Бинарные отношения

- Основные определения;
- Способы задания;
- Операции над бинарными отношениями;
- Свойства бинарных отношений;
- Отношения порядка;
- Диаграмма Хассе.

Соответствие между двумя объектами

Примеры:

$R = \{(a, b)\}$, то это означает, что а уважает b. Отношение $R_1 = \{(a, b), (b, a)\}$ означает, что а уважает b и b уважает a.

Нетрудно интерпретировать также другие отношения «уважать» между интересующими нас лицами:

$$R_2 = \{(a, b), (a, a)\}, R_3 = \{(a, a), (b, b)\}$$

и т. д.

Бинарные отношения

Если два элемента a, b находятся в данном отношении R, то этот факт записывают

$$(a, b) \in R \text{ или } aRb.$$

Если эти элементы не находятся в отношении R, то это записывают так:

$$(a, b) \notin R \text{ , или } a\bar{R}b.$$

Бинарные отношения

Эквивалентность ($\Leftrightarrow$), отношение порядка($>$) или($<$), равенство($=$), параллельность($||$), перпендикулярность ($\perp$) и т. д.

- $R \subseteq A \times B,$
- $R_- = \{a | (a,b) \in R\}$, - (*левая*)
- $R_+ = \{b | (a,b) \in R\}$. – (*правая*)

ПРИМЕР: Пусть $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,3)\}$. Тогда $R_- = \{1,3\}$,

$R_+ = \{1,2,3\}$.

Бинарные отношения

Поле: $F(R) = R_{-} \cup R_{+}$.

Бинарное отношение R^{-1} называют ***обратным к отношению*** $\boldsymbol{R}$, если $(b, a) \in R^{-1}$ тогда и только тогда, когда $(a, b) \in R$, то есть $R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R\}$.

ПРИМЕР:

$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,4)\}$,

то $R^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,3)\}$.

Бинарные отношения

Пересечением бинарного отношения R по элементу $a \in F(R)$называют совокупность всех вторых (различных) компонентов упорядоченных пар, составляющих данное отношение, и таких, у которых первой компонентой есть элемент a. Обозначение: R_a.

Например, для предыдущего бинарного отношения R имеем:

$$R_1 = \{1,2,3\}, R_2 = \emptyset, R_3 = \{4\}, R_4 = \emptyset.$$

Способы задания бинарных отношений

1) *Перечислением*

Например: $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$.

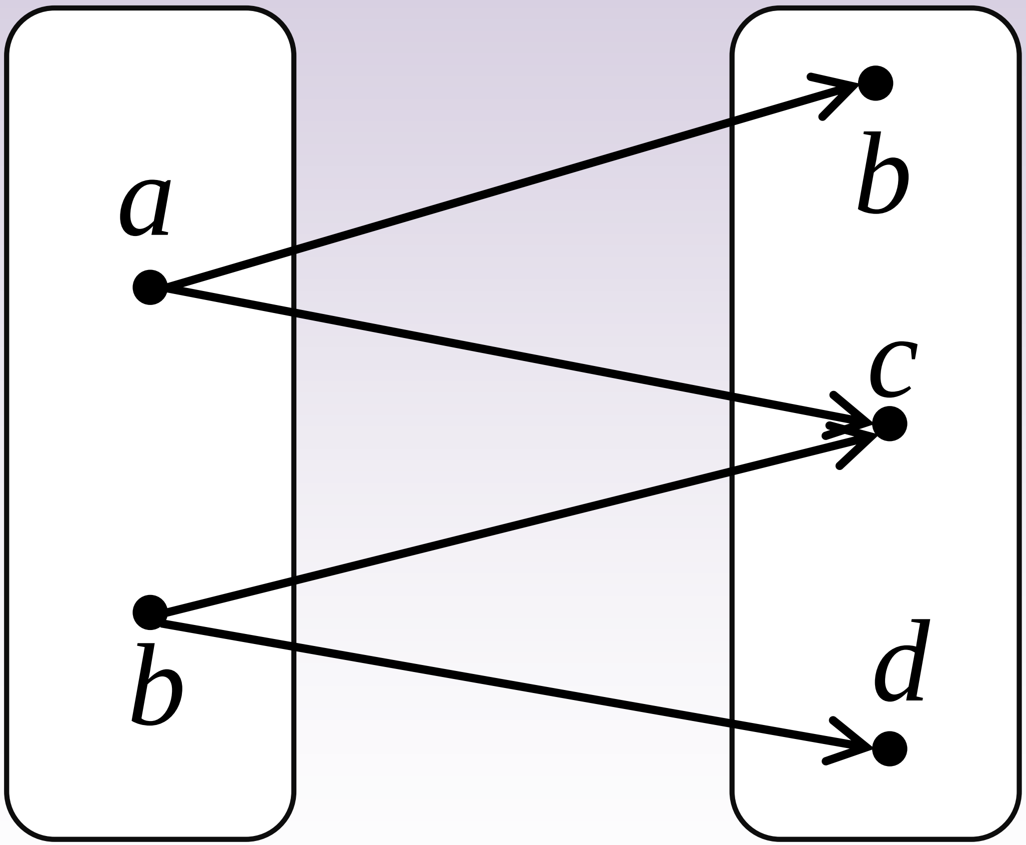
2) *Формулой*

Например: $S = \{(a, b) | (a - b) = 0\ mod\ 3;$
$a, b \in \{0..10\}\}$.

3) *Графическое задание бинарного отношения.*

Пример отношения

$$S = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d)\}$$



4) В табличной форме

a	b	c	d
$S_a = \{b, c\}$	$S_b = \{c, d\}$	$S_c = \varnothing$	$S_d = \varnothing$

5) Матрицей $\left\| a_{i,j} \right\|$

	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	0	0	1	1
c	0	0	0	0
d	0	0	0	0

Операции над бинарными отношениями

$U = F(R) \times F(R)$,

$U = A \times A$, где A есть объединение полей каждого из рассматриваемых отношений.

