Математическая комбинаторика

Основные темы:

- Правила суммы и произведения;
- Факториал;
- Размещения;
- Перестановки;
- Сочетания;
- Бином Ньютона.

Введение

Допустим, некоторая СУБД проверяет вариант за 1 миллисекунду и требуется провести

$n * (n - 1)/2$ сравнений. Если $n = 100$, то ответ будет получен за $4{,}95$ секунды. Но если

$n = 100\ 000$, то ответ будет получен за 1389 часов.

Правила суммы и произведения

ПРИМЕР: Из 10 студентов надо выбрать трех для назначения на дежурство, сколькими способами это можно сделать?

Поскольку выбор произволен, то первым дежурным можно назначить любого, т. е. число способов выбора, очевидно, $m_1 = 10$ вариантов. Но после того как выбран первый дежурный, второй выбирается уже из оставшихся 9 человек. Следовательно, число способов выбора второго дежурного $m_2 - 9$ вариантов. Ясно, что третий дежурный выбирается $m_3 = 8$ способами.

Таким образом, при произвольном последовательном выборе общее число способов выбора равно:

$$m_1 * m_2 * m_3 = 10 * 9 * 8 = 720.$$

Правило произведения

Если объект a_1 можно выбрать из данного множества m_1 способами, объект $a_2 - m_2$ — способами и так до к-*го* выбора, то все к выборов вместе могут быть выполнены $m_1 * m_2 * \cdots * m_к$ способами.

Правила суммы и произведения

Пусть из контингента в 6 лейтенантов и 10 солдат надо выбрать усиленную группу дежурных из 3 человек: трех офицеров или трех солдат.

Из предыдущего примера уже известно, что трех солдат можно выбрать $m = 720$ способами. Точно так же трех офицеров из шести выбираем $n = 6 * 5 * 4 = 120$ способами. Ясно, что выборы солдат и офицеров не могут быть выполнены одновременно (сразу из множества в 16 человек), т. е. правило умножения для обобщения применить нельзя. Следовательно, общее число способов выбора равно: $m + n = 720 + 120 = 840$

Правило суммы

Если два действия взаимно исключают друг друга, причем одно из них можно выполнить *m* способами, а другое — n способами, то выбрать либо первое, либо второе действие можно *m + n* способами.

Факториал

Факториалом целого положительного числа n называют произведение $1 * 2 * 3 * \cdots * (n-1) * n$.

Обозначение: $n!$

Чтение: «n факториал»

- **ПРИМЕР**: $6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720.$

Свойства факториала

1. Принимается: $0! = 1$ и $1! = 1$.

2. Факториал можно расчленить. К примеру, $6! = 5! * 6$.

3. $\frac{n!}{(n-1)!} = n$; $\frac{(n+1)!}{n!} = n + 1$;

$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$; $(n-1)! = \frac{n!}{n}$

Размещения

Все элементы конечного множества можно пронумеровать, т. е. каждому элементу множества поставить в соответствие одно из чисел: 1, 2, 3, 4, ... n.

Размещением из n элементов по m называется любое упорядоченное подмножество из m элементов множества, состоящего из n различных элементов.

Размещения

- ПРИМЕР. Пусть имеется множество, содержащее четыре буквы: *{A; B; C; D}*. Запишем все возможные размещения из четырех указанных букв по две. Таких размещений 12: *AB, AC, AD, BC, BD, CD, BA, CA, DA, CB, DB, DC.*

Размещения

Число размещений из n элементов в группы по m элементов будем обозначать символом A_n^m, где $m < n$.

Формула для определения числа размещений имеет вид:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

ПРИМЕР:

Сколькими способами 4 юноши могут пригласить четырех из шести девушек на танец?

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2} = 360$$

Задача

- Студенту необходимо сдать 4 экзамена за 8 дней. Сколькими способами можно это сделать, если в один день сдавать не более одного экзамена?
- Искомое число способов равно числу четырехэлементных упорядоченных подмножеств (дни сдачи экзаменов) множества из 8 элементов:
-
- $A_8^4 = 8 * 7 * 6 * 5 = 1680$ способов

Перестановки

В случае размещения, когда $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m}$ называется ***перестановкой***, и обозначается буквой $\mathrm{P}_{\boldsymbol{n}} = n!$.

$$P_n = A_n^m = A_n^n = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Перестановки

ПРИМЕР 1: Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6$, если цифры в числе не повторяются?

Найдем количество всех перестановок из этих цифр: $\mathrm{P}_6 = 6! = 720$.

