<u>ΠΙΝΑΚΕΣ (matrices)</u>

Ορισμός και πράξεις πινάκων

Πίνακας (matrix) nxm = ορθογώνια διάταξη αριθμών σε n γραμμές και m στήλες :

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Εξετάζουμε μόνο τετραγωνικούς πίνακες nxn :

αριθμός γραμμών (rows) = αριθμός στηλών (columns) = n

Πίνακας 2x2: $A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=(b_{ij})=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Ανάστροφος (transpose) A^T πίνακα : $A^T=(a_{ij})^T=(a_{ji})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

ο πίνακας που έχει γραμμές τις στήλες του A (δηλαδή ο πίνακας που προκύπτει με ανάκλαση γύρω από την κύρια διαγώνιο)

Συμμετρικός πίνακας A^S = ένας πίνακας που είναι ίσος με τον ανάστροφό του :

$$A^S=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=(A^S)^T \Rightarrow a^s{}_{ij}=a^s{}_{ji} \quad i\neq j$$

δηλαδή τα συμμετρικά ως προς τη διαγώνιο στοιχεία είναι ίσα

Αντισυμμετρικός πίνακας A^A = ένας πίνακας που είναι αντίθετος από τον ανάστροφό του :

$$A^A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=-(A^A)^T \Rightarrow a^s{}_{ij}=-a^s{}_{ji} \quad i\neq j \quad \text{και} \quad a^s{}_{ij}=0 \quad i=j$$

Τα στοιχεία της διαγωνίου του πρέπει να είναι μηδέν.

Διαγώνιος πίνακας = ένας πίνακας που τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία του είναι αυτά που βρίσκονται στη διαγώνιο

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

Άνω (upper) ή κάτω (lower) τριγωνικός (ή κλιμακωτός) πίνακας :

$$U_t=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \qquad L_t=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

Πινακοδιαγώνιος (block diagonal) : ένας πίνακας που έχει τετραγωνικούς μικρότερους πίνακες στη διαγώνιό του και παντού αλλού μηδέν

$$D_b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & c_{31} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad \text{όπου } A, B, C \text{ τετραγωνικοί πίνακες}$$

Συζυγής A^* πίνακα : ο πίνακας που έχει ως στοιχεία τα μιγαδικά συζυγή στοιχεία του A: $A^* = (a_{ij})^* = (a_{ij}^*)$

Π.χ. $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2i & -1+i \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = (a_{ij}^*) = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2i & -1-i \\ 2+i & 1-i \end{pmatrix}$

Πραγματικός πίνακας = ένας πίνακας που είναι ίσος με τον συζυγή του : $A^R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Φανταστικός πίνακας = ένας πίνακας που είναι αντίθετος από τον συζυγή του $A^I = \begin{pmatrix} 2i & i \\ -i & i \end{pmatrix}$

Προσαρτημένος (adjoint) $A^\dagger$ πίνακας = ο ανάστροφος του συζυγή του A : $A^\dagger = (A^*)^T \Rightarrow a^\dagger{}_{ij} = a_{ji}^*$

Π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1+2i & -1+i \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix} \Rightarrow A^\dagger = \begin{pmatrix} 1-2i & 2+i \\ -1-i & 1-i \end{pmatrix}$

Αυτοπροσαρτημένος ή ερμιτιανός πίνακας A^H = ένας πίνακας που είναι ίσος με τον προσαρτημένο του :

$$A^H = \begin{pmatrix} 1 & -1+i \\ -1-i & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^H\right)^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & (-1-i)^* \\ (-1+i)^* & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+i \\ -1-i & 2 \end{pmatrix} = A^H$$

Αντιερμιτιανός πίνακας A^{aH} = ένας πίνακας που είναι αντίθετος από τον προσαρτημένο του :

$$A^{aH} = \begin{pmatrix} i & -1+i \\ 1+i & -i \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^{aH}\right)^\dagger = \begin{pmatrix} (i)^* & (1-i)^* \\ (-1+i)^* & (-i)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1-i \\ -1-i & i \end{pmatrix} = -A^{aH}$$

Ένα διάνυσμα σαν φυσικό αντικείμενο στο χώρο το συμβολίζουμε με βελάκι : $\vec{v}$

Την αναπαράστασή του σε μια συγκεκριμένη βάση (άξονες) θα την συμβολίζουμε χωρίς βελάκι : v ως πίνακα στήλη. Ο αριθμός των στηλών του διανύσματος μετράει το πλήθος των συνιστωσών του και άρα τη διάσταση του διανυσματικού χώρου στον οποίο ανήκει.

Διάνυσμα = πίνακας στήλη

Διάνυσμα δυσδιάστατου χώρου (επίπεδο) : 2x1 : $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Διάνυσμα τρισδιάστατου χώρου (φυσικός χώρος) : 3x1 : $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Η γενίκευση σε περισσότερες διαστάσεις είναι προφανής. Ένα διάνυσμα με n στήλες ανήκει σε έναν διανυσματικό χώρο n διαστάσεων

Διάνυσμα διανυσματικού χώρου *n* διαστάσεων : $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

Αυτοί οι χώροι υπάρχουν στα μαθηματικά και έχουν όλες τις ιδιότητες που έχει και ο οικείος σε μας φυσικός τρισδιάστατος χώρος. Π.χ. οι εξισώσεις κίνησης $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ της σύνθετης ταλάντωσης *n* μαζών ενωμένων με ελατήρια φτιάχνουν ένα διανυσματικό χώρο *n*-διαστάσεων. Δηλαδή για *n*=4 οι διάφορες εξισώσεις κίνησης των μαζών περιγράφονται με γραμμικούς συνδυασμούς από 4 διανύσματα 4-διαστάσεων που ονομάζονται κανονικοί τρόποι ταλάντωσης. Ο χώρος των ενεργειακών καταστάσεων ενός ηλεκτρονίου που περιστρέφεται γύρω από ένα πρωτόνιο έχει άπειρες διαστάσεις (κβαντομηχανική).

Ανάστροφο διάνυσμα = πίνακας γραμμή

Π.χ. 1x2 : $v^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = (3,\ 4)$, 1x3: $v^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = (3 \quad 4 \quad -1)$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γενικεύσουμε και τις έννοιες του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων και του μέτρου διανύσματος (σύμφωνα με τον πολλαπλασιασμό πινάκων που θα ορίσουμε παρακάτω).

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων: $\vec{v} \cdot \ \vec{u} = v^T u = u^T v = (v_1, v_2)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = v_1 u_1 + v_2 u_2$

Μέτρο διανύσματος : $|\vec{v}|^2 = \vec{v} \cdot \ \vec{v} = v^T v = (v_1, v_2)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1^2 + v_2^2$

Έναν πίνακα μπορούμε να τον γράψουμε και ως «συλλογή» των διανυσμάτων που αποτελούν τις στήλες του

$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1, a_2 \end{pmatrix}$ όπου $a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ισότητα πινάκων : $A = B \Rightarrow a_{ij} = b_{ij}$ (όλα τα αντίστοιχα στοιχεία πρέπει να είναι ίσα, ένα προς ένα)

Πρόσθεση πινάκων : $C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων)

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & -1+0 \\ 2-1 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Ιδιότητες πρόσθεσης πινάκων

Η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική : $A + B = B + A$

Η πρόσθεση είναι προσεταιριστική : $(A + B) + C = A + (B + C)$

Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο = Μηδενικός πίνακας : $\mathrm{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: $A + \mathrm{O} = \mathrm{O} + A = A$

Υπάρχει αντίθετος πίνακας : $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$: $A + (-A) \equiv A - A = \mathrm{O}$

Πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό : $C = \lambda A \Rightarrow c_{ij} = \lambda a_{ij}$

(όλα τα στοιχεία πολλαπλασιάζονται με τον αριθμό), π.χ. $3A = 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πίνακα με αριθμό :

$(\kappa + \lambda)A = \kappa A + \lambda A$

$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

$\kappa(\lambda A) = (\kappa\lambda)A$

$1 \cdot \ A = A$

$\lambda A = O \Rightarrow \lambda = 0$ ή $A = O$

Κάθε πίνακας μπορεί να γραφτεί σαν το άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα

$$A = A^S + A^A$$

οι οποίοι είναι οι :

$$A^S = \frac{A + A^T}{2}, \qquad A^A = \frac{A - A^T}{2}$$

Κάθε πίνακας μπορεί να γραφτεί σαν το άθροισμα ενός πραγματικού και ενός φανταστικού πίνακα

$$A = A^R + A^I = \mathrm{Re}\, A + i\, \mathrm{Im}\, A$$

οι οποίοι είναι οι :

$$\mathrm{Re}\, A = \frac{A + A^*}{2}, \qquad \mathrm{Im}\, A = \frac{A - A^*}{2i}$$

Κάθε πίνακας μπορεί να γραφτεί σαν το άθροισμα ενός ερμιτιανού και ενός αντιερμιτιανού πίνακα

$$A = A^H + A^{aH}$$

οι οποίοι είναι οι :

$$A^H = \frac{A + A^\dagger}{2}, \qquad A^{aH} = \frac{A - A^\dagger}{2}$$

<u>Πολλαπλασιασμός πινάκων</u> (γενικά ορίζεται μόνο όταν ο αριθμός στηλών του πρώτου όρου του γινομένου είναι ίσος με τον αριθμό γραμμών του δεύτερου, έστω n : mxn nxℓ = mxℓ)

$$C = AB \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων

Ο πολλαπλασιασμός δεν είναι αντιμεταθετικός : $AB \neq BA$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) & 1\cdot 0 + (-1)\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 2\cdot 0 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 2 & 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 \\ (-1)\cdot 1 + 3\cdot 2 & (-1)\cdot(-1) + 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$A(BC) = (AB)C$

$A(B+C) = AC + BC$ και $(B+C)A = BC + CA$

$(\lambda A)(\mu B) = (\lambda\mu)AB$

Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο ή μοναδιαίος πίνακας ώστε: $AI = IA = A$

$$n=2: \quad I = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad n=3: \quad I = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ κλπ.}$$

