Учебная дисциплина

«Основы дискретной математики и теории алгоритмов»

Доцент кафедры ИСиТ

Буснюк Николай Николаевич,   к. ф.- м. наук

Учебная дисциплина

«Основы дискретной математики и теории алгоритмов»

лекции – 34 часа

практические– 34 часа

экзамен *(письменно, 1 вопрос, 4 задачи, 90 минут)*

Множества

Основы математической логики

Комбинаторика

Теория алгоритмов

Теория графов

Бонусы **-** на экзамене

Конспект

Средняя отметка на ПЗ

0-**1**-**2**-**3** балла

Дополнительные вопросы

Недопуск

Удаление с экзамена + неуд.

Грубое нарушение дисциплины на ПЗ или лекции;

ТЕМА 1.
Основные понятия теории множеств

1.1. Определения, термины и символы

Множество — совокупность различимых между собой объектов, объединяемых в целое некоторым общим признаком.

Элементы — объекты, из которых состоит множество.

Обозначения: $A, B, C, \ldots$ — множества,

$a, b, c, \ldots$ — элементы (точки) множеств.

Обозначения $\in$, $\notin$, $\{\quad\}$

Принадлежность:

- $a \in A$ — а принадлежит множеству A;
- $a \notin A$ — а не принадлежит множеству A.

Записью $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ пользуются в качестве сокращения для записи $a_1 \in M$, $a_2 \in M, \ldots, a_n \in M$.

Из определения множества следует, что в нём не должно быть неразличимых элементов, поэтому во множестве не может быть одинаковых элементов.

$\{2; 2; 4; 5\} = \{2; 4; 5\}$.

Задание множеств

1) Перечислением элементов:

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$;

2) Указанием характеристического свойства (хар. предикатом): $M \coloneqq \{x | P(x)\}$;

3) Порождающей процедурой: $M \coloneqq \{x | x \coloneqq f\}$.

ПРИМЕР:

- $M9 \coloneqq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- $M9 \coloneqq \left\{ n \,\middle|\, n \in N \,\&\, n < 10 \right\}$;
- $M9 \coloneqq \{n | \text{for } i \text{ from } 0 \text{ to } 8 \text{ do } n \coloneqq i + 1\}$.

Подмножество

Подмножество множества A — множество B, у которого все его элементы принадлежат и A: $B \subseteq A$ — B включено (или содержится) в A.

Если хотя бы один элемент B не содержится в A, то $B \nsubseteq A$ — B не подмножество (не включено в) A.

Собственное подмножество

Говорят что множество B строго включено в множество $A(B \subset A)$, если B является подмножеством $A(B \subseteq A)$ и в тоже время $B \neq A$. В таком случае множество B называется ***собственным (строгим)*** подмножеством множества A.

Мощность, пустое множество

Мощностью множества A $(|A|)$ называется количество элементов множества A.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** множеством $(\emptyset)$. Пустое множество является подмножеством любого множества.

ПРИМЕР: $A = \{3; 8\} = \{8; 3\}$

$\{3\}, \{8\}$ – собственные подмножества множества A;

$\{3; 8\}$, $\emptyset$ - несобственные подмножества А.

Универсальное множество $(\boldsymbol{U})$ – это множество всех элементов, которые могут встретиться в данном исследовании. В различных конкретных случаях роль универсального множества могут играть конкретные множества.

Множеством степенью $\left(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})\right)$ или ***булеаном*** $\left(\boldsymbol{2^A}\right)$ множества A называется множество всех подмножеств множества A

$$P(A) = \{B | B \subseteq A\}.$$

ПРИМЕР: $P(A) = \left\{\{3; 8\}, \{3\}, \{8\}, \emptyset\right\}$

$|P(A)| = 2^{|A|}$.

Разбиение

Разбиением множества A называется такая совокупность F непустых подмножеств множества A, что каждый элемент множества A является элементом одного и только одного множества из F.

ПРИМЕР: $F = \{\{1;2\},\{3\},\{4;5\}\}$ является разбиением множества $A = \{1;2;3;4;5\}$.

