Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Μηχ. Η/Υ & Πληροφορικής

Στατιστική Επεξεργασία Σήματος και Μάθηση

Δεύτερη Εργαστηριακή Άσκηση

Ακαδημαϊκό Έτος 2021/22

Βασιλική Στάμου

Α.Μ:1059543

Έτος 5ο

1ο Ερώτημα

Υπολογίστε το βέλτιστο φίλτρο Wiener $\boldsymbol{w}$ για την εκτίμηση του $\boldsymbol{h}$ για μήκη φίλτρων 3, και 4. Υπολογίστε το ελάχιστο σφάλμα σε κάθε περίπτωση.

Για το ερώτημα αυτό, θεωρούμε πως οι συντελεστές h είναι γνωστοί.

Για μήκος 3 , έχουμε: $h = [\,1\ \ 1.8\ \ 0.81\,]^t$

Για μήκος 4 , έχουμε: $h = [\,1\ \ 1.8\ \ 0.81\ \ -0.2]^t$

Οι εξισώσεις Wiener-Hopf, σε αυτή την περίπτωση, γράφονται ως:

$R_x w = r_{dx}(k)$

Η ακολουθία ετεροσυσχέτισης του σήματος αναφοράς d με το σήμα εισόδου x :

$r_{dx}(k) = E\{d(n)\text{-}x(n\text{-}k)\} = E\{\ [\ \sum_{l=0}^{len-1} h(l)x(n-l)\ ]x(n-k)\ \} = \sum_{l=0}^{len-1} h(l)E\{\ x(n-l)x(n-k)\ \} = \sum_{l=0}^{len-1} h(l)rx(k-l) = h(k)$

όπου len είναι το μήκος του φίλτρου h.

Για len=3 , έχουμε: $r_{dx}=[\,1\ \ 1.8\ \ 0.81\,]^t$

Για len=4 , έχουμε: $r_{dx}=[\,1\ \ 1.8\ \ 0.81\ \ -0.2]^t$

Η ακολουθία αυτοσυσχέτισης του σήματος x :

$r_x(k)=\sigma_x^2\delta(\kappa)$

Για len=3 , έχουμε: $r_x=[\,1\ \ 0\ \ 0]^t$

Για len=4 , έχουμε: $r_x=[\,1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^t$

Το βέλτιστο φίλτρο Wiener w για την εκτίμηση του h είναι:

$w = R_x^{-1} r_{dx}(k) = R_x^{-1} h$

Για len=3 , έχουμε: $w = [\ 1\ \ 1.8\ \ 0.81\ ]^t$

Για len=4 , έχουμε: $w = [\ 1\ \ 1.8\ \ 0.81\ \ -0.2]^t$

Παρατηρούμε πως και στις δύο περιπτώσεις οι συντελεστές του βέλτιστου φίλτρου Wiener ταυτίζονται με τους συντελεστές του άγνωστου συστήματος h.

Η τιμή της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης του σήματος αναφοράς για lag=0 :

$r_d(0) = E\{\ d^2(n)\ \} = E\{\ [\ \sum_{k=0}^{len-1} h(k)x(n-k)]\ [\ \sum_{l=0}^{len-1} h(l)x(n-l)]\ \} =$

$\sum_{k=0}^{len-1} \sum_{l=0}^{len-1} h(l)E\{x(n-l)\ x(n-k)\} = \sum_{k=0}^{len-1} h(k) \sum_{l=0}^{len-1} h(l)\ rx(k-l) = \sum_{l=0}^{len-1} \quad h^2(k)$

Για len=3 , έχουμε: $r_d(0) = 4.8961$

Για len=4 , έχουμε: $r_d(0) = 4.9361$

Το ελάχιστο σφάλμα είναι:

$\xi_{min} = r_d(0) - r_{dx}^t R_x^{-1} r_{dx}$

Και στις δύο περιπτώσεις το ελάχιστο σφάλμα είναι μηδέν.

