ТЕМА 2.
Основы математической логики

Основы математической логики

- Высказывания;
- Операции над высказываниями;
- Формулы алгебры логики;
- Равносильные формулы;
- Контактные схемы;

Высказывания

ПРИМЕРЫ:

- A = «Минск — столица Беларуси» (истина).
- B = «Заяц — хищное животное» (ложь).
- Который час? (не высказывание).

$A = 1 \quad B = 0.$

Операции над высказываниями

Отрицанием (негацией) высказывания x называется новое высказывание $\bar{x}$, которое является истиной, если $x = 0$, и ложью, если $x = 1$.

Запись: $\bar{x} = \neg x$(читается: «не x»*)*. Ясно, что «$\neg$» — унарная связка, так как применяется только к одному утверждению.

Таким образом, возможны следующие варианты:

а) $x = 1$, $\bar{x} = \neg x = 0$;

б) $x = 0$, $\bar{x} = \neg x = 1$.

Эти два варианта полностью определяют свойства операции «$\neg$».

Операции над высказываниями

Принято описывать свойства операций с помощью таблицы:

x	$\overline{x}$
1	0
0	1

Такие таблицы называются ***таблицами истинности.*** Связка $\neg$ может использоваться и несколько раз.

ПРИМЕР: $x = 1;\ \neg x = 1;\ \neg x = 0;\ \neg\neg x = \neg(\neg x) = \ \neg(0) = 1;\ \neg\neg\neg x = 0$ и т. д.

Конъюнкция (логическое умножение)

Запись: $z = x \wedge y$ (иногда встречаются $x \& y$), читается «x и y». Связка «$\wedge$» — бинарная, связывает два высказывания

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{x \wedge y}$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Дизъюнкция (логическое сложение)

Запись: $z = x \vee y$ (иногда $x + y$) читается «x или y». Связка $\vee$ бинарная.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{x \vee y}$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Дизъюнкция (логическое сложение)

ПРИМЕР:

$x = «6 \times 3 = 18» = 1;$

$y = «18 -$ трехзначное число» $= 0.$

Тогда $z = x \vee y =$ «$6 \times 3 = 18$ или 18 - трехзначное» равное 1, так как одно из утверждений — истинно.

Импликация

Запись:

$$z = x \to y$$

(встречаются обозначения $x => y, x \supset y$).

Чтение:

«если x, то y» или «из x следует y» или

«x влечет y».

В этом высказывании x часто называется ***условием*** или ***посылкой***, а y - ***следствием*** или ***заключением***.

Импликация

Таблица истинности:

x	y	$x \to y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ПРИМЕР:

$x =$ «$6 \times 3 = 18$» $= 1$;

$y =$ «$18 : 6 = 7$» $= 0$.

Тогда $z = x \to y =$ «Если $6 \times 3 = 18$, то $18 : 6 = 7$» $= 0$.

Эквиваленция

Запись:

$$z = x \leftrightarrow y$$

(встречаются обозначения $x \sim y$, $x \Leftrightarrow y$).

Чтение:

«x эквивалентно y» или

«x тогда и только тогда, когда y» или

«для того, чтобы x, необходимо и достаточно, чтобы y».

Эквиваленция

Таблица истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Например, пусть:

$x = «2 > 3» = 0;$

$y = «6 : 2 = 3» = 1.$

Тогда $z = x \leftrightarrow y$ =

= «$2 > 3$ тогда и только тогда, когда $6 : 2 = 3$» $= 0.$

Исключающее «или» (неравнозначность)

Таблица истинности:

x	y	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Запись: $x \oplus y$

Чтение: «либо x, либо y»

(понимается — в разделительном смысле).

Формулы алгебры логики

Порядок выполнения операций регулируется:

- скобками;
- соглашением о старшинстве операций:

  $\neg$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$

  (в порядке убывания).

Формулы алгебры логики

ПРИМЕР:

$p = (x \wedge y) \vee z;$

$q = x \to \neg(y \vee (x \wedge z))$ или $q = x \to \overline{y \vee (x \wedge z)}$

С учетом соглашения о старшинстве эти формулы могут быть записаны и в виде:

$$p = x \wedge y \vee z; \qquad q = x \to \overline{y \vee x \wedge z}.$$

Логическое значение формулы

ПРИМЕР:

$$x = 1, y = 1, z = 0.$$

Определим значение формулы $P = \overline{x \wedge y} \vee z$.

Последовательно:

$P = \overline{x \wedge y} \vee z = \neg(x \wedge y) \vee z = \neg(1) \vee z == 0 \vee 0$
$= 0.$

$$z = x \wedge \overline{y} \to \overline{x} \vee y$$

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$x \wedge \overline{y}$	$\overline{x} \vee y$	z
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Формулы алгебры логики

Число значений формулы определяется числом n элементарных высказываний и равно 2^n (это же и число строк таблицы).

Так, в нашем примере всего два элементарных высказывания x и y, т. е. $n = 2$ и число значений для z равно $2^2 = 4$ (четыре строки таблицы).

Равносильные формулы

Запись:

$A = B$ (можно $A \leftrightarrow B$).

Чтение:

«A равносильно B».

ПРИМЕРЫ:

$x = \neg\neg x$; $x = x \wedge x$; $x \wedge 0 = 0$; $x \wedge x = 1$ и т. д.

Легко видеть, что если $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, то и $= \bar{A} = \bar{B}$.

