Τεχνητή Νοημοσύνη
2η Σειρά Ασκήσεων
Βασίλειος Βαρσαμής-el18033
Χειμώνας 2021
ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

Άσκηση 1

1. $(p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow ((r \wedge s) \vee t)$.

Η παραπάνω σε CNF θα γίνει έτσι:

$(p \vee \neg q \vee r \vee t) \wedge (p \vee \neg q \vee s \vee t) \wedge (q \vee \neg p \vee r \vee t) \wedge (q \vee \neg p \vee s \vee t)$

Με το list notation: $\{[p, \neg q, r, t], [p, \neg q, s, t], [\neg p, q, r, t], [\neg p, q, s, t]\}$

Τα βήματα του αλγόριθμου είναι τα εξής:

1) Αφαιρούμε την ισοδυναμία και την συνεπαγωγή:

$$\neg((\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)) \vee ((r \wedge s) \vee t)$$

2) Με επαναληπτικές χρήσεις του κανόνα De Morgan βάζουμε τις αρνήσεις μέσα:

$$((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee ((r \wedge s) \vee t)$$

3) Επιμερίζουμε τις διαζεύξεις με προτεραιότητα πρώτα τις πιο μέσα:

$((p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q)) \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))$

$((p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg p)) \vee ((r \vee t) \wedge (s \vee t))$ // το $(p \vee \neg p)$ είναι ταυτολογία

$(p \vee \neg q \vee r \vee t) \wedge (p \vee \neg q \vee s \vee t) \wedge (q \vee \neg p \vee r \vee t) \wedge (q \vee \neg p \vee s \vee t)$

2. $(\forall x . \forall y . \exists z . q(x, y, z) \vee \exists x . \forall y . p(x, y)) \wedge \neg(\exists x . \exists y . p(x, y))$

Η παραπάνω σε CNF θα γίνει έτσι:

$(q(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \vee p(c, x_5)) \wedge \neg p(x_6, x_7)$

Με list notation: $\{[q(x_1, x_2 f(x_1, x_2)), p(c, x_5)], [\neg p(x_6, x_7)]\}$

Τα βήματα του αλγορίθμου είναι τα εξής:

1) Βάζουμε την άρνηση προς τα μέσα στο δεξί μέρος.

Οπότε η πρόταση μας γράφεται:

$(\forall x . \forall y . \exists z . q(x, y, z) \vee \exists x . \forall y . p(x, y)) \wedge (\forall x . \forall y . \neg p(x, y))$

2) Δίνουμε σε όλες τις μεταβλητές μοναδικά ονόματα.

Οπότε η πρότασή μας γράφεται:

$(\forall x_1 . \forall x_2 . \exists x_3 . q(x_1, x_2, x_3) \lor \exists x_4 . \forall x_5 . p(x_4, x_5)) \land (\forall x_6 . \forall x_7 . \neg p(x_6, x_7))$

3) Κάνουμε skolemization την πρόταση που αποτελείται από δύο επιμέρους βήματα:

3.1) Βγάζουμε προς τα έξω τους ποσοδείκτες:

$\forall x_6 . \forall x_7 . (\forall x_1 . \forall x_2 . \exists x_3 . q(x_1, x_2, x_3) \lor \exists x_4 . \forall x_5 . p(x_4, x_5) \land \neg p(x_6, x_7))$

$\forall x_6 . \forall x_7 . (\forall x_1 . \forall x_2 \exists x_3 \exists x_4 \forall x_5 (q(x_1, x_2, x_3) \lor p(x_4, x_5)) \land \neg p(x_6, x_7))$

3.2) Κάνουμε το skolemization για τους υπαρξιακούς ποσοδείκτες:

$\forall x_6 . \forall x_7 . (\forall x_1 . \forall x_2 \forall x_5 (q(x_1, x_2, f(x_1, x_2) \lor p(c, x_5)) \land \neg p(x_6, x_7))$

4) Βγάζουμε τους καθολικούς ποσοδείκτες.