Основные числовые множества

- Натуральные числа $N = \{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$;
- Целые числа
  $Z = \{\ldots; -n; \ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots; n; \ldots\}$;
- Рациональные числа

$$Q = \left\{\frac{p}{q}\middle| p \in Z, q \in N\right\};$$

- Действительные числа R – вся числовая ось.

Конечные, счётные *множества*

Множество, количество элементов которого конечно, называется ***конечным,*** и ***бесконечным*** – в противном случае. Бесконечные множества разделяются на счётные и несчётные.

Если элементы бесконечного множества можно пронумеровать с помощью натурального ряда чисел, то оно называется ***счётным,*** и ***несчётным*** – в противном случае.

Равномощные множества

Взаимно однозначным соответствием между двумя множествами A и B называется такое правило (закон) f, по которому каждому элементу $a \in A$ ставится в соответствие единственный элемент $f(a) \in B$, а для любого элемента $b \in B$ существует единственный элемент $a \in A$, такой что $f(a) = b$.

Множества A и B называются ***равномощными*** $(A \leftrightarrow B)$, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. В таком случае говорят, что множества A и B ***изоморфны***.

Нетрудно видеть, что

- Любое множество взаимно однозначно соответствует самому себе;
- Если $A \leftrightarrow B$, то $B \leftrightarrow A$;
- Если $A \leftrightarrow B$, а $B \leftrightarrow C$, то $A \leftrightarrow C$ – ***ассоциативность.***

Условные обозначения

- $\forall$ – любое, для всех;
- $\exists$ – существует;
- $\exists!$ – существует и единственный;
- $\Rightarrow$ – следствие – символ импликации;
- $\Leftrightarrow$ – эквивалентность, равносильность;
- $\wedge(\&)$ – конъюнкция – логическое «и»;
- $\vee(||)$ – дизъюнкция – логическое «или»;
- $\neg\left(\overline{}\right)$ – логическое «не».

Равномощность

ПРИМЕР: Пусть A – множество всех натуральных чётных чисел, а B – множество всех натуральных чисел, представимых в виде суммы двух нечётных натуральных чисел. Доказать, что $A = B$.

Доказательство: $A = \{2k | k \in N\}$,

$B = \{(2k-1) + (2m-1) | k, m \in N\}$

Покажем, что для $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ и

$\forall y \in B \Rightarrow y \in A \Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$.

Пусть $2k \in A$, где $k \in N$, тогда

$2k = (2k-1) + 1 \Rightarrow 2k \in B$.

Пусть $(2k-1) + (2m-1) \in B$, где $k, m \in N$, тогда $(2k-1) + (2m-1) = 2(k+m-1) \in A$.

Теоремы равномощности

Теорема 1. Любое непустое конечное множество равномощно некоторому отрезку натурального ряда.

$$\forall A|\ A \neq \emptyset \wedge |A| < \infty \Rightarrow \exists k \in N|\ A \leftrightarrow |1 \dots k|$$

Следствие 1. Любой отрезок натурального ряда конечен.

Теорема 2. Между конечными множествами A и B существует взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда их мощности равны

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow |A| = |B|.$$

Добавление и удаление элементов

Если A – множество, а x – элемент, причём $x \notin A$, то x можно добавить в A

$$A + x = \{y | y \in A \vee y = x\}.$$

Аналогично, если A – множество, а x – элемент, причём $x \in A$, то x можно удалить из A,

$$A - x = \{y | y \in A \wedge y \neq x\}.$$

Операции над множествами

Равенство множеств

Множества A и B ***равны***, $A = B$, тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и

$B \subseteq A$, т.е. состоят из одинаковых элементов,

в противном случае пишут $A \neq B$.

ПРИМЕР: если $A = \{1; 2; 3\}$, а

$B = \{2; 1; 3\}$, то $A = B$.

Операции над множествами

Объединением *(или суммой) множеств* A и B $C = A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

ПРИМЕР : Пусть $A \coloneqq \{a, b, d\}$, $B \coloneqq \{b, d, e, h\}$. Тогда $A \cup B = \{a, b, d, e, h\}$.

Пересечением *множеств* A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, которые принадлежат одновременно двум множествам ($C = A \cap B = \{x | x \in A \ \wedge \ x \in B\}$).

