# Булева алгебра логических функций

- Функциональная полнота;
- Нормальные формы для формул;
- Приведение к дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ);
- Приведение к конъюнктивной нормальной форме(КНФ);
- Двойственность булевой функции;
- Проблема разрешения и методы ее решения.

# Функциональная полнота

Определение булевой алгебры

- Алгебра ($P_2$, &, ∨, ¬)
- $P_2$ - множество всех логических функций
- &, ∨, ¬ - булевы операции

# Функциональная полнота

**Теорема 1.** Всякая логическая функция может быть представлена булевой формулой, т.е. как суперпозиция дизъюнкций, конъюнкций и отрицания. Из этого следует, что система булевых функций(операций) $\sum = \{\&, \vee, \neg\}$ функционально полна.

Система операций булевой алгебры $\{\&, \vee, \neg\}$ функционально полна.

**Теорема 2.** Если все функции функционально полной системы $\sum *$ представимы формулами над $\sum$, то $\sum$ также функционально полна.

**ПРИМЕР:**

В алгебре $(P_2; \&, , \oplus, 1)$, называемой ***алгебрoй Жегалкина,*** ее сигнатура $\sum = \{\&, \oplus, 1\}$является функционально полной системой.

Опираясь на теоремы 1 и 2, для доказательства функциональной полноты $\{\&, \oplus, 1\}$достаточно подтверждения :

**а)** $\bar{x} = x \oplus 1$,

**б)** $X_1 \vee X_2 = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$.

Построенные таблицы истинности левых и правых частей соотношений и подтверждают справедливость последних.

| $x$ | $\overline{x}$ | $1$ | $x\oplus 1$ |
|---|---|---|---|
| 01 | 10 | 11 | 10 |

| $x_1 x_2$ | $x_1 \vee x_2$ | $x_1 \cdot x_2$ | $x_1 \cdot x_2 \oplus x_1$ | $x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 01 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 0 | 1 |

# Нормальные формы для формул

- $A_1, \dots, A_n$ — формулы
- $A_1 \& A_2 \& \ \dots \ \& A_n$ и $A_1 \lor A_2 \lor \ \dots \ \lor A_n$
- $A_1 \& A_2 \& \ \dots \& A_n$ — *конъюнкция* формул $A_1, \dots, A_n$
- $A_1 \lor A_2 \lor \ \dots \ \lor A_n$ — *дизъюнкция* формул

# Обобщенные законы де Моргана:

- $\neg(A_1 {}_{\&} A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, An) \equiv \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_n$ ,
- $\neg(A_1 \vee A_2 \vee \vee An) \equiv \neg A_1 \,\&\, \neg A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \neg A_n$ .

Формула, которая есть пропозициональная переменная или отрицание переменной, называется ***литералом***. Некоторая формула называется ***элементарной конъюнкцией*** (или ***конъюнктом***), если она является конъюнкцией литералов.

$\neg X_1, X_2, \ X_1 \& \neg X_2, \ \neg X_1 \& X_2 \& X_1 \& X_3,$

$\neg X_4 \& \neg X_2$ - элементарные конъюнкции.

***Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)*** называется произвольная дизъюнкция элементарных конъюнкций. (формула находится в дизъюнктивной нормальной форме.)

Пример ДНФ:

$$(x \cdot y) \vee (x \cdot z) \vee (x \cdot y \cdot z)$$

ДНФ *А* называется ***совершенной*** и обозначается ***СДНФ***, если каждая переменная формулы *А* входит с отрицанием или без отрицания в каждый конъюнкт точно один раз

Алгоритм, устанавливающий равносильность или неравносильность двух заданных формул

***Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)*** называется произвольная конъюнкция дизъюнктов.

$$(x \vee y)\cdot(\bar{x} \vee z)\cdot(x \vee \bar{y} \vee z)$$

КНФ *A* называется ***совершенной*** и обозначается ***СКНФ***, если каждая переменная формулы *A* входит с отрицанием или без отрицания в каждый дизъюнкт точно один раз

# Приведение к дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ)

*Способ перехода от табличного задания логической функции к булевой формуле:*

Для каждого набора значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, на котором функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ равна 1, выписываются конъюнкции всех переменных: над теми переменными, которые на этом наборе равны 0, ставятся отрицания; все такие конъюнкции соединяются знаками дизъюнкции.