Όπου δ_{ij} είναι το συμμετρικό σύμβολο, δέλτα του Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

(π.χ. για n=3 : $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$)

Δεν υπάρχει πάντα αντίστροφος πίνακας A^{-1} **ώστε** $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Μπορεί να έχουμε γινόμενο ίσο με μηδέν ενώ και οι δύο πίνακες είναι διαφορετικοί του μηδενός

Είναι δυνατόν $AB = 0$ ενώ και $A \neq 0$ και $B \neq 0$
Είναι δυνατόν $Av = 0$ ενώ και $A \neq 0$ και $v \neq 0$

Κάθε πίνακας μπορεί να αναχθεί σε γινόμενο ενός άνω τριγωνικού U και ενός κάτω L τριγωνικού πίνακα:

$$A = L_t U_t$$

Ορίζονται δυνάμεις πίνακα : $A^k = \underbrace{AAAA...AAAA}_{k \text{ φορές}}$

Άρα μπορούμε να ορίσουμε και κάθε είδους συνάρτηση με όρισμα πίνακα, όταν ξέρουμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση σαν απειροσειρά (Taylor): Π.χ. $e^x = 1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Πίνακας σε εκθέτη : $e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + ... + \frac{1}{n!}A^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ = nxn πίνακας

<u>Ιδιότητες ανάστροφου</u>

$(A^T)^T = A$

$(AB)^T = B^T A^T$

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(cA)^T = cA^T$

<u>Ιδιότητες προσαρτημένου</u>

$(A^\dagger)^\dagger = A$

$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$

$(cA^T) = c^* A^T$

Οι πίνακες $A^T A,\ AA^T$ είναι συμμετρικοί

Χρήση πινάκων 1

Οι πίνακες χρησιμοποιούνται για τη λύση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων όπως

Μη ομογενές σύστημα : $\begin{matrix} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 3 \end{matrix}$ Ομογενές σύστημα : $\begin{matrix} 2x + y = 0 \\ 8x + 4y = 0 \end{matrix}$

Τα οποία γράφονται σε μορφή πίνακα ως : $Av = b$

με $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ για το μη ομογενές σύστημα

και $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ για το ομογενές σύστημα

Για να έχει λύση το μη ομογενές σύστημα θα πρέπει ο πίνακας A να έχει αντίστροφο. Τότε η λύση είναι

$$Av = b \Rightarrow A^{-1}Av = A^{-1}b \Rightarrow v = A^{-1}b$$

Αν ο A δεν έχει αντίστροφο τότε το σύστημα είναι αδύνατο, δεν έχει καμία λύση.

Το ομογενές σύστημα έχει πάντα την τετριμμένη λύση : $x = 0,\ \ y = 0$. Για να έχει και άλλες λύσεις ο πίνακας A δεν πρέπει να έχει αντίστροφο, επειδή αν έχει αντίστροφο τότε το σύστημα θα έχει μόνο την τετριμμένη λύση : $Av=0 \Rightarrow A^{-1}Av=0 \Rightarrow v=0$. Όταν δεν υπάρχει ο αντίστροφος του A τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Η λύση βρίσκεται με διάφορες αλγεβρικές μεθόδους όπως η απαλοιφή Gauss – Jordan.

Επειδή γραμμικά συστήματα εξισώσεων εμφανίζονται σε κάθε κλάδο της επιστήμης οι πίνακες εφαρμόζονται παντού.

Ορίζουσα και ίχνος

Με έναν πίνακα A σχετίζονται δύο αριθμοί : η ορίζουσα (determinant) det$A$ =|A| και το ίχνος του (trace) tr$A$.

Ίχνος = το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του : $\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Ιδιότητες ίχνους

$$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B$$

$$\mathrm{tr}(cA)=c\,\mathrm{tr}A$$

$$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA) \qquad \text{ακόμα και αν } AB \neq BA$$

$$\mathrm{tr}(ABC)=\mathrm{tr}(BCA)=\mathrm{tr}(CBA)$$

$$\mathrm{tr}I=n$$

$$\mathrm{tr}A^{T}=\mathrm{tr}A$$

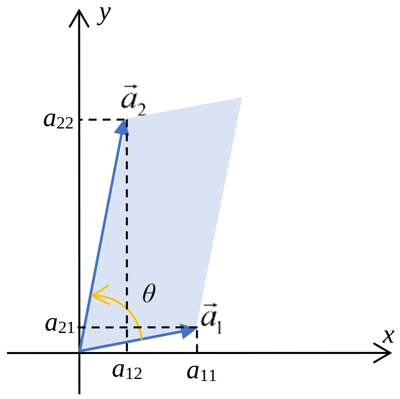
$$\mathrm{tr}A^{\dagger}=\mathrm{tr}A^{*}$$

Ορίζουσα 2x2 = το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου μείον το γινόμενο των στοιχείων της μη κύριας διαγωνίου : $\det A=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. Π.χ. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1-(-1)\cdot 2=3$

Γεωμετρικά η ορίζουσα 2x2 αντιστοιχεί στο προσανατολισμένο εμβαδόν του παραλληλογράμμου στο επίπεδο xy που ορίζεται από τα διανύσματα των στηλών (ή των γραμμών) του πίνακα το οποίο είναι ίσο και με το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων

$$\det A=(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)_z=|\vec{a}_1||\vec{a}_2|\sin\theta$$

όπου $\vec{a}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ είναι διανύσματα του επιπέδου xy και θ η γωνία μεταξύ τους με προσανατολισμό από το $\vec{a}_1$ στο $\vec{a}_2$. Το εξωτερικό τους γινόμενο, που είναι κάθετο και στα δύο διανύσματα θα είναι παράλληλο με τον άξονα z. Οπότε αν τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα δηλαδή βρίσκονται πάνω στην ίδια γραμμή (θ=0) τότε θα έχουν μηδέν εμβαδόν μεταξύ τους και η ορίζουσα θα είναι μηδέν.



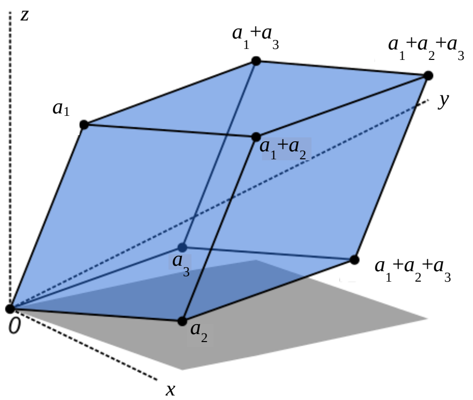
Ορίζουσα 3x3 = το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων των κυρίων διαγωνίων μείον το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων των μη κυρίων διαγωνίων (μνημονικός κανόνας Sarrus που ισχύει μόνο για 2x2 και 3x3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Γεωμετρικά η απόλυτη τιμή της ορίζουσας 3x3 αντιστοιχεί στον όγκο που περικλείεται από το παραλληλεπίπεδο που ορίζεται με ακμές τα διανύσματα των στηλών (ή των γραμμών) του πίνακα το οποίο είναι ίσο και με το τριπλό βαθμωτό (ή μικτό) γινόμενο των τριών διανυσμάτων

$$|\det A| = |\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)|$$

Οπότε αν τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα δηλαδή βρίσκονται πάνω στο ίδιο επίπεδο του χώρου τότε θα περικλείουν μηδέν όγκο μεταξύ τους και η ορίζουσα θα είναι μηδέν.



Για να γενικεύσουμε τον ορισμό της ορίζουσας και σε παραπάνω διαστάσεις $n>3$ ορίζουμε τα παρακάτω.

Ελάσσονες πίνακες ή υποπίνακες A_{ij} ενός πίνακα A = οι πίνακες (n-1)x(n-1) που προκύπτουν από τον A (nxn) όταν απαλείψουμε την i γραμμή και την j στήλη.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A_{13} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ κλπ.}$$

Αλγεβρικό συμπλήρωμα πίνακα = ο πίνακας Δ που έχει στοιχεία ij ένα συντελεστή προσήμου $(-1)^{i+j}$ επί την ελάσσονα ορίζουσα $\det A_{ij}$ του αντίστοιχου στοιχείου ij του A

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} \quad , \quad \text{το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου } ij$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} +\det A_{11} & -\det A_{12} & +\det A_{13} \\ -\det A_{21} & +\det A_{22} & -\det A_{23} \\ +\det A_{31} & -\det A_{32} & +\det A_{33} \end{pmatrix}$$

Ορίζουσα 3x3 = το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων μιας οποιασδήποτε σειράς (ή στήλης) επί το αλγεβρικό τους συμπλήρωμα

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\det A_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}\det A_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}\det A_{13}$$

$$= a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

Από αυτόν τον τύπο γίνεται η γενίκευση σε περισσότερες διαστάσεις *n*x*n* (ανάπτυγμα Laplace):

$$\det A = a_{i1}(-1)^{i+1}\det A_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}\det A_{i2} + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n}\det A_{in}$$

Το ανάπτυγμα μπορεί να γίνει με τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής i : $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}\det A_{ik}$

Ή οποιασδήποτε στήλης j : $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j}\det A_{kj}$

Συνήθως διαλέγουμε τη γραμμή ή στήλη που έχει τα περισσότερα μηδενικά για να έχουμε τους λιγότερους όρους στο άθροισμα

Ορίζοντας το αντισυμμετρικό σύμβολο, Levi–Civita, το οποίο για $n = 3$ είναι :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{άρτιες μεταθεσεις των 123, δηλαδή αν } (i,j,k) = (1,2,3),\ (2,3,1) \text{ ή } (3,1,2) \\ 0 & \text{αν δυο δείκτες είναι ίσοι, δηλαδή αν } i = j,\ \text{ή } j = k,\ \text{ή } k = i \\ -1 & \text{περιττές μεταθέσεις των 123, δηλαδή αν } (i,j,k) = (2,1,3),\ (3,2,1) \text{ ή } (1,3,2) \end{cases}$$