ПРИМЕР: Пусть $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,3)\}$ и $S = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$. В этом случае универсальное множество имеет вид:

$$U = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(2,1), \\ (2,2),(2,3),(3,1)(3,2),(3,3) \end{Bmatrix}.$$

Примеры

Тогда результаты некоторых теоретико-множественных операций будут следующими:

$\bar{R} = \{(2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2)\};$

$\bar{S} = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)\}.$

$R \backslash S = \{(1,2), (1,3)\};$

$R \cap S = \{(1,1), (3,3)\}$.

Композиция бинарных отношений

Композицией бинарных отношений R и S называют бинарное отношение T, состоящее из всех упорядоченных пар (a, b), для каждой из которых существует элемент $c \in R_+ \cap S_-$ такой, что $(a, c) \in R, (c, b) \in S$ (то есть aRc, cSb). Операцию композиции записывают так:

$$T = R \circ S.$$

Например, пусть

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,3)\},$$

$$S = \{(2,4), (2,5), (3,2), (5,5)\}.$$

Тогда $R \circ S = \{(1,4), (1,5), (2,2), (3,2)\}$,

$$S \circ R = \{(3,3)\}.$$

Свойства бинарных отношений

Бинарное отношение называют ***рефлексивным***, если для любого элемента $a \in F(R)$ имеет место aRa.

- Отношение подобия (~),
- отношение параллельности (||),
- Отношение равенства (=).

Свойства бинарных отношений

Бинарное отношение называют ***антирефлексивным***, если для любого элемента поля $a \in F(R)$ имеет место $a\bar{R}a$.

- отношения порядка (<), (>),
- отношение перпендикулярности ($\perp$).

Если задано бинарное отношение $R_1 = \{(a,a),(a,b),(b,b),(a,c),(c,c)\}$, то это отношение *рефлексивно*, а бинарное отношение $R = \{(a,b),(b,c),(b,b),(a,c)\}$ – нет.

Бинарное отношение

$R_3 = \{(a,b),(b,c),(a,c)\}$ ***антирефлексивно***.

Свойства бинарных отношений

Бинарное отношение называют ***симметричным***, если из aRb следует bRa.

- отношение равенства (=),
- подобия(~),
- отношение перпендикулярности ($\perp$),
- отношение параллельности (||).

Бинарное отношение R ***асимметрично***, если из aRb следует $b\bar{R}a$.

Асимметричными являются отношения порядка (<), (>).

Свойства бинарных отношений

Бинарное отношение называют ***антисимметричным***, если из aRb и bRa следует, что $a = b$. Заметим, что антисимметричное отношение отличается от асимметричного лишь тем, что в антисимметричном отношении допускается существование упорядоченной пары с одинаковыми компонентами.

Примеры

Так, заданные бинарные отношения

$S_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ и

$S_2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(c,a)\}$

симметричны.

С другой стороны, бинарные отношения

$S_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$,

$S_3 = \{(a,b),(a,c),(a,a),(b,c)\}$

антисимметричны.

Свойства бинарных отношений

Бинарное отношение называют ***транзитивным***, если из aRb и bRc следует aRc.

- отношение равенства (=),
- отношение подобия (~),
- отношения порядка,
- отношение параллельности (||).

Примерами транзитивных отношений также могут служить отношения S_1 и S_3.

В противном случае отношение R называют ***нетранзитивным*.**

Отношение эквивалентности

Бинарное отношение называют ***отношением эквивалентности,*** если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

- отношение равенства(=),
- отношение параллельности (||) .

Классом эквивалентности $\boldsymbol{Ra}$ называют множество всех вторых компонентов упорядоченных пар отношения эквивалентности R, у которых первой компонентой является элемент a:

$$R_a = \{b | (a, b) \in R\}.$$

Отношение эквивалентности

$S_1(a) = \{a\}, S_1(b) = \{b\}$ и $S_1(c) = \{c\}$.

Пусть имеется бинарное отношение

$$S = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(d,d)(d,e)(e,d)(e,e)\}$$

Нетрудно видеть, что данное отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Следовательно, отношение S есть отношение эквивалентности.

Имеем классы эквивалентности:

$Sa = \{a,b\}, Sb = \{a,b\}, Sc = \{c\}, Sd = \{d,e\}$,

$Se = \{d,e\}$.

Отношение порядка

Бинарное отношение R называют отношением порядка, если оно антисимметрично и транзитивно. Если к тому же оно антирефлексивно, то называется отношением строгого порядка. (пример – «быть потомком»).

Отношение порядка часто обозначают упорядоченной парой (R, >), (R, <=) и т.д. В этом случае R называется упорядоченным множеством.

Бинарное отношение R называют отношением частичного порядка, если для некоторых $a, b \in F(R)$ нет ни aRb, ни bRa. Тогда $F(R)$ называют частично упорядоченным множеством.

Любые два элемента $a, b \in F(R)$ называют сравнимыми, если aRb, или bRa.

Диаграмма Хассе

aRb

$a, b \in F(R), \overline{\exists} c \in F(R)$ такого, что aRc и cRb.

$$R = \left\{ \begin{matrix} (1,2), (1,3), (1,4), \\ (1,5), (1,6), (1,7), \\ (1,8), (2,5), (2,7), \\ (2,8), (3,5), (3,6), \\ (3,8), (4,6), (4,7), \\ (4,8), (5,8), (6,8), \\ (7,8) \end{matrix} \right\}$$