Με δεδομένες δύο τυχαίες διαδικασίες x και d, θέλουμε να ορίσουμε τους συντελεστές ενός FIR φίλτρου τέτοιου ώστε, αν η είσοδος του φίλτρου είναι η x, η έξοδος d^ να είναι όσο το δυνατόν πιστό αντίγραφο της διαδικασίας d. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, απαιτείται ο πίνακας αυτοσυσχέτισης R του διανύσματος εισόδου του φίλτρου, και η ετεροσυσχέτιση r_{dx} μεταξύ της επιθυμητής εξόδου και του διανύσματος εισόδου να είναι γνωστά. Η εκτίμηση των συσχετίσεων αυτών είναι γενικά δύσκολη διαδικασία. Επίσης η πολυπλοκότητα η βέλτιστη λύση απαιτεί την επίλυση ενός συστήματος με υπολογιστική πολυπλοκότητα η οποία να είναι τουλάχιστον ανάλογη με το τετράγωνο του αριθμού των συντελεστών του φίλτρου. Έτσι καταφεύγουμε σε επαναληπτικούς αλγορίθμους με χαμηλή υπολογιστική πολυπλοκότητα για να λάβουμε προσεγγίσεις των λύσεων Wiener.

2º Ερώτημα

Ο αλγόριθμος LMS ή ο στοχαστικός αλγόριθμος της βάθμωσης, είναι ένας αλγόριθμος με χαμηλή υπολογιστική πολυπλοκότητα που μας δίνει μια διαδικασία προσέγγισης της βέλτιστης λύσης Wiener-Hopf, χωρίς να απαιτεί τη γνώση των Rx και r_{dx}.

2.1

Ο αλγόριθμος LMS συγκλίνει αν το κέρδος προσαρμογής μ ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$0 < \mu < \frac{2}{\text{στοχαστική ισχύς του διανύσματος εισόδου}}$$

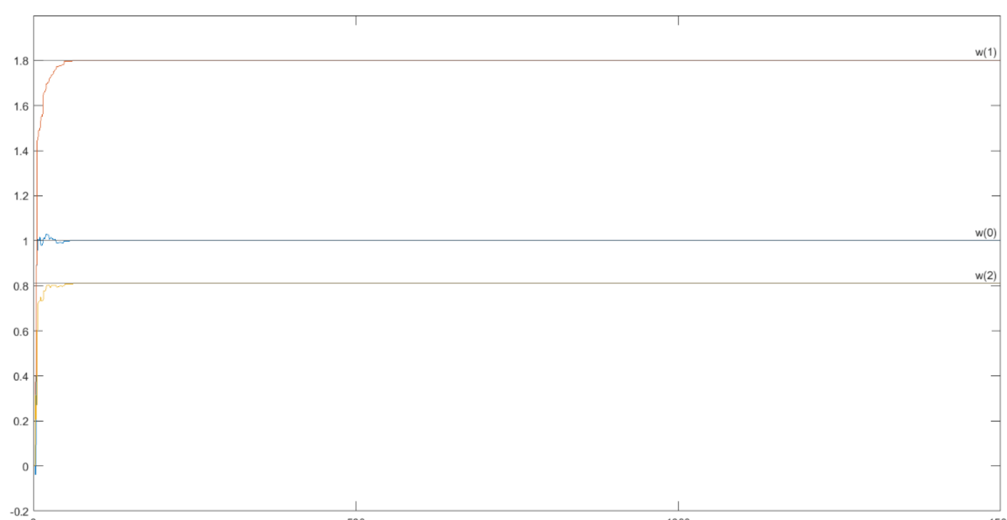
Στην πραγματικότητα, το προσαρμοζόμενο σύστημα είναι ευσταθές και η συνάρτηση κόστους συγκλίνει στην τιμή της σταθερής κατάστασης υπό τη συνθήκη $|\sigma_i| < 1$, i=1,…,len. Αυτό συμβαίνει αν:

$$0 < \mu < \frac{2}{\text{len}^* \text{rx}(0)}$$

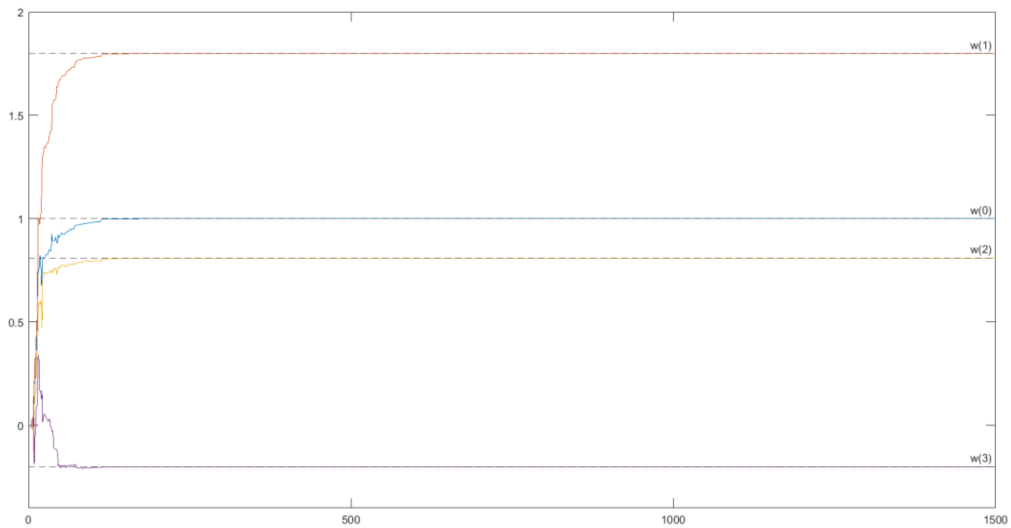
Η παραπάνω ανίσωση μπορεί να εξηγηθεί διαισθητικά παρατηρώντας ότι, για μια δεδομένη τιμή του μ, μια αύξηση στον αριθμό των συντελεστών προκαλεί αύξηση στο πλεονάζον μέσο τετραγωνικό σφάλμα λόγω των μεταβολών των τιμών των συντελεστών γύρω από τη μέση τιμή. Αυξάνοντας τον αριθμό των συντελεστών, χωρίς να μειώνεται η τιμή του μ, το προσαρμοζόμενο σύστημα οδηγείται σε αστάθεια.

2.2

Για μήκος φίλτρου 3:



Για μήκος φίλτρου 4:

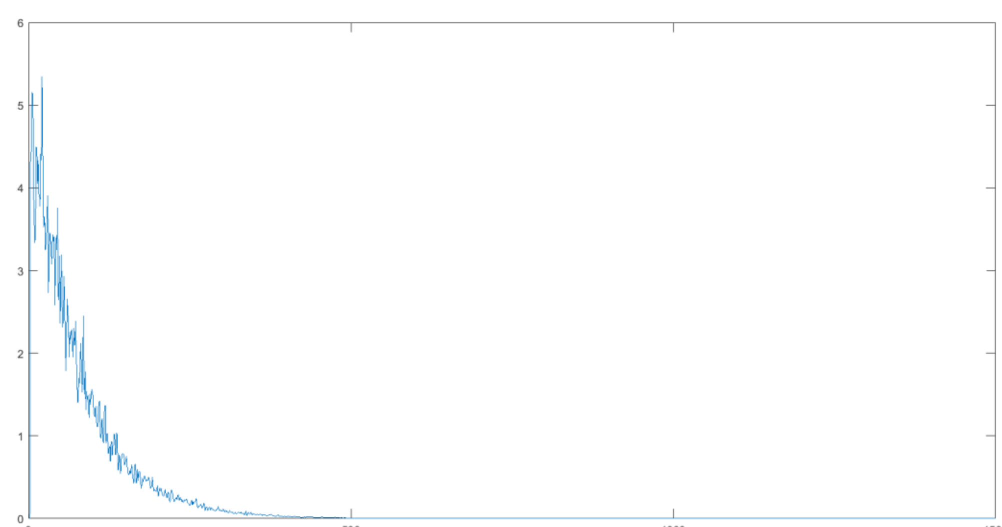


Παρατηρούμε πως για μήκος φίλτρου 3 η σύγκλιση είναι πιο γρήγορη. Με το που επιτευχθεί η σύγκλιση ωστόσο, και στις δύο περιπτώσεις, οι συντελεστές που επιστρέψει ο αλγόριθμος LMS ταυτίζονται με αυτούς που επιστρέφει το φίλτρο Wiener.