ПРИМЕР: Пусть $A \coloneqq \{1,2,3\}$, $B \coloneqq \{3,4,5\}$. Тогда $A \cap B = \{3\}$.

Аналогично определяются пересечение и объединение конечного и бесконечного количества множеств ($A \cup B \cup C \cup \ \dots$), ($A \cap B \cap C \cap \ \dots$).

Разностью *множеств* A и B называется множество C, состоящее из тех элементов множества A, которые не содержатся в множестве B ($C = A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$).

ПРИМЕР: Пусть $A \coloneqq \{a, b, d\}, B \coloneqq \{b, d, e, h\}$. Тогда $A \backslash B = \{a\}, \mathrm{B} \backslash \mathrm{A} = \{e, h\}$.

В отличие от операций объединения и пересечения множеств данная операция не коммутативна и определяется только для двух множеств.

Для произвольных множеств A и B верны соотношения:

$$\mathrm{A} \backslash \mathrm{B} = \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{A} \subseteq \mathrm{B},$$

$$\mathrm{A} \backslash \emptyset = \mathrm{A},$$

$$\mathrm{A} \backslash \mathrm{B} = \mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset.$$

Симметрической разностью множеств A и B (обозначение $A\Delta B$) называется множество $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

Дополнением множества A до универсального множества U называется множество всех элементов универсального множества, которые не принадлежат множеству A :

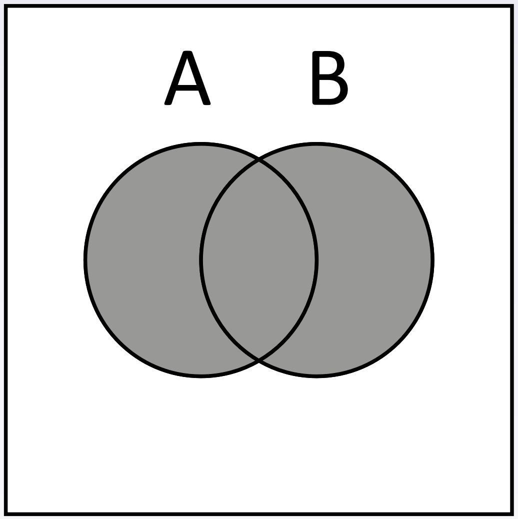
$$\bar{A} = \{x | (x \in U) \& (x \notin A)\}$$

$$\bar{A} = U \backslash A.$$

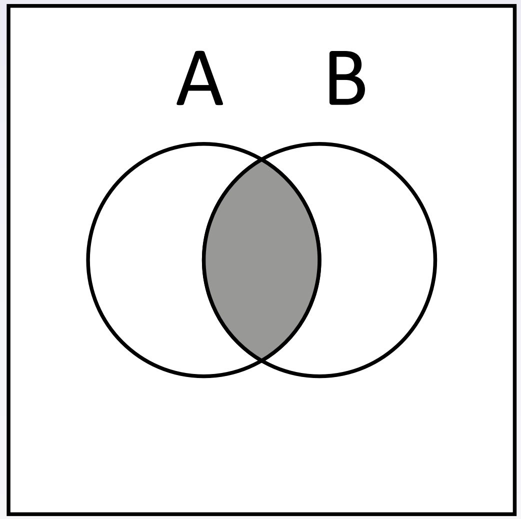
ПРИМЕР: Если $U := \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A := \{3,5,7\}$, то $\bar{A} = \{1,2,4,6\}$.

Диаграммы Венна

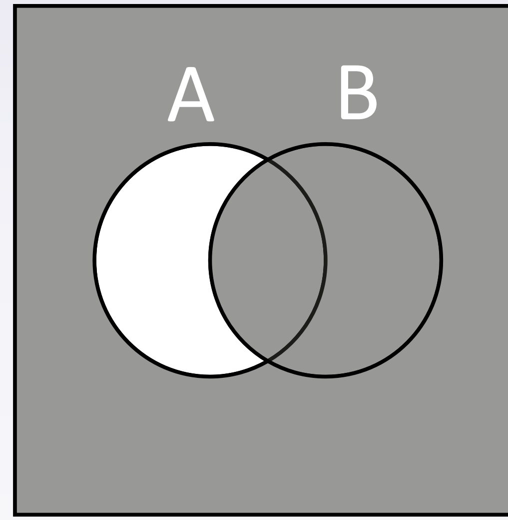
Названные операции и свойства могут быть продемонстрированы с помощью ***Диаграмм Венна***.



