Операции на графах

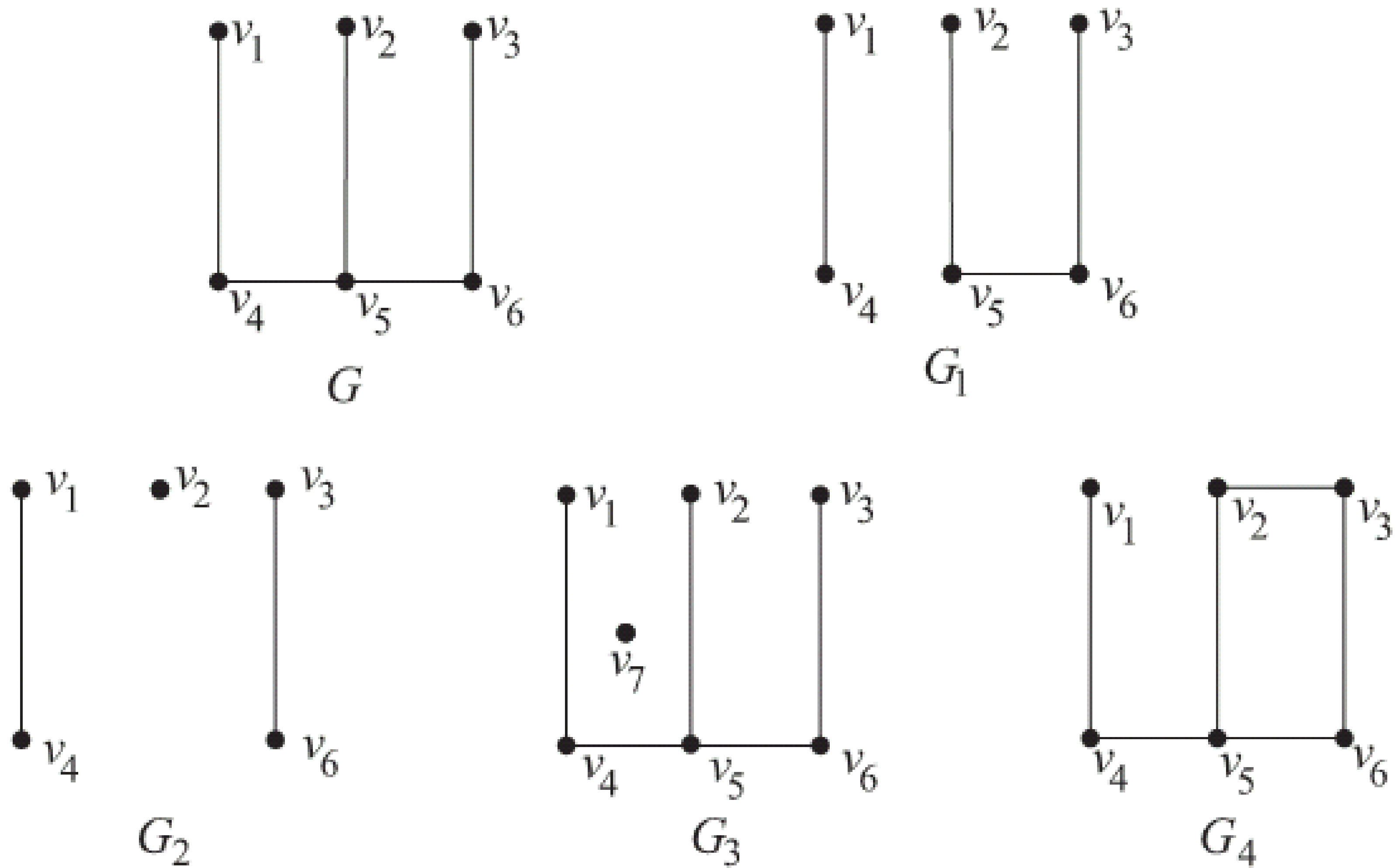
- Подграф
- ***Удаление ребра.***
- ***Удаление вершины.
Добавление вершины.
Добавление ребра.
Отождествление вершин.
Стягивание ребра***
- ***Расщепление вершины
Разбиение ребра.***
- ***Дополнение графа***
- ***Объединение графов
Пересечение графов***
- ***Соединение графов***
- ***Композиция графов***