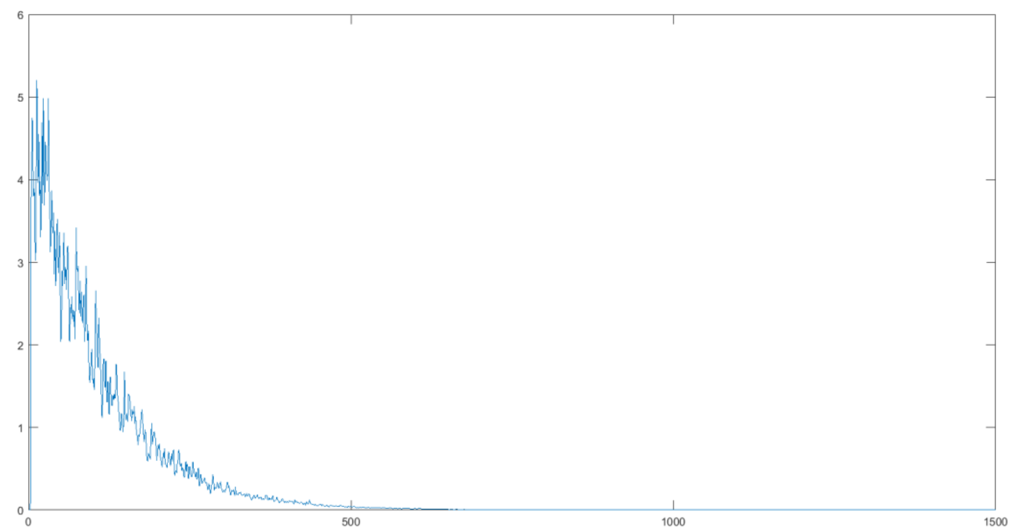
2.3

Στον οριζόντιο άξονα έχουμε τον χρόνο (n) και στον κάθετο άξονα έχουμε τις μέσες τιμές του στιγμιαίου τετραγωνικού σφάλματος για τα διάφορα n.

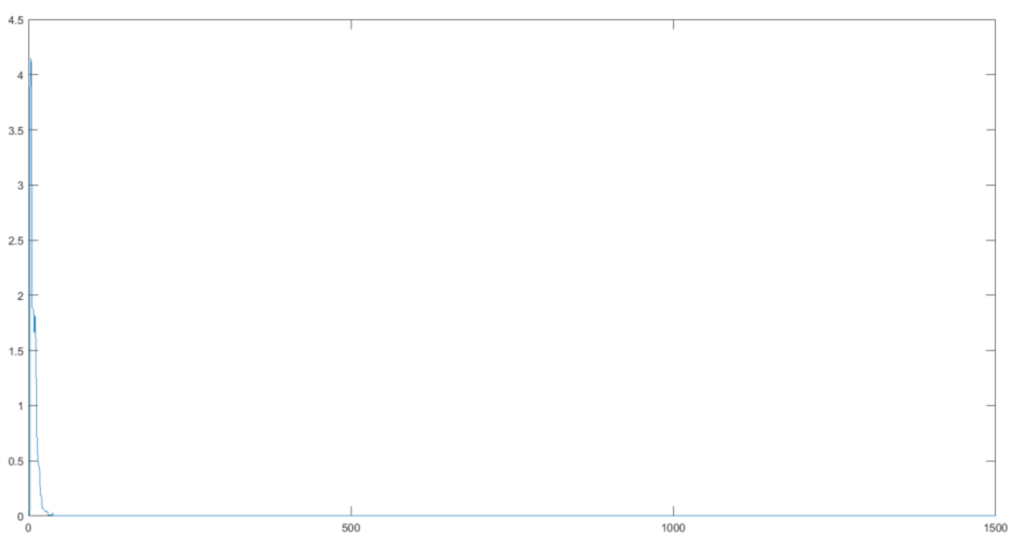
Καμπύλη μάθησης για μήκος 3 $\mu=0.01\mu_{max}$:



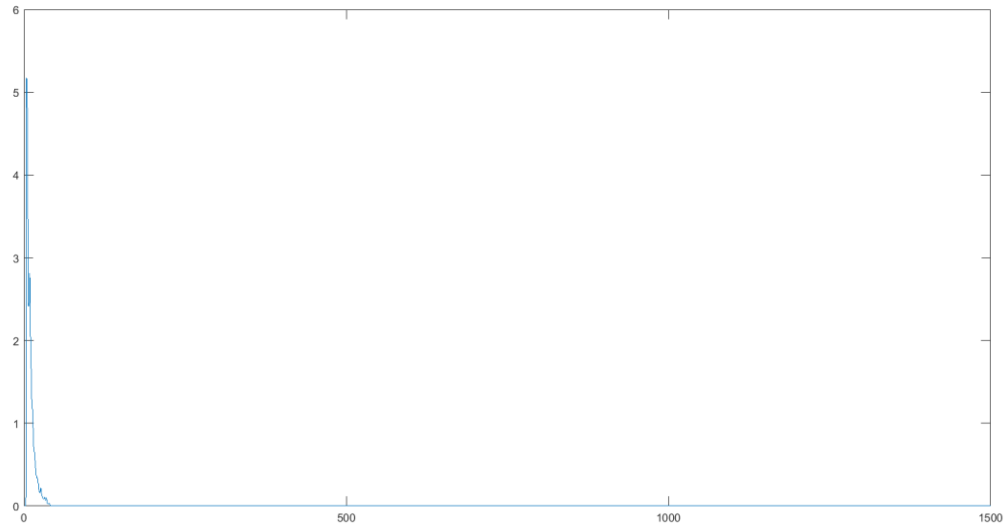
Καμπύλη μάθησης για μήκος 4 και $\mu=0.01\mu_{max}$:



Καμπύλη μάθησης για μήκος 3 $\mu=0.2\mu_{max}$:



Καμπύλη μάθησης για μήκος 4 $\mu=0.2\mu_{max}$:



Θεωρητική τιμή πλεονάζοντος μέσου τετραγωνικού σφάλματος:

$$\xi_{ex}(\infty) = \frac{\mu}{2}\, \xi_{min} \mathrm{Trace}\{R_x\}$$

Επειδή υπολογίσαμε ξ_{min} =0 έχουμε $\xi_{ex}(\infty)$=0 κάτι που φαίνεται και στις καμπύλες μάθησης.

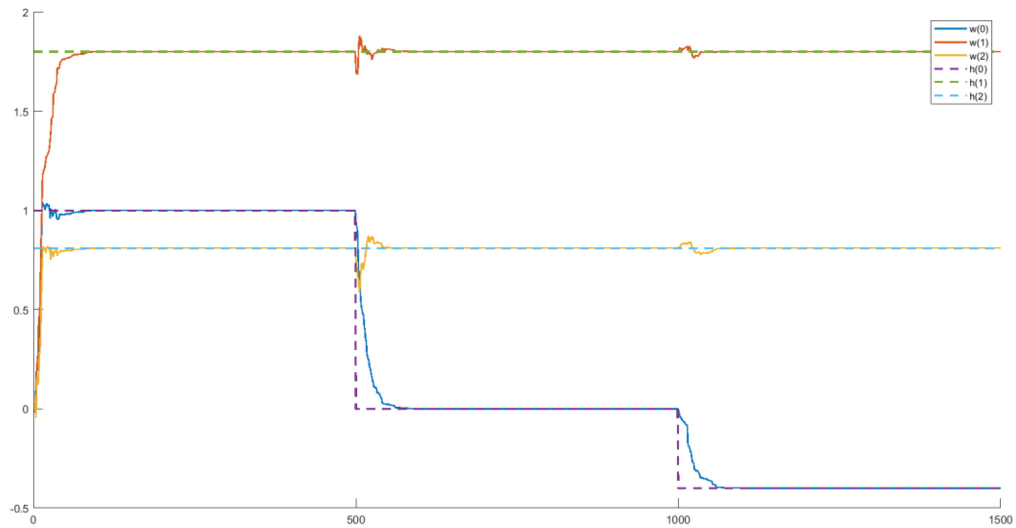
Η επιλογή μικρού μ έχει σαν αποτέλεσμα αργή προσαρμογή, και μικρό πλεονάζον μέσο τετραγωνικό σφάλμα στη σύγκλιση $\xi_{ex}(\infty)$. Αντίθετα, για μεγάλο μ, η προσαρμογή είναι γρήγορη με κόστος μεγάλο, $\xi_{ex}(\infty)$.