Тождественно истинная (или тавтология)

Примеры тавтологий: $x \vee \bar{x}$ и $x \to (y \to x)$.

$\boldsymbol{x}$	$\overline{\boldsymbol{x}}$	$\boldsymbol{x} \vee \overline{\boldsymbol{x}}$	....	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x} \to (\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x})$
1	0	1		1	1	1	1
1	0	1		1	0	1	1
0	1	1		0	1	0	1
0	1	1		0	0	1	1

Тождественно ложная формула

$$x \wedge \overline{x}$$

Отношение равносильности обладает свойствами

- $A = A$ (рефлексивно).
- Если $A = B$, то $B = A$ (симметрично).
- Если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$(транзитивно).

Основные равносильности

- $x \wedge x = x$; $x \vee x = x$— идемпотентность;
- $x \wedge 1 = x; x \vee 1 = 1; x \wedge 0 = 0; x \vee 0 = 0$;

$x \wedge (y \vee x) = x; x \vee (y \wedge x)$ —законы поглощения;

- $x \wedge \bar{x} = 0$ — закон противоречия;
- $x \wedge \bar{x} = 1$ — закон исключенного третьего;
- $\neg\neg x = x$ — закон отрицания противоречия.

Равносильности преобразований

- $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$ — закон контрапозиции;

- $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$;

- $(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x$; $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = x$ — формулы расщепления.

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}; \ \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$

— законы де Моргана;

Правила де Моргана:

а) $\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$

б) $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$

$$x \land y = \overline{\neg x \lor \neg y};\ x \lor y = \overline{\neg x \neg y}$$

— следствия законов де Моргана

Равносильности алгебры логики

- $x \wedge y = y \wedge x; x \vee y = y \vee x$ — коммутативность;
- $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;

  $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ — ассоциативность;
- $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ — дистрибутивность.

Контактные схемы

Если значение булевой функции = 1 (переключатель замкнут), ток проходит через переключатель.

При нулевом значении булевой функции ток через переключатель не проходит (переключатель разомкнут).

Булевой функции $f(x) = x$соответствует контактная схема

—— **x** ——

Контактные схемы

С помощью контактной схемы

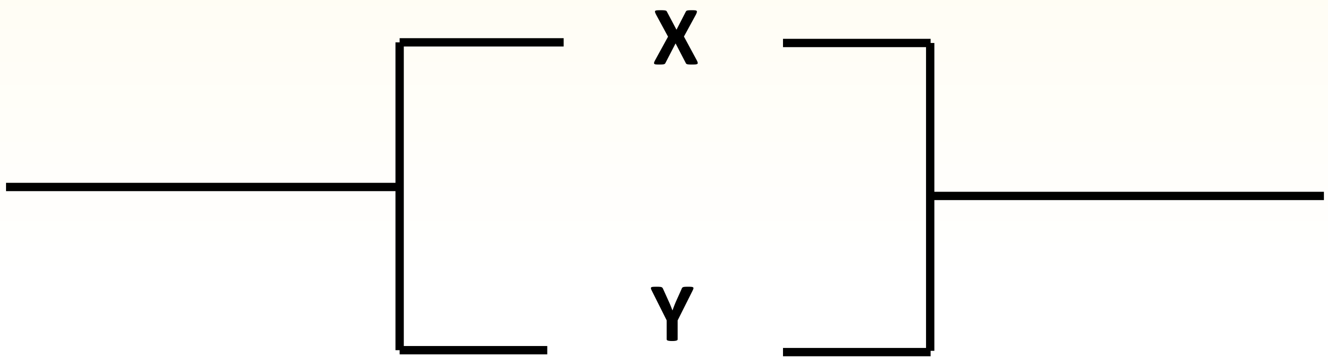
$$\text{———}\ \overline{X}\ \text{———}$$

получают отрицание $\bar{x}$.

Конъюнкция xy реализуется контактной схемой

$$\text{———}\ X\ \text{———}\ Y\ \text{———}$$

Дизъюнкции x∨y соответствует контактная схема



Способы задания булевой функции

- табличный (таблицей истинности);
- аналитический (формулой высказываний);
- десятичным вектором (кортежем);
- двоичным вектором;
- полиномом (с помощью операций $\oplus$ и &*)*;
- строкой или матрицей ;
- деревом решений.

Десятичным вектором (кортежем)

ПРИМЕР: $f(x,y,z) = (0,3,5,6), g(x,y,z) = (2,3,5,7)$.

x	y	z	$f(x,y,z)$	$g(x,y,z)$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

Двоичным вектором (кортежем)

ПРИМЕР: $f(x,y,z) = (10010110),$
$g(x,y,z) = (00110101).$

x	y	z	$f(x,y,z)$	$g(x,y,z)$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

В ЭВМ аналитическую форму можно представить в виде строки, а табличную – в виде матрицы

Дерево решений

Таблицы истинности булевых функций можно представить в виде полного бинарного дерева высоты $n + 1$. Ярусы дерева соответствуют переменным, дуги – значениям переменных; например, левая дуга – 0, правая – 1. Листья дерева хранят значение функции на кортеже, соответствующем пути из кортежа в этот лист.

Такое дерево называется ***деревом решений*** (или семантическим деревом). Дерево решений можно сократить, если заменить корень каждого поддерева, все листья которого имеют одно и то же значение, этим значением.

Дерево решений можно сделать еще компактнее, если перейти к бинарной диаграмме решений.