  Произведение графов

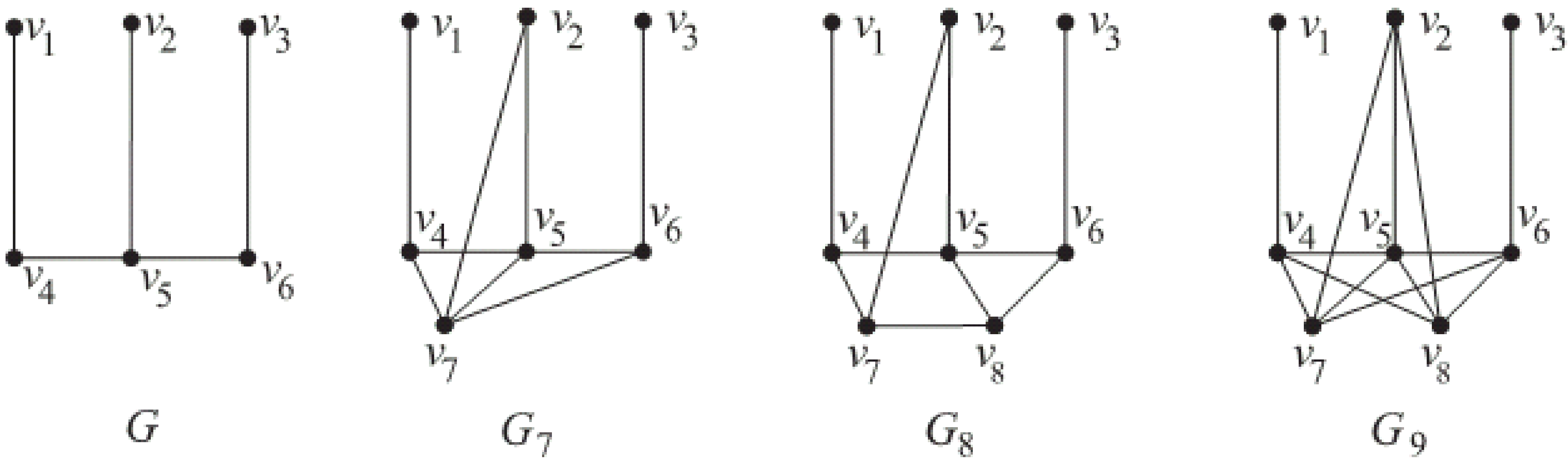
Графы *лекция 2*

Подграф графа — граф, все вершины и рёбра которого содержатся среди вершин и рёбер исходного графа.

Граф *G* и графы, полученные применением к *G* операций удаления и добавления: **удаление** ребра (*v*4, *v*5); **удаление** вершины *v*5; **добавление** вершины *v*7; **добавление** ребра (*v*2, *v*3)



Размножение вершины $v5$ графа G, **расщепление** вершины $v7$ графа $G7$, **дублирование** вершины $v7$ графа $G7$ (графы $G7$, $G8$ и $G9$ соответственно)



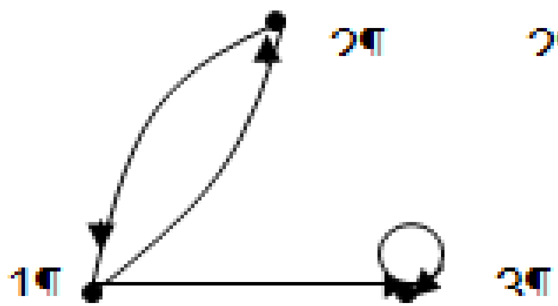
Разбиение ребра (операция гомеоморфизма)