Полученная таким образом формула называется ***совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)*** логической функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Для каждой функции СДНФ ***единственна*** (с точностью до перестановок переменных и конъюкций).

Например, для функции, заданной табицей СДНФ имеет вид (для удобства её восприятия используем в формуле другой, более употребимый в алгебре логики символ конъюкции):

| $x_1x_2x_3$ | $\overline{x_1}$ | $\overline{x_1} \vee x_2$ | $x_1 \& x_3$ | $(\overline{x_1} \vee x_2) \to x_1 \& x_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 000 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 001 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 010 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 011 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 100 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 101 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 110 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 111 | 0 | 1 | 1 | 1 |

# Процедура приведения к ДНФ

**1)** $A \to B \equiv \quad A \lor B,$

$A \leftrightarrow B \equiv (A \,\&\, B) \lor (\neg A \,\&\, \quad B),$

$A \oplus B \equiv (A \,\&\, \quad B) \lor (\neg A \,\&\, B).$

**2)** Все отрицания донести до переменных с помощью законов де Моргана и отрицания.

**3)** Раскрывая скобки, преобразовать формулу к дизъюнкции элементарных конъюнкций.

**4)** $\neg\neg A \equiv A.$

**5)** Удалить лишние конъюнкции и повторения переменных в конъюнкциях с помощью законов **поглощения.**

**6)** Удалить константы

**ПРИМЕР:**

Доказать справедливость обобщенного склеивания методом эквивалентных преобразований (используя основные эквивалентные соотношения).

Выполним эквивалентные преобразования:

$$xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z} \vee xy \cdot 1$$
$$= xz \vee y\bar{z} \vee xy(z \vee \bar{z}) = xz \vee y\bar{z} \vee xyz \vee xy\bar{z}$$
$$= xz \vee y\bar{z}$$

Приводим справедливость использованного выше соотношения

$$x \vee x\bar{y} = \bar{x} \cdot 1 \vee x\bar{y} = (1 \vee y) = x$$

# Приведение ДНФ к СДНФ

**1)** Удаляют повторения переменных в конъюнкциях, используя закон идемпотентности:

$$A \,\&\, A \,\&\, \ldots \,\&\, A \equiv A.$$

**2)** Убирают члены дизъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием, а из одинаковых членов дизъюнкции удаляют все, кроме одного.

**3)** Если какая-либо элементарная конъюнкция в ДНФ содержит не все переменные из числа входящих в исходную формулу, то ее умножают на единицы, представляемые в виде дизъюнкций $X_j \vee \neg X_j$ (закон исключенного третьего).

**4)** Если среди членов полученной дизъюнкции окажутся одинаковые элементарные конъюнкции, то из каждой серии таковых оставляют по одной

# Приведение к конъюнктивной нормальной форме(КНФ)

*Способ перехода от табличного задания логической функции к булевой формуле:*

Для каждого набора значений переменных $x_{1,\dots,}x_n$, на котором функция $f(x_1, \dots, x_n)$ равна 0, выписываются дизъюнкции всех переменных: над теми переменными, которые на этом наборе равны 1, ставятся отрицания; все такие дизъюнкции соединяются знаками конъюнкции.

Полученная таким образом формула является ***совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ)*** логической функции $f(x_1, \dots, x_n)$.

# Приведение к конъюнктивной нормальной форме(КНФ)

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$$
$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$$

| $x_1x_2x_3$ | $(\overline{x_1} \vee x_2) \to (x_1 \& x_3)$ |
|---|---|
| 000 | 0 |
| 001 | 0 |
| 010 | 0 |
| 011 | 0 |
| 100 | 1 |
| 101 | 1 |
| 110 | 0 |
| 111 | 1 |

# Приведение к конъюнктивной нормальной форме (КНФ)

Пусть ДНФ $F$ имеет вид $F = k_1 \vee k_2 \vee \ \dots \vee k_m$, где $k_1, k_2, \dots, k_m$– элементарные конъюкции.