ПРИМЕР 2:

Вспомним известную басню Крылова «Квартет»:

Проказница Мартышка, Осел, Козел,
Да косолапый Мишка
Затеяли играть квартет…

$P_4 = 4! = 24$

Сочетания

Число сочетаний из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{m}$ обозначается $\boldsymbol{C_n^m}$.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

ПРИМЕР 1:

Сколько трехкнопочных комбинаций существует на кодовом замке, если все три кнопки нажимаются одновременно и на нем 10 цифр?

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$$

ПРИМЕР 2:

У одного человека 7 книг по математике, у другого – 9 книг. Сколькими способами они могут обменять друг у друга две книги на две книги?

$$С_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 7}{2} = 21$$

$$C_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 9}{2} = 36$$

$$21 * 36 = 756$$

Биномиальные коэффициенты

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$
2. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$
3. $\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$
4. $\sum_{m=0}^{n} mC_n^m = n2^{n-1}$
5. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m$
6. **Теорема (формула бинома Ньютона):**

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^n y^{n-m}$$

Треугольник Паскаля

Из формулы 2) следует эффективный способ рекуррентного вычисления значений биномиальных коэффициентов, которые можно представить в графической форме, известной как треугольник Паскаля.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

Перестановка с повторением

Пусть $M = \{s_{1,} s_{2,} \dots s_n\}$ - множество из n элементов и $i_{1,} i_{2,} \dots i_{n,}$- натуральные числа, такие, что их сумма равна k , где $k > n$.

Каждый упорядоченный набор k элементов $\overline{P_k}$, содержащий элемент S_j ровно i_j раз $(1 \leq j \leq n)$ называется перестановками множества с повторением:

$$\overline{P_k} = \frac{k!}{i_1!\, i_2! \dots i_n\,!}.$$

Примечание: $i_1 = i_2 = \dots i_n = 1.$

ПРИМЕР 1: Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 1, 1, 1, 5, 5, 9?

$$\overline{P_6} = \frac{6!}{3! * 2! * 1!} = 60$$

ПРИМЕР 2: Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы слова "математика"?

$$\widetilde{P_{10}} = \frac{10!}{2!\,3!\,2!} = 151200$$

Размещения с повторением

Любой упорядоченный набор k элементов множества, состоящего из n элементов, называется ***размещением с повторением*** $\widetilde{A_n^k}$ из n элементов по k.

Число различных размещений с повторениями есть: $\widetilde{A_n^k} = n^k$.

ПРИМЕР 1: Для множества $S = \{a, b, c, d\}$ число различных двухэлементных размещений с повторениями $\widetilde{A_4^2} = 4^2 = 16$.

ПРИМЕР 2: $\{0 \text{ и } 1\}$ $\widetilde{A_q^2} = 2^q$

Обратная задача: $2^4 = 16$, $2^8 = 256$, $2^{16} = 65536$

$N = 64,\ 64 = 2^q, q = 6.$

Сочетания с повторениями

Сочетаниями из n элементов по k элементов с повторениями называются группы, содержащие k элементов, причем каждый элемент принадлежит к одному из n типов.

ПРИМЕР: $S = \{a, b, c, d\}$

$$\widetilde{S_{\text{с}}} = \{(a,a)(a,b)(a,c)(a,d)(b,b)(b,c)(b,d)(c,c)(c,d)(d,d)\}$$

$$\widetilde{C_n^k} = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^{k}$$

ПРИМЕР: Кости домино можно рассматривать как цифры $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Число сочетаний по два элемента равно:

$$C_7^2 = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \frac{8!}{2!\,6!} = 7 * \frac{8}{2} = 28$$

Формулы включений и исключений

Теорема 1

$$|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}|$$

Теорема 2

$$|\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}| + |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}|$$

для любых конечных множеств A, B и C.

ПРИМЕР: Сколько есть натуральных чисел меньше 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Всего чисел, меньших тысячи 999. Из них:

- $999 : 3 = 333$ делятся на 3;
- $999 : 5 = 199$ делятся на 5,
- $999 : 7 = 142$ делятся на 7,
- $999 : (3 * 5) = 66$ делятся на 3 и на 5,
- $999 : (3 * 7) = 47$ делятся на 3 и на 7,
- $999 : (7 * 5) = 28$ делятся на 7 и на 5,
- $999 : (3 * 5 * 7) = 9$ делятся на 3, на 5 и на 7.

Получаем $999 - (333 + 199 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9) = 457$.

Общая Теорема 3

$$\left|U_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} \left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{1\le i<j<k\le n} \left|A_i \cap A_j \cap A_K\right| - \ldots +$$

$$+(-1^{n-1})|A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$