π.χ. $\varepsilon_{112} = \varepsilon_{212} = \varepsilon_{333} = \ldots$ κλπ. $= 0,\quad \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1,\quad \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1$ και το οποίο αντίστοιχα γενικεύεται για περισσότερες διαστάσεις n>3, η ορίζουσα μπορεί επίσης να γραφτεί ως :

$$\det A = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$$

που αντίστοιχα γενικεύεται για περισσότερες διαστάσεις σε :

$$\det A = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$$

<u>Ιδιότητες οριζουσών</u>

1) $\det I = 1$

2) Αν αντιμεταθέσω δυο οποιεσδήποτε γραμμές (ή στήλες) η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

3) Η ορίζουσα είναι προσθετική ως προς τα στοιχεία μια στήλης ή γραμμής

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} + c_{12} \\ a_{21} & b_{22} + c_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} \\ a_{21} & c_{12} \end{vmatrix}$$

4) Αν πολλαπλασιάσω μια γραμμή (ή στήλη) με έναν αριθμό λ τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

5) Αν πολλαπλασιάσω έναν πίνακα nxn με ένα αριθμό λ τότε η ορίζουσά του πολλαπλασιάζεται επί λ^n

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

6) Η ορίζουσα ενός διαγώνιου ή ενός τριγωνικού πίνακα είναι το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου

$$\det D = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{vmatrix} = d_1 d_2 d_3 \quad , \quad \det U_t = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{vmatrix} = u_{11} u_{22} u_{33}$$

7) Αν δυο γραμμές (ή στήλες) είναι ίσες ή ανάλογες η ορίζουσα είναι ίση με μηδέν (αφού θα είναι ίση με την αντίθετή της)

8) Αν σε μία γραμμή (ή στήλη) προσθέσω έναν γραμμικό συνδυασμό οποιονδήποτε γραμμών (η στηλών) η ορίζουσα δεν αλλάζει

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} + (\lambda a_{11} + \mu a_{21}) & a_{21} + (\lambda a_{12} + \mu a_{22}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Χρησιμοποιείται για να φέρνουμε μεγάλες ορίζουσες σε τριγωνική μορφή οπότε η ορίζουσα θα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33}$$

8) Αν ένας πίνακας έχει μια γραμμή ή μια στήλη με όλα τα στοιχεία ίσα με μηδέν τότε η ορίζουσα του είναι ίση με μηδέν

9) $\det(AB) = \det A \det B$

10) $\det A^T = \det A$

11) $\det A^\dagger = \det A^*$

12) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

13) Αν η ορίζουσα ενός πίνακα είναι διαφορετική από το μηδέν τότε οι γραμμές του (και οι στήλες του) είναι διανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους. Αν η ορίζουσα ενός πίνακα είναι ίση με μηδέν τότε οι γραμμές του (και οι στήλες του) είναι διανύσματα γραμμικώς εξαρτημένα μεταξύ τους.

Αντίστροφος πίνακας

Για να έχει ένας πίνακας αντίστροφο πρέπει η ορίζουσά του να είναι διάφορη του μηδενός :

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \exists\, A^{-1}$$

Κατασκευή του αντίστροφου πίνακα A^{-1}:

1. Υπολογίζουμε την ορίζουσα του A : $\det A = |A|$, αν $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists\, A^{-1}$
2. Υπολογίζουμε τον ανάστροφο του αλγεβρικού συμπληρώματος του A (adjugate): $\mathrm{adj}A = \Delta^T$
3. Ο αντίστροφος του A είναι : $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\mathrm{adj}A$

Τα στοιχεία του πίνακα adj$A$ είναι : $\mathrm{adj}A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|A_{ji}|$

Μερικοί ακόμη ορισμοί ενδιαφερόντων πινάκων.

Ορθογώνιος πίνακας = πραγματικός πίνακας του οποίου ο αντίστροφος είναι ίσος με τον ανάστροφό του

$$O^{-1} = O^T$$

Επειδή $OO^{-1} = I = O^{-1}O \Rightarrow OO^T = O^T O$ ένας ορθογώνιος πίνακας αντιμετατίθεται με τον ανάστροφό του

Επειδή $\det(OO^T) = \det I \Rightarrow \det O \det O^T = 1 \Rightarrow \det O \det O = (\det O)^2 = 1$ και $\det O$ πραγματικός :

$$\det O = \pm 1$$

Μοναδιακός πίνακας = πίνακας του οποίου ο αντίστροφος είναι ίσος με τον προσαρτημένο του

$$U^{-1} = U^{\dagger}$$

Επειδή $UU^{-1} = I = U^{-1}U \Rightarrow UU^{\dagger} = U^{\dagger}U$ ένας μοναδιακός πίνακας αντιμετατίθεται με τον προσαρτημένο του .

Επειδή $\det(UU^{\dagger}) = \det I \Rightarrow \det U \det U^{\dagger} = 1 \Rightarrow \det U \det U^{*} = \left|\det U\right| = 1 \Rightarrow \det U = e^{i\theta}$

Κάθε μοναδιακός μπορεί να γραφτεί σαν το εκθετικό ενός ερμιτιανού πίνακα: $U = e^{iH}$

Αντίστροφος 2x2

Ο αντίστροφος ενός πίνακα 2x2 υπολογίζεται και απομνημονεύεται πολύ εύκολα :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Η κύρια διαγώνιος αναστρέφεται, η μη κύρια διαγώνιος αλλάζει πρόσημο και διαιρώ με την ορίζουσα

Πράγματι :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & -a_{11}a_{12} + a_{12}a_{11} \\ -a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21} & -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$AA^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Αντίστροφος 3x3 – Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{Ορίζουσα:} |A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1)[3\cdot(-2) - 2\cdot 2] = 10,$$

όπου αναπτύξαμε ως προς τη 2^{η} στήλη που έχει δύο μηδενικά.

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} +|A_{11}| & -|A_{21}| & +|A_{31}| \\ -|A_{12}| & +|A_{22}| & -|A_{32}| \\ +|A_{13}| & -|A_{23}| & +|A_{33}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2 & -(-2) & +0 \\ -2 & +3 & -(-10) \\ +2 & -3 & +0 \end{pmatrix}$$

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad |A_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \qquad |A_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad |A_{22}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad |A_{23}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \qquad |A_{32}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10, \qquad |A_{33}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Οπότε

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 10 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0 \\ -0,2 & 0,3 & 1 \\ 0,2 & -0,3 & 0 \end{pmatrix}$$

Πράγματι

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,2 & 0\\ -0,2 & 0,3 & 1\\ 0,2 & -0,3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,2\cdot\ 3+0,2\cdot\ 0,2 & 0 & 0,2\cdot\ 2+0,2\cdot\ (-2)\\ -0,2\cdot\ 3+0,3\cdot\ 2 & 1\cdot\ 1 & -0,2\cdot\ 2+0,3\cdot\ (-2)+1\cdot\ 1\\ 0,2\cdot\ 3-0,3\cdot\ 2 & 0 & 0,2\cdot\ 2+(-0,3)(-2)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

<u>Ιδιότητες αντίστροφου</u>

$(A^{-1})^{-1}=A$

$(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$

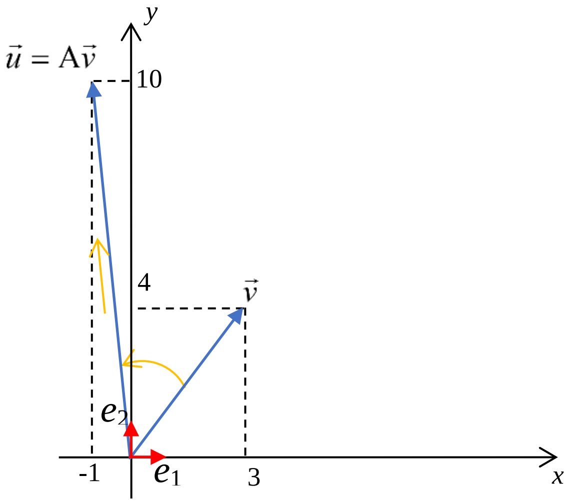
$(A^{\dagger})^{-1}=(A^{-1})^{\dagger}$

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

Χρήση πινάκων 2 – Γραμμικοί μετασχηματισμοί διανυσμάτων

<u>Πίνακας = αναπαράσταση γραμμικού τελεστή</u>

Ένα διάνυσμα του χώρου $\vec{v}$ μπορώ να το μετασχηματίσω, π.χ. να το στρίψω και να το τεντώσω ώστε να πάρω ένα νέο διάνυσμα $\vec{u}$. Τη συγκεκριμένη διαδικασία μετασχηματισμού που ακολουθώ την ονομάζω τελεστή και τη συμβολίζω με Α : $\mathrm{A}\vec{v}=\vec{u}$ ή σχηματικά $\vec{v}\xrightarrow{\mathrm{A}}\vec{u}$



Κάθε διάνυσμα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης οπότε αν ξέρω πως δρα ένας τελεστής στα διανύσματα βάσης $\hat{e}_i\rightarrow\mathrm{A}\hat{e}_i$ θα ξέρω πως δρα σε κάθε διάνυσμα :

$$\mathrm{A}\vec{v}=\mathrm{A}(v_1\hat{e}_1+v_2\hat{e}_2)=v_1\mathrm{A}\hat{e}_1+v_2\mathrm{A}\hat{e}_2$$

Τα μετασχηματισμένα διανύσματα βάσης θα είναι και αυτά γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης $\hat{e}_1$ και $\hat{e}_2$: $\mathrm{A}\hat{e}_1=a_{11}\hat{e}_1+a_{21}\hat{e}_2$ και $\mathrm{A}\hat{e}_2=a_{12}\hat{e}_1+a_{22}\hat{e}_2$