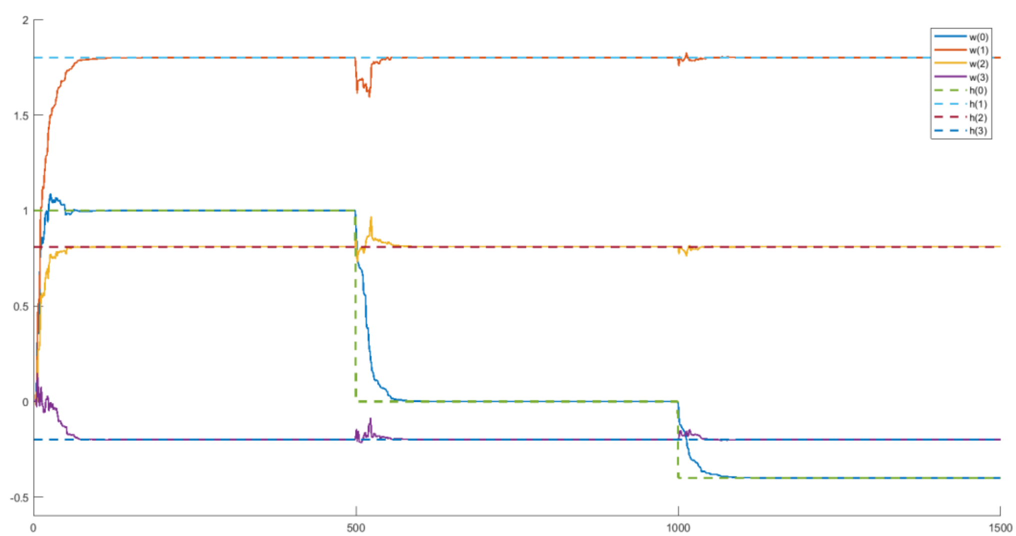
Το μέσο πλεονάζον τετραγωνικό σφάλμα αντιπροσωπεύει το κόστος που πληρώνουμε για τη χρήση ενός τυχαίου αλγορίθμου προσαρμογής για τους συντελεστές αντί ενός αιτιοκρατικού αλγορίθμου, όπως ο αλγόριθμος της μέγιστης καθόδου.

Σε κάθε περίπτωση, βλέπουμε ότι ο λόγος $\xi_{ex}(\infty)/\xi_{min}$ μπορεί να γίνει μικρός επιλέγοντας ένα μικρό κέρδος προσαρμογής μ. Επιλέγοντας μικρό μ η προσαρμογή θα είναι αργή και η επίπτωση του θορύβου βάθμωσης στους συντελεστές περιορίζεται σημαντικά.

Παρατηρούμε επίσης, κάτι που αναφέρθηκε και παραπάνω, ότι για μια δεδομένη τιμή του μ, μια αύξηση στον αριθμό των συντελεστών προκαλεί αύξηση στο πλεονάζον μέσο τετραγωνικό σφάλμα λόγω των μεταβολών των τιμών των συντελεστών γύρω από τη μέση τιμή.

