Соответствия

Соответствия

- Если определен способ сопоставления элементов $\boldsymbol{Y}$ элементам $\boldsymbol{X}$, то говорят, что между множествами $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ установлено соответствие.
- Множество $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
- $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Q})$.
- $\boldsymbol{X}$- область отправления соответствия,
- $\boldsymbol{Y}$– область прибытия соответствия,
- $\boldsymbol{Q}$– график соответствия.

Множества:

- $\text{пр}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{Q}$ - область определения соответствия,
- $\text{пр}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{Q}$, - область значений соответствия
- $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{Q}$
- $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y}$

Определения

- Если $\text{пр}_1 Q = X$, то соответствие называется *всюду определенным*, или *отображением* X в Y(в противном случае соответствие называется *частичным*).
- Если $\text{пр}_2 Q = Y$, то соответствие называется сюръективным (*сюръекцией*).

Определения

- Множество всех $y \in Y$, соответствующих элементу $x \in X$, называется *образом* x в Y при соответствии q. Множество всех $x \in X$, которым соответствует элемент $y \in Y$, называется *прообразом* y в X при соответствии q.
- Если $C \subseteq \text{пр}_1 Q$, то образом множества C называется *объединение образов всех элементов* C. Аналогично определяется прообраз множества D для любого $D \subseteq \text{пр}_2 Q$.
- Соответствие q называется *инъективным* (инъекцией), если любые различные x_1 и x_2 из $\text{пр}_1 Q$ имеют различные образы и любые различные y_1 и y_2 из $\text{пр}_2 Q$ имеют различные прообразы при соответствии q.

Определения

- Соответствие q называется *функциональным* (или *однозначным*), если образом любого элемента $x \in$ $\text{пр}_1 Q$ является единственный элемент $y \in \text{пр}_2 Q$.

- Соответствие q между множествами X и Y называется взаимно однозначным, или биективным (*биекцией*) (иногда пишут «1-1-соответствие»), если оно всюду определено, сюръективно и инъективно.

- Однозначное отображение называется *функцией*. Функция является инъективной, если различным x_1 и x_2 из X соответствуют различные y_1 и y_2 из Y, и сюръективной, если она сюръективна как соответствие. Функция называется биективной, если она одновременно инъективна и сюръективна.

Пример. Пусть $\boldsymbol{X} = \{1, 2\}$, $\boldsymbol{Y} = \{3, 5\}$, значит, $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$. Это множество дает возможность получить 16 различных соответствий. Графики соответствий:

$\boldsymbol{Q}_0 = \{(\ )\} = \varnothing$,

$\boldsymbol{Q}_1 = \{(1, 3)\}$,

$\boldsymbol{Q}_2 = \{(1, 5)\}$,

$\boldsymbol{Q}_3 = \{(2, 3)\}$,

$\boldsymbol{Q}_4 = \{(2, 5)\}$,

$\boldsymbol{Q}_5 = \{(1, 3), (1, 5)\}$,

$\boldsymbol{Q}_6 = \{(1, 3), (2, 3)\}$,

$\boldsymbol{Q}_7 = \{(1, 3), (2, 5)\}$,

$\boldsymbol{Q}_8 = \{(1, 5), (2, 3)\}$,

$\boldsymbol{Q}_9 = \{(1, 5), (2, 5)\}$,

$\boldsymbol{Q}_{10} = \{(2, 3), (2, 5)\}$,

$\boldsymbol{Q}_{11} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3)\}$,

$\boldsymbol{Q}_{12} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 5)\}$,

$\boldsymbol{Q}_{13} = \{(1, 3), (2, 3), (2, 5)\}$,

$\boldsymbol{Q}_{14} = \{(1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$,

$$\boldsymbol{Q}_{15} = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\} = \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}.$$