Άρα ζητάω τις συνιστώσες των $\mathrm{A}\hat{e}_i$ στη βάση $\hat{e}_i$ δηλαδή τα εσωτερικά γινόμενα (προβολές) των $\mathrm{A}\hat{e}_i$ με τα $\hat{e}_i$. Είναι οι τέσσερις αριθμοί : $\hat{e}_1\cdot\ \mathrm{A}\hat{e}_1\equiv a_{11}$, $\hat{e}_1\cdot\ \mathrm{A}\hat{e}_2\equiv a_{21}$

$\hat{e}_2\cdot\ \mathrm{A}\hat{e}_1\equiv a_{21}$, $\hat{e}_2\cdot\ \mathrm{A}\hat{e}_2\equiv a_{22}$

Έτσι η δράση του τελεστή σε ένα τυχαίο διάνυσμα θα είναι :

$$\mathrm{A}\vec{v} = \mathrm{A}(v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2) = v_1\mathrm{A}\hat{e}_1 + v_2\mathrm{A}\hat{e}_2 = v_1(a_{11}\hat{e}_1 + a_{21}\hat{e}_2) + v_2(a_{12}\hat{e}_1 + a_{22}\hat{e}_2) =$$
$$= (v_1a_{11} + v_2a_{12})\hat{e}_1 + (v_1a_{21} + v_2a_{22})\hat{e}_2 = \left(\sum_{j=1}^{2} a_{1j}v_j\right)\hat{e}_1 + \left(\sum_{j=1}^{2} a_{2j}v_j\right)\hat{e}_2 =$$
$$= u_1\hat{e}_1 + u_2\hat{e}_2 = \vec{u}$$

Οι όροι στις παρενθέσεις μας θυμίζουν πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα στήλη, οπότε παρατηρούμε ότι αν αναπαραστήσουμε τα διανύσματα ως στήλες αριθμών

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1e_1 + v_2e_2$$

η δράση ενός τελεστή αναπαρίσταται με πολλαπλασιασμό με ένα πίνακα :

$$v \xrightarrow{A} u \Rightarrow u = Av \Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αυτός είναι η αναπαράσταση του τελεστή στη δοσμένη βάση

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e_1\cdot \mathrm{A}e_1 & e_1\cdot \mathrm{A}e_2 \\ e_2\cdot Ae_1 & e_2\cdot \mathrm{A}e_2 \end{pmatrix} = (Ae_1,\ Ae_2)$$

και η στήλες του μας λένε πως μετασχηματίζει τα διανύσματα βάσης.

Έτσι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ που χρησιμοποιούμε ως παράδειγμα όλη την ώρα αντιστοιχεί σε κάποια στροφή και επιμήκυνση διανυσμάτων, έστω στην καρτεσιανή ορθοκανονική βάση $\hat{e}_1,\ \hat{e}_2$

Αρχικό διάνυσμα $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, μήκος : $|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

γωνία : $\tan\varphi_v = \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{4}{3}$

Τελικό διάνυσμα $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Av = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + (-1)\cdot 4 \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

Το νέο διάνυσμα έχει διαφορετική γωνία και διαφορετικό μήκος από το αρχικό

μήκος : $|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{(-1)^2 + 10^2} = \sqrt{101} = 10{,}05$, γωνία : $\tan\varphi_u = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{10}{-1} = -10$

Αν εκφράσω το διάνυσμα v ως προς μια άλλη ορθοκανονική βάση τότε το διάνυσμα v θα αναπαριστάνεται με διαφορετικούς αριθμούς. Άλλη αναπαράσταση θα έχει και το διάνυσμα u.

$$v' = v_1'e_1' + v_2'e_2'\ ,\ u' = u_1'e_1' + u_2'e_2'$$

Άρα ο αντίστοιχος πίνακας A' που μετασχηματίζει το v' στο u' θα πρέπει να αναπαριστάνεται με διαφορετικούς αριθμούς στο νέο σύστημα αναφοράς.

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e_1'\cdot \mathrm{A}e_1' & e_1'\cdot \mathrm{A}e_2' \\ e_2'\cdot Ae_1' & e_2'\cdot \mathrm{A}e_2' \end{pmatrix} = (Ae_1',\ Ae_2')$$

Οι δύο πίνακες A και A', αν και θα έχουν διαφορετικούς αριθμούς για στοιχεία τους, ονομάζονται **όμοιοι πίνακες** επειδή αντιστοιχούν στον ίδιο τελεστή, με άλλα λόγια κάνουν την ίδια ακριβώς δουλειά : όταν δρουν στην αναπαράσταση του $\vec{v}$, τη μεταμορφώνουν στην αναπαράσταση του $\vec{u}$, άσχετα με τους άξονες που επιλέγω για να εκφράσω τις συντεταγμένες των διανυσμάτων.

Ποια θα είναι η νέα μορφή A' του πίνακα A;

<u>Μετασχηματισμοί ομοιότητας πινάκων</u>

Έστω ότι επιλέγω τη βάση των πράσινων μοναδιαίων διανυσμάτων του παρακάτω σχήματος. Δηλαδή περιστρέφω τους άξονες αναφοράς κατά α =45°. Τα καινούργια μοναδιαία διανύσματα σε αυτούς τους άξονες φαίνεται από το σχήμα ότι θα εκφράζονται ως προς τα αρχικά e_1 και e_2 ως:

$$e_1' = \cos\alpha e_1 - \sin\alpha e_2 = \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ και } e_2' = \sin\alpha e_1 + \cos\alpha e_2 = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Σε μορφή πίνακα $\underline{e_1' = Re_1}$ και $\underline{e_2' = Re_2}$

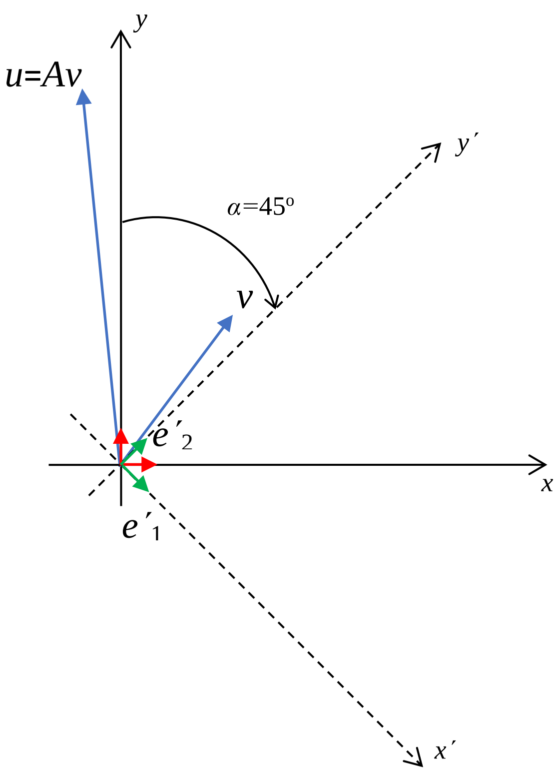
με $R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ αναστρέψιμο πίνακα αφού $\det R = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$

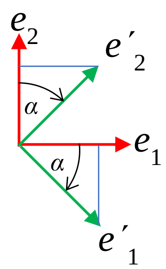
Είτε από το σχήμα είτε λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις ως προς e_1 και e_2 τα αρχικά διανύσματα βάσης ως προς τα τελικά, εκφράζονται ως :

$$e_1 = \cos\alpha e_1' + \sin\alpha e_2' = \frac{e_1' + e_2'}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ και } e_2 = -\sin\alpha e_1' + \cos\alpha e_2' = \frac{-e_1' + e_2'}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Σε μορφή πίνακα $e_1 = R^{-1}e_1'$ και $e_2 = R^{-1}e_2'$

με $R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ τον αντίστροφο του R





Κάθε διάνυσμα σαν φυσική οντότητα παραμένει ίδιο ανεξάρτητα από το σύστημα αναφοράς που το βλέπουμε (συνδέει τα ίδια δυο σημεία του χώρου με συγκεκριμένη φορά): $v_1 e_1 + v_2 e_2 = v_1' e_1' + v_2' e_2'$

Στο νέο σύστημα αναφοράς το διάνυσμα $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ θα φαίνεται ως $v' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix}$:

$$v_1 e_1 + v_2 e_2 = v_1(\cos\alpha e_1' + \sin\alpha e_2') + v_2(-\sin\alpha e_1' + \cos\alpha e_2') =$$

$$= (v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha)e_1' + (v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha)e_2' = v_1' e_1' + v_2' e_2'$$

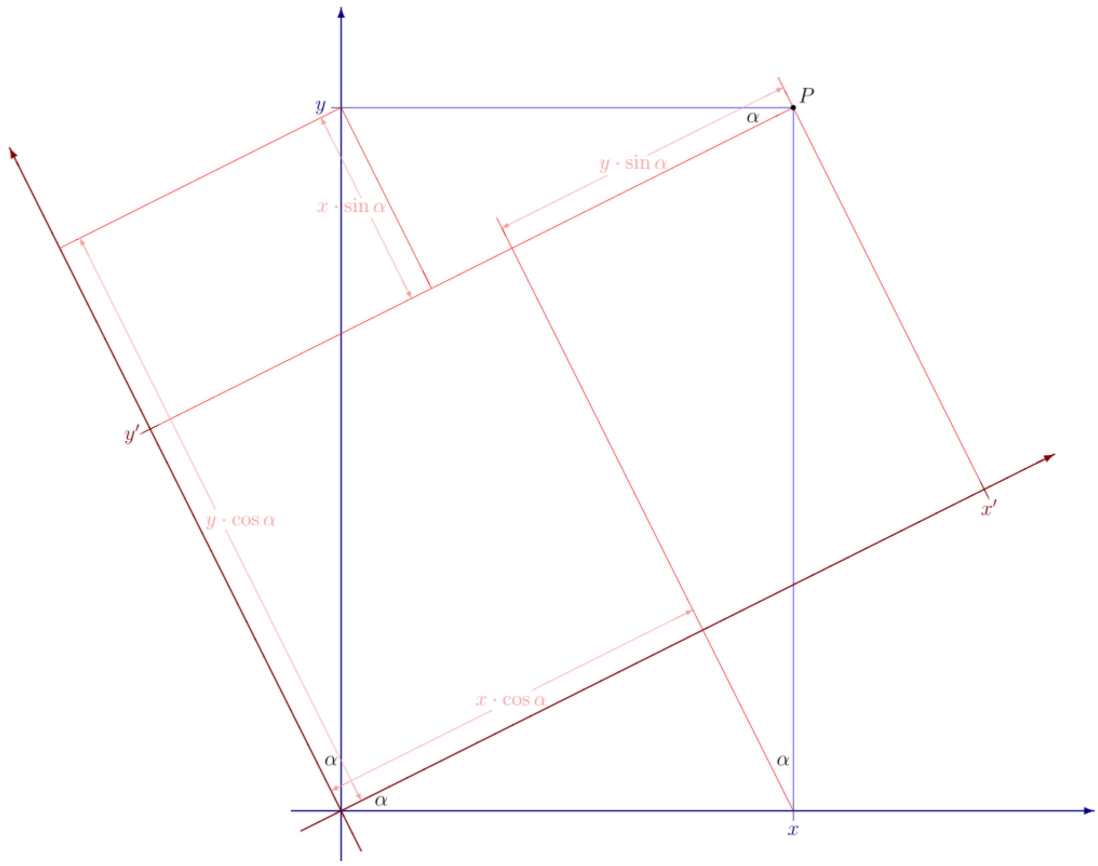
με $v_1' = v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad v_2' = v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$