Οπότε η πρόταση μας γράφεται:

$(q(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \lor p(c, x_5)) \land \neg p(x_6, x_7)$

Άσκηση 2

1.$\Delta^I = \{a, b, c\}, R^I = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)\}$

Η παραπάνω ερμηνεία δεν είναι ανακλαστική, γιατί της λείπει το (c,c) ενώ φαίνεται ότι είναι συμμετρική και μεταβατική, συνεπώς ικανοποιεί τις (2),(3) αλλά όχι την (1).

2. Αν πάρουμε ως ερμηνεία το σύμπαν των φυσικών αριθμών και ερμηνεύσουμε το R όπως το $\leq$, αυτή η ερμηνεία είναι μοντέλο της (1) και της (3) γιατί το $\mathbb{N}$ έχει ολική διάταξη.Αντιθέτως η (2) δεν ικανοποιείται γιατί $1 \leq 2$ αλλά δεν ισχύει το συμμετρικό του.

3. Παίρνουμε $\Delta^I = \{a, b, c\}$ και $R^I = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (a, a), (b, b), (c, c)\}$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω ερμηνεία ικανοποιεί την ανακλαστική και την συμμετρική ιδιότητα, άρα είναι μοντέλο των (1) και (2), αλλά δεν είναι μοντέλο της (3) διότι $(a, b) \in R^I$ και $(b, c) \in R^I$, αλλά $(a, c) \notin R^I$.

Συνεπώς κανένα ζεύγος ανά δυο δεν συνεπάγεται την τρίτη ιδιότητα.

Άσκηση 3

Αρχικά μετατρέπουμε την γνώση σε CNF:

1) $\{[\neg A(x_1), R(x_1, f(x_1))], [\neg A(x_1), C(f(x_1))]\}$

2) $\{[\neg B(x_2), S(g(x_2), x_2)], [\neg B(x_2), D(g(x_2))]\}$

3) $[\neg D(x_3), A(x_3)]$

4) $[\neg S(x_4, y_4), T(y_4, x_4)]$

5) $[\neg T(x_5, y_5), \neg R(y_5, z), \neg C(z), Q(x_5)]$

Βάζουμε την άρνηση του $\forall x\,.\,(B(x) \to Q(x))$ στο K η οποία είναι: $\{[B(c)], [\neg Q(c)]\}$

Στα $\{[B(c)], [\neg Q(c)]\}$ και $\{[\neg B(x_2), S(g(x_2), x_2)], [\neg B(x_2), D(g(x_2))]\}$

αν πάρουμε $\beta_1 : x_2 \to c$ θα έχουμε:

από το $[B(c)]$ και το $[\neg B(c), S(g(c), c)]$ παίρνουμε το $[S(g(c), c)]$

Από το $[B(c)]$ και το $[\neg B(c), D(g(c))]$ παίρνουμε το $[D(g(c))]$

Στο $[\neg S(x_4, y_4), T(y_4, x_4)]$

Αν πάρουμε $\beta_2 : x_4 \to g(c), y_4 \to c$

Από το $[S(g(c), c)]$ και το $[\neg S(g(c), c), T(c, g(c))]$ παίρνουμε το $[T(c, g(c))]$

Στο $[\neg D(x_3), A(x_3)]$

Αν πάρουμε $\beta_3 : x_3 \to g(c)$

Από το $[D(g(c))]$ και το $[\neg D(g(c)), A(g(c))]$ παίρνουμε το $[A(g(c))]$

Στο $\{[\neg A(x_1), R(x_1, f(x_1))], [\neg A(x_1), C(f(x_1))]\}$

Αν πάρουμε $\beta_4 : x_1 \to g(c)$

Από το $[A(g(c))]$ και το $\{[\neg A(g(c)), R(g(c), f(g(c)))], [\neg A(g(c)), C(f(g(c)))]\}$