***Процедура приведения ДНФ к КНФ:***

Применить к $F$ правило двойного отрицания $F = \overline{\overline{k_1 \vee k_2 \vee \ \dots \ \vee k_m}}$ и привести $\overline{k_1 \vee k_2 \vee \ \dots \vee k_m}$ к ДНФ $k'_1 \vee k'_2 \vee \ \dots \vee k'_p$, где $k'_1 \vee k'_2 \vee \ \dots \vee k'_p$ - элементарные конъюнкции.

Тогда $F = k_1 \vee k_2 \vee \ \dots \vee k_m = \overline{\overline{k_1 \vee k_2 \vee \ \dots \vee k_m}} = \overline{k'_1 \vee k'_2 \vee \ \dots \vee k'_p}$.

# Приведение к конъюнктивной нормальной форме (КНФ)

С помощью правил де Моргана освободиться от второго отрицания и преобразовать отрицания элементарных конъюнкций в элементарные дизъюнкции $D_1, D_2, \dots, D_p$.

$$F = \overline{k_1' \vee k_2' \vee \ \dots \vee k_p'} = \overline{k_1'} \cdot \overline{k_2'} \cdot \ \dots \cdot \overline{k_p'} =$$

$$= D_1 \cdot D_2 \cdot \ \dots \cdot D_p.$$

# Двойственность булевой функции

Функция $f^*(x_1, \dots, x_n)$ называется ***двойственной*** к функции $f\ (x_1, \dots, x_n)$, если

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}).$$

Отношение двойственности между функциями симметрично, т.е. если $f^*$ двойственна к $f$, то $f$ двойственна к $f^*$:

$$\bar{f}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) = \bar{\bar{f}}(\overline{\overline{x_1}}, \dots, \overline{\overline{x_n}}) = f^*(x_1, \dots, x_n).$$

Функция, двойственная к самой себе, называется ***самодвойственной.***

- Пример двойственной функции: $(x \wedge y)^* = x \vee y$.
- Множество всех булевых функций обозначается $P_2 \cdot |P_2| = {}_2 2^n$.
- Примеры самодвойственной функций: $f = \neg x; g = xy \vee xz \vee yz$.

# Принцип двойственности

*Принцип двойственности в булевой алгебре:* если в формуле $F$, представляющей функцию $f$, все конъюнкции заменить на дизъюнкции, дизъюнкции на конъюнкции, 1 на 0, 0 на 1, то получим формулу $F^*$, представляющую функцию $f^*$, двойственную $f$.

*Справедливо утверждение*: если функции равны, т.е. $f_1 = f_2$, то и двойственные им функции равны, т.е. $f_1^* = f_2^*$.

# Проблема разрешения и методы ее решения

Существует ли алгоритм, позволяющий для произвольной логической формулы в конечное число шагов выяснить, является ли она тождественно истинной

(или тождественно ложной)?

# Теоремы:

1. **Критерий тождественной истинности формулы.**

Для того чтобы формула алгебры высказываний была тождественно истинной, необходимо и достаточно, чтобы в равносильной ей КНФ были тождественно истинны все элементарные дизъюнкции.

2. **Критерий тождественной истинности элементарной дизъюнкции.**

Для того чтобы элементарная дизъюнкция была тождественно истинной, необходимо и достаточно, чтобы в ней существовала хотя бы для одной переменной пара — переменная и ее отрицание.

# Теоремы:

**3. Критерий тождественной ложности формулы.**

Для того чтобы формула алгебры высказываний была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы в равносильной ей ДНФ все элементарные конъюнкции были тождественно ложны.

**4. Критерий тождественной ложности элементарной конъюнкции.**

Для того чтобы элементарная конъюнкция была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы в ней существовала хотя бы для одной переменной пара — переменная и ее отрицание.