δηλαδή $\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Βλέπουμε ότι ισχύει

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1\cos\alpha - v_2\sin\alpha \\ v_1\sin\alpha + v_2\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v' = R^{-1}v}$$

Θα μπορούσαμε να εξάγουμε αυτόν τον μετασχηματισμό και από το παρακάτω σχήμα (σε αυτό το σχήμα έχουμε στροφή προς τα αριστερά αρά θα πρέπει στους τύπους μας να αντικαταστήσουμε $\alpha \rightarrow -\alpha$) :
Κάντε το σαν ***άσκηση*** : Βρείτε τα x' και y' από τα x και y χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα. Δείξτε ότι ισχύει : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι αν οι άξονες περιστραφούν κατά α προς τα δεξιά, αυτό ισοδυναμεί με το να μείνουν οι άξονες στη θέση τους αλλά όλα τα διανύσματα (όλος ο χώρος) να περιστραφούν κατά α προς τα αριστερά.
Παρόμοια το διάνυσμα u θα φαίνεται από τους νέους άξονες ως

$$u' = R^{-1}u = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -11 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Για να βρούμε την αναπαράσταση A' του πίνακα A στους νέους άξονες σκεφτόμαστε το εξής. Αφού ο πίνακας A μετασχηματίζει το v στο u

$$u = Av \quad \text{ή} \quad v \xrightarrow{A} u$$

θα πρέπει ο A' να μετασχηματίζει το v' στο u'

$$u' = A'v' \quad \text{ή} \quad v' \xrightarrow{A'} u'$$

Άρα : $u' = A'v' \Rightarrow R^{-1}u = A'R^{-1}v \Rightarrow u = RA'R^{-1}v \Rightarrow Av = RA'R^{-1}v \Rightarrow A = RA'R^{-1} \Rightarrow \underline{A' = R^{-1}AR}$

Οπότε

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Πράγματι : $A'v' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1-21 \\ -3+21 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -22 \\ 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -11 \\ 9 \end{pmatrix} = u'$

Ισοδύναμα, για να βρω τη νέα μορφή του πίνακα A στους νέους άξονες θα μπορούσα να υπολογίσω τη δράση του πάνω στα νέα διανύσματα βάσης Re'_1 και Re'_2 και να τα εκφράσω ως προς τη βάση e'_1 και e'_2

$$A' = \begin{pmatrix} e_1' \cdot Ae_1 & e_1' \cdot Ae_2' \\ e_2' \cdot Ae_1 & e_2' \cdot Ae_2' \end{pmatrix} = (Ae_1', Ae_2')$$

$$Ae_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}(\cos\alpha e_1' + \sin\alpha e_2') + \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\alpha e_1' + \cos\alpha e_2') =$$

$$= (\frac{2}{\sqrt{2}}\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha)e_1' + (\frac{2}{\sqrt{2}}\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha)e_2' = \frac{1}{2}e_1' + \frac{3}{2}e_2' = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Άρα η πρώτη στήλη του A' θα είναι $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

Παρομοίως

$$Ae_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{2}}e_2 =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}(-\sin\alpha e_1' + \cos\alpha e_2') = -\frac{3}{2}e_1' + \frac{3}{2}e_2' = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Άρα η δεύτερη στήλη του A' θα είναι θα είναι $\begin{pmatrix} -3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

Οπότε $A' = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ 3/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με πριν

Μετασχηματισμοί ομοιότητας S :	άξονες	$e_i' = Se_i$
	διανύσματα	$v' = S^{-1}v$
	πίνακες	$A' = S^{-1}AS$

Το ίχνος και η ορίζουσα ενός πίνακα δεν αλλάζουν κάτω από μετασχηματισμούς ομοιότητας

$$\det A' = \det(S^{-1}AS) = \det S^{-1} \det A \det S = \frac{1}{\det S}\det A \det S = \det A$$

$$\mathrm{tr}A' = \mathrm{tr}(S^{-1}AS) = \mathrm{tr}(SS^{-1}A) = \mathrm{tr}A$$

Η δύναμη ενός πίνακα μετασχηματίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο :

$$A'^{\,k} = \underbrace{A'A'...A'}_{k \text{ φορές}} = \underbrace{S^{-1}ASS^{-1}AS...S^{-1}AS}_{k \text{ φορές}} = S^{-1}\underbrace{AA...A}_{k \text{ φορές}}S = S^{-1}A^kS$$

Με μετασχηματισμούς ομοιότητας μπορούμε να βρούμε ένα τέτοιο σύστημα αξόνων ώστε σε αυτό ο δοσμένος πίνακας A να έχει την απλούστερη δυνατή μορφή, δηλαδή να είναι διαγώνιος :

$$A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

Επειδή μια δύναμη του διαγώνιου A' υπολογίζεται πολύ εύκολα $A'^{\,k} = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 \\ 0 & 0 & d_3^k \end{pmatrix}$ αν έχουμε διαγωνιοποιήσει τον A μπορούμε να υπολογίσουμε μια οσοδήποτε μεγάλη δύναμή του k, με πολλαπλασιασμό 3 πινάκων και όχι k

$$A'^{\,k} = S^{-1}A^kS \Rightarrow A^k = SA'^{\,k}S^{-1} = S\begin{pmatrix} d_1^k & 0 & 0 \\ 0 & d_2^k & 0 \\ 0 & 0 & d_3^k \end{pmatrix}S^{-1}$$

Επειδή ο αντίστροφος του διαγώνιου A' είναι $A'^{\,-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_3 \end{pmatrix}$ το ίδιο θα ισχύει και για αρνητικές δυνάμεις, π.χ. ο αντίστροφος του A θα είναι :

$$A^{-1} = SA'^{\,-1}S^{-1} = S\begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_3 \end{pmatrix}S^{-1}$$

Ο πίνακας διαγωνιοποίησης S φτιάχνεται από τα ιδιοανύσματα του πίνακα A.

Ιδιοτιμές και ιδιοανύσματα πίνακα

Γενικά, όταν ένας πίνακας A δρα σε ένα διάνυσμα v, δηλαδή το πολλαπλασιάζει, τότε το μετασχηματίζει. Από τον πολλαπλασιασμό προκύπτει ένα νέο διάνυσμα u το οποίο γενικά έχει άλλο μέτρο και άλλη διεύθυνση από το αρχικό :

$$Av = u$$

Υπάρχουν όμως κάποια χαρακτηριστικά διανύσματα για κάθε πίνακα στα οποία όταν δρα ο πίνακας το μόνο αποτέλεσμα που προκαλεί είναι να τα πολλαπλασιάσει με έναν αριθμό. Δεν αλλάζει τη διεύθυνσή τους, απλώς τα συστέλλει ή τα διαστέλλει ή και αλλάζει τη φορά τους. Η δράση του πίνακα ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του διανύσματος με έναν αριθμό :

$$Av = \lambda v$$

Οι αριθμοί λ ονομάζονται **ιδιοτιμές** και τα διανύσματα v **ιδιοανύσματα** του πίνακα A.
Παρατηρούμε ότι αν ένα διάνυσμα v είναι ιδιοάνυσμα ενός πίνακα A τότε και κάθε πολλαπλάσιό του cv είναι ιδοάνυσμα του A με την ίδια ιδιοτιμή:

$$A(cv) = cAv = c\lambda v = \lambda(cv)$$

Οπότε η σχέση $Av = \lambda v$ ορίζει τα ιδιοανύσματα με απροσδιοριστία μια πολλαπλασιαστικής σταθεράς. Προσδιορίζει δηλαδή την κατεύθυνσή τους και όχι το μέτρο τους. Χρησιμοποιούμε αυτή την ελευθερία για να κατασκευάσουμε μοναδιαία ιδιοανύσματα, δηλαδή ιδιοανύσματα που έχουν μέτρο μονάδα. Για να κατασκευάσουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{v}$ (κανονικοποίηση) στην διεύθυνση του διανύσματος v, διαιρούμε το διάνυσμα v με το μέτρο $|v|$ του :

$$\hat{v} = \frac{1}{|v|}v \Rightarrow |\hat{v}| = 1$$

Παράδειγμα και παρατηρήσεις

Π.χ. : $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1/2\\ 1\end{pmatrix}$

$$Av_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2\\ -4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=-v_1,$$

$$Av_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2+2\\ 2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2\\ 5\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1/2\\ 1\end{pmatrix}=5v_2$$

Άρα τα διανύσματα v_1 , v_2 είναι ιδιοανύσματα του πίνακα A με ιδιοτιμές $\lambda_1= -1$ και $\lambda_2= 5$ αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι τα ιδιοανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δηλαδή δεν βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία, δεν είναι ανάλογα, δεν υπάρχει αριθμός k ώστε : $v_2 = kv_1$

