βλέπουμε ότι το ελάχιστο σφάλμα μειώνεται όσο μεγαλώνει το α.

Γενικά, αν η τάξη του φίλτρου πρόβλεψης σφάλματος είναι αρκετά μεγάλη, παρατηρούμε ότι το φίλτρο έχει ιδιότητες λεύκανσης, δηλαδή μπορεί να αφαιρέσει στοιχεία συσχετισμένου σήματος που βρίσκονται στην είσοδο και να παράγει σήμα στην έξοδο που περιέχει μόνο ασυσχέτιστα ή ‘λευκά’ στοιχεία. Επίσης, ενώ η πρόβλεψη μπορεί να ερμηνευθεί σαν ανάλυση μια AR διαδικασίας, το μοντέλο AR μπορεί να θεωρηθεί σαν η σύνθεση της διαδικασίας.

Θεωρώντας τ=3 και σ_u^2=0, υπολογίστε το ελάχιστο σφάλμα για α=0,2, και α=0,8. Σε ποια περίπτωση έχουμε μικρότερο σφάλμα και γιατί; Πως συγκρίνονται τα εν λόγω σφάλματα με αυτά του προηγούμενου ερωτήματος (για σ_u^2=0);

Για τ=3 :

$r_x(k+3) = [r_x(3)\ \ \ r_x(4)]^t = [a^3\ \ a^4]^t$

Για α=0,2 : $w_{opt} = [0{,}0091\ \ 0{,}0041]^t$, $r_{dy} = [0{,}008\ \ 0{,}0016]^t$

$\xi_{min} = 1 - r_x^t(k+3)w_{opt} = 0{,}9999$

Για α=0,8 : $w_{opt} = [0{,}5146\ \ 0{,}0037]^t$, $r_{dy} = [0{,}5120\ \ 0{,}4096]^t$

$\xi_{min} = 1 - r_x^t(k+3)w_{opt} = 0{,}7380$

τ	σ_u^2	α	ξ_{min}
3	0	0.2	0.99
3	0	0.8	0.74

Σχολιασμός αποτελεσμάτων:

Παρατηρούμε, όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, ότι όσο αυξάνεται το α τόσο μειώνεται το ελάχιστο σφάλμα (και είναι λογικό γιατί αυξάνεται η αυτοσυσχέτιση των δειγμάτων) παρόλο που η καθυστέρηση έχει αυξηθεί. Η αύξηση της καθυστέρησης συμβάλει στην γενική αύξηση του ελάχιστου σφάλματος και για τις δύο τιμές του α.

Χρησιμοποιώντας τα φίλτρα που υπολογίσατε (για τ=1 και τ=3, θεωρώντας σ_u^2=0), εξομοιώστε το σύστημα στο Matlab και υπολογίστε πειραματικά το μέσο τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης ξ που προκύπτει, για τις δυο τιμές α, θεωρώντας μια μεγάλη τιμή N (π.χ. 100.000) κατά την παραγωγή του σήματος εισόδου $\eta(n)$. Συγκρίνετε τις τιμές ξ που υπολογίσατε με τις αντίστοιχες τιμές ξmin και σχολιάστε.

τ	σ_u^2	α	ξ_{min}- Θεωρητικό	ξ_{min}- Πειραματικό
1	0	0.2	0.9601	0.9563
1	0	0.8	0.3604	0.3588
3	0	0.2	0.9999	0.9961
3	0	0.8	0.7419	0.7378

Η εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης του σήματος x ($r^{\wedge}_x(k,N)$) παίζει καθοριστικό ρόλο στην εκτίμηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος.

Η εκτίμηση $r^{\wedge}_x(k,N)$ συγκλίνει στην πραγματική τιμή $r_x(k)$ αν :

$$\lim_{N\to\infty} E\{ | r^{\wedge}_x(k,N) - r_x(k) |^2 \} = 0 \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} r^{\wedge}_x(k,N) = r_x(k)$$

Επομένως , όσο μεγαλύτερο N χρησιμοποιούμε τόσο η εκτίμηση θα προσεγγίζει καλύτερα τον υπολογισμό. Επειδή δεν είναι εφικτό να πάρουμε N=∞ , αντί αυτού πήραμε N=10^5 , και αυτός είναι ο κυριότερος λόγος που οι πειραματικές εκτιμήσεις του ξ_{min} απέχουν από τους θεωρητικούς υπολογισμούς.