παίρνουμε το $\{[R(g(c), f(g(c)))], [C(f(g(c)))]\}$

Στο $[\neg T(x_5, y_5), \neg R(y_5, z), \neg C(z), Q(x_5)]$

Αν πάρουμε $\beta_5 : x_5 \to c, y_5 \to g(c), z \to f(g(c))$

Από το $[\neg T(c, g(c)), \neg R(g(c), f(g(c))), \neg C(f(g(c))), Q(c)]$ και το $[T(c, g(c))]$

παίρνουμε: $[\neg R(g(c), f(g(c))), \neg C(f(g(c))), Q(c)]$

Από το $[\neg R(g(c), f(g(c))), \neg C(f(g(c))), Q(c)]$ και το

$\{[R(g(c), f(g(c)))], [C(f(g(c)))]\}$ θα πάρουμε με δύο διαδοχικές εφαρμογές του κανόνα το $[Q(c)]$.

Από το $[Q(c)]$ και το $[\neg Q(c)]$ που έχουμε από την πρώτη αντικατάσταση προκύπτει η αντίφαση.

Ο αλγόριθμος σταματάει και επιστρέφει ΝΑΙ.

Επομένως η $K \vDash \forall x\,.\,(B(x) \rightarrow Q(x))$.

<u>Άσκηση 4</u>

1. $\forall x\,.\,(\Chi\omega\rho\alpha(x) \rightarrow \exists y\,.\,(H\pi\varepsilon\iota\rho o\varsigma(y) \wedge A\nu\eta\kappa\varepsilon\iota\Sigma\varepsilon(x, y)))$
2. $\exists x\,.\,(\Chi\omega\rho\alpha(x) \wedge M\varepsilon\gamma\alpha\lambda\upsilon\tau\varepsilon\rho o A\pi o(\pi\lambda\eta\theta\upsilon\sigma\mu o\varsigma(x), 3 \times 10^8))$
3.

$\forall x\,.\,(\Chi\omega\rho\alpha(x) \rightarrow \exists y \exists z(H\pi\varepsilon\iota\rho o\varsigma(y) \wedge H\pi\varepsilon\iota\rho o\varsigma(z) \wedge A\nu\eta\kappa\varepsilon\iota\Sigma\varepsilon(x, y) \wedge A\nu\eta\kappa\varepsilon\iota\Sigma\varepsilon(x, z)$

$\wedge \forall w((H\pi\varepsilon\iota\rho o\varsigma(w) \wedge A\nu\eta\kappa\varepsilon\iota\Sigma\varepsilon(x, w)) \rightarrow (w = y \vee w = z)))$

4. $\exists x\,.\,(\Chi\omega\rho\alpha(x) \wedge A\nu\eta\kappa\varepsilon\iota\Sigma\varepsilon(x, A\mu\varepsilon\rho\iota\kappa\eta) \wedge$

$\forall y\,.\,((\Chi\omega\rho\alpha(y) \wedge A\nu\eta\kappa\varepsilon\iota\Sigma\varepsilon(y, E\upsilon\rho\omega\pi\eta)) \rightarrow M\varepsilon\gamma\alpha\lambda\upsilon\tau\varepsilon\rho o A\pi o(\pi\lambda\eta\theta\upsilon\sigma\mu o\varsigma(x), \pi\lambda\eta\theta\upsilon\sigma\mu o\varsigma(y))))$

5. $\exists x \exists y\,.\,(\Chi\omega\rho\alpha(x) \wedge \Chi\omega\rho\alpha(y) \wedge x \neq y$

$\wedge M\varepsilon\gamma\alpha\lambda\upsilon\tau\varepsilon\rho o A\pi o(\pi\lambda\eta\theta\upsilon\sigma\mu o\varsigma(x), 10^9) \wedge M\varepsilon\gamma\alpha\lambda\upsilon\tau\varepsilon\rho o A\pi o(\pi\lambda\eta\theta\upsilon\sigma\mu o\varsigma(y), 10^9)$