Αν τα ιδιοανύσματα του πίνακα A είναι όσα και η διάσταση n του διανυσματικού χώρου (όπως στο παράδειγμά μας) τότε μπορούν να αποτελέσουν μια βάση του διανυσματικού χώρου (επιπέδου). Στη βάση αυτή, η αναπαράσταση Λ του A θα είναι διαγώνια με τα στοιχεία της διαγωνίου ίσα με τις ιδιοτιμές του A :

$$A\xrightarrow{D}\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\quad \text{στην περίπτωσή μας } \Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

Αποδεικνύεται ότι ο πίνακας D που διαγωνιοποιεί τον A είναι ο πίνακας που κατασκευάζεται με στήλες τα ιδιοανύσματα του A :

$$D=\begin{pmatrix}-1 & 1/2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad \det D=(-1)\cdot 1-(1/2)\cdot 1=-\frac{3}{2},\quad D^{-1}=\frac{1}{(-3/2)}\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1 & 1/2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Πράγματι :

$$\Lambda=D^{-1}AD=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1 & 1/2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1/2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1 & 1/2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5/2\\ -1 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-3/2 & 0\\ 0 & 15/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η ορίζουσα του διαγώνιου Λ είναι το γινόμενο των ιδιοτιμών, ενώ το ίχνος του είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών. Επειδή η ορίζουσα και το ίχνος ενός πίνακα δεν αλλάζουν κάτω από μετασχηματισμούς ομοιότητας αυτά θα είναι και η ορίζουσα και το ίχνος του πίνακα A.

Οι παρατηρήσεις αυτές, αποδεικνύεται ότι ισχύουν γενικά :

1) Τα ιδιοανύσματα $v_1, v_2, \dots v_k$ ενός πίνακα A nxn είναι γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους
2) Αν τα ιδιοανύσματα είναι όσα και η διάσταση του διανυσματικού χώρου, δηλαδή k=n, τότε μπορούν να αποτελέσουν μια νέα βάση του χώρου και ο πίνακας A θα είναι διαγώνιος σε αυτή τη βάση με μορφή:

$$\Lambda=D^{-1}AD=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Άρα ένας πίνακας *n*x*n* μπορεί να διαγωνιοποιηθεί με ένα μετασχηματισμό ομοιότητας αν έχει *n* γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοανύσματα. Αυτό συμβαίνει πάντα όταν ο πίνακας έχει *n* διακριτές ιδιοτιμές

3) Ο πίνακας D που διαγωνιοποιεί τον A είναι ο πίνακας που έχει στήλες τα ιδιοανύσματα του A:

$$D = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

4) Η ορίζουσα ενός πίνακα είναι το γινόμενο των ιδιοτιμών του : $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdot \ \dots \cdot \ \lambda_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

5) Το ίχνος ενός πίνακα είναι ίσο με το άθροισμα των ιδιοτιμών του : $\mathrm{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Βλέπουμε ότι αν ένας πίνακας έχει μια ιδιοτιμή του ίση με μηδέν δεν θα είναι αντιστρέψιμος αφού η ορίζουσά του θα είναι μηδέν.

<u>Πως βρίσκω τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα ενός πίνακα</u>

1) Εύρεση ιδιοτιμών

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές ενός πίνακα A nxn αναζητούμε λύσεις του συστήματος nxn :

$$Av = \lambda v \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0 \quad \text{με} \quad v \neq 0$$

Αυτό είναι ομογενές, άρα για να έχει μη μηδενικές λύσεις θα πρέπει η ορίζουσά του να είναι μηδέν :

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Η σχέση αυτή είναι μια εξίσωση n βαθμού ως προς λ που λέγεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του A:

$$X_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nm} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0 = 0$$

και το πολυώνυμο $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$ ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A.

Παρατηρούμε ότι επειδή από τον ορισμό $P_A(0) = \det(A - 0 \cdot I) = \det A$ ενώ $P_A(0) = c_0$, ο σταθερός όρος c_0 του πολυωνύμου είναι η ορίζουσα του πίνακα $\det A = c_0$ (ένας άλλος τρόπος να βρω την ορίζουσα).

Οπότε το πρόβλημα των ιδιοτιμών ανάγεται στη λύση εξισώσεων n βαθμού. Όταν η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια (A=2x2) μπορούμε να τη λύσουμε. Όταν είναι τριτοβάθμια (A=3x3) μπορούμε επίσης να τη λύσουμε αλλά κανείς δεν έχει διδαχθεί ούτε θυμάται τους τύπους της τριτοβάθμιας. Για $n \geq 3$ προσπαθούμε πάντα να παραγοντοποιήσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο με κάθε πρόσφορο τρόπο.

Το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας μας λέει ότι κάθε εξίσωση n βαθμού έχει πάντα n λύσεις, εν γένει μιγαδικές και όχι απαραίτητα διαφορετικές μεταξύ τους και άρα μπορεί να παραγοντοποιηθεί, δηλαδή να γραφτεί σαν γινόμενο παραγόντων της μορφής :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdot \ \dots \cdot \ (\lambda - \lambda_k)^{m_k} \quad \text{με} \quad m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$$

Έτσι βλέπουμε ότι ακόμα και αν ο πίνακας είναι πραγματικός μπορεί να έχει μιγαδικές ιδιοτιμές. Το σύνολο των ιδιοτιμών ενός πίνακα ονομάζεται **φάσμα** του πίνακα. Ο αριθμός m_k που εκφράζει το πόσες φορές εμφανίζεται μια ιδιοτιμή στο φάσμα ονομάζονται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής (λύσης) λ_k.

2) Εύρεση ιδιοανυσμάτων

Εφόσον βρούμε τις ιδιοτιμές λ_i βρίσκουμε ένα προς ένα τα ιδιοανύσματα του A λύνοντας το αντίστοιχο ομογενές σύστημα, καθένα από τα οποία όντας ομογενές θα έχει άπειρες λύσεις (ένα ή κάποια διανύσματα και όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς τους) :

$$Av_i = \lambda_i v_i \Rightarrow (A - \lambda I)v_i = 0$$

και αν το επιθυμούμε επιλέγουμε αυτά που έχουν μέτρο μονάδα (κανονικοποιημένα)

3) Διαγωνιοποίηση πίνακα

Αν μια ιδιοτιμή λ_i εμφανίζεται μια φορά στο φάσμα (m_i=1) τότε αντιστοιχεί σε αυτήν ένα ιδιοάνυσμα. Το ιδιοάνυσμα αυτό μαζί με όλα τα πολλαπλάσιά του παράγει έναν διανυσματικό χώρο V_i (vector space) που έχει διάσταση 1 (ευθεία). Γενικά ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από τα ιδιοανύσματα μιας ιδιοτιμής ονομάζεται **ιδιοχώρος** της και η διάστασή του **γεωμετρική πολλαπλότητα** g_i της ιδιοτιμής λ_i. Όταν μια ιδιοτιμή έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $m_i>1$, άρα εμφανίζεται παραπάνω από μία φορά στο φάσμα , π.χ. είναι διπλή $(\lambda-\lambda_i)^2$ ή τριπλή $(\lambda-\lambda_i)^3$ κλπ. ρίζα του πολυωνύμου τότε θα μπορούν να αντιστοιχούν σε αυτήν από 1 έως m_i ιδιοανύσματα. Το πλήθος τους είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής και η διάσταση του ιδιοχώρου της $g_i \le m_i$. Άρα ένας πίνακας θα έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοανύσματα αν $g_i = m_i$. Τότε το άθροισμα των διαστάσεων των ιδιοχώρων του πίνακα A θα είναι ίσο με n την διάσταση του διανυσματικού χώρου στον οποίο ορίσαμε τα διανύσματα και τους πίνακες. Τότε τα ιδιοανύσματα του θα αποτελούν μια βάση σε αυτόν το χώρο και ο πίνακας θα είναι διαγωνιοποιήσιμος:

αν $g_1+g_2+...+g_k = m_1+m_2+...+m_k = n$ ο A διαγωνιοποιείται

Αν για κάποια ιδιοτιμή η γεωμετρική της πολλαπλότητα είναι μικρότερη της αλγεβρικής τότε ο πίνακας δεν διαγωνιοποιείται (τα ιδιοανύσματα του δεν επαρκούν για να αναπαράγουν όλο το διανυσματικό χώρο, κάποια διάσταση θα λείπει)

αν $g_1+g_2+...+g_k = m_1+m_2+...+m_k = n$ ο A δεν διαγωνιοποιείται

Θεώρημα Caley – Hamilton : Ένας πίνακας ικανοποιεί τη χαρακτηριστική του εξίσωση

$$X_A(A)=0$$

Πολύ χρήσιμο για την εύρεση του αντίστροφου πίνακα και μεγάλων δυνάμεων του πίνακα.

Π.χ. για 2x2 : $X_A(\lambda)=0 \Rightarrow \alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma=0 \Rightarrow \alpha A^2+\beta A+\gamma=0$

υπολογίζουμε το τετράγωνο του πίνακα με πρόσθεση πινάκων αντί πολλαπλασιασμό

$$\Rightarrow\ \alpha A^2+\beta A+\gamma I=0 \Rightarrow\ \alpha A+\beta I+\gamma A^{-1} \Rightarrow\ A^2=-\frac{\beta}{\alpha}A-\frac{\gamma}{\alpha}I$$

υπολογίζουμε τον αντίστροφο του πίνακα με πρόσθεση πινάκων αντί πολλαπλασιασμό

$$\Rightarrow\ \alpha A^2A^{-1}+\beta AA^{-1}+\gamma A^{-1}=0 \Rightarrow\ \alpha A+\beta I+\gamma A^{-1} \Rightarrow\ A^{-1}=-\frac{\beta}{\gamma}I-\frac{\alpha}{\gamma}A$$

Παραδείγματα εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοανυσμάτων

<u>Παράδειγμα 1</u>: 2x2 $\quad A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

$$X_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda)-8=0 \Rightarrow \lambda^2-4\lambda-5=0$$

Παρατηρήστε ότι ο σταθερός όρος –5, του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι η ορίζουσα του πίνακα

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}=3-8=-5$$

$$\Delta=4^2-4(-5)=36,\quad \lambda_1=\frac{-(-4)-\sqrt{36}}{2}=-1,\quad \lambda_2=\frac{-(-4)+\sqrt{36}}{2}=5$$

Για $\lambda_1=-1$, έστω $v=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$: $Av=-v \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\ -y\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}x+2y=-x\\ 4x+3y=-y\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}2x=-2y\\ 4x=-4y\end{matrix}$

Οι δύο εξισώσεις είναι η εξής μία : $x=-y$.