$A \cup B$



$A \cap B$

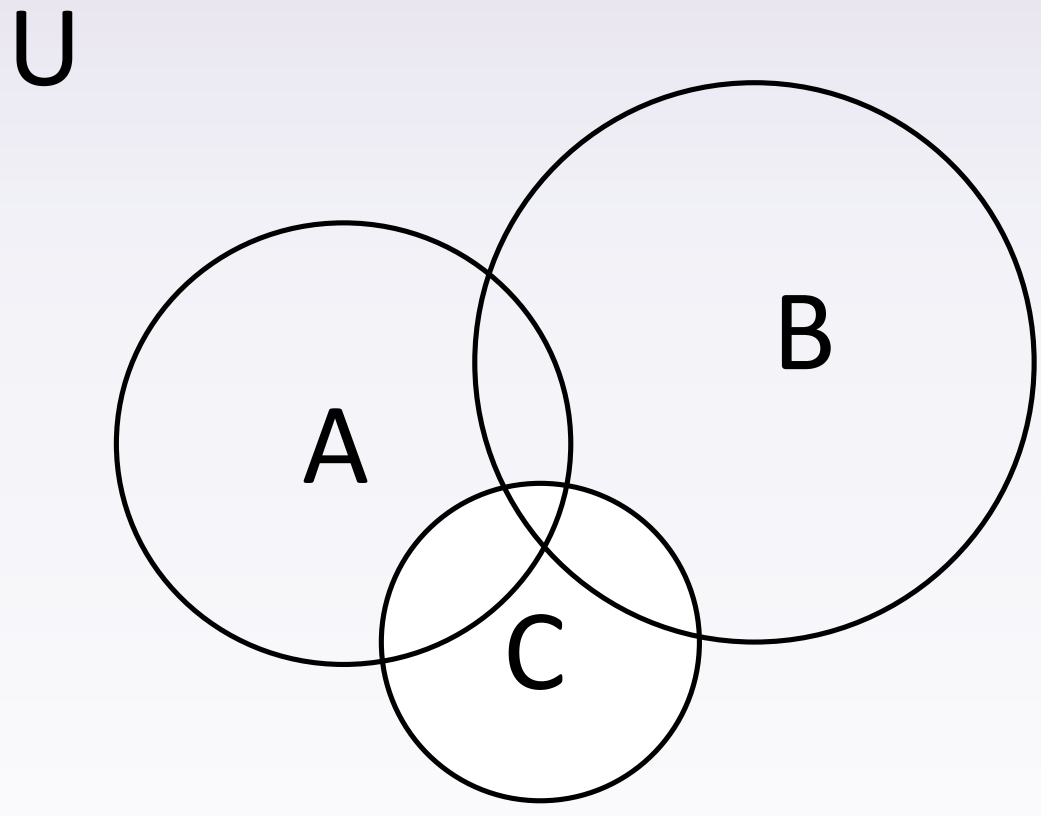


$\overline{A \setminus B}$

Порядок выполнения операций:

Сначала выполняется операция дополнения, затем пересечения, потом объединения.

Диаграммы Венна



Алгебраические свойства операций над множествами

1) $A \cup A = A$ **1')** $A \cap A = A$— идемпотентность;

2)$A \cup B = B \cup A$ **2')** $A \cap B = B \cap A$— коммутативность;

3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3') $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$– ассоциативность;

4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4') $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$— дистрибутивность;

5)$A \cup U = U$ **5')** $A \cap \emptyset = \emptyset$;

6) $A \cap U = A$ **6')**$A \cup \emptyset = A$;

7) $A \cup \bar{A} = U$ **7')** $A \cap \bar{A} = \emptyset$;

Свойства

8) $\overline{\emptyset} = U$ **8')** $\overline{U} = \emptyset$;

9) $A \cup (A \cap B) = A$ **9')** $A \cap (A \cup B) = A$ — законы поглощения;

10) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

10') $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ — законы де Моргана;