2^o Ερώτημα

Θεωρήστε πως σ_u^2=0. Επίσης, θεωρήστε πως η ακολουθία αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας $x(n)$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$r_x(k)=\delta(k)+0.9^{|k|}\cos(\pi k/4)$.

Θεωρώντας p=2, υπολογίστε τα βέλτιστα φίλτρα γραμμικής πρόβλεψης και τα ελάχιστα σφάλματα εκτίμησης ξmin για τ=1 και τ=3. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

Για k=0: $r_x(0)= \delta(0)+0.9^{|0|}\cos(\pi 0/4) = 2$

Για k≠0: $r_x(k) = \delta(k)+0.9^{|k|}\cos(\pi k/4) = 0.9^{|k|}\cos(\pi k/4)$

Για k=1: $r_x(1)= 0.6364$

Για k=2: $r_x(2)= 0$

Για k=3: $r_x(3)= -0.5155$

Για k=4: $r_x(4)= -0.6561$

Κανονικοποιούμε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης και έχουμε:

r_x=[1 , 0.3182 , 0 , -0.2577 , -0.3281]

Το βέλτιστο φίλτρο w(i) για p=2 είναι:

$w_{opt} = (Rx+\sigma_u^2 I)^{-1} r_x(k+\tau) = Rx^{-1} r_x(k+\tau)$, όπου $Rx = \begin{pmatrix} rx(0) & rx(1) \\ rx(1) & rx(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.32 \\ 0.32 & 1 \end{pmatrix}$

Το ελάχιστο σφάλμα εκτίμησης:

$\xi_{min}= r_d(0) - r_{dy}^t w_{opt} = r_x(0) – r_x^t (k+\tau) w_{opt} = 1 - r_x^t (k+\tau) w_{opt}$

Για τ=1:

$w_{opt} = Rx^{-1} [0.32 \ 0] = [0.35 \ -0.11]^t$

ξ_{min}= 0.89

Για τ=3:

$w_{opt} = Rx^{-1} [-0.26 \ -0.3] = [-0.17 \ -0.27]^t$

ξ_{min}= 0.87

Σχολιασμός αποτελεσμάτων:
Παρατηρούμε πως το ελάχιστο σφάλμα εκτίμησης για τ=3 είναι μικρότερο από ότι για τ=1. Λόγω της συγκεκριμένης ακολουθίας αυτοσυσχέτισης r_x και το γεγονός ότι φίλτρο μας είναι τάξης 2 η όλη διαδικασία λειτουργεί πιο ευνοϊκά για τ=3.

3ο Ερώτημα

Θεωρείστε πως η στοχαστική διαδικασία $x(n)$ είναι AR(4) και παράγεται από το φίλτρο με συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ που δίνεται ως

$$\boldsymbol{H(z)\,\frac{1}{1-2,737z^{-1}\ +\ 3,746z^{-2}-2,629z^{-3}+0,922z^{-4}}}$$

Χρησιμοποιώντας την θεωρία Wiener, μελετήστε την διαδικασία υπολογισμού του φίλτρου $w(i)$, $για\ p$=4. Συγκεκριμένα:

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Yule-Walker, να παρουσιάσετε και να επιλύσετε ένα σύστημα εξισώσεων για τον υπολογισμό της άγνωστης ακολουθίας αυτοσυσχέτισης $r_x(k)$, της στοχαστικής διαδικασίας $x(n)$, για k=−4,−3,…,0,1,…,4 (χρησιμοποιείστε το γεγονός ότι η εν λόγω ακολουθία παρουσιάζει άρτια συμμετρία, δηλαδή $r_x(k)$=$r_x(-k)$). Επίσης, υπολογίστε πειραματικά την ακολουθία αυτοσυσχέτισης για τα ίδια lags, θεωρώντας μια μεγάλη τιμή N (π.χ. 100.000) κατά την παραγωγή του σήματος εισόδου $\eta(n)$. Παρουσιάστε στο ίδιο διάγραμμα τόσο την υπολογισμένη (από το σύστημα εξισώσεων) όσο και την, πειραματικά, εκτιμώμενη ακολουθία αυτοσυσχέτισης και σχολιάστε.