$\wedge \forall z\,.\,((\Chi\omega\rho\alpha(z) \wedge M\varepsilon\gamma\alpha\lambda\upsilon\tau\varepsilon\rho o A\pi o(\pi\lambda\eta\theta\upsilon\sigma\mu o\varsigma(z), 10^9)) \rightarrow (z = x \vee z = y)))$

6. $\neg \exists x\,.\,(\Chi\omega\rho\alpha(x)$

$\wedge M\varepsilon\gamma\alpha\lambda\upsilon\tau\varepsilon\rho o A\pi o(\pi\lambda\eta\theta\upsilon\sigma\mu o\varsigma(x), \pi\lambda\eta\theta\upsilon\sigma\mu o\varsigma(K\iota\nu\alpha))$

$\wedge M\varepsilon\gamma\alpha\lambda\upsilon\tau\varepsilon\rho o A\pi o(\pi\lambda\eta\theta\upsilon\sigma\mu o\varsigma(x), \pi\lambda\eta\theta\upsilon\sigma\mu o\varsigma(I\nu\delta\iota\alpha)))$

Άσκηση 5

Για το πρώτο ζεύγος προτάσεων δεν υπάρχει ερμηνεία που να ικανοποιεί την πρώτη και να μην ικανοποιεί την δεύτερη πρόταση,διότι: για να βρούμε μια ερμηνεία που να ικανοποιεί το $\forall x\,.\,(p(x) \rightarrow q(a))$ και όχι το $(\forall x\,.\,p(x)) \rightarrow q(a)$, πρέπει να έχουμε μια ερμηνεία στην οποία να αληθεύει το $\forall x\,.\,p(x)$ (μια συνεπαγωγή με ψευδές αριστερό μέρος είναι πάντα αληθής) και να μην αληθεύει το $q(a)$. Οπότε το p^I θα περιέχει όλα τα στοιχεία το Δ^I που σημαίνει ότι το $p(x) \rightarrow q(a)$ θα έχει αληθή υπόθεση για κάθε x. Επομένως πρέπει να έχει και αληθές συμπέρασμα για να ικανοποιείται.Καταλήγουμε έτσι ότι το q(a) είναι αληθές που είναι άτοπο.

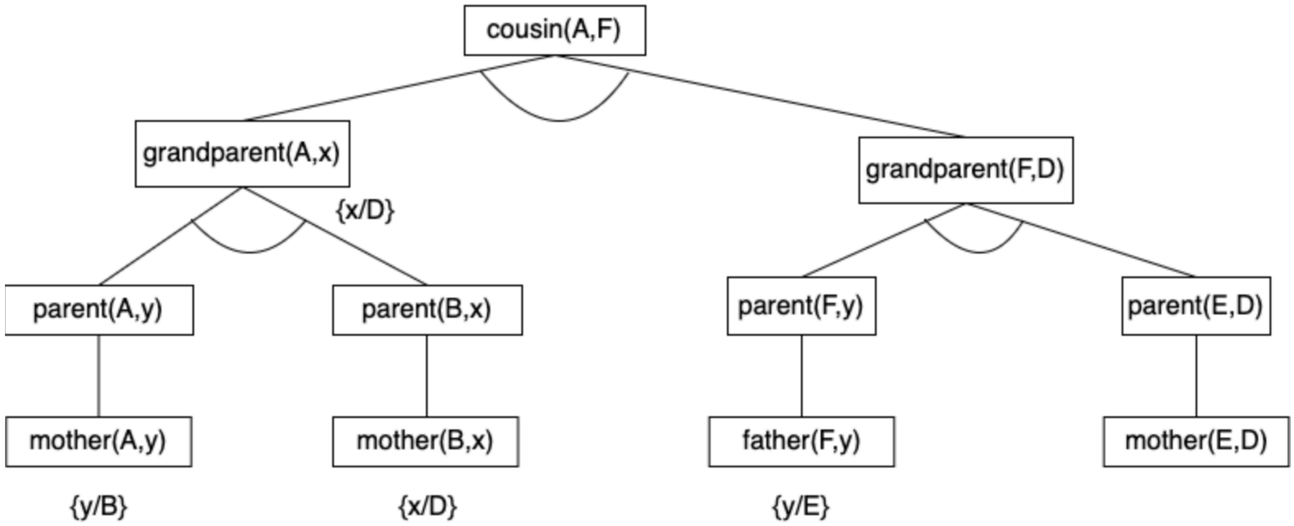
Για το δεύτερο ζεύγος έστω η ακόλουθη ερμηνεία:
$\Delta^I = \{a^I, b^I\}$, με $p^I = \{b^I\}$ και $q^I = \{b^I\}$
Αυτή η ερμηνεία ικανοποιεί την πρόταση $\exists x\,.\,(p(x) \rightarrow q(a))$ διότι η τελευταία γράφεται: $\exists x\,.\,(\neg p(x) \vee q(a))$, οπότε αρκεί να βρω ένα x_1 για το οποίο ισχύει $\neg p(x_1)$.Το x_1αυτό είναι το a^I. Ταυτόχρονα η πρόταση $(\exists x\,.\,p(x)) \rightarrow q(a)$ δεν ικανοποιείται γιατί ενώ υπάρχει x για το οποίο ισχύει p(x) (διότι το p^I δεν είναι το κενό σύνολο), το q(a) είναι ψευδές γιατί το $a^I \notin q^I$.