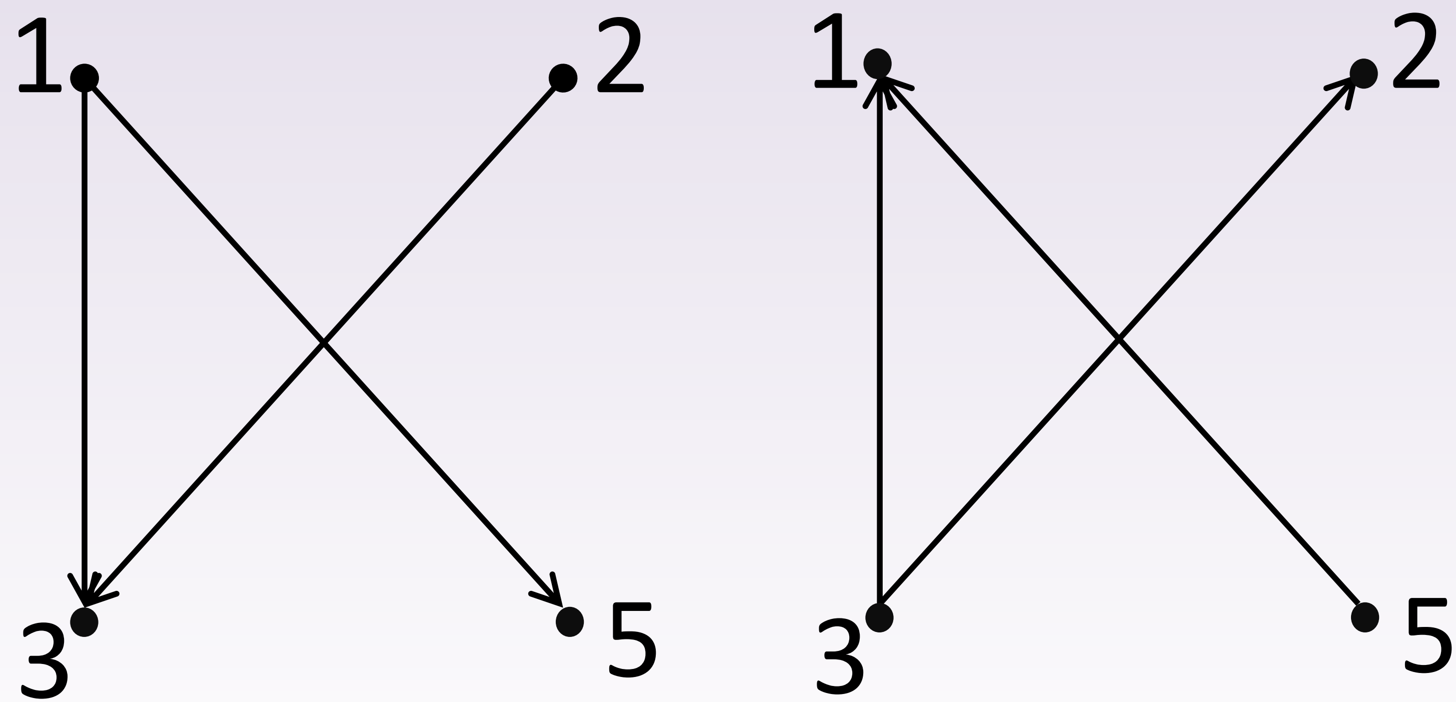
Обозначим q_i соответствие с графиком $\boldsymbol{Q}_i$

- Рассмотрим соответствие $\boldsymbol{q_9}$.
- Областью определения соответствия $\boldsymbol{q_9}$ является $\text{пр}_{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Q_9} = \{1,2\} = \boldsymbol{X}$. - *отображение*
- Областью значений $\boldsymbol{q_9}$ является $\text{пр}_{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{Q_9} = \{5\} \neq \boldsymbol{Y}$ – *не сюръективно*
- - *не инъективно*
- $\{5\}$ - *образ X*
- *X – прообраз* $\{5\}$
- - *функционально*

Геометрическое представление соответствий

$$q_{11} \quad \text{и} \quad q_{11}^{-1}$$

Графиком обратного соответствия $q_{11}{}^{-1}$ является множество $Q_{11}^{-1} = \{(3,1),(5,1),(3,2)\}$



Примеры

Отображениями являются соответствия q_6–q_9, q_{11}–q_{15}.