Από την συνάρτηση μεταφορά H(z) γνωρίζουμε τους συντελεστές του φίλτρου:

$b(0)=1$, $a_p(1)=-2,737$, $a_p(2)=3,746$, $a_p(3)=-2,629$, $a_p(4)=0,922$

Οι εξισώσεις Yule-Walker γράφονται:

$r_x(k) + \sum_{l=1}^{p}\left(a_p(l)r_x(k-l)\right) = \sigma_n^2|b(0)|\delta(k)$, $k\geq 0$

Η διαδικασία AR(4) είναι WSS και πραγματική, οπότε ισχύει η ιδιότητα της συμμετρίας για τις τιμές της αυτοσυσχέτισης:

$r_x(-k) = r_x(k)$

Μπορούμε να εκτιμήσουμε τις τιμές της αυτοσυσχέτισης:

$r_x(k) + a_p(1)\, r_x(k-1) + a_p(2)\, r_x(k-2) + a_p(3)\, r_x(k-3) + a_p(4)\, r_x(k-4) = \sigma_n^2|b(0)|\delta(\kappa)$, $\forall$ k

για k=0: $r_x(0) + a_p(1)\, r_x(-1) + a_p(2)\, r_x(-2) + a_p(3)\, r_x(-3) + a_p(4)\, r_x(-4) = 1$

για k≠0: $r_x(k) + a_p(1)\, r_x(k-1) + a_p(2)\, r_x(k-2) + a_p(3)\, r_x(k-3) + a_p(4)\, r_x(k-4) = 0$

k=1: $r_x(1) =- a_p(1)\, r_x(0) - a_p(2)\, r_x(-1) - a_p(3)\, r_x(-2) - a_p(4)\, r_x(-3)$

k=2: $r_x(2) = -a_p(1)\, r_x(1) - a_p(2)\, r_x(0) - a_p(3)\, r_x(-1) - a_p(4)\, r_x(-2)$

k=3: $r_x(3) = -a_p(1)\, r_x(2) - a_p(2)\, r_x(1) - a_p(3)\, r_x(0) - a_p(4)\, r_x(-1)$

k=4: $r_x(4) = -a_p(1)\, r_x(3) - a_p(2)\, r_x(2) - a_p(3)\, r_x(1) - a_p(4)\, r_x(0)$

Έχουμε πέντε εξισώσεις με πέντε αγνώστους:

$r_x(0) = 2{,}737\ r_x(1) – 3{,}746\ r_x(2) + 2{,}629\ r_x(3) – 0{,}922\ r_x(4) + 1$

$r_x(1) = 2{,}737\ r_x(0) – 3{,}746\ r_x(1) + 2{,}629\ r_x(2) – 0{,}922\ r_x(3)$

$r_x(2) = 2{,}737\ r_x(1) – 3{,}746\ r_x(0) + 2{,}629\ r_x(1) – 0{,}922\ r_x(2)$

$r_x(3) = 2{,}737\ r_x(2) – 3{,}746\ r_x(1) + 2{,}629\ r_x(0) – 0{,}922\ r_x(1)$

$r_x(4) = 2{,}737\ r_x(3) – 3{,}746\ r_x(2) + 2{,}629\ r_x(1) – 0{,}922\ r_x(0)$

Οι λύσεις του συστήματος μας δίνουν τους παρακάτω συντελεστές:

$r_x(0) = 288{,}3206$

$r_x(1) = 209{,}9291 = r_x(-1)$

$r_x(2) = 24{,}1574 = r_x(-2)$

$r_x(3) = -155{,}8353 = r_x(-3)$

$r_x(4) = -230{,}9430 = r_x(-4)$

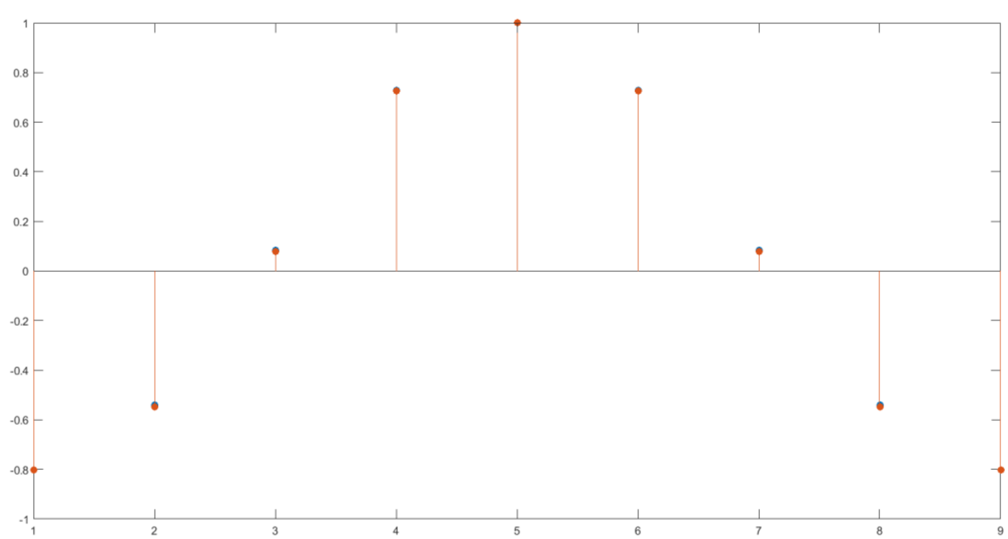
Κάνουμε κανονικοποίηση και έχουμε:

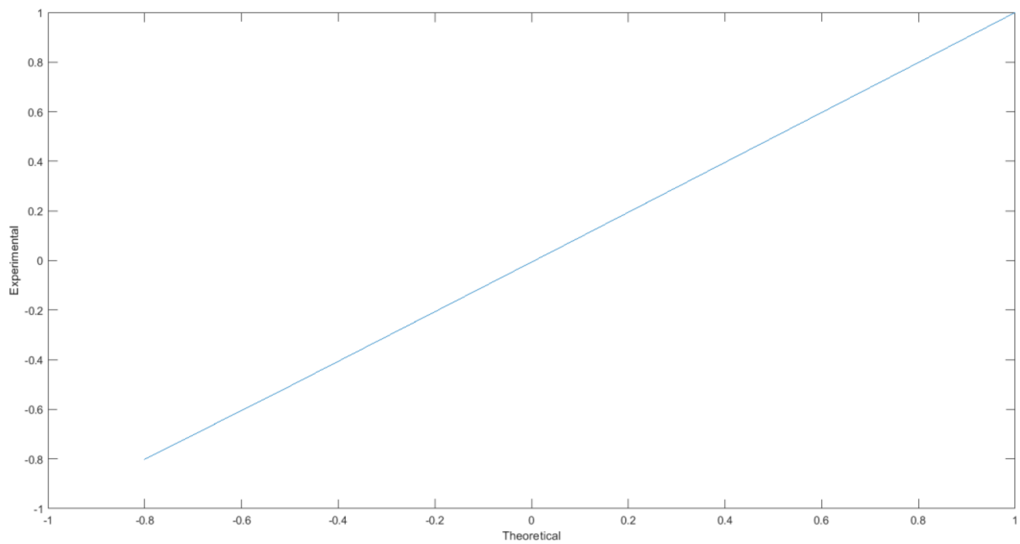
r_x=[-0.8010, -0.5405, 0.0838, 0.7281, 1, 0.7281, 0.0838, -0.5405, -0.8010]