Οπότε κάθε διάνυσμα της μορφής $v=\begin{pmatrix}-y\\ y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}=yv_1$ είναι ιδιοάνυσμα με ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$.

Αυτά είναι όλα τα διανύσματα που είναι πολλαπλάσια του $v_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$.

Άρα το v_1 κατασκευάζει ένα διανυσματικό χώρο μιας διάστασης που είναι όλα τα διανύσματα που ανήκουν πάνω στην ευθεία που ορίζει. Ο χώρος αυτός που παράγεται από το διάνυσμα v_1 λέγεται **ιδιοχώρος** της ιδιοτιμής $\lambda_1 = -1$.
Έτσι θέτοντας $y = 1$ παίρνουμε το 1ο ιδιοάνυσμα:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Για $\lambda_2 = 5$, $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $Av_2 = 5v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ 5y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+2y=5x \\ 4x+3y=5y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4x=2y \\ 4x=8y \end{matrix}$

Οι δύο εξισώσεις είναι η εξής μία : $2x = y$, και άρα θέτοντας $y = 1$, $x = 1/2$ παίρνουμε το 2ο ιδιοάνυσμα:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας $D = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ θα πρέπει να διαγωνιοποιεί τον A στη μορφή $D^{-1}AD = \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Το επιβεβαιώνουμε : $\det D = -1 - 1/2 = -3/2$, $\quad D^{-1} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Lambda = D^{-1}AD = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -3/2 & 0 \\ 0 & 15/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>Παράδειγμα 2</u> 3x3 $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda)^2 + 32 + 16\lambda - 8(3-\lambda) = -\lambda(9-6\lambda+\lambda^2) + 8 + 24\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8$$

Αρχικά διαβάζουμε την ορίζουσα του A από τον σταθερό όρο : $\det A = 8$ **(επιβεβαιώστε το)**
Χαρακτηριστική εξίσωση : $-\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = 0$
Ευχόμαστε να έχει πραγματικές ακέραιες λύσεις και γι' αυτό δοκιμάζουμε για λύσεις τους διαιρέτες του σταθερού όρου 8 : ±1,±2,±4,±8
Βρίσκουμε $\quad P_A(-1) = -(-1)^3 + 6(-1)^2 + 15(-1) + 8 = 1 + 6 - 15 + 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$

$$P_A(8) = -8^3 + 6\cdot 8^2 + 15\cdot 8 + 8 = -2\cdot 8^2 + 16\cdot 8 = 2\cdot 8\cdot 8 - 2\cdot 8\cdot 8 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 8$$

Επειδή $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \Rightarrow 8 = (-1)8\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = -1$, η 3η ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι ίδια με την 1η : $\lambda_1 = \lambda_3 = -1$, άρα εμφανίζεται δύο φορές στο φάσμα ιδιοτιμών και έχει αλγεβρική πολλαπλότητα $m_1 = 2$

Έτσι : $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = -(\lambda+1)^2(\lambda-8)$ **(επιβεβαιώστε το)**
Όταν διαγωνιοποιηθεί ο πίνακας A θα είναι ίσος με

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Ιδιοανύσματα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = -1$: έστω $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$Av=\lambda_1 v \Rightarrow \begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}3x+2y+4z\\2x+2z\\4x+2y+3z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\-y\\-z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}4x+2y+4z\\2x+y+2z\\4x+2y+4z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Βλέπουμε ότι οι τρεις εξισώσεις είναι ίδιες (γι' αυτό και η ορίζουσα είναι μηδέν), άρα έχουμε μόνο μια εξίσωση για να λύσουμε για τρεις αγνώστους : $2x+y+2z=0$.

Αυτό σημαίνει ότι οι δύο άγνωστοι, έστω *y, z,* μπορεί να είναι οποιοιδήποτε αριθμοί (ελεύθερες μεταβλητές) και ο τρίτος, ο *x* θα είναι τότε : $x=-y/2-z=0$

Οπότε, οποιοδήποτε διάνυσμα της μορφής :

$$v=\begin{pmatrix}-y/2-z\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y/2\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-z\\0\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=yv_{11}+zv_{12}$$

θα είναι ιδιοάνυσμα του πίνακα *A* με ιδιοτιμή $\lambda_1=-1$ και θα γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων v_{11} και v_{12}.

Τα διανύσματα $v_{11}=\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}$ και $v_{12}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και άρα δημιουργούν με τους γραμμικούς τους συνδυασμούς ένα διανυσματικό χώρο 2 διαστάσεων (επίπεδο) τον **ιδιοχώρο** της ιδιοτιμής $\lambda_1=-1$. Η διάσταση του ιδιοχώρου που λέγεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής $\lambda_1=-1$, εδώ είναι $g_1=2$

Ιδιοανύσματα της ιδιοτιμής $\lambda_2=8$: έστω $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

$$Av=\lambda_2 v \Rightarrow \begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=8\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}3x+2y+4z\\2x+2z\\4x+2y+3z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8x\\8y\\8z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-5x+2y+4z\\2x-8y+2z\\4x+2y-5z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Οι τρεις αυτές εξισώσεις δεν είναι τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις αφού η ορίζουσα του πίνακα είναι μηδέν (αλλιώς δεν θα είχε μη μηδενικές λύσεις). Αυτό σημαίνει ότι μια ή δύο από τις γραμμές (εξισώσεις) είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Για να βρούμε πόσες και ποιες είναι οι ανεξάρτητες εξισώσεις προσθέτουμε πολλαπλάσια της μιας στην άλλη μέχρι οι συντελεστές της μιας εξίσωσης να γίνουν μηδέν. **Έτσι λύνονται τα ομογενή συστήματα εξισώσεων**

Προσθέτουμε στη 2η γραμμή την 1η επί 2/5 και ο συντελεστής του *x* στη 2η γίνεται μηδέν. Προσθέτουμε στην 3η γραμμή την 1η επί 4/5 και ο συντελεστής του *x* στην 3η γίνεται μηδέν.

$$\begin{matrix}-5&2&4\\2&-8&2\\4&2&-5\end{matrix}\xrightarrow[\gamma_3\to\gamma_3+(4/5)\gamma_1]{\gamma_2\to\gamma_2+(2/5)\gamma_1}\begin{matrix}-5&2&4\\0&-36/5&18/5\\0&18/5&-9/5\end{matrix}$$

Ήδη βλέπουμε ότι η 2η εξίσωση είναι ανάλογη (επί -2) της 3ης άρα οι δυο εξισώσεις είναι ισοδύναμες. Συνεχίζουμε

$$\begin{matrix}-5&2&4\\0&-36/5&18/5\\0&18/5&-9/5\end{matrix}\xrightarrow[\gamma_3\to(5/9)\gamma_3]{\gamma_2\to(5/18)\gamma_2}\begin{matrix}-5&2&4\\0&-2&1\\0&2&-1\end{matrix}\xrightarrow{\gamma_3\to\gamma_3+\gamma_2}\begin{matrix}-5&2&4\\0&-2&1\\0&0&0\end{matrix}\xrightarrow[\gamma_3\to(-1/2)\gamma_3]{\gamma_1\to(-1/5)\gamma_2}\begin{matrix}1&-2/5&-4/5\\0&1&-1/2\\0&0&0\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}1&-2/5&-4/5\\0&1&-1/2\\0&0&0\end{matrix}\xrightarrow{\gamma_1\to\gamma_1+(2/5)\gamma_2}\begin{matrix}1&0&-1\\0&1&-1/2\\0&0&0\end{matrix}$$

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **απαλοιφή Gauss–Jordan** και αποτελείται από τις παρακάτω τρεις επιτρεπτές ενέργειες που μπορούμε να εκτελέσουμε στους συντελεστές ενός συστήματος εξισώσεων μέχρι να καταλήξουμε σε ένα ισοδύναμο αλλά απλούστερο σύστημα :

1) να ανταλλάξουμε τη θέση δυο οποιονδήποτε γραμμών
2) να πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή με έναν αριθμό
3) να προσθέσουμε σε μια γραμμή το πολλαπλάσιο μιας άλλης

Έτσι το αρχικό μας σύστημα εξισώσεων μετασχηματίζεται στο απλούστερο

$$\begin{array}{l} -5x+2y+4z=0 \\ 2x-8y+2z=0 \\ 4x+2y-5z=0 \end{array} \xrightarrow{\text{απαλοιφή Gauss-Jordan}} \begin{array}{l} x-z=0 \\ y-\dfrac{1}{2}z=0 \end{array}$$

Αυτό είναι ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 3 αγνώστους. Άρα ο ένας άγνωστος π.χ. ο z, δεν προσδιορίζεται και μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή (ελεύθερη μεταβλητή) αλλά για κάθε τιμή του οι άλλοι δύο άγνωστοι θα είναι : $x=z$ και $y=\dfrac{1}{2}z$

Οπότε τα ιδιοανύσματα της $\lambda_2=8$ θα είναι τα διανύσματα της μορφής

$$v=\begin{pmatrix} z \\ z/2 \\ z \end{pmatrix}=z\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}=zv_2$$

που είναι ο μονοδιάστατος διανυσματικός χώρος (ευθεία) που κατασκευάζεται από το διάνυσμα

$$v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και συνεπώς η γεωμετρική πολλαπλότητα αυτής της ιδιοτιμής είναι $g_2=1$.