Объединение графов

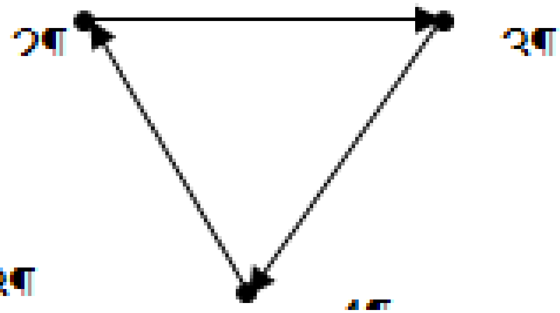
- $G_1(V_1, E_1) \cup G_2(V_2, E_2) = G(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$

  Теорема 2.2. Пусть G_1 и G_2 – два графа (ориентированные или неориентированные одновременно), и пусть A_1 и A_2 – матрицы смежности вершин этих графов. Тогда матрицей смежности вершин графа G является матрица A, полученная поэлементным взятием максимального элемента вспомогательных матриц A_1' и A_2'. Матрицы A_i', $i = 1, 2$, получаются из A_i с помощью добавления нулевых строк и столбцов, соответствующих вершинам, отсутствующим в V_i, но присутствующим в V.
- *Следствие.* Если элементы матриц смежности вершин A_1 и A_2 графов G_1 и G_2 принимают только значения 0 и 1, то операция взятия максимального элемента для нахождения матрицы смежности вершин графа соответствует логической сумме элементов.

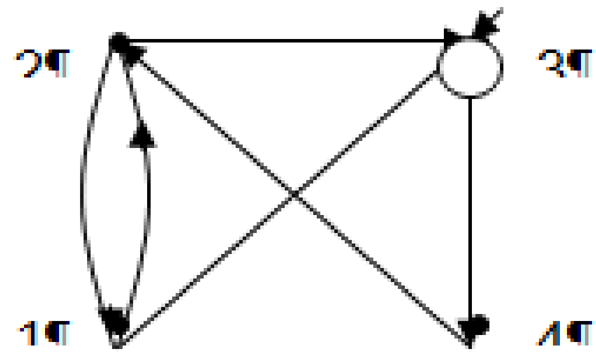
графы G_1, G_2 и их объединение $G = G_1 \cup G_2$.