11, 11') $\bar{\bar{A}} = A$;

12, 12') Если $A \cup B = U$ и $A \cap B = \emptyset$, то $B = \bar{A}$;

Свойства

13) $A \backslash \mathrm{B} = A \cap \bar{B}.$

Доказательство: $A \backslash \mathrm{B} =$
$\{x | (x \in A) \& (x \notin B)\} =$
$\{x | (x \in A) \& (x \in \bar{B})\} = A \cap \bar{B}.$

14) Очевидно, что $B \Delta A = A \Delta B$;

15) $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ *т.е.*
$(A \backslash \mathrm{B}) \cup (B \backslash \mathrm{A}) = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$

Булева алгебра и алгебраические тождества

Задано множество U,

$P(U)$ – булеан множества U.

Алгебра $B = (P(U), \cup, \cap, -)$ называется булевой алгеброй множеств над U.

Элементами основного множества этой алгебры являются подмножества множества U. Операции объединения, пересечения и дополнения часто называют ***булевыми операциями над множествами***.

Примеры доказательств

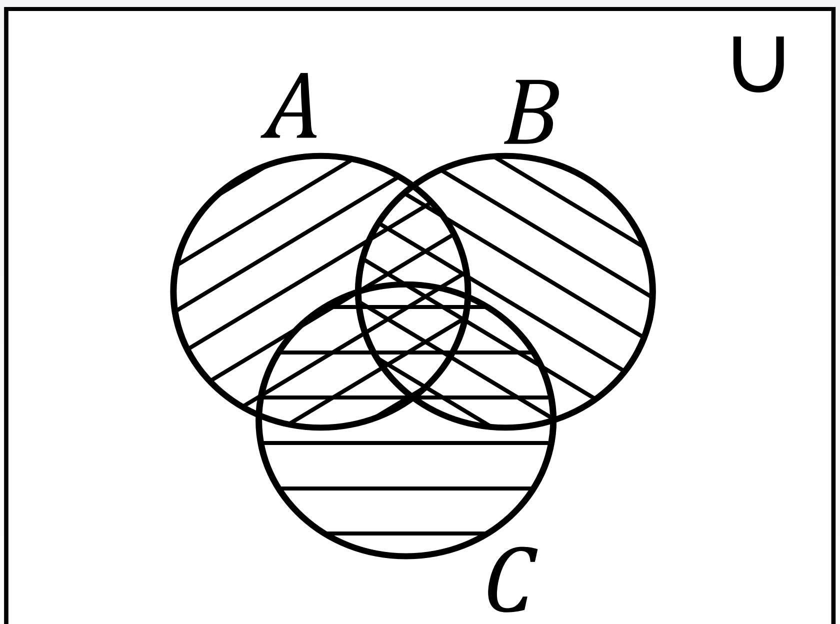
Пусть U – универсальное множество,

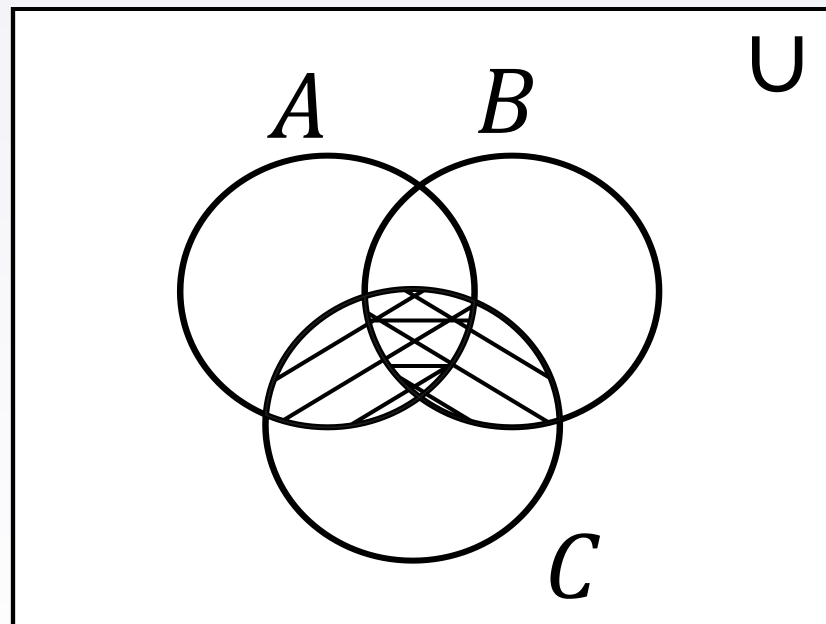
A, B, C– произвольные подмножества U

Диаграммой Эйлера – Венна :