Το v_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητο από τα v_{11} , v_{12}. Δηλαδή για οποιουσδήποτε αριθμούς κ, μ :

$$v_2 \neq \kappa v_{11}+\mu v_{12}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι : $g_1+g_2=2+1=3=n$

Συνοπτικά : $\lambda_1=-1,\ v_{11}=\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_{12}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \lambda_2=8,\ v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Επειδή οι γεωμετρικές πολλαπλότητες των ιδιοτιμών αθροίζουν στο 3 που είναι η διάσταση του διανυσματικού χώρου τα ιδιοανύσματα v_{11} , v_{12} και v_2 του A μπορούν να κατασκευάσουν όλο το διανυσματικό χώρο και άρα αποτελούν βάση του χώρου. Σε αυτή τη νέα βάση ο πίνακας A θα είναι διαγώνιος. Ο μετασχηματισμός ομοιότητας που μας πάει από την αρχική βάση στη νέα είναι ο πίνακας D που έχει ως στήλες τα ιδιοανύσματα του A.

$$D=\begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Για να το επιβεβαιώσουμε πρέπει να υπολογίσουμε τον αντίστροφο του D

$$D^{-1}=\frac{1}{\det D}\begin{pmatrix} +|D_{11}| & -|D_{21}| & +|D_{31}| \\ -|D_{12}| & +|D_{22}| & -|D_{32}| \\ +|D_{13}| & -|D_{23}| & +|D_{33}| \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(***υπολογίστε τον, επαληθεύστε ότι*** $DD^{-1}=D^{-1}D=I$)
Πράγματι

$$\Lambda=D^{-1}AD=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1-8 & 0 & 0 \\ 0 & -4-5 & 0 \\ 0 & 0 & 4\cdot 8+2\cdot 4+4\cdot 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Εφόσον ξέρουμε ποια είναι η διαγώνια μορφή Λ του A και από ποιόν πίνακα D διαγωνιοποιείται μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορα πράγματα. Π.χ. να βρούμε τον αντίστροφό του ή κάποια μεγάλη δύναμή του.

$$A^{-1}=D\Lambda^{-1}D^{-1}=\begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -9/2 & 9/4 & 9/2 \\ 9/4 & -63/8 & 9/4 \\ 9/2 & 9/4 & -9/2 \end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 2 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

(***επαληθεύστε ότι*** $AA^{-1}=A^{-1}A=I$)

$$A^{50}=D\Lambda^{50}D^{-1}=\begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^{50} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{50} & 0 \\ 0 & 0 & 8^{50} \end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 2^{152} & 2^{151} & 2^{152} \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2^{152}+5 & 2^{151}-2 & 2^{152}-3 \\ 2^{151}-2 & 2^{150}+8 & 2^{151}-2 \\ 2^{152}-4 & 2^{151}-2 & 2^{152}+5 \end{pmatrix}\simeq\frac{2^{150}}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Κανονικοί πίνακες

Κανονικός λέγεται ένας πίνακας όταν αντιμετατίθεται με τον προσαρτημένο του : $AA^{\dagger}=A^{\dagger}A$
Κανονικοί είναι μεταξύ άλλων όλοι οι γνωστοί μας «καλοί» πίνακες όπως, οι πραγματικοί συμμετρικοί πίνακες, οι πραγματικοί αντισυμμετρικοί πίνακες, οι ορθογώνιοι πίνακες, οι ερμιτιανοί πίνακες, οι αντιερμιτιανοί πίνακες, οι μοναδιακοί πίνακες.

Οι πίνακες που εμφανίζονται στη Φυσική και τη Μηχανολογία είναι κανονικοί. Π.χ. ο πίνακας αδράνειας ενός στερεού σώματος είναι συμμετρικός, ο πίνακας ενός συστήματος συζευγμένων ταλαντωτών είναι συμμετρικός, οι πίνακες που αντιστοιχούν σε παρατηρήσιμα μεγέθη στην κβαντομηχανική είναι ερμιτιανοί, οι πίνακες που αναπαριστάνουν στροφές στο χώρο είναι ορθογώνιοι, κλπ.

Οι κανονικοί πίνακες έχουν τις παρακάτω πολύ χρήσιμες ιδιότητες

1) Ένας κανονικός πίνακας *nxn* *A* έχει πάντα *n* **γραμμικώς ανεξάρτητα** ιδιοανύσματα u_1, u_2, …, u_n τα οποία και κανονικοποιούμε $u_i^T u_i = 1$. Άρα μπορεί να διαγωνιοποιηθεί.

2) Τα ιδιοανύσματα ενός κανονικού πίνακα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι **ορθογώνια** ή **κάθετα** μεταξύ τους $u_i^T u_j = 0$ για $i \neq j$

3) Τα ιδιοανύσματα ενός κανονικού πίνακα αποτελούν μια **πλήρη ορθοκανονική βάση** του διανυσματικού χώρου. Κάθε διάνυσμα *u* μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός των ιδιοανυσμάτων του *A*.

4) Ο πίνακας $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}$ που διαγωνιοποιεί έναν κανονικό πίνακα $U^{-1}AU = \Lambda$ είναι μοναδιακός $U^{-1} = U^{\dagger}$

Ασκήσεις

1. Βρείτε τις ιδιοτιμές λ_1, λ_2 και τα ιδιοανύσματα v_1, v_2 του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. Διαγωνιοποιείται ο πίνακας *A* ? Από ποιόν πίνακα *D* ? Υπολογίστε τους *D*, D^{-1} και επιβεβαιώστε ότι $\Lambda = D^{-1}AD = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Απάντηση: $\lambda_1 = -1 + 2\sqrt{3},\ \ \lambda_2 = -1 - 2\sqrt{3}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 3 - 2\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 + 2\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Διαγωνιοποιείται ο πίνακας *A* ?

Απάντηση: $\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Δεν διαγωνιοποιείται επειδή δεν έχει 3 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοανύσματα

3. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} -9 & 39 & 22 \\ 10 & -26 & 16 \\ 21 & -63 & 38 \end{pmatrix}$, δεδομένου ότι μια ιδιοτιμή του είναι ακέραιος αριθμός.

Απάντηση: $\lambda_1 = 3,\ \ \lambda_2 = 4,\ \ \lambda_3 = -4$

4. Επαληθεύστε το θεώρημα Caley – Hamilton για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$

5. Για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Α) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του.

Β) Υπολογίστε τον αντίστροφό του από το θεώρημα Caley – Hamilton

Γ) Υπολογίστε τον πίνακα A^{30}

Δ) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα των πινάκων : A^4, A^{-1}, A^{-3}

Απάντηση: Α) , Β) $A^{-1}=\frac{1}{6}(5I-A)$,

Γ) $A^{30}=(3^{30}-2^{30})A+(3\cdot\ 2^{30}-2\cdot\ 3^{30})I$, Δ) Τα ίδια ιδιοανύσματα και ιδιοτιμές $\lambda_i^4,\ \ \frac{1}{\lambda_i},\ \ \frac{1}{\lambda_i^3}$

6. Εξετάστε αν οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$ είναι όμοιοι συγκρίνοντας τα χαρακτηριστικά τους πολυώνυμα.

Υπόδειξη: Αν είναι όμοιοι τα χαρακτηριστικά τους πολυώνυμα θα είναι ίδια (το αντίστροφο δεν ισχύει).
Απάντηση: Δεν είναι όμοιοι.

7. Ελέγξτε αν οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ είναι όμοιοι συγκρίνοντας τα χαρακτηριστικά τους πολυώνυμα και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ομοιότητας.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι τα χαρακτηριστικά τους πολυώνυμα είναι ίδια. Δείξτε ότι υπάρχει αναστρέψιμος πίνακας $S=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ ώστε $A=S^{-1}BS \Rightarrow SA=BS$ λύνοντας την τελευταία εξίσωση πινάκων που είναι 4 εξισώσεις για 4 αγνώστους. Επίσης μπορείτε, αφού ο πίνακας *B* είναι διαγώνιος, να ελέγξετε αν είναι ανάλογος με τον διαγώνιο πίνακα ιδιοτιμών του *A*

Απάντηση: Είναι όμοιοι. $a=-2,\ \ b=1,\ \ c=1,\ \ d=-3$

8. Βρείτε τον πίνακα *D* που διαγωνιοποιεί τον πίνακα $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -6 & 5\end{pmatrix}$ και διαγωνιοποιήστε τον

Απάντηση : $D=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

9. Εξετάστε αν διαγωνιοποιείται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 8\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Υπόδειξη: Επειδή είναι διαγώνιος οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του. Εξετάζετε αν στην διπλή ιδιοτιμή 1 αντιστοιχούν δύο ή μόνον ένα ιδιοάνυσμα.
Απάντηση: Όχι επειδή δεν έχει τρία γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοανύσματα

10. Να βρείτε έναν πίνακα *A* 3x3 ο οποίος να έχει τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα

$$\lambda_1=-1,\ \ \lambda_2=1,\ \ \lambda_3=2,\ v_1=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\ \ v_2=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix},\ \ v_3=\begin{pmatrix}0\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$$

Να διαγωνιοποιήσετε τους πίνακες A^4 και A^{-5}
Να υπολογίσετε τον πίνακα A^{30}
Να διαγωνιοποιήσετε τον πίνακα $B=3A^4+4A-2I$

Απάντηση: $\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $A=D\Lambda D^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -3 & 5 & -3\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$, $A^k=D\Lambda^k D^{-1}$

$$A^4 \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 16 \end{pmatrix}, \quad A^{-5} \to \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1/64 \end{pmatrix}, \quad B \to \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 5 & \\ & & 54 \end{pmatrix}$$

$$A^{50} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3(1-2^{50}) & 3\cdot 2^{50}-1 & 3(1-2^{50}) \\ 1-2^{50} & 2^{50}-1 & 3-2^{50} \end{pmatrix}$$