G_1



G_2



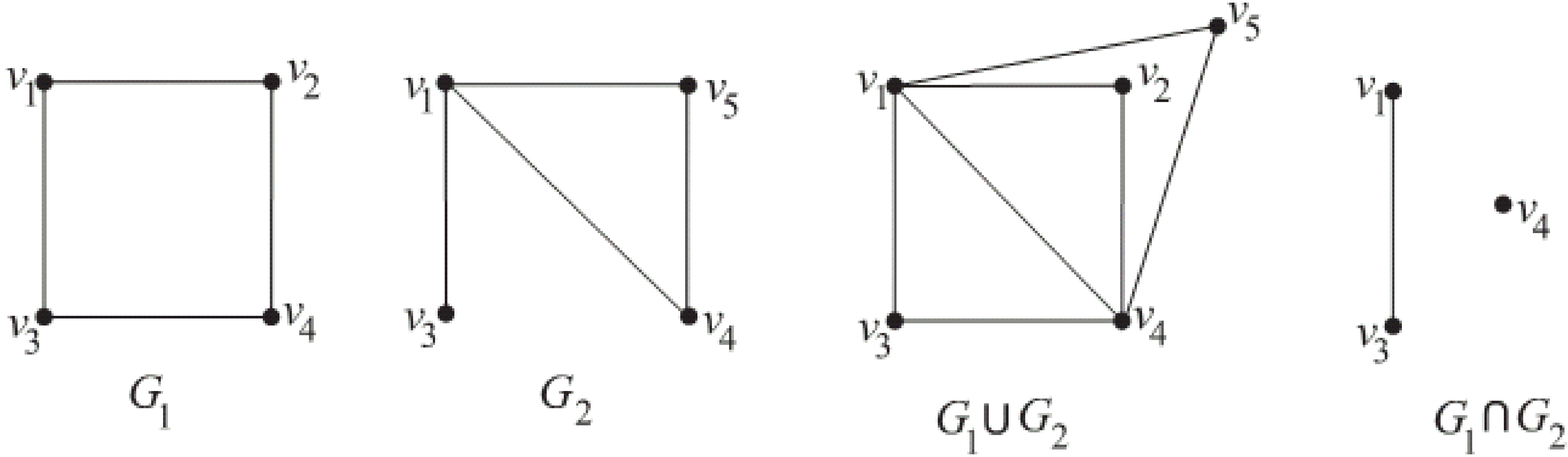
G

Пересечение графов

- $G_1(V_1, E_1) \cap G_2(V_2, E_2) = G(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$.

  Теорема 2.3. Пусть G_1 и G_2 – два графа (ориентированные или неориентированные одновременно), и пусть A_1 и A_2 – матрицы смежности вершин этих графов. Тогда матрицей смежности вершин графа $G(V, E)$ является матрица A, полученная поэлементным взятием минимума вспомогательных матриц A_1' и A_2'. Матрицы A_i', $i = 1, 2$, получаются из A_i с помощью удаления строк и столбцов, соответствующих вершинам, не вошедшим в V.
- *Следствие.* Если элементы матриц смежности вершин A_1 и A_2 графов G_1 и G_2 принимают только значения 0 и 1, то операция взятия минимального элемента для нахождения матрицы смежности вершин A графа G соответствует логическому (обычному) произведению элементов.

Графы $G1$, $G2$, их объединение $G1 \cup G2$ и пересечение $G1 \cap G2$

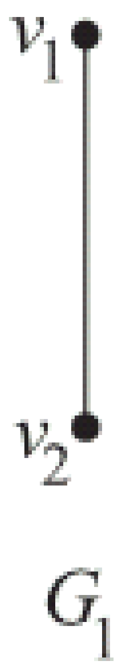


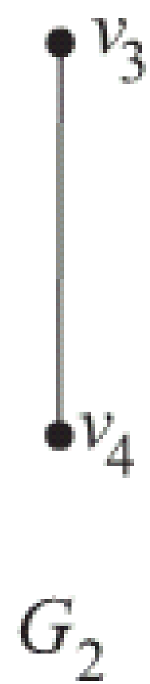
Соединение графов

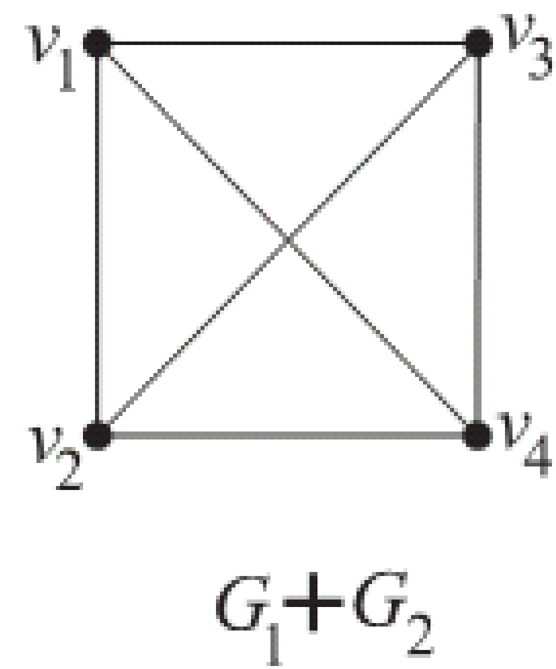
$$G_1(V_1, E_1) + G_2(V_2, E_2) = G(V_1 \cup V_2,\ E_1 \cup E_2 \cup \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\})$$

(при условии, что $V_1 \cap V_2 = \varnothing,\ E_1 \cap E_2 = \varnothing$).