Άσκηση 6

1. $UP = \{a, b\}, BP = \{r(a, a), r(a, b), r(b, a), r(b, b)\}$
2. $UP = \{0, f(0), f(f(0)), \ldots\}$,
   $BP = \{p(0), p(f(0)), p(f(f(0))), \ldots, q(0), q(f(0)), q(f(f(0))), \ldots\}$

Άσκηση 7

Ο αλγόριθμος του backward-chaining για το ερώτημα cousin(A,F) φαίνεται σχηματικά παρακάτω:



Ο αλγόριθμος επιστρέφει επιτυχία.

Σημείωση: Χάριν απλότητας δεν παράγουμε τα γεγονότα που διαισθητικά οδηγούν σε αποτυχία και που ο αλγόριθμος θα επισκεπτόταν.

Ο αλγόριθμος backward-chaining για το ερώτημα sibling(A,G) δεν θα τερματίσει λόγω του κανόνα: $sibling(x, y) \leftarrow sibling(y, x)$. Πιο αναλυτικά επειδή το $sibling(y, z) \leftarrow parent(y, x), parent(z, x)$. θα οδηγήσει σε αποτυχία τότε το sibling θα ενοποιείται συνεχώς με το πρώτο (από τα παραπάνω) αξίωμα και δεν θα τερματίσει ποτέ.

Για το forward-chaining με στόχο το cousin(A,F) ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

1η Επανάληψη:

Στην πρώτη επανάληψη μπαίνουν στο K τα:

$parent(A, B), parent(A, C), parent(B, D), parent(E, D), parent(F, E), parent(G, E)$

2η Επανάληψη:

Στην δεύτερη επανάληψη μπαίνουν στο K τα:

$sibling(B, E), sibling(F, G), grandparent(A, D), grandparent(F, D), grandparent(G, D)$

3η Επανάληψη:

Στην τρίτη επανάληψη μπαίνουν στο K τα:

$sibling(E, B), sibling(G, F), cousin(A, F), cousin(A, G), cousin(F, G), cousin(F, A), cousin(G, A), cousin(G, F)$

Δεν εκτελούμε άλλη επανάληψη γιατί έχει μπει στο K ο στόχος που είναι το cousin(A,G).

Ο αλγόριθμος σταματάει και επιστρέφει επιτυχία.