а)$(A \cup B) \cap C$;

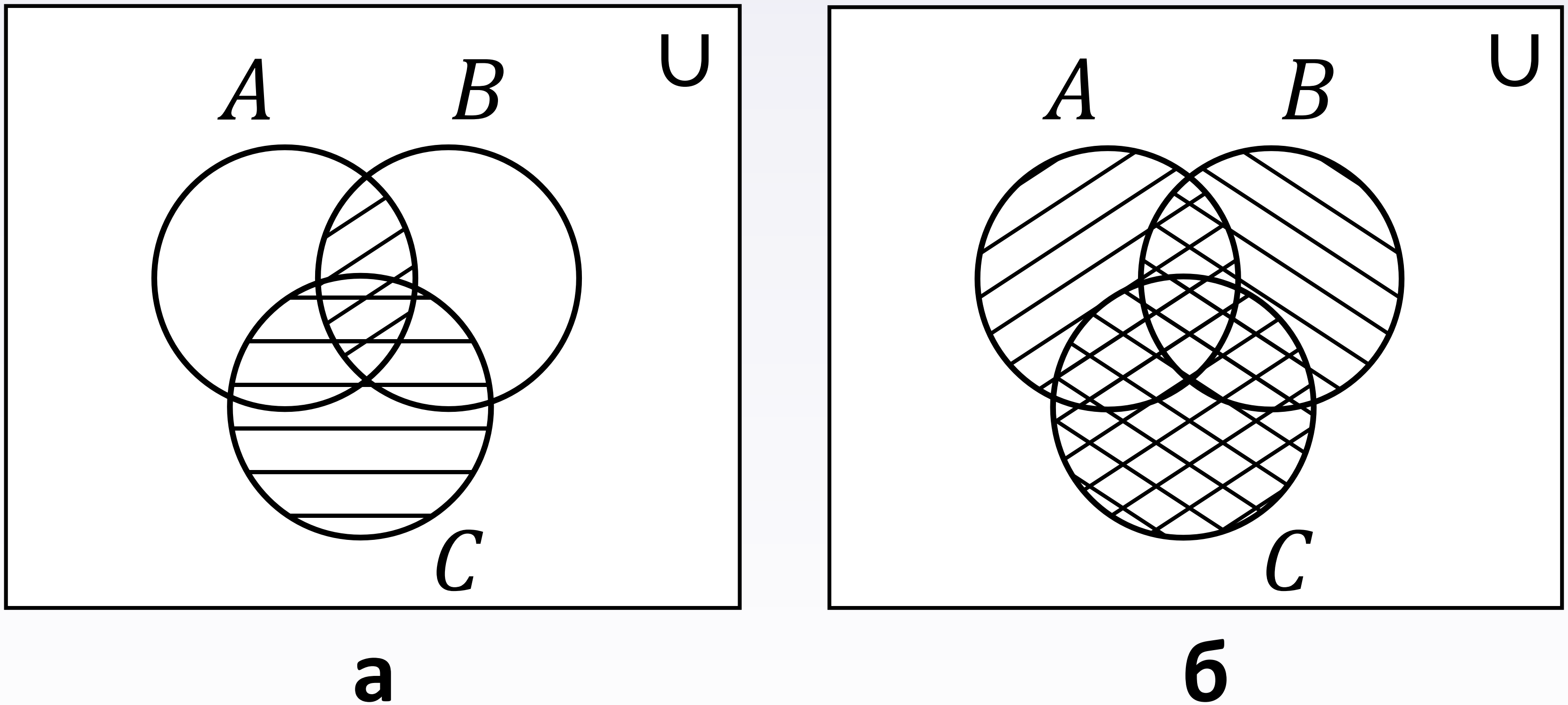
б)$(A \cap C) \cup (B \cap C)$.