Графы G_1, G_2 и граф $G_1 + G_2$, полученный в результате их соединения







*Декартово произведение графов**

$$V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$$

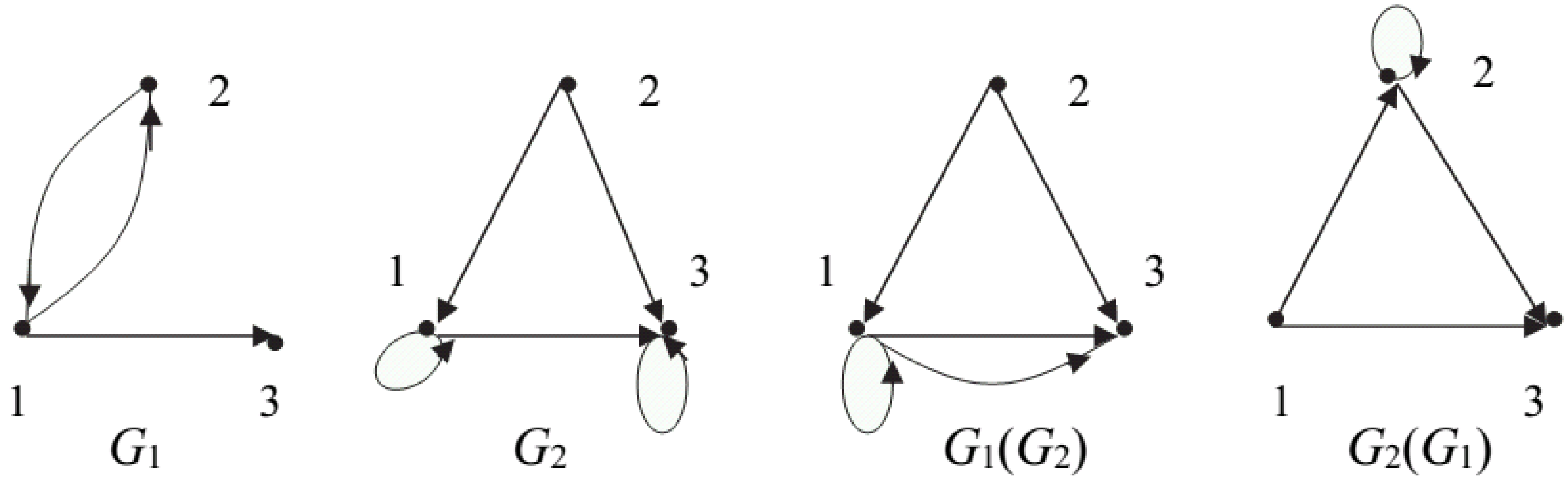
- гиперграф

Композиция графов

- Пусть $G_1(V,E_1)$ и $G_2(V,E_2)$ – два ориентированных графа с одними и теми же множествами вершин V. Композицией $G_1(G_2)$ графов G_1 и G_2 называется ориентированный граф с множеством вершин V, в котором существует дуга (v_i, v_j) тогда и только тогда, когда для некоторой вершины $v \in V$ существуют дуги $(v_i, v) \in E_1$ и $(v, v_j) \in E_2$.

- *Теорема.* Пусть $G_1(V,E_1)$ и $G_2(V,E_2)$ – два ориентированных графа с матрицами смежности вершин A_1 и A_2 соответственно. Тогда матрицей смежности вершин графа $G(V,E) = G_1(G_2)$ является матрица $A = A_1 \cdot A_2$.

Графы G_1, G_2 и их композиции $G_1(G_2)$ и $G_2(G_1)$



G_1	G_2	$G_1(G_2)$	$G_2(G_1)$
(1,2) (1,3)	(1,1) (1,3)	(1,1) (1,3)	(1,2) (1,3)
(2,1)	(2,1) (2,3)	(1,3) (2,1)	(2,2) (2,3)
	(3,3)	(2,3)	

Матрицы смежности вершин исходных графов

$$A_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$A_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Находим произведения матриц $A_{12} = A_1 \cdot A_2$ и $A_{21} = A_2 \cdot A_1$, которые соответствуют матрицам смежности графов $G_1(G_2)$ и $G_2(G_1)$

$$A_{12} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2(1) \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}; \qquad A_{21} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$