Για το forward-chaining με στόχο το sibling(A,G) ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

1η Επανάληψη:

Στην πρώτη επανάληψη μπαίνουν στο K τα:

$parent(A, B), parent(A, C), parent(B, D), parent(E, D), parent(F, E), parent(G, E)$

2η Επανάληψη:

Στην δεύτερη επανάληψη μπαίνουν στο K τα:

$sibling(B, E), sibling(F, G), grandparent(A, D), grandparent(F, D), grandparent(G, D)$

3η Επανάληψη:

Στην τρίτη επανάληψη μπαίνουν στο K τα:

$sibling(E, B), sibling(G, F), cousin(A, F), cousin(A, G), cousin(F, G), cousin(F, A), cousin(G, A), cousin(G, F)$

Στην τέταρτη επανάληψη δεν υπάρχει τίποτα νέο να μπει στην K οπότε ο αλγόριθμος σταματάει και επιστρέφει αποτυχία.

Άσκηση 8

Ο αλγόριθμος για το ερώτημα $add(s(0), v, s(s(0)))$ καταλήγει σε επιτυχία με την αντικατάσταση $v = s(0)$. Κάνει τα εξής βήματα:

1η Επανάληψη:

Στην πρώτη επανάληψη δεν μπορεί να ενοποιηθεί με το πρώτο γεγονός, αλλά ενοποιείται με τον δεύτερο κανόνα με την αντικατάσταση $\beta : x \to s(0), v \to s(y), z \to s(0)$.

Οπότε για την δεύτερη επανάληψη έχουμε ώς όρισμα στην αναδρομική κλήση το $add(s(0), y, s(0))$.

2η Επανάληψη:

Στην δεύτερη επανάληψη το $add(s(0), y, s(0))$ ενοποιείται με το πρώτο γεγονός με την αντικατάσταση $\beta : y \to 0$ και πετυχαίνει.Ο αλγόριθμος σταματάει και καταλήγει σε επιτυχία. Πηγαίνοντας προς τα πίσω στις αντικαταστάσεις έχουμε $v = s(0)$.

Άσκηση 9

$IN = \{\alpha\}$

$CN = \{A, B, C\}$

$RN = \{r, s\}$

Η ερμηνεία $\Delta^I = \{a^I, b^I\}$ με $A^I = \{a^I, b^I\}$, $B^I = \{a^I, b^I\}$, $C^I = \{b^I\}$,
$r^I = \{(a^I, a^I), (a^I, b^I), (b^I, a^I), (b^I, b^I)\}$ και $s^I = \{(a^I, a^I), (a^I, b^I), (b^I, a^I), (b^I, b^I)\}$

Αποτελεί μοντέλο της γνώσης διότι:

1) Τα αξιώματα $A(a)$ και $\neg C(a)$ **ικανοποιούνται** διότι $a^I \in A^I$ και $c^I \notin C^I$
2) Το αξίωμα $s \equiv r^-$ **ικανοποιείται** διότι $r^I = \Delta^I \times \Delta^I = s^I$
3) Το αξίωμα $B \sqsubseteq \exists s\,.\,(A \sqcap C)$ **ικανοποιείται** διότι $A^I \cap C^I = \{b\}$ και λόγω του ορισμού:

$$(\exists R.\, C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} | \text{there exists } y, (x, y) \in R^{\mathcal{I}} \text{ and } y \in C^{\mathcal{I}}\}$$

Έχουμε ότι το σύνολο $(\exists s\,.\,(A \sqcap C))^I$ περιέχει την πρώτη θέση όλων των ζευγαριών του s^I τα οποία έχουν στην δεύτερη θέση το b^I. Άρα: $(\exists s\,.\,(A \sqcap C))^I = \{a, b\}$ οπότε: $B^I \subseteq (\exists s\,.\,(A \sqcap C))^I$.

4) Το αξίωμα $A \sqsubseteq \exists r\,.\,B$ **ικανοποιείται** διότι από τον παραπάνω ορισμό έχουμε $(\exists r\,.\,B)^I = \{a, b\}$. Οπότε $A^I \subseteq (\exists r\,.\,B)^I$.