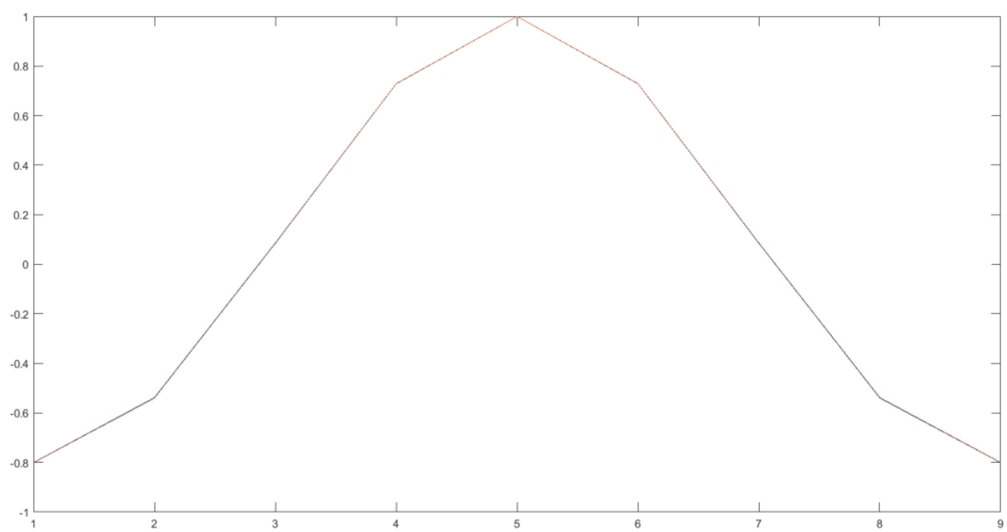
Πειραματικός υπολογισμός – εκτίμηση της r_x:

r_x=[-0.8020, -0.5396, 0.0850, 0.7286, 1, 0.7286, 0.0850, -0.5396, -0.8020]

Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση της ακολουθία είναι αρκετά ικανοποιητική , κάτι που δικαιολογείται αφού πήραμε 10^5 δείγματα.




Experimental
Theoretical
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Παρουσιάστε τις εξισώσεις Wiener-Hopf, το βέλτιστο φίλτρο $w(i)$ και το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης ξmin. Όπως και στο προηγούμενο ζητούμενο, υπολογίστε πειραματικά το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ξ και συγκρίνετέ το με το ξmin.

Οι εξισώσεις Wiener-Hopf, σε αυτή την περίπτωση, γράφονται ως:

$R_y w = r_{dy} \Leftrightarrow (Rx+\sigma_u^2 I)\, w = r_x(k+\tau)$

Το βέλτιστο φίλτρο w(i) για p=4 είναι:

$$w = (Rx+\sigma_u^2 I)^{-1}\, r_x(k+\tau) \text{ ,όπου, } Rx = \begin{pmatrix} rx(0) & rx(1) & rx(2) & rx(3) \\ rx(1) & rx(0) & rx(1) & rx(2) \\ rx(2) & rx(1) & rx(0) & rx(1) \\ rx(3) & rx(2) & rx(1) & rx(0) \end{pmatrix}$$

Το ελάχιστο σφάλμα εκτίμησης:

$$\xi_{min} = r_d(0) - r_{dy}^t w_{opt} = r_x(0) - r_x^t(k+\tau) w_{opt} = 1 - r_x^t(k+\tau) w_{opt}$$

Θεωρούμε τ=1

Θεωρητικός: w=[2.7370, -3.7460, 2.6290, -0.9220] error=0.0035

Πειραματικός: w=[2.7340, -3.7400, 2.6267, -0.9201] error=0.9946

Παρόλο που η εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης είναι ικανοποιητική και κατά συνέπεια η βέλτιστοι εκτιμώμενοι συντελεστές έχουν πολύ μικρή απόκλιση από τους αντίστοιχους θεωρητικούς παρατηρούμε ότι το πειραματικό σφάλμα είναι πολύ μεγαλύτερο του θεωρητικού.