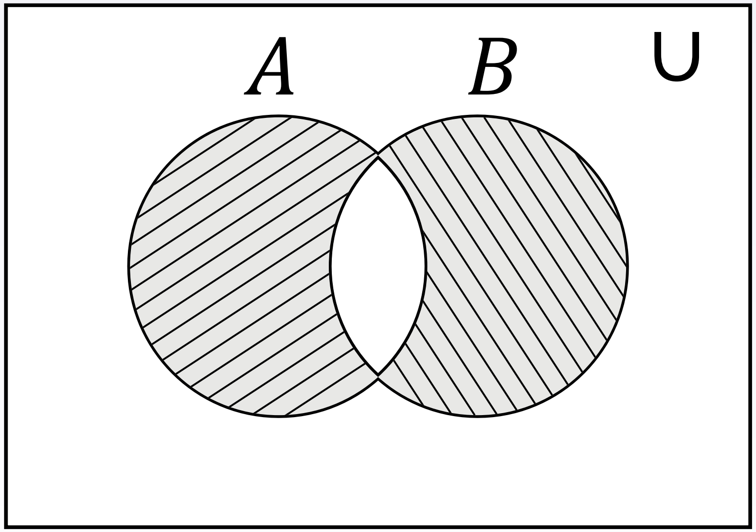
а **б**

Диаграммы Эйлера – Венна для $(A \cap B) \cup C$ и $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

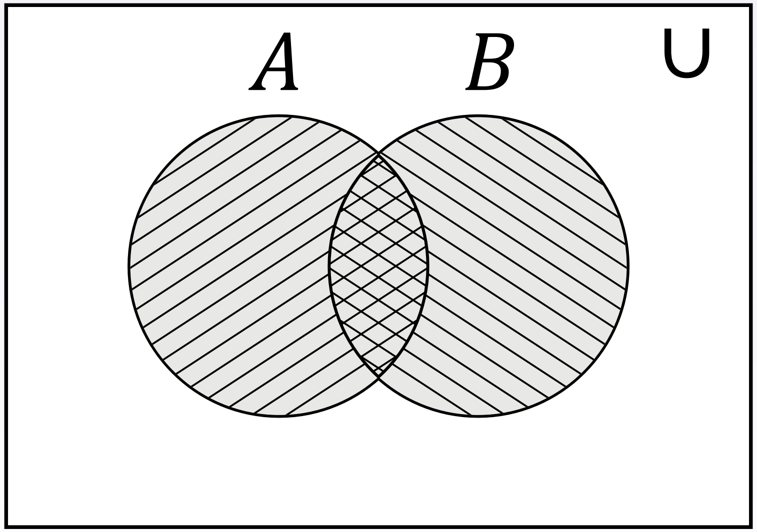


Симметрическая разность $\mathbf{A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)}$.

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



а



б

Способы доказательств

Установление тождеств алгебры множеств с помощью диаграмм Эйлера – Венна в ряде случаев оказывается неудобным. Доказательство тождеств может производиться также **методом двустороннего включения**, чтобы показать равенство множеств в левой и правой частях тождества, методом **преобразования** одной части к другой, методом **преобразования** обеих частей к одному и тому же выражению.

Метод двустороннего включения

Пусть U – универсальное множество, A, B– его произвольные подмножества.

Докажем тождество $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

- □ Пусть $x \in \overline{A \cup B}$, т.е. $x \notin A \cup B, \Rightarrow$
- $x \notin A$ и $x \notin B$, т. е. $x \in \bar{A}$ и $x \in \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$.

Итак, $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$.

- Пусть $y \in \bar{A} \cap \bar{B}$ т.е. $y \in \bar{A}$ и $y \in \bar{B} \Rightarrow$
- $y \notin A$ и $y \notin B, т.е.\ y \notin A \cup B \Rightarrow$
- $y \in \overline{A \cup B}$ $\quad \bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. ⊠

Сведение к одному виду

- *Правило Де Моргана*
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$,
- $\overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B$,
- $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} =$ (согласно предыдущему доказательству)
- $= \bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}} = A \cap B$.
- **Теорема доказана.**