Сюръективными соответствиями являются q_5, q_7, q_8, q_{10}–q_{15}.

Функциональные соответствия: q_1–q_4, q_6–q_9. *Инъективные* соответствия: q_1–q_4, q_7, q_8. *Функциями* являются q_6–q_9.

Биективные функции: q_7, q_8.

Примеры соответствий

- *Англо-русский словарь*
- кодирование букв азбукой Морзе
- представления чисел в различных системах счисления
- секретные шифры
- *кодирование телефонов г. Минска*
- Множество всех векторов вида $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{2^n})$.

Композиция двух соответствий

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{q} &= (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Q}), \boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}; \\ \boldsymbol{p} &= (\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{P}), \boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}. \end{aligned}\right\}$$

$$\boldsymbol{x} \in \text{пр}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{Q}$$

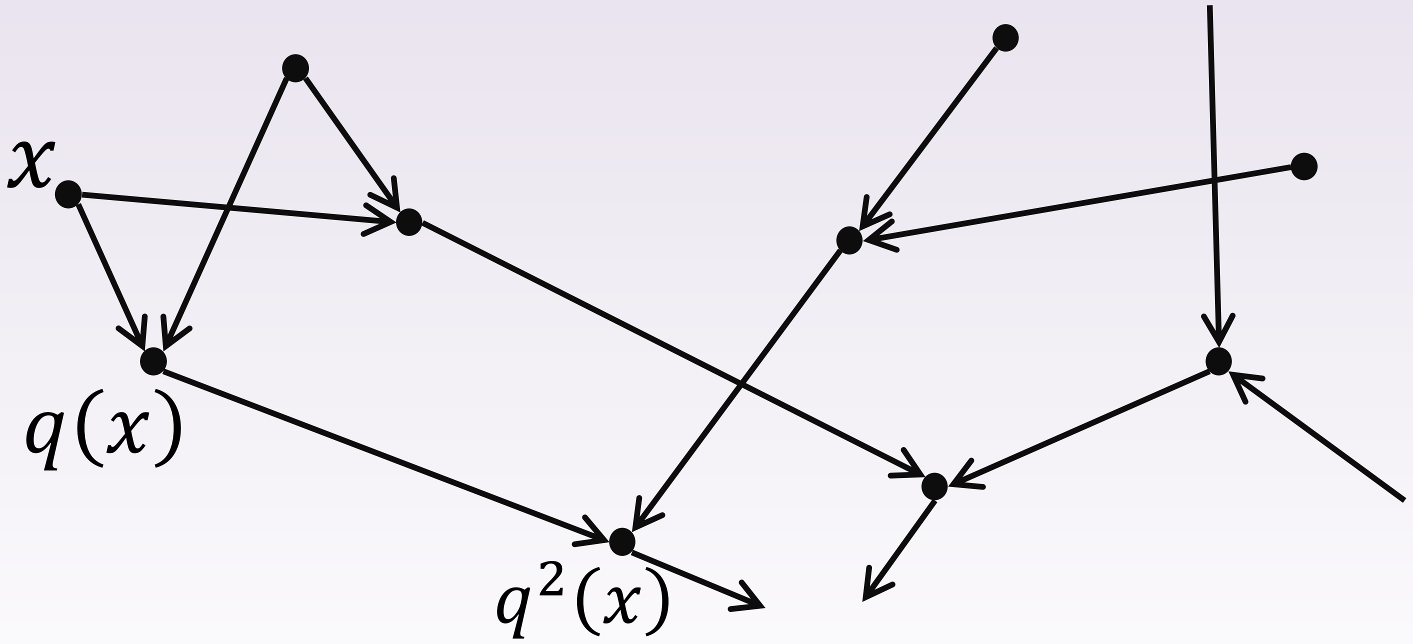
$$\boldsymbol{y} \in \text{пр}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{Q} = \text{пр}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{z} \in \text{пр}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{P}$$