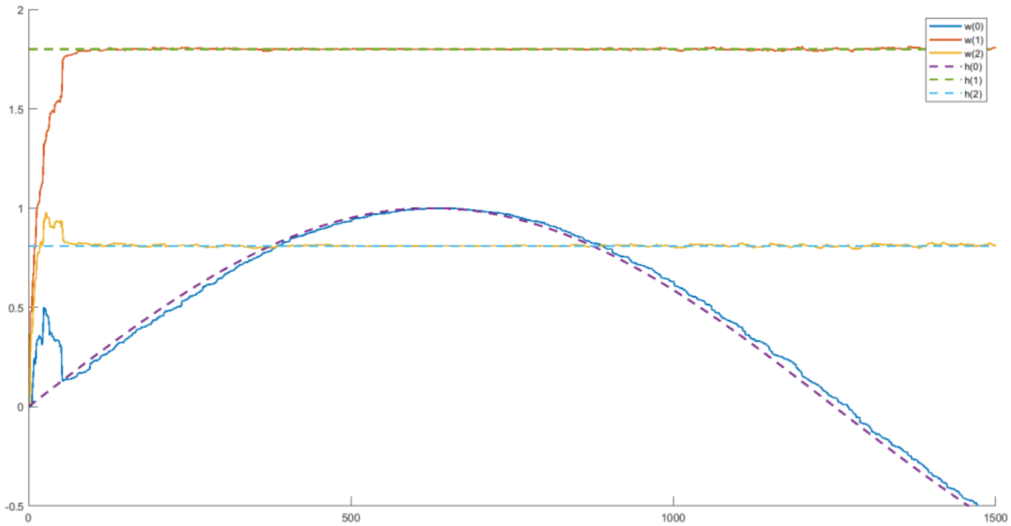
2.4

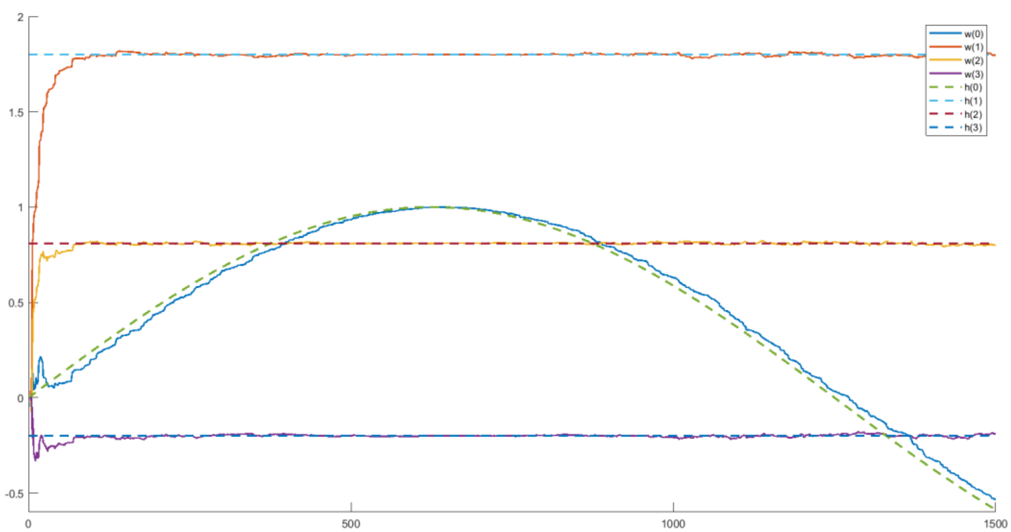




Παρατηρούμε πως στις απότομες αλλαγές που επιφέρει ο συντελεστής b(n) στο w(0) (που προσδιορίζει το h(0)) αλλάζουν και για κάποιες χρονικές στιγμές και τα w(1),w(2),w(3) μέχρι να ξανασυγκλίνουν στους επιθυμητούς h(1),h(2),h(3) αντίστοιχα. Επιπλέον, επειδή οι αλλαγές του h(0) είναι απότομες το w(0) τις ακολουθεί με πιο ομαλό τροπό.

2.5





Τώρα που ο συντελεστής h(0) μεταβάλλεται ομαλά βλέπουμε πως δεν επηρεάζονται τόσο έντονα στις αλλαγές οι υπόλοιποι συντελεστές που επιστρέφει ο LMS και πως το w(0) πλησιάζει καλύτερα το h(0) συγκριτικά με το προηγούμενο ερώτημα.