Обозначения

- Композиция соответствий $\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{p}$
- График композиции соответствий – $\boldsymbol{Q} \circ \boldsymbol{P}$
- $\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{p} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q} \circ \boldsymbol{P}), \boldsymbol{Q} \circ \boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z}.$

Пусть $\boldsymbol{X}$– множество людей
$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x})$ множество его детей.
Тогда $\boldsymbol{q}^2(\boldsymbol{x})$ – множество внуков $\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{q}^3(\boldsymbol{x})$ – множество правнуков $\boldsymbol{x}$;
$\boldsymbol{q}^{-1}(\boldsymbol{x})$ – множество родителей $\boldsymbol{x}$



Функции

- Пусть f: $X \to Y$– функция
- $\boldsymbol{D(f)}$- область определения функции
- $\boldsymbol{E(f)}$ - область значений функции $\boldsymbol{f}$.
- Каждому элементу $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ $\boldsymbol{f}$ ставит в соответствие единственный элемент $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$. Это обозначается записью $\boldsymbol{f(x) = y}$ либо $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{x \to y}$.
- *Тождественной* функцией на множестве $\boldsymbol{X}$ называется функция $\boldsymbol{e}: \boldsymbol{X \to X}$, такая что $\boldsymbol{e(x) = x}$ для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$.
- Если $\boldsymbol{X, Y \subseteq R}$, то функцию $\boldsymbol{f}$ называют *вещественной*.

Функции

- Пусть даны функции $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$. Функция $h: X \to Z$ является *композицией* функций f и g, $(h = f \circ g)$, если для любого $x \in X$ $h(x) = g\big(f(x)\big)$. Часто говорят, что функция h получена подстановкой f в g.
- Функция, полученная из $f_1, \ldots, f_n$ некоторой подстановкой их друг в друга и переименованием аргументов, называется суперпозицией $f_1, \ldots, f_n$.

Способы задания функций

- Если $\boldsymbol{f} = \left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Q_f}\right)$, то
- $\boldsymbol{Q_f} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} | \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\} = \left\{\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right) \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}\right\}$.

Способы задания функций $f: X \to Y$

1) табличный
2) аналитический (формулой)

x	Железная дорога	Автобус	Катер
f(x)	9 000	8 000	10 000

$X \coloneqq \{1, 2, 3\}$

- $\boldsymbol{\alpha}: 1 \to 3,\ 2 \to 3, 3 \to 1$ и
  $\boldsymbol{\beta}: 1 \to 2,\ 2 \to 1, 3 \to 1;$
- $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ могут быть заданы таблично:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Композиции преобразований также можно задать таблично:

$$\boldsymbol{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Свойства функций и их композиций

1. Композиция **сюръективных** функций **сюръективна** (следует из определений).
2. Композиция **инъективных** функций **инъективна** (следует из определений).
3. Композиция **биективных** функций **биективна**(следует из определений).
4. Композиция функций в общем случае **не коммутативна**. $\beta\alpha \neq \alpha\beta$
5. Композиция функций **ассоциативна**.

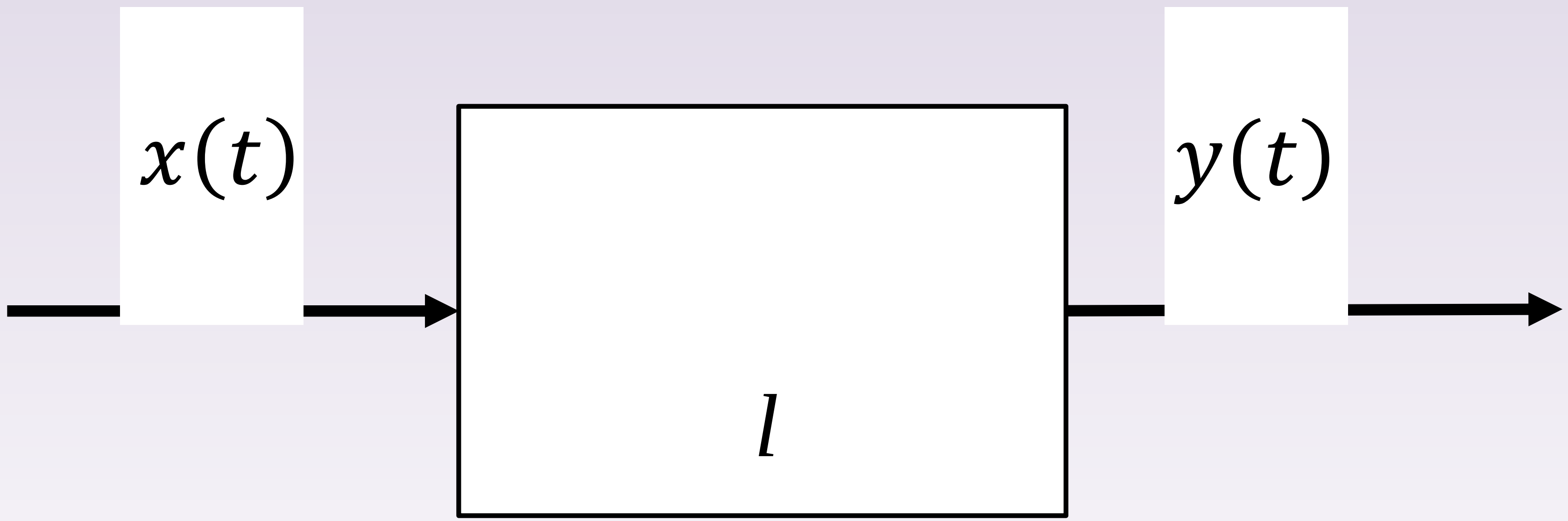
Композиция функций ассоциативна

- Пусть $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y},\ \boldsymbol{g}\colon \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z},\ \boldsymbol{h}\colon \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{W}$– произвольные функции.
- Рассмотрим произвольный элемент $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{w}$.
- Тогда $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{h} = \boldsymbol{hgf}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{gf}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\big) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{w}, (\boldsymbol{hg})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{hg}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{hg}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{h}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\big) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{w}$; т. е. для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$
- $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{gf})(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{hg})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.
- Значит, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{gf}) = (\boldsymbol{hg})\boldsymbol{f}$.

Оператор

- Оператором называется функциональное отображение $\boldsymbol{l}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, в котором $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ являются множествами функций одного аргумента $\boldsymbol{t}$.
- $\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{L})$, где $\boldsymbol{L} = \left\{\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})\right) \in \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}\right\}, \boldsymbol{L} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$. В этом случае говорят, что оператор $\boldsymbol{l}$ преобразует функцию $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ в функцию $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{l}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})]$.

Функциональное отображение (управляемая система)



Пример: $\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}\}$

- фон Нейман
- блок-схема ЭВМ
- $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{m_i}, \boldsymbol{m_j})$
- Опишем отношение $\boldsymbol{T}$ как множество упорядоченных пар: $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{M^2}$
- $T = \left\{ \begin{matrix} (a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(b.e),(c,a), \\ (c,b)(c,d),(c,e),(d,b),(d,c),(d,e),(e,c) \end{matrix} \right\}.$

Пример: $\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}\}$, матрица данного соответствия

$$
C = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$